Q1

```
clear all
syms x k
```

符号表达式

```
f1 = x^k;
sum_1 = symsum(f1, k, [1, inf])
```

sum_1 =

$$\begin{cases} \infty & \text{if } 1 \le x \\ -\frac{1}{x-1} - 1 & \text{if } |x| < 1 \end{cases}$$

```
ans_1_1 = subs(sum_1, x, -1/3)
```

ans_1_1 =

$$-\frac{1}{4}$$

```
ans_1_2 = subs(sum_1, x, 1/sym(pi))
```

ans_1_2 =

$$-\frac{1}{\frac{1}{\pi} - 1} - 1$$

```
ans_1_3 = subs(sum_1, x, 3)
```

ans_1_3 = ∞

符号函数

```
f2(x) = x^k;
sum_2 = symsum(f2, k, [1, inf])
```

sum_2(x) =

$$\begin{cases} \infty & \text{if } 1 \le x \\ -\frac{1}{x-1} - 1 & \text{if } |x| < 1 \end{cases}$$

```
ans_2_1 = sum_2(-1/3)
```

ans_2_1 =

$$-\frac{1}{4}$$

```
ans_2_2 = sum_2(1/sym(pi))
```

ans_2_2 =

$$-\frac{1}{\frac{1}{\pi} - 1} - 1$$

```
ans_2_3 = sum_2(3)
```

ans_2_3 = ∞

Q2

(1)

```
clear all
syms t
y(t) = abs(sin(t));
dy = diff(y, t, 1)
```

dy(t) = $\text{sign}(\sin(t)) \cos(t)$

(2)

y 在 $t = 0$ 处左右导数不相等，所以在这一点不可导：

```
syms d
dy_0_l = limit((y(d)-y(0))/d, d, 0, 'left')
```

```
dy_0_l = -1
```

```
dy_0_r = limit((y(d)-y(0))/d, d, 0, 'right')
```

```
dy_0_r = 1
```

y 在 $t=\pi/2$ 处左右导数均为0：

```
dy_pi2_l = limit((y(pi/2+d)-y(pi/2))/d, d, 0, 'left')
```

```
dy_pi2_l = 0
```

```
dy_pi2_r = limit((y(pi/2+d)-y(pi/2))/d, d, 0, 'right')
```

```
dy_pi2_r = 0
```

将 $\pi/2$ 代入dy也得到0：

```
dy_pi2 = dy(pi/2)
```

```
dy_pi2 = 0
```

Q3

```
clear all
syms n
f1 = (1+(1/n))^n;
f2 = n/(factorial(n)^(1/n));
f3 = 1/factorial(n);
e1 = limit(f1, n, inf)
```

```
e1 = e
```

```
logical(e1 == exp(sym(1)))
```

```
ans = logical
   1
```

```
e2 = limit(f2, n, inf)
```

```
e2 = e
```

```
logical(e2 == exp(sym(1)))
```

```
ans = logical
   1
```

```
e3 = symsum(f3, n, [0, inf])
```

```
e3 = e
```

```
logical(e3 == exp(sym(1)))
```

```
ans = logical
   1
```

Q4

(1)

引理1：

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx=\int_0^{\pi/2}\cos^n dx=\frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot I$$

这里，$I=\begin{cases}1, & n\text{为奇数}\\ 0, & n\text{为偶数}\end{cases}$

证明略

命题1：沃拉斯公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\sqrt{n}}=\sqrt{\pi}$$

证明：

首先，有：

$$\int_0^{\pi/2} sin^{2n+2}x\,dx<\int_0^{\pi/2} sin^{2n+1}x\,dx<\int_0^{\pi/2} sin^{2n}x\,dx$$

代入引理1的结论之后得：

$$\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}<\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}<\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

化简之后得：

$$\frac{(2n+1)^2}{2n(2n+2)}<\left[\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{\pi n}<\frac{2n+1}{2n}$$

令$n\to\infty$，两边均趋于1，于是：

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{\pi n}=1$$

即：

$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\sqrt{n}}=\sqrt{\pi}$，证毕

引理2：

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1<\frac{1}{12n(n+1)},\quad n=1,2,...$$

证明：

对 $\frac{1}{2}ln\frac{1+x}{1-x}$ 在 $x=0$ 处进行幂级数展开得：

$$\frac{1}{2}ln\frac{1+x}{1-x}=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+...<x+\frac{1}{3}(x^3+x^5+...)=x+\frac{x^3}{3(1-x^2)}\quad,x<1$$

将 $x=\frac{1}{2n+1}$ 代入即得，证毕

推论1：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}=\sqrt{2\pi}$$

证明：

记 $a_n=\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$，先证明$a_n$存在极限：

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$=e\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n-\frac{1}{2}}$$

$$=exp\left[1+\left(-n-\frac{1}{2}\right)ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$=exp\left[1+\left(-n-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right]$$

$$=exp\left[-\frac{1}{12n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]$$

$$=1-\frac{1}{12n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$<1$$

由此可知 a_n 单调递减，趋于 A 或 $-\infty$

另外，由引理2得：

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=exp\left[1+\left(-n-\frac{1}{2}\right)ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]>exp\left(-\frac{1}{12n(n+1)}\right)=exp\left(\frac{1}{12(n+1)}-\frac{1}{12n}\right)$$

由此可知 $a_ne^{-\frac{1}{12n}}$ 单调递增，于是 a_n 不可能趋于 $-\infty$，即存在极限 A

然后证明$A=\sqrt{2\pi}$：

由沃拉斯公式：

$$\sqrt{\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{[(2n)!!]^2}{(2n)!\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}$$

代入 $n!=a_n\cdot\frac{n^n\cdot\sqrt{n}}{e^n}$ 得：

$$\sqrt{\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{a_{2n}\sqrt{2}}=\frac{A}{A\sqrt{2}}=\frac{A}{\sqrt{2}}$$

即：

$A=\sqrt{2\pi}$，证毕

推论2：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n!)^{1/n}}=e$$

证明：

对推论1的结论取 $\frac{1}{n}$ 次方，得：

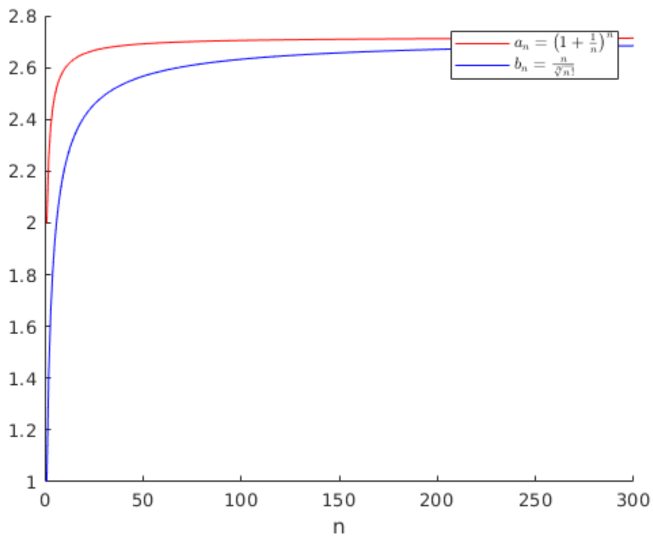
$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^{1/n}e}{n}=1$$

即得：

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n!)^{1/n}}=e$，证毕

(2)

```
a_n = subs(f1, n, 1:300);
b_n = subs(f2, n, 1:300);
hold on
plot(a_n, 'r')
plot(b_n, 'b')
xlabel('n')
legend('$ a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n $', '$ b_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} $', 'Interpreter','latex')
```



由图可知 $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 收敛更快