莫比乌斯反演简介

莫比乌斯反演（Möbius Inversion）是数论中的一项重要工具，主要用于处理数论函数之间的关系，尤其是在研究**整除关系**或**积性函数**时。它的核心思想是利用莫比乌斯函数 (\mu(n)) 来实现某种形式的“逆变换”。

莫比乌斯反演公式

假设有两个函数 (f(n)) 和 (g(n))，它们通过以下关系相互定义：

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d),$$

其中，$\sum_{d|n}$ 表示对 n 的所有正因子 d 求和。

那么，$f(n)$ 可以通过莫比乌斯反演表示为：$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right),$

或者等价地写成：$f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d).$

莫比乌斯函数 (\mu(n))

莫比乌斯函数是莫比乌斯反演的核心。它的定义如下：

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } n = 1, \\ 0, & \text{如果 } n \text{ 含有平方因子（即存在素数 } p \text{ 使得 } p^2 \mid n\text{），} \\ (-1)^k, & \text{如果 } n \text{ 是 } k \text{ 个不同素数的乘积.} \end{cases}$$

简单来说：

- 若 $n = 1$，则 $\mu(1) = 1$；
- 若 n 含有平方因子（如 $12 = 2^2 \times 3$），则 $\mu(n) = 0$；
- 若 n 是 k 个不同素数的乘积（如 $30 = 2 \times 3 \times 5$），则 $\mu(n) = (-1)^k$。

莫比乌斯反演的直观解释

1. $$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \text{ 表示 } g(n) \text{ 是 } f(d) \text{ 对 } n \text{ 的所有正因子的累加。}$$

2. 莫比乌斯反演的作用是"逆转"这一过程，即通过 (g(n)) 反推出 (f(n))。

莫比乌斯函数的关键性质是它在整除关系中的"抵消效应"，这使得我们能够从累加值 (g(n)) 中提取原始值 (f(n))。

莫比乌斯反演的应用

莫比乌斯反演在数论中用途广泛，以下是几个常见的应用场景：

1. 积性函数的研究

$$\text{很多积性函数（如欧拉函数、约数和函数）可以通过莫比乌斯反演进行转换。}$$
$$\text{例如，欧拉函数 } \phi(n) \text{ 的定义为：} \phi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$
$$\text{也可以通过莫比乌斯反演表示为：} \phi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}.$$

2. 约数函数的反演

$$\text{设 } \sigma(n) \text{ 表示 } n \text{ 的所有正因子的和，即：} \sigma(n) = \sum_{d|n} d.$$
$$\text{通过莫比乌斯反演，可以得到：} n = \sum_{d|n} \mu(d) \sigma\left(\frac{n}{d}\right).$$

3. 容斥原理的推广

莫比乌斯反演可以看作是容斥原理在数论中的一种形式。例如，用于求解某些整除问题或计数问题。

4. 狄利克雷卷积的反演

$$\text{莫比乌斯反演也可以看作是对狄利克雷卷积的反演。如果 } g(n) = (f * 1)(n)\text{，}$$
$$\text{其中 } (f * 1)(n) = \sum_{d|n} f(d)\text{，那么 } f(n) \text{ 可表示为：} f(n) = (g * \mu)(n).$$

莫比乌斯反演的证明

莫比乌斯反演公式的证明基于莫比乌斯函数的一个重要性质：

$$\sum_{d|n}\mu(d)=\begin{cases}1, & \text{当 } n=1, \\ 0, & \text{当 } n>1.\end{cases}$$

证明步骤如下：

1. $$\text{假设 } g(n)=\sum_{d|n}f(d) \text{，我们需要反推出 } f(n) \text{ 。}$$
2. $$\text{将 } g(n) \text{ 的定义代入 } f(n)=\sum_{d|n}\mu(d)g\left(\frac{n}{d}\right) \text{ 中。}$$
3. 利用莫比乌斯函数的性质和整除关系的对称性，验证公式成立。

例题解析

例 1：

$$\text{求 } \phi(n) \text{ 的莫比乌斯反演公式}$$

$$\text{已知 } n \text{ 的正整数个数为 } g(n)=n \text{ ，即：} g(n)=\sum_{d|n}f(d), \text{ 其中 } f(d)=\phi(d) \text{ 。}$$

$$\text{利用莫比乌斯反演公式，有：} \phi(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\cdot\frac{n}{d}.$$

例 2：计数满足整除关系的整数数目

$$\text{设 } f(n) \text{ 表示所有满足 } n\mid k \text{ 的正整数 } k \text{ 的个数，显然 } f(n)=\infty \text{ 。}$$
$$\text{若我们限制 } k\leq x \text{ ，则：} g(n)=\text{所有满足 } n\mid k \text{ 且 } k\leq x \text{ 的 } k \text{ 的个数.}$$
$$\text{通过莫比乌斯反演可以将 } g(n) \text{ 反推出 } f(n) \text{ 。}$$

莫比乌斯反演在数论中是非常强大的工具，尤其是在研究整除关系或积性函数时，是不可或缺的基本技术。