编程作业二

对一个幅度为1，长度为10的矩形窗函数x(t)采样, 并对该函数进行傅里叶变换、低通滤波等操作，分析其时域和频域特性。

(1) 采样

对矩形窗函数x(t)，以采样间隔ts进行采样，画出采样后的时域和频谱特性（采样间隔ts自己设置）。

(2) 延时采样

将矩形窗函数x(t)平移0.5个采样间隔ts，以采样间隔ts进行采样，画出采样后时域 和频谱特性，并与（1）对比。

In [ ]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math
```

作业中所有函数

- `window(t)` 幅度为1，长度为10的矩形窗函数
- `sampling(ts,initial_point,end_point)` 采样函数, ts为采样间隔, initial_point为第一个采样点的时间坐标。
- `DFT(sample)` 离散傅里叶变换，sample 为输入信号
- `filter(sample, ratio=0.1)` 低通滤波器，ratio 为滤波后剩余的最高频率与原频率的比例。

In [ ]:
```
def window(t):
    if t < 10 and t >= 0:
        return 1
    else:
        return 0
```

In [ ]:
```
def sampling(ts,initial_point,end_point):
    #ts: sampling time
    #initial_point: initial point of the signal
    #end_point: end point of the signal
    #return: sampled sig

```

```
    sample_sig = []
    t = initial_point
    while t <= end_point:
        sample_sig.append(window(t))
        t += ts
    return sample_sig
```

sample 1：时间间隔 $t_s = 0.1$, 初始点为$t_0 = 0$，终止点为$t_n = 10$

sample 2：时间间隔 $t_s = 0.1$, 初始点为$t_0 = 0.5t_s$，终止点为$t_n = 10 + 0.5t_s$

In [ ]:

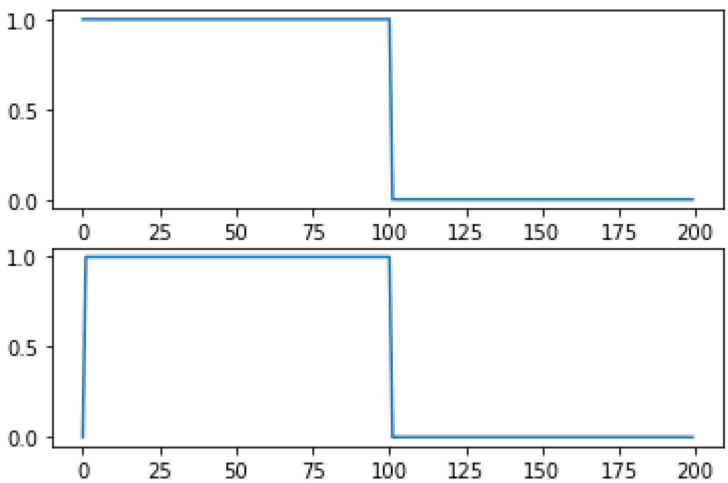
```
# Sampling, sample1 is the sampled signal in question 1, sample2 is the sampled signal in question 2
ts = 0.1
end = 20
sample1 = sampling(ts,0,end)
sample2 = sampling(ts,-0.5*ts,end-0.5*ts)
```

In [ ]:

```
# Plot the sampled signal
plt.subplot(211)
plt.plot(sample1)
plt.subplot(212)
plt.plot(sample2)
```

Out[ ]:

```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x1b9eae7ad90>]
```



利用 np.fft.fft() 对信号 sample 1,sample 2 进行傅里叶变换，并画出频谱特性。

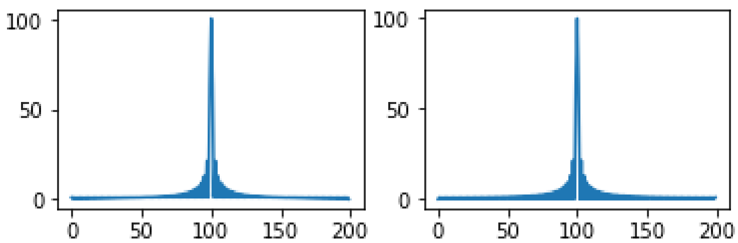
In [ ]:

```
# fft of the sampled signal
```

```
def DFT(sample):
    fft_sample = np.fft.fft(sample)
    fft_sample = np.fft.fftshift(fft_sample)
    fft_sample = abs(fft_sample)
    return fft_sample

fft_sample1 = DFT(sample1)
fft_sample2 = DFT(sample2)

# Plot the fft of the sampled signal
plt.subplot(221)
plt.plot(fft_sample1)
plt.subplot(222)
plt.plot(fft_sample2)
```

Out[ ]:

```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x1b9eaf417c0>]
```



从图像中可以看出，时移$0.5t_s$前后，DFT几乎没有差别。

(3) 低通滤波器

将矩形窗函数x(t)平移0.5个采样间隔ts，通过一个合适的低通滤波器后再以采样间 隔ts进行采样，画出采样后时域和频谱特性，并与（1）、（2）对比。

ratio 为滤波后剩余的最高频率与原频率的比例，此处选用 ratio = 0.1

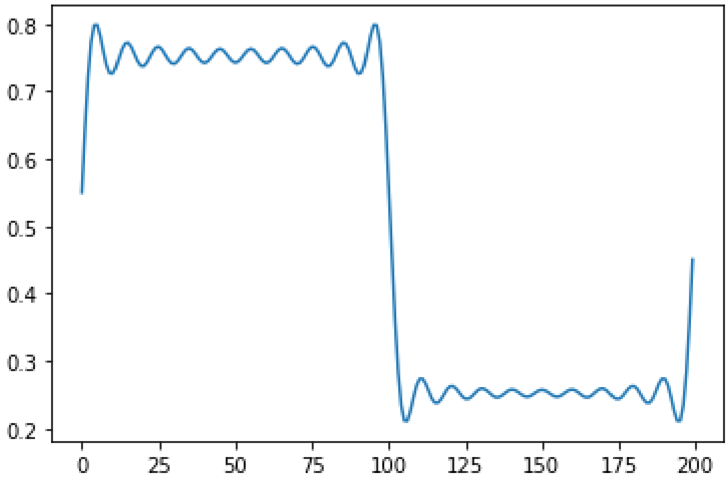
In [ ]:

```
def filter(sample, ratio=0.1):

    fft_sample = np.fft.fft(sample)
    fft_sample[int(len(fft_sample)*ratio):len(fft_sample)] = 0
    sample = np.fft.ifft(fft_sample)
    return sample


plt.plot(filter(sample1))
```

```
D:\CodeWorld\Anaconda\lib\site-packages\numpy\core\_asarray.py:102: ComplexWarning: Ca
sting complex values to real discards the imaginary part
  return array(a, dtype, copy=False, order=order)
```

Out[ ]:

```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x1b9ea97e6a0>]
```



(4) 公式推导

(4.1) Time and Frequency Domain after Sampling

1. Time Domain

$$x(t)=\operatorname{rect}\left(\frac{t-10}{10}\right) \quad s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t-n t_s\right)$$
$$y(t)=x(t) \cdot s(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left(n t_s\right) \delta\left(t-n t_s\right)$$

2. Frequency Domain

$$x(t)=\operatorname{rect}\left(\frac{t-10}{10}\right) \quad s(t)=10 \mathrm{Sa}(\mathrm{sw}) \cdot e^{-10 j \omega}$$
$$y(t)=\operatorname{rect}\left(\frac{t}{10}-1\right) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(t-n t_s\right)$$
$$\leftrightarrow 10 \mathrm{Sa}(5 \mathrm{w}) \cdot e^{-10 j \omega} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(w-w_s\right)$$

(4.2) Fourier Transform after time shifting

$$
\begin{aligned}
&\text{Time shift:}\\
&y'(t) = x(t-0.5ts)\cdot\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(t-nt_s\right)\\
&Y(w)' = X(w)\cdot e^{-\frac{1}{2}jwt_s}\cdot\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(t-nt_s\right)\\
&\because t_{s\to 0}\\
&\therefore e^{-\frac{1}{2}jwts}\to e^0 = 1\\
&\therefore Y'(w)\approx X(w)\cdot\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nts) = Y(w)
\end{aligned}
$$

时域上的采样是频域 (Sinc Function) 关于 w_s 的周期延拓。

(4.3) Low Pass Filter

$$
\begin{aligned}
&x(t) = \operatorname{rect}\left(\frac{t-10}{10}\right)\\
&X(\omega) = 10\mathrm{Sa}(5\omega)\cdot e^{-10j\omega}\\
&X(\omega)\xrightarrow{\text{low pass filter}} X(\omega)\cdot\operatorname{rect}\left(\frac{\omega-\omega_{\text{limit}}}{\omega_{\max}}\right)\\
&x(t)\xrightarrow{\text{low pass filter}} x(t)*k_1\mathrm{Sa}\left(k_2t\right)\cdot e^{jk3t}
\end{aligned}
$$

通过滤去高通成分，当信号出现剧烈变化时，只有低通成分的作用会使滤波后的信号会更加平滑。