问题:

考虑代数闭域 F 上的向量空间 V , 不要求有限维. 设 $T \in \mathrm{End}(V)$,
如果对所有 $v \in V$ 都存在 V 的有限维 T $-$ 不变子空间 U_v 使得 $v \in U_v$, 则称 T 为局部有限的.
试对局部有限的 T 建立(7.4.1)的推广: $V = \bigoplus_{\lambda \in F} V[\lambda]$, 其中 $V[\lambda]$ 是 T 相对于 λ 的广义特征子空间,
定义为: $V[\lambda] := \bigcup_{N \geq 0} V(X-\lambda)^N$, 其中 $V(X-\lambda)^N = \{v \in V | (T-\lambda I)^N v = 0\}$. 注意到在此容许无穷直和.

证明:

1. 利用局部有限性构建子空间:

对于任意 $v \in V$, 存在有限维的 T $-$ 不变子空间 U_v 使得 $v \in U_v$. 由于 U_v 是有限维的, 并且 F 是代数闭域,
我们可以将 U_v 分解为 T 在 U_v 上的限制的广义特征子空间的直和: $U_v = \bigoplus_{\lambda \in F} U_v[\lambda]$
其中 $U_v[\lambda]$ 是 T 在 U_v 上相对于 λ 的广义特征子空间。注意, 只有有限个 λ 使得 $U_v[\lambda] \neq \{0\}$.

2. 引入广义特征子空间 $V[\lambda]$:

我们定义 $V[\lambda]$ 为 T 相对于 λ 的广义特征子空间, 即 $V[\lambda] = \bigcup_{N \geq 0} V(X-\lambda)^N$
其中 $V(X-\lambda)^N = \{v \in V | (T-\lambda I)^N v = 0\}$.

3. 证明 V 是所有广义特征子空间的和:

对于任意 $v \in V$, 由于 $v \in U_v$, 且 $U_v = \bigoplus_{\lambda \in F} U_v[\lambda]$, 我们可以将 v 表示为 :
$v = \sum_{\lambda \in F} v_\lambda$, 其中 $v_\lambda \in U_v[\lambda]$. 由于 $U_v[\lambda] \subseteq V[\lambda]$, 所以 $v_\lambda \in V[\lambda]$.
这意味着 v 可以表示为 V 中一些广义特征子空间的元素的和. 因此, $V \subseteq \sum_{\lambda \in F} V[\lambda]$.
另一方面, 由于 $V[\lambda] \subseteq V$, 所以 $\sum_{\lambda \in F} V[\lambda] \subseteq V$. 因此, $V = \sum_{\lambda \in F} V[\lambda]$.

4. 证明直和性:

为了证明 V 是广义特征子空间的直和, 我们需要证明 $\sum_{\lambda \in F} V[\lambda] = \bigoplus_{\lambda \in F} V[\lambda]$.
这意味着, 如果存在有限个不同的 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 和对应的 $v_i \in V[\lambda_i]$, 使得 $v_1 + \ldots + v_n = 0$,
那么必须有 $v_1 = \ldots = v_n = 0$. 假设存在 $v_i \in V[\lambda_i]$ ($i = 1, \ldots, n$), 且 λ_i 互不相同, 使得 $\sum_{i=1}^{n} v_i = 0$.
令 W 为 $v_1, \ldots, v_n$ 张成的子空间. W 是有限维的, 且是 T $-$ 不变的.
因此, W 可以分解为 T 在 W 上的限制的广义特征子空间的直和: $W = \bigoplus_{\mu \in F} W[\mu]$.
由于 $v_i \in V[\lambda_i]$, 并且 W 是由 v_i 张成的, 所以 $W[\mu] \neq \{0\}$ 当且仅当 $\mu = \lambda_i$ 对于某个 i .
因此, $W = \bigoplus_{i=1}^{n} W[\lambda_i]$ 并且 $v_i \in W[\lambda_i]$. 由于 $\sum_{i=1}^{n} v_i = 0$, 且 $W[\lambda_i]$ 是直和, 所以必须有 $v_i = 0$.
对于所有 i . 这证明了 $V[\lambda]$ 的和是直和.

结论:

综上所述, 我们证明了对于局部有限的 $T \in \mathrm{End}(V)$, V 可以分解为 T 的广义特征子空间的直和:

$$V = \bigoplus_{\lambda \in F} V[\lambda].$$

关键点总结:

- **局部有限性：**

$$\text{这是证明的关键，它保证了每个向量都包含在有限维的}T\text{ - 不变子空间中。}$$

- **代数闭域：**

$$\text{保证了有限维 }T\text{ - 不变子空间可以分解为广义特征子空间的直和}$$

。

- **广义特征子空间的性质：**

$$\text{它们是 }T\text{ - 不变的，并且不同特征值对应的广义特征子空间的交集为 }\{0\}\text{ .}$$

- **直和的证明：**

$$\text{通过构造包含有限个向量的}T\text{ - 不变子空间，利用其广义特征子空间分解来证明直和性。}$$