Bilateral Filtering for Gray and Color Images

摘要

双边滤波器在保留边缘的同时通过临近像素的非线性组合来平滑图像。这种方式是非迭代，局部和简单的。它结合灰度或彩色图通过它们的几何相似度和空间相似度，在定义域和值域内，近处的值要优于远处的值。与分别作用于三个波段的滤光片形成对比，双边过滤器可以强制执行 CIELab 颜色空间的感知指标。另外，和标准的滤波器相比，双边滤波在彩色图中的边界处不会产生幻影颜色，并且能够减少原始图像中的幻影颜色。

1. Introduction

滤波是图像处理和计算机视觉最基本的操作，广义上的滤波，滤波后的图像在指定位置的像素值是输入图像在同一位置的的邻域的函数。特别的，高斯滤波器计算邻域内像素的加权平均值，在邻域内，权重随着远离领域中心而逐渐减小。虽然可以可出正式和定量的解释，但是直观上来讲，像素在空间上变化是缓慢的，所以相邻的像素具有相同的值，因此应该平均它们。与信号值相比，噪声值与相邻像素的相关性较弱，因此在保留信号的同时，噪声值也被平均掉了。

缓慢变化的假设对于边缘处是不起作用的，边缘会被低通滤波器所模糊，为了减少这种影响已经做了很多努力。如何防止在平滑区域的时候把边缘也平滑了呢？

论文中定义了 range filter，它是非线性的，因为它取绝于图像的强度或颜色。在计算方面，它也不比标准的不可分滤波器复杂。最重要的是，它保留了边界。

空间的局部性仍然是一个重要的概念。实际上，range filter 本身仅仅是扭曲了颜色映射的关系(说白了 range filter 就是颜色值的一个映射关系)，所以作者结合了 range and domain filter 得到了 bilateral filter。

因为双边滤波器在图像函数的 range 和 domain 上假设了明确的距离函数，它们可以应用于可以定义这两个距离的任何函数。特别的是，bilateral filter 在彩色图上的运用和在灰度图上一样简单。CIE-Lab 色彩空间为色彩空间赋予了色彩相似性的感知上有意义的度量，其中短的欧式距离与人类的色彩辨别性能密切相关。

2. Idea

对一幅图像$f(x)$运用 low-pass domain filter 之后的输出为：

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = k_d^{-1}(\boldsymbol{x}) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f}(\xi) c(\xi, \boldsymbol{x}) d\xi \tag{1.1}$$

其中$c(\xi,\boldsymbol{x})$式邻域中心$\boldsymbol{x}$与临近点ξ的几何的相似度，粗体的$\boldsymbol{f}$和$\boldsymbol{h}$代表输入与输出图像可以是多频段的。如果低通滤波是为了保留我们得到的低通信号的直流分量

$$k_d(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(\xi, \mathbf{x}) d\xi \tag{1.2}$$

如果滤波器具有旋转不变性，则$c(\xi,\boldsymbol{x})$只是向量$\xi - \boldsymbol{x}$的一个函数，这时候的k_d是一个常量。

同理，range filtering 的定义如下：

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = k_r^{-1}(\mathbf{x}) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}(\xi) s(\mathbf{f}(\xi), \mathbf{f}(\mathbf{x})) d\xi \tag{1.3}$$

这里，$s(\mathbf{f}(\xi),\mathbf{f}(\mathbf{x}))$代表的是域中心$\boldsymbol{x}$与临近点$\xi$的亮度的相似度。因此，相似度函数$s$在$\boldsymbol{f}$的 range 中操作，亲密度函数$c$则在$\boldsymbol{f}$的 domain 中运算。(2)中的归一化常量被替代为

$$k_r(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s\,(\mathbf{f}(\xi),\mathbf{f}(\mathbf{x}))d\xi \tag{1.4}$$

与亲近度函数相反，相似度函数的归一化依赖于$\boldsymbol{f}$。如果相似度函数仅仅依赖于$\boldsymbol{f}(\xi)-\boldsymbol{f}(x)$，我们则认为$s$是无偏的。

图像强度的空间分布对于 range filter 来说无关紧要。然而，结合整个图像的强度几乎没有意义，因为远离$\boldsymbol{x}$的图像值不应该影响$\boldsymbol{x}$处的最终值。除此之外，我们知道 range filter 仅仅改变图像的 color map，因此用处不大。合理的方法就是结合 range and domain filtering，从而可以执行几何与强度的局部化。结合后的表达式为

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = k^{-1}(\mathbf{x})\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{f}\,(\xi)c(\xi,\mathbf{x})s(\mathbf{f}(\xi),\mathbf{f}(\mathbf{x}))d\xi \tag{1.5}$$

归一化函数为：

$$k(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} c\,(\xi,\mathbf{x})s(\mathbf{f}(\xi),\mathbf{f}(\mathbf{x}))d\xi \tag{1.6}$$

结合 range and domain filtering 产生的是 bilateral filter。它用$\boldsymbol{x}$附近相似的像素值的平均值来替代$\boldsymbol{x}$处的值。在平滑的区域内，在一个小的邻域内，像素值相似，归一化相似度函数k^{-1}接近于 1.结果 bilateral filter 扮演的是 domain filter，对噪声引起的像素值之间的小的、弱相关的差异进行平均。当双边滤波器居中时，例如，在边界亮侧的像素上，相似函数 s 假设同侧像素的值接近 1，暗侧像素的值接近 0。需要确保归一化函数的值的和为 1。这样，中心在亮侧像素的值被附近亮度像素的平均值所替代。对于中心在暗处的像素值，道理相同。

1) Example：Gaussian Case

一个简单重要的情况是 Bilateral filter 是一个平移不变的高斯函数，其中亲密度函数和相似函数都是它们参数之间欧式距离的高斯函数。进一步说，c 是径向对称的

$$c(\xi,\boldsymbol{x}) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{d(\xi,\boldsymbol{x})}{\delta_d}\right)^2}$$

其中$d(\xi,\boldsymbol{x}) = d(\xi-\boldsymbol{x}) = \|\xi-\boldsymbol{x}\|$是$\boldsymbol{x}$与$\xi$之间的欧式距离。相似度函数 s 与 c 类似

$$s(\xi,\boldsymbol{x}) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta(\boldsymbol{f}(\xi),\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))}{\delta_r}\right)^2}$$

其中$\boldsymbol{\delta}(\phi,\boldsymbol{f}) = d(\phi-\boldsymbol{f}) = \|\phi-\boldsymbol{f}\|$是关于$\phi$与$\boldsymbol{f}$强度值距离适当的度量。在标量的情况下，这可能是像素的绝对差。

基于所需的低通滤波量选择域中的几何扩展δ_d。较大的δ_d会使更多的模糊(高斯函数方差越大越平滑)，即，它将来自更远图像位置的值组合在一起。如果图像被放大或缩小，相应的δ_d也要进行调整。同样，设定δ_r可以控制想要结合的图像强

度值的数量。笼统来说，像素之间值的距离小于δ_r的则结合在一起，反之，则不结合。如果图像放大或衰减，则δ_r也需要相应的调整。

像这种形式的 domain filter 具有平移不变性，上面介绍的 Gaussian range filter 对图像的总体加性变化不敏感，因此它是无偏的：range filter 具有平移不变性。

3. **Range Versus Bilateral Filtering**

前面的章节我们把 range filtering 和 domain filtering 结合在一起变为 bilateral filters。我们现在展示这种结合的必要性。为了符号简单，我们限制讨论范围为黑白图像，当然类似的结果同样可以运用到多频带的图像中。本节的主要观点是范围滤波本身仅仅修改它所应用的图像的灰度图。这是距离滤波器没有空间概念这一事实的直接结果。

让$\nu(\phi)$代表输入图像的灰度级频率分布。在离散的情况下$\nu(\phi)$代表的是灰度直方图：ϕ通常是 0 到 255 之间的整数，$\nu(\phi)$是图像像素ϕ的分数。在连续的情况下，$\nu(\phi)d\phi$代表的是位于ϕ和$\phi+d\phi$的面积。为了和前面的章节一致，我们在连续的情况下进行讨论。

简单的化简(1,3)和(1,4)可以得到

$$h=\int_0^{\infty}\phi\tau(\phi,f)d\phi \tag{1.7}$$

其中$\tau(\phi,f)=\dfrac{s(\phi,f)\nu(\phi)}{\int_0^{\infty}s(\phi,f)\nu(\phi)d\phi}$与位置 x 无关。等式(1.7)表明 range filter 仅仅是灰度级的简单变换，$\tau(\phi,f)$是一个密度函数，从直观上看，它是非负的，并且积分为 1。

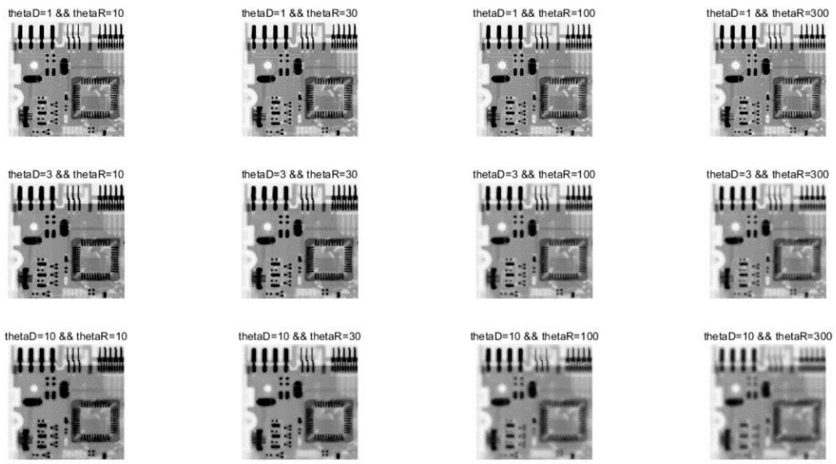
首先，Range filter 如果仅仅是对原灰度图的一个变换，那么它将毫无价值，但是如果把它和 domain filter 像(1,5)和(1,6)那样结合在一起的话，情况就不一样了。首先考虑在以坐标x为中心的窗口中，domian 的亲密度函数是不变的，窗口之外则是 0，bilateral filter 仅仅是在这个窗口上运用了 range filter。乍一看，滤波后的图像还是原灰度图像的一个映射，但是这个映射函数T在不同位置是不同的。

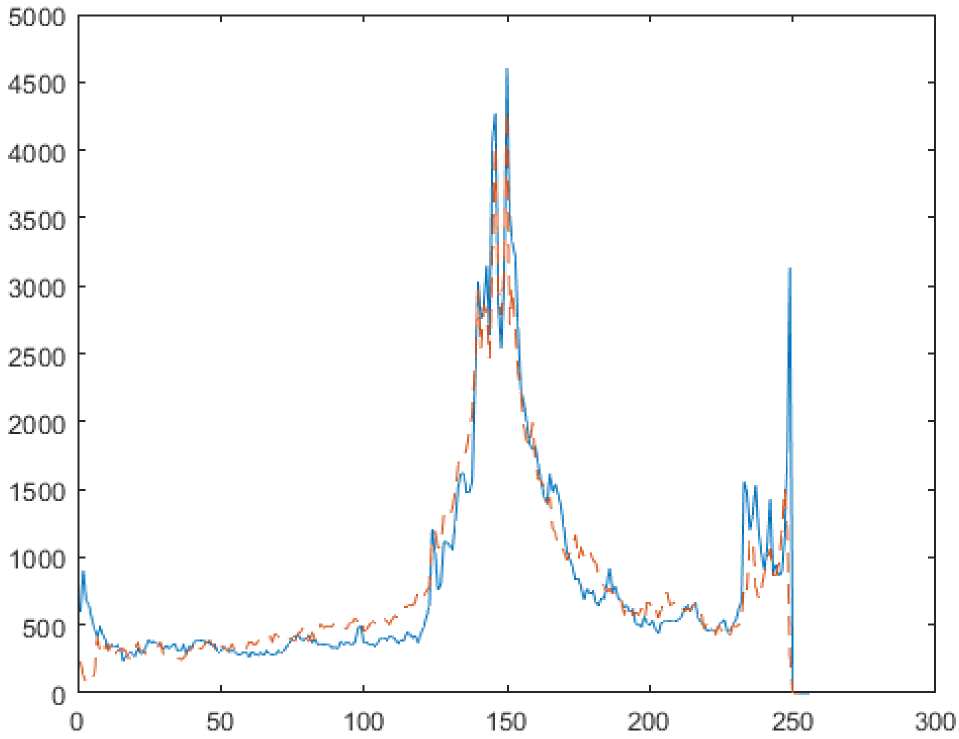
4. **Experiments with Black-and-White Images**

图中展示了不同的σ_r和σ_d对图像滤波效果的影响，行方向 range filter 不同，列方向 domian filter 不同。当 range filter 的变量σ_r的值很大时(100 或 300)，考虑到整幅图像的范围是(1 t0 254)，当σ_d很小时，range filter 的影响也很小：来自 range filter 的的权值几乎一样，domain filter 就是一个标准的高斯滤波器。这个影响可以在最后两列看到。当σ_r的值很小时(10 or 30)，range filter 因为保留了边缘而显得很完美。

然而，对于σ_d=10，被值小的σ_d移除的细节又重新出现了，这个可以在最后一行观

察到。特别对于σ_d =10，σ_r =100 这张图片，虽然它看起来很朦胧，但是它比它上面的图片看起来更加保真。这正是灰度变换和直方图压缩的结果。实际上，σ_d =10 是一个宽的高斯（对于宽的高斯，中心邻域内的权值比窄的高斯要小），而 bilateral filter 实际上就是一个 range filter。因为强度值仅仅被 range filter 映射，所以没有细节丢失。进一步说，因为 range filter 压缩了图像的直方图，所以输出图像出现了朦胧。从直方图中可以看出压缩是明显的。





在计算复杂度方面，对于同样大小的滤波器尺寸，bilateral filter 是不可分 domain filter 的两倍，距离分量与图像线性相关，不可分离。一个减少计算量的技巧就是事先算好相似度函数$s(\phi, f)$所有的值。在高斯的情况下，如果图像又 n 层灰度级，对于 s 就有 2n+1 个值，每个可能的值对应于一个$\phi - f$。