题目分析

已知 $A, B \in M_{n\times n}(F)$ （定义在代数闭域 F 上），且满足以下条件：

1. $AB = BA$ （即 A 和 B 可交换）。
2. $B^n = 0$ （即 B 是幂零矩阵）。

需要证明：矩阵 A 和 $A+B$ 具有相同的特征多项式。

解题思路

关键是利用 (A) 和 (B) 可交换的性质，根据上一题的结论，将 (A) 和 (B) 同时上三角化。在同一个上三角形式下，我们可以直接比较 (A) 和 (A+B) 的特征多项式，证明它们是相同的。

详细证明

1. 同步上三角化

根据上一题的结论，由于 A 和 B 是定义在代数闭域 F 上的矩阵，且 $AB = BA$，我们可以找到一个可逆矩阵 P，使得：

$$P^{-1}AP = T_A, \quad P^{-1}BP = T_B, \text{ 其中 } T_A \text{ 和 } T_B \text{ 都是上三角矩阵。}$$

由于 $B^n = 0$，且上三角矩阵的幂零性质能够传递到对角元（上三角矩阵的幂零性等价于对角元全为零），

因此 T_B 的对角元全为零，即：$T_B = \begin{bmatrix} 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$. 此时，矩阵 A 和 B 在同一个基下表示为：

$$A = PT_AP^{-1}, \quad B = PT_BP^{-1}.$$

---

2. 矩阵 (A + B) 的形式

在相同的基下，矩阵 $A+B$ 的表示为：$P^{-1}(A+B)P = T_A + T_B.$

因为 T_A 和 T_B 都是上三角矩阵，所以 $T_A + T_B$ 也是上三角矩阵，其形式为：$T_A + T_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$,

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 是 T_A 的对角元，等价于 A 的对角元。因此，$T_A + T_B$ 和 T_A 的对角元完全相同。

3. 特征多项式的计算

矩阵的特征多项式等于矩阵的特征值的乘积（包括重数）。对于上三角矩阵，其特征值就是对角线上元素，因此：

1. T_A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$；
2. $T_A + T_B$ 的特征值也为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$。

因此，矩阵 (A) 和 (A + B) 在相同基下具有相同的特征值。

---

4. 结论

因为 (A) 和 (A + B) 在相同基下具有相同的特征值，故它们的特征多项式相同，即：

$$\mathrm{Char}_A(X) = \mathrm{Char}_{A+B}(X).$$