1. 特征为 p 的有限域上的 Frobenius 自同构

- **定义 Frobenius 映射**

$$\text{设}F\text{是一个特征为}p\text{的域，其中}p\text{是素数。}Frobenius\text{映射}\mathrm{Fr}_p : F \to F\text{定义为：}\mathrm{Fr}_p(a) = a^p, \quad \forall a \in F$$

- **证明 Frobenius 映射是域同态**

$$\text{我们需要证明}\mathrm{Fr}_p\text{是一个域同态，即它满足：}$$

1. $$\mathrm{Fr}_p(a+b) = \mathrm{Fr}_p(a) + \mathrm{Fr}_p(b)$$
2. $$\mathrm{Fr}_p(ab) = \mathrm{Fr}_p(a)\mathrm{Fr}_p(b)$$
3. $$\mathrm{Fr}_p(1) = 1$$

证明:

1. $$\mathrm{Fr}_p(a+b) = (a+b)^p = a^p + \binom{p}{1}a^{p-1}b + \binom{p}{2}a^{p-2}b^2 + \cdots + \binom{p}{p-1}ab^{p-1} + b^p$$

$$\text{由于}p\text{是素数，当}1 \le k \le p-1\text{时，}\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}\text{包含因子}p\text{，}$$

$$\text{因此在特征为}p\text{的域中，}\binom{p}{k} \equiv 0 \pmod{p}\text{。}$$

$$\text{所以，}\mathrm{Fr}_p(a+b) = a^p + b^p = \mathrm{Fr}_p(a) + \mathrm{Fr}_p(b)\text{。}$$

2. $$\mathrm{Fr}_p(ab) = (ab)^p = a^p b^p = \mathrm{Fr}_p(a)\mathrm{Fr}_p(b)\text{。}$$
3. $$\mathrm{Fr}_p(1) = 1^p = 1\text{。}$$

$$\text{因此，}\mathrm{Fr}_p\text{是一个域同态。}$$

- **证明 Frobenius 映射是单射**

$$\text{假设}\mathrm{Fr}_p(a) = \mathrm{Fr}_p(b)\text{，即}a^p = b^p\text{。则}a^p - b^p = 0\text{，即}(a-b)^p = 0\text{。}$$

$$\text{由于域中没有非零零因子，所以}a - b = 0\text{，即}a = b\text{。}$$

$$\text{因此，}\mathrm{Fr}_p\text{是单射。}$$

- **有限域上的 Frobenius 映射是自同构**

$$\text{当}F\text{是一个有限域时，由于}\mathrm{Fr}_p\text{是一个单射，并且}F\text{是有限的，所以}\mathrm{Fr}_p\text{也是满射。}$$

$$\text{因此，}\mathrm{Fr}_p\text{是一个自同构。}$$

2. 特征为 p 的域上 Frobenius 映射不是自同构的例子

- **考虑有理函数域**

$$令F = \mathbb{F}_p(X)，其中\mathbb{F}_p是p个元素的有限域，而X是一个不定元。$$

$$F是特征为p的域。$$

$$F中的元素是形如\frac{f(X)}{g(X)}的有理函数，其中f(X), g(X) \in \mathbb{F}_p[X]且g(X) \neq 0。$$

- **证明 Frobenius 映射不是满射**

$$考虑元素X \in F。假设存在一个h(X) \in F使得\mathrm{Fr}_p(h(X)) = h(X)^p = X。$$

$$令h(X) = \frac{f(X)}{g(X)}，其中f(X), g(X) \in \mathbb{F}_p[X]。$$

$$则\left(\frac{f(X)}{g(X)}\right)^p = \frac{f(X)^p}{g(X)^p} = X$$

$$由于\mathbb{F}_p的元素在p次方下不变，所以f(X)^p = f(X^p)和g(X)^p = g(X^p)。因此，\frac{f(X^p)}{g(X^p)} = X。$$

$$这表明f(X^p) = Xg(X^p)。$$

- $$假设f(X)的次数为m，则f(X^p)的次数为mp。假设g(X)的次数为n，则g(X^p)的次数为np。$$

$$所以，f(X^p)的次数是mp，而Xg(X^p)的次数是np + 1。$$

$$如果f(X^p) = Xg(X^p)，则mp = np + 1，即mp - np = 1。这意味着p整除1，这是不可能的。$$

$$因此，不存在h(X) \in F使得Frp(h(X)) = X，所以Frobenius映射不是满射，即不是自同构。$$

总结

- $$对于特征为p的有限域F，Frobenius映射Frp(a) = a^p是一个自同构。$$

$$这是因为Frobenius映射是单射，并且有限域上的单射一定是满射。$$

- $$对于特征为p的无限域，例如有理函数域Fp(X)，Frobenius映射Frp(a) = a^p不是自同构。$$

$$这是因为Frobenius映射虽然是单射，但不是满射。例如，在Fp(X)中，不存在元素的p次方等于X。$$