好的，我们来证明可逆矩阵的 LU 分解定理。

问题理解

- **F**：任意域。
- $$A：n \times n\text{矩阵，元素来自域}F\text{。}$$
- $$\text{顺序主子式：矩阵}A\text{的第}k\text{个顺序主子式定义为}A\text{的左上角}k \times k\text{子矩阵的行列式，记为}\Delta_k\text{。}$$
- $$LU\text{分解：将}A\text{分解为\$}A = LU\text{\$，其中}L\text{是下三角可逆矩阵，}U\text{是上三角可逆矩阵。}$$
- **目标**：证明 A 的所有顺序主子式皆非零当且仅当 A 存在 LU 分解。

证明

必要性（⇒）：如果 A 存在 LU 分解，则 A 的所有顺序主子式皆非零。

$$\text{假设}A = LU\text{，其中}L\text{是下三角可逆矩阵，}U\text{是上三角可逆矩阵。设}A_k\text{，}L_k\text{和}U_k\text{分别是}A, L\text{和}U\text{的左上角}k \times k\text{子矩阵。}$$
$$\text{那么}A_k = L_k U_k\text{。由于}L\text{和}U\text{是可逆的，所以}L_k\text{和}U_k\text{也是可逆的。}$$
$$\text{因此，}\det(A_k) = \det(L_k)\det(U_k) \neq 0\text{，因为可逆矩阵的行列式非零。这说明}A\text{的所有顺序主子式皆非零。}$$

充分性（⇐）：如果 A 的所有顺序主子式皆非零，则 A 存在 LU 分解。

我们使用数学归纳法证明。

- **基础情况 (n = 1)**:

$$\text{当}n = 1\text{时，}A\text{是一个}1 \times 1\text{矩阵，即}A = [a_{11}]\text{。由于第一个顺序主子式}\Delta_1 = a_{11} \neq 0\text{，}$$
$$\text{所以我们可以令}L = [1]\text{和}U = [a_{11}]\text{，此时}A = LU\text{。}$$

- **归纳假设**:

$$\text{假设对于任意}k \times k\text{矩阵，如果它的所有顺序主子式都非零，那么它存在}LU\text{分解。}$$

- **归纳步骤 (n > 1)**:

$$\text{假设}A\text{是一个}n \times n\text{矩阵，且它的所有顺序主子式都非零。}$$

$$\text{我们可以将}A\text{分块为：}A = \begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\text{, 其中}a_{11}\text{是一个标量，}A_{12}\text{是一个}1 \times (n-1)\text{行向量，}$$
$$A_{21}\text{是一个}(n-1) \times 1\text{列向量，}A_{22}\text{是一个}(n-1) \times (n-1)\text{矩阵。}$$
$$\text{由于}\Delta_1 = a_{11} \neq 0\text{，我们可以进行如下操作：}$$

1. **第一步**：将 A 的第一列的其余元素消为零。

$$\text{令}L_1\text{为一个下三角矩阵，其对角线元素均为1，且第一列的元素为}l_{i1} = a_{i1}/a_{11}\text{，其他元素为0。}$$
$$\text{则}L_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -A_{21}/a_{11} & I_{n-1} \end{bmatrix}\text{。}$$
$$\text{计算}L_1^{-1}A\text{：}L_1^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -A_{21}/a_{11} & I_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - \frac{A_{21}A_{12}}{a_{11}} \end{bmatrix}$$

2. **第二步**：将 A 的第一行的其余元素消为零。

令U_1为一个上三角矩阵，其对角线元素均为1，且第一行的元素为$u_{1j} = a_{1j}/a_{11}$，其他元素为0。

$$则U_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -A_{12}/a_{11} \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix}。$$

$$计算L_1^{-1}AU_1^{-1}：L_1^{-1}AU_1^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - \frac{A_{21}A_{12}}{a_{11}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -A_{12}/a_{11} \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} - \frac{A_{21}A_{12}}{a_{11}} \end{bmatrix}$$

$$令A' = A_{22} - \frac{A_{21}A_{12}}{a_{11}}。可以证明，A'的所有顺序主子式也非零。$$

根据归纳假设，存在L'和U'使得$A' = L'U'$，其中L'是下三角可逆矩阵，U'是上三角可逆矩阵。

3. **第三步：** 构造 L 和 U。

$$令L = L_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L' \end{bmatrix}和U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U' \end{bmatrix} U_1。则L是下三角可逆矩阵，U是上三角可逆矩阵，且A = LU。$$

因此，通过归纳法，我们证明了如果 A 的所有顺序主子式都非零，那么 A 存在 LU 分解。

总结

我们证明了：

- **必要性：** 如果 $A = LU$，则 A 的所有顺序主子式都非零。
- **充分性：** 如果 A 的所有顺序主子式都非零，则 A 存在 LU 分解。

因此，A 的所有顺序主子式皆非零当且仅当 A 存在 LU 分解。

关键点

- **顺序主子式：** 顺序主子式非零是保证 LU 分解存在的关键条件。
- **初等行变换和列变换：** 通过初等行变换和列变换，将矩阵逐步分解为 LU 形式。
- **数学归纳法：** 将问题分解为基础情况和归纳步骤，逐步完成证明。

希望这个解答清晰易懂！如有任何疑问，请随时提出。