2. 线性映射与矩阵表示

在线性代数中，对映射 T 选取一个基后， T 可以表示为一个矩阵 $[T]$ 。如果 V 是 $V_1, V_2, \ldots, V_k$ 的直和，并且每个 V_i 都是 T – 不变的，那么我们可以选取各个 V_i 中的基，将这些基拼接组成 V 的一个整体基。在这种基下， T 的矩阵表示会呈现一种特殊形式——分块对角矩阵。

---

3. 分块对角矩阵的构造原理

由于 $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$ ，线性变换 T 在 V 上的作用可以分解为在每个 V_i)上的作用。

具体来说：

- $T(V_i) \subseteq V_i$ ，因此 T 在 V_i 上的作用可以用一个小矩阵 A_i 表示。
- (

T 在直和 $V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$ 上的整体作用可以组合成一个分块对角矩阵： $[T] = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{bmatrix},$

其中每个对角块 A_i 是 T 在子空间 V_i 上的矩阵表示，而非对角块的位置上为零，因为 T 不会将 V_i 的向量映射到 V_j （ $i \neq j$ ）。

这种形式的矩阵称为分块对角矩阵。

---

4. 为什么可以分解

这种分块对角形式依赖于 (V) 能够分解为 (T)-不变子空间的直和。这种分解在很多情况下是可以实现的，常见的有以下几种情形：

（1）单纯不变子空间分解（对角化）

如果 T 是对角化的，即有足够多的线性无关特征向量，那么 V 可以分解为特征向量生成的子空间的直和： $V = \mathrm{span}(\mathbf{V}_1) \oplus \mathrm{span}(\mathbf{V}_2) \oplus \cdots \oplus \mathrm{span}(\mathbf{V}_n),$ 每个子空间都是 T – 不变的，因为它是特征向量生成的空间。在这种情况下，矩阵 $[T]$ 是完全对角化的，即每个块是 1×1 的矩阵。

（2）广义特征子空间分解（Jordan 标准形）

如果 T 不能完全对角化，但仍有足够的特征向量和广义特征向量，可以将 V 分解为广义特征子空间的直和： $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k},$ 其中 V_{λ_i} 是对应特征值 λ_i 的广义特征子空间，每个 V_{λ_i} 是 T – 不变的。在这种情况下，矩阵 $[T]$ 表现为$Jordan$标准形式，其分块大小由广义特征子空间的结构决定。

（3）任意不变子空间分解

更一般地，只要 V 可以分解为 T − 不变子空间的直和，不要求特定为特征子空间或广义特征子空间，就可以构造分块对角形式，块的大小和形状取决于子空间的维数和 T 在子空间上的限制。