

Blatt 0

Yanick Kind

Till Willershausen

Justus Dung

2. Juni 2023

Aufgabe 1

1 logistische Funktion

Die Iterationsroutine kann in der Datei "Bifurkation.py" eingesehen werden.

Eine Möglichkeit um das R_{max} , also den maximalen R-Wert zu bestimmen, bei dem die Abbildung innerhalb der Grenzen bleibt, ist in der Datei "MaxR.py". Für die logistische Funktion wird ein R_{max} von 4 bestimmt.

Zur Bestimmung der Fixpunkte wird der Ljapunow-Exponent verwendet. Er ist der

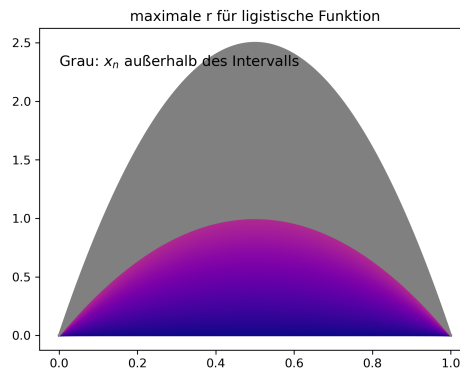


Abbildung 1: Darstellung für die Bestimmung von R_{max}

natürliche Logarithmus des Betrags der Ableitung und wird deswegen $=0$ wenn die Ableitung $=1$ wird. Er wird entsprechend $=0$ (näherungsweise) an marginal stabilen Fixpunkten (wo Fixpunkte instabil werden). Beim Plotten des Ljapunow-Exponent stellt daher die Anzahl der Nullstellen die Anzahl der Fixpunkte dar, bei denen sich die Orbits verdoppeln. Die Feigenbaumkonstante berechnet sich dann aus dem Verhältnis der Abstände dieser Nullstellen. Da R_∞ definiert ist mit $G = 64 = 2^6$, ist der chaotische Punkt ab der 5. Nullstelle des Ljapunow-Exponenten erreicht. Bestimmte Nullstellen:

Tabelle 1: Nullannäherungen Ljapunow-Exponent

r	Ljapunow-Exponent/Iterationen
1.001	-0.0008
2.999	-0.0005
3.448	-0.0011
3.543	-0.0007
3.605	0.0028

Daraus ergibt sich die Feigenbaumkonstante zu $\delta = 4,72$ und $R_\infty = 3,605$. Es wurden 4 verschiedene Startwerte verwendet. Die Abbildungen dazu sind im Ordner. Eins mit

Startwert $x_0 \approx 0$ ist hier angehängt:

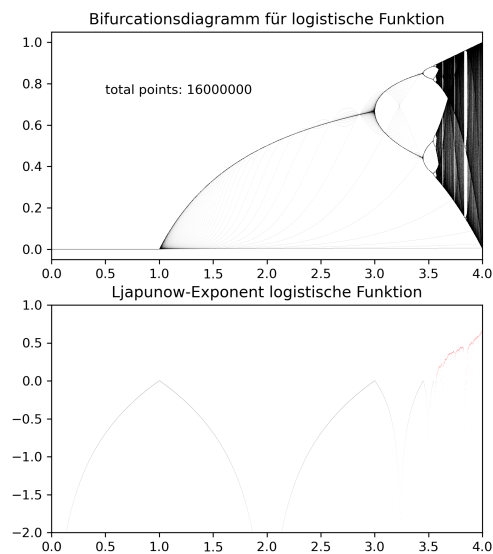


Abbildung 2: Bifurkationsdiagramm logistische Funktion

2 kubische Funktion

Das Vorgehen bleibt natürlich das selbe wie bei der logistischen Funktion.

R_{max} wird bestimmt zu $R_{max} = 3$. Es ergeben sich nur 2 Nullstellen des Ljapunow-Exponenten.

Tabelle 2: Nullannäherungen Ljapunow-Exponent

r	Ljapunow-Exponent/Iterationen
0.999	-0.0006
1.645	-0.0007

Zur Bestimmung dvon δ und R_∞ werden deswegen die Orbits weiteren nur abgelesen zu $r_3 = 2.25$, $r_4 = 2.3$, $r_5 = R_\infty = 2.31$.

(Bei der kubischen Funktion bin ich mir nicht besonders sicher)

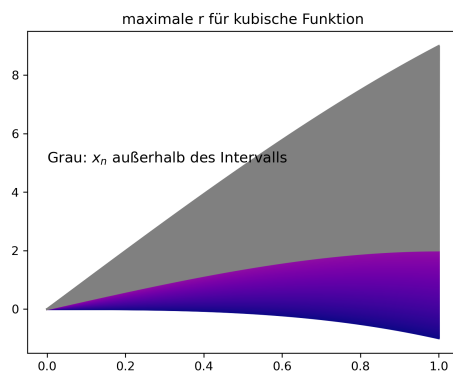


Abbildung 3: Darstellung für die Bestimmung von R_{max}

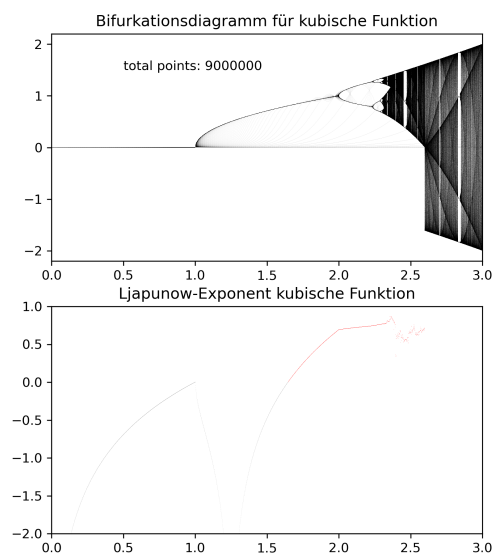


Abbildung 4: Bifurkationsdiagramm kubische Funktion

Aufgabe 2

In der Abbildung 5 sind die projizierten X-Y-Ebenen für verschiedene Startvektoren bei $r = 20$. Es fällt auf, dass bei dem X-Wert von 1 noch ein zweites Orbital leicht auftaucht, welches sonst nicht auftritt. In Abbildung 6 sind die projizierten X-Y-Ebenen für die Lösungen mit $r = 28$ dargestellt. Bei allen Anfangswerten sind zwei klare Orbitale zu erkennen. In Abbildung 7 sind die 3D-plots der Poincare-Abbildung bei den verschiedenen

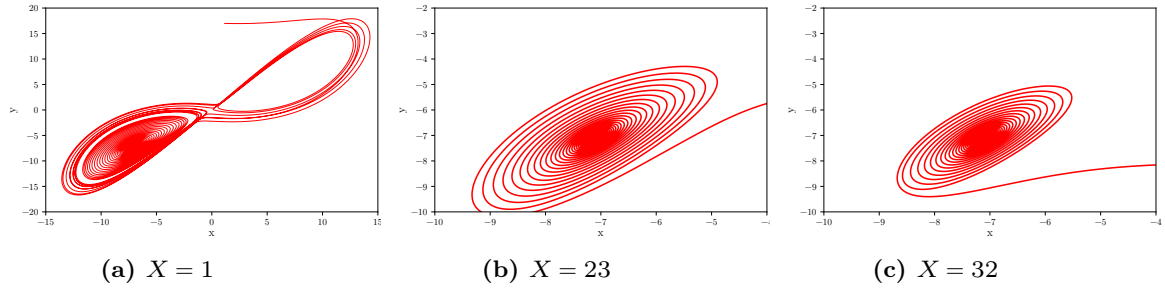


Abbildung 5: X-Y-Ebenen projektion bei dem Startwert $\vec{y} = (X, 17, 13)$ und mit $r = 20$.

r Werten gegeben. Die beobachtungen von der Abbildung 5 und 6 können hier auch wieder gezeigt werden.

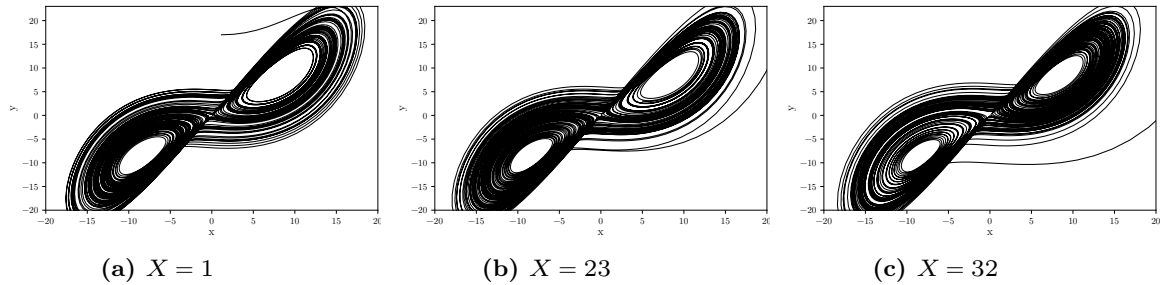
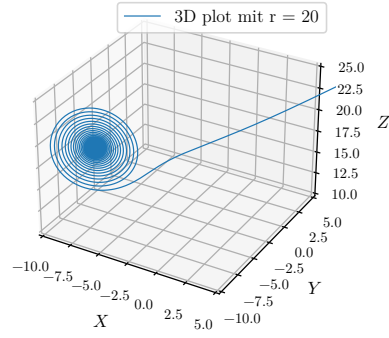
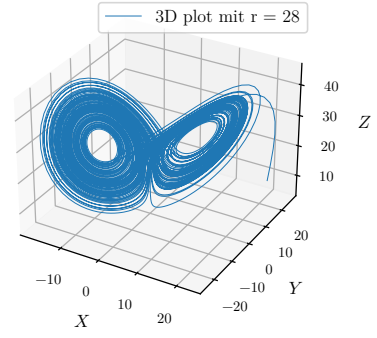


Abbildung 6: X-Y-Ebenen projektion bei dem Startwert $\vec{y} = (X, 17, 13)$ und mit $r = 28$.

Die Poincare-Schnitte durch $Z = \text{const.} = 20$ bei $\dot{Z} < 0$ sind in Abbildung 8 dargestellt. Dabei fällt auf, dass bei $r = 20$ nur eine gerade auftaucht, während bei $r = 28$ eine Ellipse auftaucht. Dies kann in Abbildung 7 an den 3D-Plots gut erklärt werden. Es ist zu sehen, dass im Fall von $r = 20$ eine Schnittgerade mit dem Orbit auftaucht. Dieser resultiert in einer geraden in der $Z = 20$ -Ebene. Zusätzlich kann dem Fall $r = 28$ der zweite Orbit hinzugefügt werden. Somit kommt es zu einer zweiten Verbindungsstrecke, sodass insgesamt eine ellipse erreicht wird.

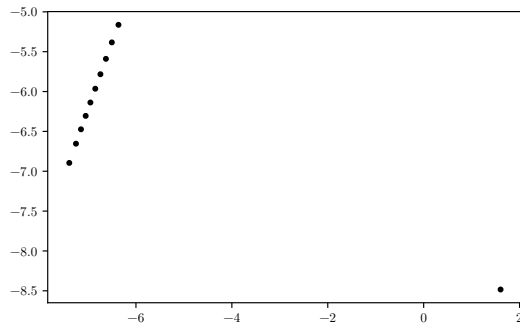


(a) $r = 20$

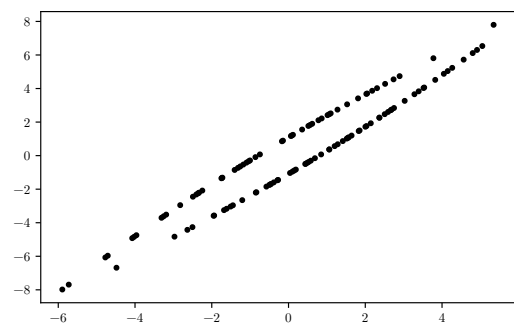


(b) $r = 28$

Abbildung 7: 3D-Plots bei dem Startwert $\vec{y} = (32, 17, 13)$ für verschiedene r .



(a) $r = 20$



(b) $r = 28$

Abbildung 8: Poincare-Schnitt durch $Z = 20$ bei dem Startwert $\vec{y} = (32, 17, 13)$ und mit verschiedenen r