

V353

Relaxationsverhalten eines RC-Kreises

Yanick Sebastian Kind
yanick.kind@udo.edu

Till willershausen
till.willershausen@udo.edu

Durchführung: 08.12.2020

Abgabe: 18.12.2020

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Ziel	3
2 Theorie	3
2.1 Allgemeine Relaxationsgleichung	3
2.2 Entladevorgang eines Kondensators	3
2.3 Relaxationsphänomene bei angelegter Wechselspannung	4
2.4 Der RC-Kreis als Integrator	5
3 Aufbau und Durchführung	5
3.1 Messreihe zur Bestimmung der Zeitkonstanten mit Hilfe des Entladevorgangs	5
3.2 Messreihe zur Bestimmung von Spannungsamplituden	6
3.3 Messreihe zur Bestimmung der Phasenverschiebung	6
3.4 Messreihe zur Integratorfähigkeit des RC-Kreises	6
4 Auswertung	7
4.1 Bestimmung der Zeitkonstante mit dem Entladevorgang	7
4.2 Frequenzabhängige Spannungsmessung	9
4.3 Bestimmung der Zeitkonstante mittels frequenzabhängiger Phasenverschiebung	10
4.4 Der RC-Kreis als Integrator	12
5 Diskussion	14
Literatur	14

1 Ziel

Ziel dieses Versuchs ist es, das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises zu untersuchen. Dazu wird die Zeitkonstante des Rc-Kreises, mit Hilfe verschiedener Verfahren ermittelt. Zudem werden die Amplituden in Abhängigkeit der Phasenverschiebung untersucht. Es soll außerdem die Integrationsfähigkeit eines RC-Kreises überprüft werden.

2 Theorie

Die Inhalte des Theorieteils sind auf Grundlage von Dokument [1] formuliert. In der elektrischen Schaltungstechnik werden RC-Kreise häufig als Tiefpässe genutzt. Zur Beschreibung des Verhaltens eines RC-Kreises wird die Zeitkonstante RC genutzt.

2.1 Allgemeine Relaxationsgleichung

Wird ein System aus seinem Ausgangszustand entfernt und es nicht in diesen zurück oszilliert, nennt man dies eine Relaxationserscheinung. In diesem Versuch wird die Entladung eines Kondensators über einen Widerstand als Beispiel für ein Relaxationsphänomen gewählt. Zunächst wird allgemein die Änderungsgeschwindigkeit einer Größe A betrachtet. Diese ist meist proportional zur Abweichung der Größe A vom Endzustand $A(\infty)$

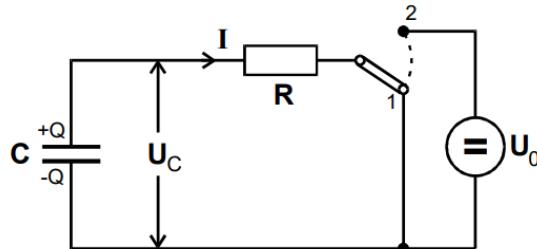
$$\frac{dA}{dt} = c[A(t) - A(\infty)] .$$

Durch Integrieren und Umformen der Gleichung erhält man für $A(t)$

$$A(t) = A(\infty) + [A(0) - A(\infty)]e^{ct}, \quad (1)$$

mit einem $c < 0$, da $A(t)$ beschränkt sein muss.

Abbildung 1: Schaltbild der Entladung (Stellung 1) und Aufladung (Stellung 2) eines Kondensators über einen Widerstand



2.2 Entladevorgang eines Kondensators

In Abbildung 1 sieht man den Aufbau für den Auf- und Entladezustand eines Kondensators. Für den Versuch wurde nur der Entladevorgang genutzt, weshalb dieser auch nur in dem

Theorieteil auftaucht. Besitzt ein Kondensator mit der Kapazität C eine Ladung Q , so liegt dort die Spannung

$$U_C = \frac{Q}{C}$$

an. Mit dem Zusammenhang

$$I = \frac{U_C}{R} = -\frac{dQ}{dt}$$

ergibt sich für die Ladung Q beim Entladevorgang, die zeitliche Differentialgleichung

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC} Q(t) . \quad (2)$$

Bei der Entladung wird der Kondensator nach unendlich langer Zeit entladen sein. Es gilt

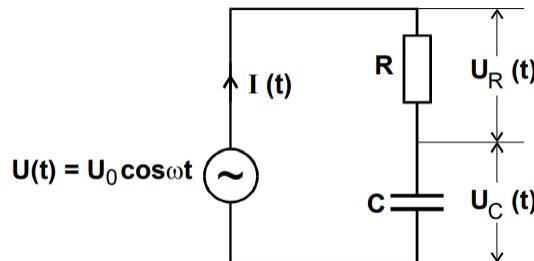
$$Q(\infty) = 0 .$$

Mit Hilfe von Integration folgt für Q

$$Q(t) = Q(0) \exp(-t/RC) . \quad (3)$$

2.3 Relaxationsphänomene bei angelegter Wechselspannung

Abbildung 2: RC-Kreis mit Wechselspannung



Eine angelegte Wechselspannung kann wie in 2, als

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t)$$

dargestellt werden. Beim Vergleich der Spannungen $U(t)$ und $U_c(t)$ in Abhängigkeit von der Frequenz, bildet sich eine Phasenverschiebung φ aus. Somit lässt sich die ausgehende Wechselspannung als

$$U_C(t) = A(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) \quad (4)$$

darstellen. Dabei ist $A(\omega)$ die Kondensatorspannungsamplitude. Mit (2) und (5) lässt sich $I(t)$ darstellen als

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dU_C}{dt} . \quad (5)$$

Durch weitere Umformungen kann die Kondensatorspannungsamplitude in Abhängigkeit dargestellt werden als

$$A(\omega) = -\frac{\sin(\varphi)}{\omega RC} U_0. \quad (6)$$

In Gleichung (6) lässt sich φ , ersetzen somit ergibt sich für $A(\omega)$

$$A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}. \quad (7)$$

Es sind mehrere Eigenschaften für $A(\omega)$ ersichtlich. Bei $\omega \rightarrow 0$ geht die Amplitude gegen U_0 , während sie bei $\omega \rightarrow \infty$ verschwindet. Dies sind Eigenschaften eines Tiefpasses. Es ist auch zu erkennen, dass $A(\omega)$ nach (7) nur mit $1/\omega$ gegen 0 geht.

2.4 Der RC-Kreis als Integrator

Ein RC-Kreis, welcher wie in Abbildung 2 angeschlossen ist, ist in der Lage eine zeitlich veränderliche Spannung $U(t)$ zu integrieren. Es lässt sich zeigen, dass die Spannung U_C , bei Frequenzen $\omega \gg \frac{1}{RC}$, proportional zu $\int U(t)dt$ ist. Dazu nimmt man die Maschenregel

$$U(t) = U_R(t) + U_C(t) = I(t)R + U_C(t) \quad (8)$$

und ersetzt $I(t)$ durch (5) und bekommt

$$U(t) = RC \frac{dU_C}{dt} + U_C(t).$$

Unter der Bedingung $\omega \gg \frac{1}{RC}$ ist $|U_C| \ll |U_R|$ und $|U_C| \ll |U|$. Damit lässt sich näherungsweise

$$U(t) = RC \frac{dU_C}{dt}$$

schreiben, welches durch Umformen und Integrieren zu

$$U_C(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t U(t') dt' \quad (9)$$

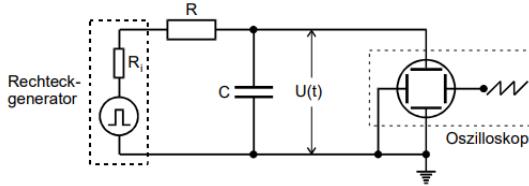
wird.

3 Aufbau und Durchführung

3.1 Messreihe zur Bestimmung der Zeitkonstanten mit Hilfe des Entladevorgangs

Der Versuch wird wie in Abbildung 3 aufgebaut. Dazu werden ein Kondensator mit der Kapazität C und ein Widerstand mit dem Ohm'schen Widerstand R an einen Spannungsgenerator und ein Oszilloskop angeschlossen. Es wird eine Rechteckspannung mit Hilfe des Generators erzeugt. Die Rechteckfrequenz und die Einstellungen am Oszilloskop werden so gewählt, dass sich $U(t)$ um den Faktor 5 bis 10 ändert. Es werden 15 bis 20 Messwerte von $U(t)$ und den dazugehörigen Zeiten abgelesen.

Abbildung 3: Aufbau zur Bestimmung der Zeitkonstante eines Entladenvorgangs



3.2 Messreihe zur Bestimmung von Spannungsamplituden

Der Aufbau für die Messreihe ist Identisch zu dem Vorherigen. Statt einer Rechteckspannung wird nun eine Sinusspannung erzeugt, bei der sich die Frequenz anpassen lässt. In der Durchführung wird nun die Frequenz am Sinusgenerator logarithmisch erhöht und es wird am Oszilloskop die Amplitude $A(\omega)$ gemessen. Dies wird 15 bis 20 mal wiederholt.

3.3 Messreihe zur Bestimmung der Phasenverschiebung

In der dritten Messreihe soll die Phasenverschiebung ermittelt werden. Dazu wird der Versuch wie in Abbildung 4 aufgebaut. Es wird wieder eine Sinusspannung angelegt und die Frequenzen werden logarithmisch erhöht. Dadurch lassen sich die Phasenverschiebungen in Abhängigkeit von ω mit

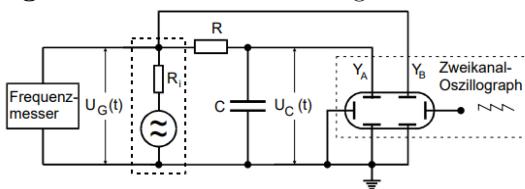
$$\varphi = \frac{a}{b} 2\pi \quad (10)$$

berechnen, dabei werden die Werte a und b wie in 5 abgelesen. Mit der Phasenverschiebung φ , lässt sich die Zeitkonstante bestimmen. Dazu kann die Gleichung

$$\varphi(\omega) = \arctan(-\omega RC) \quad (11)$$

verwendet werden.

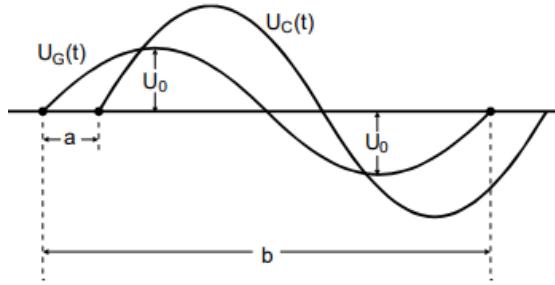
Abbildung 4: Aufbau zur Bestimmung der Phasenverschiebung



3.4 Messreihe zur Integratorfähigkeit des RC-Kreises

Für diese Messreihe kann der Versuchsaufbau aus 3.3 übernommen werden. Auf dem Oszilloskop sind die Spannungsverläufe $U(t)$ des Generators und die integrierte Spannung $U_C(t)$ zu erkennen. Am Generator werden nacheinander eine Rechteckspannung, eine Dreieckspannung und zuletzt eine Sinusspannung erzeugt. Dadurch entstehen drei verschiedene Bilder der zwei Spannungsverläufe. Diese werden dann abfotografiert.

Abbildung 5: Skizze zur Bestimmung der Phasenverschiebung



4 Auswertung

Jegliche Fehlerrechnung wurde mit der python-Bibliothek uncertainties [3] absolviert. Trotz dessen sind die Formeln für die Unsicherheiten in den jeweiligen Abschnitten angegeben. Allgemeine Rechnungen wurden mit der python-Bibliothek numpy [4] automatisiert. Die Messdaten und Ausgleichskurven wurden mit Hilfe der python-Bibliothek matplotlib [2] erstellt.

Die Spannung U_0 beträgt bei allen Durchführungen 6,4 V

4.1 Bestimmung der Zeitkonstante mit dem Entladevorgang

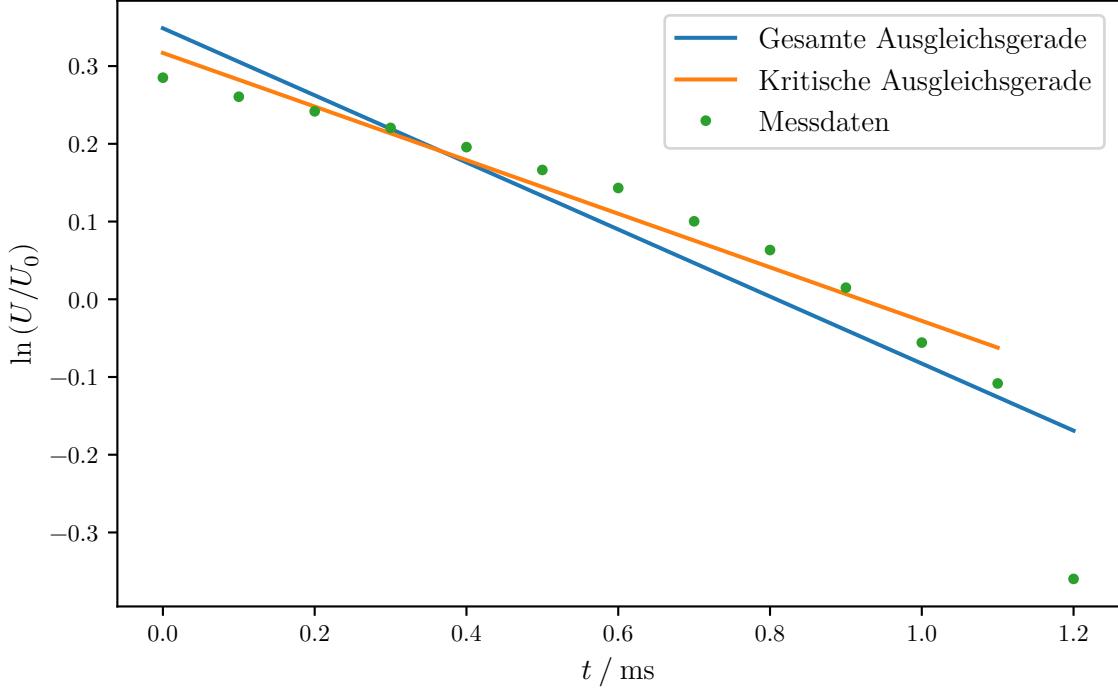
Die während der Durchführung gemessenen Werte für U_C in Abhängigkeit von der Zeit sind in Tabelle 1 aufgeführt. Bei dem Spannungsverlauf in Abbildung 6 ist zunächst

Tabelle 1: Gemessene Kondensatorspannung $U_C(t)$

t / ms	U_C / V
0	6,2
0,1	5,3
0,2	4,7
0,3	4,1
0,4	3,5
0,5	2,9
0,6	2,5
0,7	1,9
0,8	1,5
0,9	1,1
1	0,7
1,1	0,5
1,2	0,1

anzumerken, dass dort zwei Ausgleichsgeraden angelegt wurden. Dies liegt der Ursache zu Grunde, dass der letzte Punkt der Messreihe einen sehr starke Abweichung zeigt.

Abbildung 6: Verlauf der Spannung bei einem Entladenvorgang



Die gesamte Ausgleichsgerade beschreibt die komplette Messreihe, wobei der letzte Messwert bei der kritischen Ausgleichsgerade ausgelassen wurde. Im Folgenden werden die Rechnungen mit den Parametern der kritischen Ausgleichsgeraden durchgeführt. Für die Bestimmung der Zeitkonstante RC wird Gleichung (3) verwendet. Jedoch wird die Ladung Q durch die Spannung U_C ersetzt. Umgestellt und logarithmiert ergibt sich

$$\ln\left(\frac{U_C}{U_0}\right) = -\frac{t}{RC} . \quad (12)$$

Die Ausgleichsgerade hat die Form $\ln(U_C/U_0) = at + b$, wobei $a = -1/RC$ gilt. Die Parameter haben die Werte

$$a = (-0,3447 \pm 0,0229) \frac{1}{\text{ms}}$$

$$b = 0,3169 \pm 0,0149 .$$

Der Wert für a in $RC = -1/a$ eingesetzt ergibt

$$RC = (2,90 \pm 0,19) \text{ ms} .$$

Nach jeder Ausgleichsrechnung erhält man die Zeitkonstante direkt durch einen Parameter der Ausgleichsfunktion. Jedoch bildet dieser Teil der Auswertung eine Ausnahme, denn hier wird die Zeitkonstante mit $RC = -1/a$ errechnet, so dass hier die Formel der

Gaußschen Fehlerfortpflanzung angewendet werden muss. Somit ergibt sich der Fehler der Zeitkonstante zu

$$\Delta RC = \left| \frac{1}{a} \right| \Delta a . \quad (13)$$

4.2 Frequenzabhängige Spannungsmessung

Die Messwerte für die Kondensatorspannung U_C in Abhängigkeit von der Frequenz ω sind in Tabelle 2 aufgelistet. Um die nichtlineare Ausgleichskurve anlegen zu können

Tabelle 2: Gemessene Kondensatorspannung $U_C(\omega)$

ω / Hz	U_C / V
10	6,4
20	6,4
40	6,2
60	6,0
80	5,6
100	5,4
200	3,6
400	2,0
600	1,4
800	1,05
1000	0,85
2000	0,44
4000	0,2
6000	0,014
8000	0,0105
10 000	0,0085

wird zunächst die Funktion der Amplitude benötigt, welche in Gleichung (7) aufgeführt ist. Fortlaufend wird zur Vereinfachung R^2C^2 zu τ^2 umdefiniert. Die Frequenz ω wird zur Klarifizierung in x umbenannt. Somit nimmt die Funktion der Ausgleichskurve die Gestalt

$$f(x) = \frac{U_C}{U_0}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2\tau^2}} \quad (14)$$

an. Mittels der Ausgleichsrechnung in Python ergibt sich τ zu

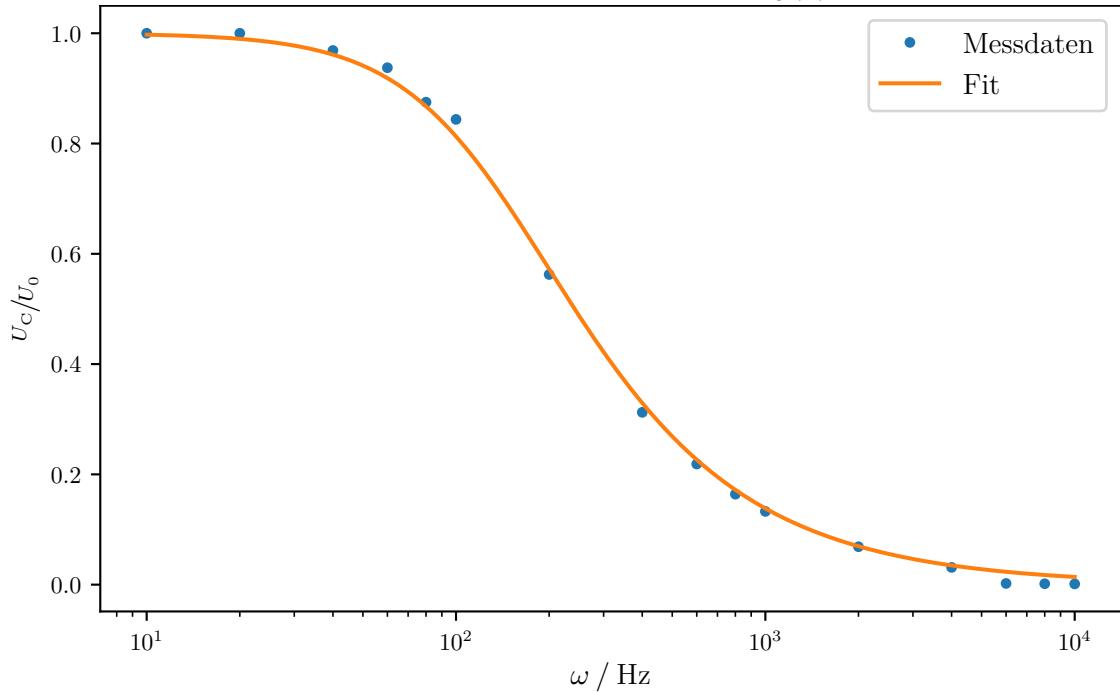
$$\tau = (-7,1653 \pm 0,1441) \text{ ms}$$

Somit ergibt sich die Zeitkonstante RC zu

$$RC = (7,1653 \pm 0,1441) \text{ ms} . \quad (15)$$

Die Messdaten samt Fit sind in Abbildung 7 visualisiert.

Abbildung 7: Kondensatorspannung $U_C(\omega)$



4.3 Bestimmung der Zeitkonstante mittels frequenzabhängiger Phasenverschiebung

Die Messwerte für die Frequenz ω , der Zeitabstände der Nulldurchgänge a und der Schwingungsdauern b sind in Tabelle 3 aufgetragen. Zusätzlich beinhaltet diese Tabelle die aus den Messdaten berechneten Phasenverschiebungen, welche sich mittels Gleichung (10) berechnen lassen. Um die Zeitkonstante mit Hilfe der Phasenverschiebung graphisch zu bestimmen, wird die Gleichung (11) benötigt. Erneut wird die Zeitkonstante RC zu τ umdefiniert und die Frequenz ω in x unbenannt. Somit erhält die Ausgleichskurve die Darstellung

$$f(x) = \varphi(x) = \arctan(-x\tau) \quad (16)$$

Durch Ausgleichsrechnung in python ergibt sich der Parameter τ zu

$$\tau = (-8,2744 \pm 0,3239) \text{ ms}$$

Somit wird der Wert der Zeitkonstanten RC mit der Methode der Phasenverschiebung zu

$$RC = \tau = (8,2744 \pm 0,3239) \text{ ms}$$

Das Verhältnis $A(\omega)/U_0$ in Abhängigkeit von der Phase φ ist in einem Polarplot in Abbildung 9 dargestellt.

Tabelle 3: Gemessene Frequenz, Zeitabstände der Nulldurchgänge $a(\omega)$, Schwingungsdauern $b(\omega)$ und berechnete Phasenverschiebung $\varphi(\omega)$

ω / Hz	a / ms	b / ms	φ / rad
10	1,2	110	0,07
20	1,5	55	0,17
40	1,7	25	0,42
60	1,15	16,6	0,44
80	1,1	12,6	0,55
100	1,08	10	0,68
200	0,8	5	1,01
400	0,52	2,5	1,31
600	0,36	1,7	1,33
800	0,28	1,24	1,42
1000	0,23	1	1,45
2000	0,12	0,49	1,54
4000	0,06	0,25	1,51
6000	0,04	0,168	1,5
8000	0,031	0,128	1,52
10 000	0,024	0,1	1,51

Abbildung 8: Phasenverschiebung $\varphi(\omega)$

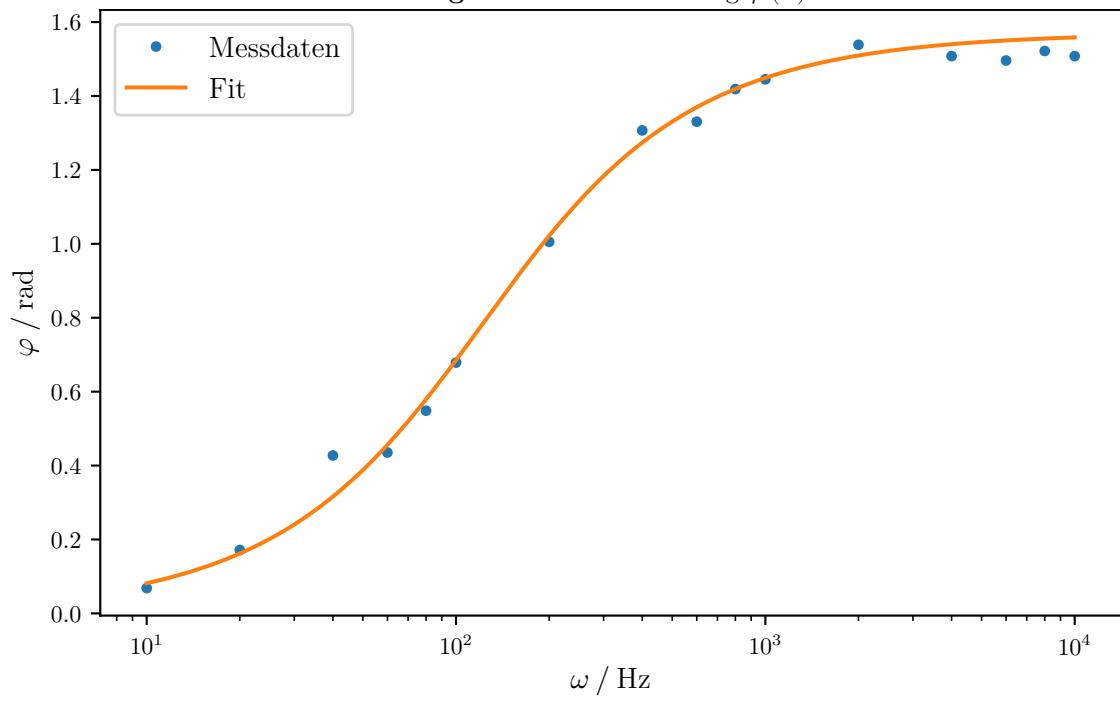
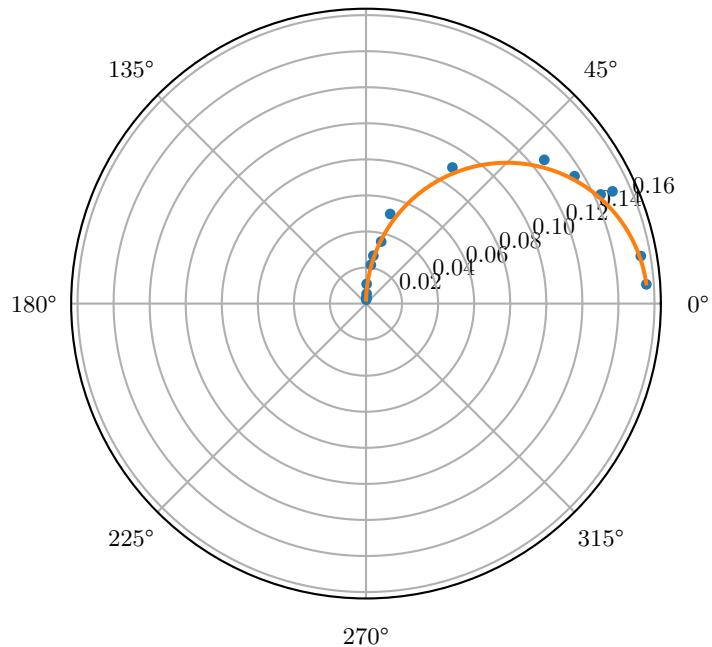


Abbildung 9: Polarplot von der Amplitude $A(\varphi)$



4.4 Der RC-Kreis als Integrator

Der RC-Kreis kann unter der Voraussetzung

$$\omega \gg \frac{1}{RC} \quad (17)$$

als Integrator angesehen werden. Bei der Aufnahme der folgenden Bildern wurde die Bedingung mit einer hohen Frequenz erfüllt. Somit entstanden die Impressionen der Rechteck-, Sinus- und Dreiecksspannung. Beispielsweise wird an der Abbildung 11 sehr schön deutlich, dass der RC-Kreis als Integrator dienen kann, da dort ebenfalls eine Cosinus-Kurve zu sehen ist. Da der Sinus die Stammfunktion von dem Cosinus ist, ist dieses Bild beispielhaft für die Integratorfunktion.

Abbildung 10: Rechteckspannung

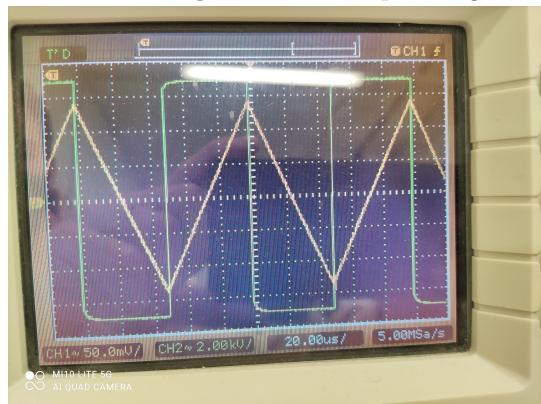


Abbildung 11: Sinusspannung

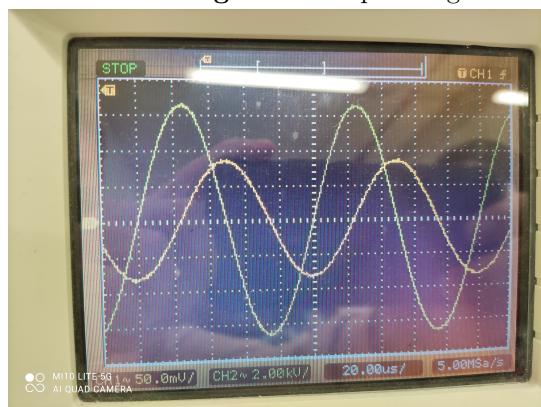
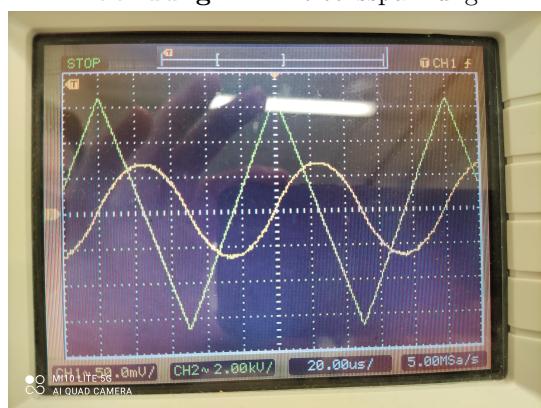


Abbildung 12: Dreiecksspannung



5 Diskussion

In Abbildung 6 fällt direkt auf, dass dort zwei Ausgleichgeraden angelegt wurden. Der Grund dazu wurde schon in der Auswertung genannt. Der Grund für diese starke Abweichung des letzten Messpunktes könnte an einem systematischen Fehler liegen. Einerseits wurde diese Messreihe vor einem Kabelaustausch aufgenommen. Da das ausgetauschte Kabel nach der Messreihe einen Defekt auswies, könnte dieser Defekt aber schon auf die vorige Messung Einfluss genommen haben, so dass besonder niedrige Spannung besonders unscharf gemessen werden können. Andererseits wurde die Funktion die Zeitskala an dem Oszilloskop zu verringern erst in der zweiten Messreihe entdeckt. Darunter könnte die Ablesgenauigkeit der ersten Meessreihe gelitten haben. Jedoch wird die hohe Übereinstimmung der zweiten und dritten Messverfahren auffällig. Der erste Wert für Zeitkonstante weicht von dem zweiten Wert um 59,53 % ab. Der zweite und der dritte Wert weisen nur eine Abweichung von 13,41 % auf. Dies könnte in Verbindung mit dem oben genannten Fehler in Verbindung stehen. Diese starke Abweichung kann man aber auch auf die Frequenzabhängigkeit bzw. Frequenzunabhängigkeit zurück zu führen. Bei den frequenzabhängigen Messungen hat der Generatorinnenwiderstand von $R = 600 \Omega$ einen Einfluss. Ebenfalls anzumerken ist die Funktion des RC-Kreises als Integrator. Mit Hilfe des RC-Kreises lässt sich z.B. die Beziehung zwischen der Sinus- und Cosinus-Kurve Funktion sehr schön darstellen.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *V353: Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises*.
- [2] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [3] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [4] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.