题目分析

我们需要证明：给定 $A, B \in M_{n\times n}(F)$ 满足以下条件：

1. A 和 B 的特征多项式都在域 F 上分裂（即特征值都属于域 F ）。

2. $AB = BA$ （即 A 和 B 可交换）。

那么，存在一个可逆矩阵 $P \in M_{n\times n}(F)$ ，使得 $P^{-1}AP$ 和 $P^{-1}BP$ 同时为上三角矩阵，

即 A 和 B 可以同步上三角化。

证明

1. 基本思路

根据 (A) 和 (B) 的特征多项式在域 (F) 上分裂的条件，说明 (A) 和 (B) 都有 (n) 个特征值（可能有重根），且特征值都属于 (F)。同时，由 (AB = BA) 可知，(A) 和 (B) 可以在某个共同的不变子空间分解。这是同步上三角化的核心工具。

我们可以构造 (A) 的特征向量和广义特征向量的基，利用这些向量构造出一个共同的基，使得 (A) 和 (B) 在这个基下同时为上三角矩阵。

---

2. 归纳法证明

(1) 基础情形：(n = 1)

当 $n = 1$ 时，矩阵 A 和 B 都是 1×1 的标量矩阵，它们本身已经是上三角矩阵，结论显然成立。

(2) 归纳假设：(n = k) 时成立

假设对于任意 $k \times k$ 的可交换矩阵 A, B ，如果它们的特征多项式在 F 上分裂，则它们可以同步上三角化。

(3) 归纳步骤：(n = k + 1)

我们需要对 $A, B \in M_{(k+1)\times(k+1)}(F)$ 进行证明。

---

3. 证明的具体步骤

$Step1.\ A$ 的特征值和特征向量

由于 A 的特征多项式在 F 上分裂， A 至少有一个特征值 $\lambda \in F$ 。设 $v_1 \in F^n$ 是 A 对应于特征值 λ 的一个特征向量，即：

$$Av_1 = \lambda v_1.$$

$Step2.$构造 A 和 B 的共同不变子空间

由 $AB = BA$ 的可交换性，可知 B 作用于 v_1 时不会跳出 A 的特征子空间 $V_1 = \text{span}\{v_1\}$ 。换句话说：

$Bv_1 \in V_1$. 因此， V_1 是 A 和 B 的一个共同不变子空间。

$Step3.$在 $V_1^\perp$ 上的限制

令 $V_1^\perp$ 是 F^n 中与 V_1 正交的补空间，即 $F^n = V_1 \oplus V_1^\perp$ 。注意 $V_1^\perp$ 的维度是 $k = n - 1$ 。

由于 V_1 是 A 和 B 的共同不变子空间， A 和 B 在 $V_1^\perp$ 上的限制（记作 $A|_{V_1^\perp}$ 和 $B|_{V_1^\perp}$ ）仍然是可交换矩阵，

且它们的特征多项式仍然在 F 上分裂。

$Step4.$对 $A|_{V_1^\perp}$ 和 $B|_{V_1^\perp}$ 使用归纳假设

根据归纳假设，存在一个基 $\{v_2, \dots, v_n\}$ （定义在 $V_1^\perp$ 上），使得在这个基下：

$A|_{V_1^\perp}$ 和 $B|_{V_1^\perp}$ 同时为上三角矩阵。

$Step5.$构造完整的基

将 v_1 与 $\{v_2, \dots, v_n\}$ 组合在一起，得到 F^n 的一个基 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 。在这个基下， A 和 B 的矩阵形式为：

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & * & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & * & * & \cdots & * \\ 0 & b_{22} & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & b_{33} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

即 A 和 B 在该基下同时为上三角矩阵。