# 定理背景：Schur分解

根据矩阵分解的理论，对于任意矩阵 $A \in M_{n\times n}(F)$ ，如果其特征多项式的根（即特征值）全部属于域 $F$ ，则 $A$ 在某个基下总可以表示为上三角矩阵形式。对角线上的元即为矩阵的特征值。

本题的关键是利用特征值的存在性和递归构造的方法，证明这种分解的存在性。

---

# 证明

## 1. 特征值的存在性

已知 $\mathrm{Char}_A(X) = \prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)$ ，这说明 $A$ 的特征多项式完全分解，因此 $A$ 在域 $F$ 上有 $n$ 个特征值（可能有重根），即 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 。

## 2. 归纳法构造变换矩阵 ( P )

### (1) 基础情形：( n = 1 )

当 $n=1$ 时，矩阵 $A$ 是 $1\times 1$ 矩阵，其形式为 $A=[\lambda_1]$ 。此时，矩阵 $A$ 本身就是上三角矩阵，结论显然成立。

### (2) 归纳假设：( n = k ) 时成立

假设对于任意 $k\times k$ 矩阵 $B\in M_{k\times k}(F)$ ，如果 $\mathrm{Char}_B(X)$ 在 $F$ 上分解为 $\prod_{i=1}^{k}(X-\mu_i)$ ，则存在可逆矩阵 $Q\in M_{k\times k}(F)$ ，使得： $Q^{-1}BQ=T,$ 其中 $T$ 是上三角矩阵，且 $T$ 的对角元依次为 $\mu_1,\ldots,\mu_k$ 。

### (3) 归纳步骤：( n = k+1 )

考虑 $A\in M_{(k+1)\times(k+1)}(F)$ ，其特征多项式为： $\mathrm{Char}_A(X)=\prod_{i=1}^{k+1}(X-\lambda_i).$

我们分以下几步证明:

---

$Step 1.$ $A$ 的特征值 $\lambda_1$ 对应的特征向量
因为 $\lambda_1$ 是 $A$ 的特征值，存在非零向量 $v_1\in F^{k+1}$ 满足： $Av_1=\lambda_1 v_1.$ 将 $v_1$ 作为基向量之一。

---

$Step2$.构造不变子空间

令 $V_1 = \text{span}\{v_1\}$)是由 $v_1$ 张成的一维子空间。因为 $A$ 的特征值全部属于 $F$，

我们可以找到一个 $A$ 的不变子空间 $V_1^{\perp} \subset F^{k+1}$，使得 $F^{k+1} = V_1 \oplus V_1^{\perp}$，且 $A$ 在 $V_1^{\perp}$ 上的限制是一个 $k \times k$ 矩阵。

换句话说，存在一个基变换矩阵 $P_1$，使得 $P_1^{-1}AP_1$ 的形式为：$P_1^{-1}AP_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & B \end{bmatrix}$,

其中 $B \in M_{k\times k}(F)$ 是 $A$ 在不变子空间 $V_1^{\perp}$ 上的限制矩阵。

$Step3$.对 $B$ 递归使用归纳假设

矩阵 $B$ 是一个 $k \times k$ 矩阵，其特征多项式为：$\text{Char}_B(X) = \prod_{i=2}^{k+1}(X - \lambda_i)$,

这是 $\text{Char}_A(X)$ 去掉 $(X - \lambda_1)$ 的部分。

根据归纳假设，存在一个可逆矩阵 $Q \in M_{k\times k}(F)$，使得：

$Q^{-1}BQ = T$, 其中 $T$ 是一个上三角矩阵，且 $T$ 的对角元依次为 $\lambda_2, \ldots, \lambda_{k+1}$。

$Step4$.构造最终的上三角矩阵

将矩阵 $Q$ 嵌入到 $P_1^{-1}AP_1$ 的 $B$ 部分，得到一个新的基变换矩阵 $P$，使得：

$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{k+1} \end{bmatrix}$. 即 $P^{-1}AP$ 是一个上三角矩阵，且其对角元依次为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}$。