定理陈述

设 $T \in \mathrm{End}(V)$ ，其中 Char_T 是 T 的特征多项式，并假设 Char_T 在域 F 上分裂（即 T 的所有特征值都属于 F ）。则存在唯一一对 $S, N \in \mathrm{End}(V)$ 满足以下性质：

1. S 是可对角化的；
2. N 是幂零的（即对某个正整数 k ，有 $N^k = 0$ ）；
3. $T = S + N$ 且 $SN = NS$ （即 S 和 N 可交换）；
4. 此外，存在 $f, g \in F[X]$ （多项式）使得 $S = f(T)$ 且 $N = g(T)$ ；
5. 当 T 是可逆时， S 也是可逆的。

证明

1. 首先考虑广义特征子空间的分解

令 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 为 T 的所有特征值（这些特征值属于 F ，因为 Char_T 分裂）。
根据定理7.4.1， V 可以分解为广义特征子空间的直和：
$$V = V[\lambda_1] \oplus \cdots \oplus V[\lambda_m],$$
其中 $V[\lambda_i]$ 是 T 在特征值 λ_i 上的广义特征子空间：$V[\lambda_i] = \{v \in V \mid (T - \lambda_i I)^k v = 0 \text{ 对某个 } k \geq 1\}.$
记 $T_i = T|_{V[\lambda_i]}$ 为 T 在 $V[\lambda_i]$ 上的限制。

2. 构造 (S) 和 (N)

在每个 $V[\lambda_i]$ 上定义如下两个线性变换：
$-$定义 $S|_{V[\lambda_i]} = \lambda_i I$ ，即在 $V[\lambda_i]$ 上 S 的作用是将每个向量缩放为 λ_i 倍；
$-$定义 $N|_{V[\lambda_i]} = T_i - \lambda_i I$ ，即在 $V[\lambda_i]$ 上 N 的作用是将 T_i 减去 $\lambda_i I$ 。

然后延拓 S 和 N 到整个 V 上。这样，我们得到$S = \bigoplus_{i=1}^{m} S|_{V[\lambda_i]}, \quad N = \bigoplus_{i=1}^{m} N|_{V[\lambda_i]}.$

3. 验证 (S) 和 (N) 的性质

1. **(T = S + N):**

   在每个 $V[\lambda_i]$ 上，有 $T_i = S|_{V[\lambda_i]} + N|_{V[\lambda_i]} = \lambda_i I + (T_i - \lambda_i I)$ 。因此， $T = S + N$ 成立。

2. **(SN = NS):**

   在每个 $V[\lambda_i]$ 上有 $S|_{V[\lambda_i]} = \lambda_i I$ 是标量矩阵，标量矩阵与任何矩阵都可交换。
   因此 $S|_{V[\lambda_i]} N|_{V[\lambda_i]} = N|_{V[\lambda_i]} S|_{V[\lambda_i]}$ ，从而 $SN = NS$ 成立。

3. **(S) 可对角化:**

在每个 $V[\lambda_i]$ 上， $S|_{V[\lambda_i]} = \lambda_i I$ 是标量矩阵，因此 S 是可对角化的。

4. **(N) 是幂零的：**

在 $V[\lambda_i]$ 上， $N|_{V[\lambda_i]} = T_i - \lambda_i I$ 。由广义特征子空间的定义，存在 n 使得 $(T_i - \lambda_i I)^n = 0$ ，从而 $(N|_{V[\lambda_i]})^n = 0$ 。因此 $N^n = 0$ ，即 N 是幂零的。

---

4. 唯一性

设 S' 和 N' 是另一对满足定理要求的分解，即 $T = S' + N'$ ，其中 S' 可对角化， N' 幂零，且 $S'N' = N'S'$ 。我们需要证明 $S = S'$ 且 $N = N'$ 。

1. **(S') 的特征值与 (T) 的特征值一致：**

$T = S' + N'$ ，由于 N' 是幂零，其特征值全为0，因此 S' 的特征值与 T 的特征值一致，为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 。

2. **(V) 的分解与 (S') 的特征值相对应：**

记 $V = \bigoplus_{j=1}^{l} V_j$ 为 S' 按特征值分解的特征子空间直和，其中 V_j 是 S' 在特征值 μ_j 上的特征子空间。再利用 $SN = NS$ 和 $S'N' = N'S'$ ，可以证明 $V_j \subseteq V[\lambda_i]$ （即 S' 的特征子空间是 T 的广义特征子空间的子空间）。

3. **(S = S') 且 (N = N')：**

由上面的分析可知， S' 的特征值和特征子空间与 S 完全一致，因此 $S = S'$ 。进一步，由 $N = T - S$ 和 $N' = T - S'$ 可知 $N = N'$ 。

---

5. (f) 和 (g) 的构造

利用中国剩余定理（定理6.3.8），存在多项式 $f \in F[X]$ 使得$f(X) \equiv \lambda_i \pmod{(X - \lambda_i)^n}, \quad \forall 1 \le i \le m.$ 因此， $f(T)|_{V[\lambda_i]} = \lambda_i I$ ，从而 $f(T) = S$ 。令 $g(X) = X - f(X)$ ，则 $g(T) = T - S = N$ 。

6. (T) 可逆时 (S) 的可逆性

当 T 可逆时，其特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \neq 0$ 。因此 $S|_{V[\lambda_i]} = \lambda_i I$ 是可逆的，从而 S 可逆。

定理 7.4.9 (乘性 Jordan–Chevalley 分解)

定理陈述

设 $T \in \mathrm{End}(V)$ 是可逆的，且其特征多项式 Char_T 在域 F 上分裂（即 T 的所有特征值都属于 F ）。
则存在唯一一对可逆的线性变换 $S, U \in \mathrm{End}(V)$ 满足以下条件：

1. S 是可对角化的；
2. $U - I$ 是幂零的；
3. $SU = T = US$ ；
4. 此外，存在 $f, g \in F[X]$ （多项式）使得 $S = f(T)$ ， $U = g(T)$ 。

证明

1. 从加性 Jordan–Chevalley 分解出发构造 (S) 和 (U)

- 根据定理7.4.8（加性$Jordan–Chevalley$分解），对于给定的 T ，可以找到唯一的一对 S 和 N ，
使得$T = S + N, \quad SN = NS,$ 其中：
$-$ S 是可对角化的；
$-$ N 是幂零的。

因为 T 是可逆的， S 也是可逆的（定理7.4.8的证明中已经说明，当 T 可逆时，所有特征值 λ_i 都是非零的，
因此 S 的特征值也都是非零的，故 S 可逆）。
现在，定义$U = I + S^{-1}N.$

2. 验证 (T = SU) 和 (SU = US)

首先计算 SU ： $SU = S(I + S^{-1}N) = S + N = T.$ 因此 $T = SU$ 成立。
接着验证 $US = SU$ ： $US = (I + S^{-1}N)S = S + N = T = SU.$ 因此 $SU = US$ 成立。

3. 验证 (U - I) 是幂零的

由 $U = I + S^{-1}N$ 可得$U - I = S^{-1}N.$ 由于 N 是幂零的（即存在正整数 k 使得 $N^k = 0$ ），且 S^{-1} 是可逆的，
因此 $(S^{-1}N)^k = S^{-1}N^k = 0$ 。这说明 $U - I$ 是幂零的。

4. 唯一性

假设存在另一对 S', U' ，满足$SU' = T = S'U, \quad S', U'$ 可逆，且 $U' - I$ 是幂零的.
由 $T = S'U'$ 和 $T = SU$ ，可得 $S'U' = SU.$
由于 $U - I$ 和 $U' - I$ 都是幂零的，设 $U - I = N_1$ 和 $U' - I = N_2$ ，则 $U = I + N_1$ 且 $U' = I + N_2$ 。
因此 $S'(I + N_2) = S(I + N_1).$ 展开后得 $S' + S'N_2 = S + SN_1.$ 将两边分解为幂零部分和非幂零部分，
由加性$Jordan–Chevalley$分解的唯一性可知 $S' = S$ ，从而 $N_2 = N_1$ ，即 $U' = U$ 。
因此 S 和 U 是唯一的。

5. (f) 和 (g) 的构造

由加性分解的性质（定理7.4.8），存在多项式 $f, g \in F[X]$，使得 $S = f(T), \quad N = g(T).$
因此 $U = I + S^{-1}N = I + S^{-1}g(T).$