分圆多项式 (Cyclotomic Polynomials)

分圆多项式，顾名思义，与单位圆上的分点有关。它们是代数学和数论中非常重要的多项式，其根恰好是**本原单位根。**

定义:

对于正整数 n，n 次分圆多项式 $\Phi_n(x)$ 定义为一个首一多项式，其根是所有 **本原 n 次单位根。** 本原 n 次单位根是指满足 $z^n = 1$ 且对于任何小于 n 的正整数 k，$z^k \neq 1$ 的复数 z。

性质:

1. **次数:** $\Phi_n(x)$ 的次数等于欧拉函数 $\varphi(n)$，其中 $\varphi(n)$ 是小于等于 n 且与 n 互质的正整数的个数。
2. **整系数:** 分圆多项式的系数都是整数。虽然从定义上看不太明显，但可以通过多种方法证明。
3. **不可约性:** 在有理数域 $\mathbf{Q}$ 上，分圆多项式 $\Phi_n(x)$ 是不可约多项式。这意味着它不能被分解成两个次数更低的非常数有理系数多项式的乘积。
4. **与 x^n - 1 的关系:** 多项式 x^n - 1 可以分解成所有 d 整除 n 的分圆多项式的乘积：

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$$

   其中 Π 表示乘积，$d|n$ 表示 d 是 n 的一个正因子。
5. **递推关系:** 可以利用上述关系来递推计算分圆多项式：

$$\Phi_n(x) = \frac{x^n - 1}{\prod_{d|n,d<n} \Phi_d(x)}$$

计算方法:

1. **直接利用定义 (对于小 n):** 找出所有的本原 n 次单位根，然后构造以这些根为根的首一多项式。例如，本原 6 次单位根是 $e^{i\pi/3}$ 和 $e^{5i\pi/3}$，所以 $\Phi_6(x) = (x - e^{i\pi/3})(x - e^{5i\pi/3}) = x^2 - x + 1$。
2. **利用 x^n - 1 的分解:** 这是最常用的方法。根据性质 4，我们可以逐步计算。
   - $\mathbf{\Phi_1(x)}$: $x^1 - 1 = \Phi_1(x)$，所以 $\Phi_1(x) = x - 1$。
   - $\mathbf{\Phi_2(x)}$: $x^2 - 1 = \Phi_1(x)\Phi_2(x) = (x - 1)\Phi_2(x)$，所以 $\Phi_2(x) = (x^2 - 1) / (x - 1) = x + 1$。
   - $\mathbf{\Phi_3(x)}$: $x^3 - 1 = \Phi_1(x)\Phi_3(x) = (x - 1)\Phi_3(x)$，所以 $\Phi_3(x) = (x^3 - 1) / (x - 1) = x^2 + x + 1$。
   - $\mathbf{\Phi_4(x)}$: $x^4 - 1 = \Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_4(x) = (x - 1)(x + 1)\Phi_4(x)$，所以 $\Phi_4(x) = (x^4 - 1) / ((x - 1)(x + 1)) = (x^4 - 1) / (x^2 - 1) = x^2 + 1$。
   - $\mathbf{\Phi_6(x)}$: $x^6 - 1 = \Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_3(x)\Phi_6(x) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)\Phi_6(x)$，所以 $\Phi_6(x) = (x^6 - 1) / ((x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)) = (x^6 - 1) / ((x^2 - 1)(x^2 + x + 1)) = (x^6 - 1) / (x^4 + x^3 - x - 1) = x^2 - x$