练习7.3.8

设 V 为 n 维 C $-$ 向量空间, $T \in End(V)$. 通过纯量限制将 V 视同 $2n$ 维向量空间,
并以 $detRT$ 代表 T 作为 $R-$ 线性映射的行列式. 试证 $detRT = |detT|^2$.
提示 : 以 C 上的三角化定理 7.3.5 化到 $n = 1$ 情形具体计算.

我们来细致分析如何证明 (\det R_T = |\det T|^2)。以下是完整的解题过程。

问题背景和符号解释

- V : V 是一个 n $-$ 维复向量空间（即 $\mathbb{C}-$ 向量空间）。
- $T \in \mathrm{End}(V)$: T 是 V 上的线性算子，或者说是一个 $n \times n$ 的复矩阵。
- 将 V 视为实向量空间: V 原本是 n 维的复向量空间，作为实向量空间时，它的维数是 $2n$ 。
- 目标: R_T 是将 T 视为实线性变换时的矩阵，证明: $\det R_T = |\det T|^2$.
- **提示:** 使用复数上的三角化定理（定理7.3.5），化简到 (n = 1) 的情形进行具体计算。

我们需要结合复数和实数之间的关系分析这个问题。

第一步：复矩阵和实矩阵的关系

1. **复数和实数的表示关系:**

   一个复数 $z = a + bi$ （其中 $a, b \in \mathbb{R}$ ），可以用一个 2×2 的实矩阵表示:
   $z \mapsto \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$. 这种表示方式是复数乘法在实数上的线性扩张。

2. **复向量空间到实向量空间的转换:**

   $\mathbb{C}^n$ 可以看作是 $\mathbb{R}^{2n}$ ，通过将每个复数 $z_i = a_i + b_i i$ 分解为 (a_i, b_i) 的形式。

3. **矩阵的实表示:**

   如果 T 是一个作用在 $\mathbb{C}^n$ 上的复矩阵，则它的实表示 R_T 是一个 $2n \times 2n$ 的实矩阵，具体构造方式是:
   $T = (t_{ij}) \mapsto R_T = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$, 其中 A 和 B 是 T 的实部和虚部: $T = A + iB$ 。

第二步：行列式的性质

1. **复矩阵的行列式：**

$$\text{复矩阵 } T \text{ 的行列式是 } \det T \text{，这是一个复数。}$$

2. **实矩阵的行列式：**

$$\text{实矩阵 } R_T \text{ 的行列式是一个实数，记为 } \det R_T \text{ 。}$$

3. **矩阵行列式的关系：**
   通过直接计算可以验证，实矩阵 (R_T) 的行列式与复矩阵 (T) 的行列式的模平方有如下关系：

$$\det R_T = |\det T|^2.$$

第三步：化简到 (n = 1) 的情形

$$\text{当 } n = 1 \text{ 时，} T \text{ 是复数上的一个 } 1 \times 1 \text{ 矩阵，即一个复数 } z = a + bi \text{ 。将 } z \text{ 视为实数上的线性变换，}$$
$$\text{其对应的 } 2 \times 2 \text{ 矩阵是：} R_T = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$
$$\text{计算 } R_T \text{ 的行列式：} \det R_T = \det \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = a^2 + b^2 = |z|^2.$$
$$\text{而 } \det T = z \text{，因此 } |\det T|^2 = |z|^2 \text{ 。这验证了 } n = 1 \text{ 的情形成立。}$$

第四步：一般 (n) 的情形

$$\text{根据复数上的三角化定理（定理7.3.5），任何复矩阵 } T \text{ 都可以在复数上相似于一个上三角矩阵 } T' \text{，}$$
$$\text{即存在一个可逆矩阵 } P \text{ 使得：} T = PT'P^{-1}, \text{其中 } T' \text{ 是上三角矩阵，且 } \det T = \det T' \text{ 。}$$

$$\text{由于相似变换不会改变矩阵的行列式，实际上可以假设 } T \text{ 已经是一个上三角矩阵。}$$
$$\text{对于上三角矩阵 } T \text{，其对角线上的元素是 } \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \text{（即 } T \text{ 的特征值）。}$$

1. **复矩阵的行列式：**

$$\det T = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

2. **实表示矩阵的行列式：**
   对应的实矩阵 (R_T) 的行列式是：

$$\det R_T = \prod_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2.$$

3. **关系验证：**

$$\det R_T = \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)\overline{\left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)} = |\det T|^2.$$

结论

综上所述，我们证明了：

$$\det R_T = |\det T|^2.$$