

# **Zusammenfassung zur Vorlesung Gruppentheorie in der Physik I**

Yanick Sebastian Kind  
yanick.kind@udo.edu

15. März 2023

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Ergänzen</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Abstrakte Gruppentheorie</b>	<b>4</b>
2.1	Definition: Gruppe . . . . .	4
2.1.1	Endliche Gruppe . . . . .	4
2.2	Multiplikationstabelle . . . . .	5
2.2.1	Rearrangement Theorem . . . . .	5
2.3	Zyklische Gruppe . . . . .	5
2.4	Untergruppen und Nebenklassen . . . . .	5
2.4.1	Satz: Disjunktheit oder Gleichheit . . . . .	5
2.4.2	Satz: Index einer Untergruppe . . . . .	6
2.5	Konjugierte Elemente und Klassen . . . . .	6
2.5.1	Konjugationsklasse . . . . .	6
2.6	Normalteiler und Faktorgruppen . . . . .	6
2.6.1	Definition: Normalteiler . . . . .	6
2.6.2	Einschub: Komplexe . . . . .	6
2.6.3	Satz: Nebenklasse einer invarianten Untergruppe . . . . .	7
2.6.4	Definiton: Faktorgruppe . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Darstellungstheorie</b>	<b>7</b>
3.1	Definition: Darstellung . . . . .	7
3.2	Definition: Äquivalente Darstellung . . . . .	7
3.3	(Ir)reduzibilität . . . . .	7
3.4	Satz: unitäre Darstellungen . . . . .	8
3.5	Schur'sches Lemma . . . . .	8
3.5.1	Alternative Formulierung . . . . .	8
3.6	Orthogonalitätstheorem . . . . .	8
3.7	Satz von Burnside . . . . .	8
3.8	Definition: Charakter . . . . .	9
3.9	Satz: Zeilenorthogonalität . . . . .	9
3.10	Charaktertafel . . . . .	9
3.11	Satz: Spaltenorthogonalität . . . . .	10
3.12	Dekomposition von reduziblen Darstellungen . . . . .	10
3.13	Reguläre Darstellung . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Symmetrioperationen in der Quantenmechanik</b>	<b>11</b>
4.1	Wirkung der Symmetrioperationen auf Wellenfunktionen . . . . .	11
4.2	Symmetrie des Hamiltonoperators . . . . .	11
4.3	Die Gruppe der Schrödingergleichung . . . . .	11
4.4	Bestimmung einer Darstellung der Symmetriegruppe . . . . .	12
4.5	Unitarität der Darstellung . . . . .	12
4.6	Entartungsgrad . . . . .	12

<b>5</b>	<b>Liegruppen</b>	<b>12</b>
5.1	Definiton: Liegruppe . . . . .	12
5.2	Erzeugenden . . . . .	13
5.3	Strukturkonstanten . . . . .	13
5.4	Exponentielle Parameterisierung . . . . .	13
5.4.1	Einschub: Name „Generator“ . . . . .	14
5.5	Lie-Klammern . . . . .	14
5.6	$SO(3)$ . . . . .	15
5.7	$SU(2)$ . . . . .	15
5.8	Vergleich $SO(3)$ und $SU(2)$ . . . . .	16
5.9	Darstellungen der $SU(2)$ und $SO(3)$ . . . . .	16
<b>6</b>	<b>Poincare-Gruppe</b>	<b>16</b>
6.1	Lorentz-Transformation . . . . .	16
6.1.1	Einschub: Warum $O(3, 1)$ und nicht $O(4)$ ? . . . . .	16
6.2	Lorentz-Gruppe . . . . .	17
6.3	Die Gruppe $L_+^\uparrow$ . . . . .	17
6.3.1	Definition: Rapiditäten . . . . .	18
6.4	Andere Basis für die eigentlich-orthochrone LT . . . . .	18
6.5	Darstellungen der Lorentzgruppe . . . . .	19
6.5.1	$(0,0)$ . . . . .	19
6.5.2	$(1/2, 0)$ . . . . .	19
6.5.3	$(0,1/2)$ . . . . .	20
6.6	Dirac-Spinor . . . . .	20
6.6.1	Darstellung eines Vierervektors als hermitesche $2 \times 2$ -Matrix . . . . .	20
6.7	Relativistische Schreibweise einer allgemeinen Lorentz-Transformation . . . . .	21
6.8	Transformation eines Spinors mit Spin $s = 1/2$ unter $L_+^\uparrow$ . . . . .	21
<b>7</b>	<b>Die <math>SU(N)</math></b>	<b>22</b>
7.1	Die $SU(2)$ . . . . .	22
7.2	Cartan'sche Unteralgebra einer Liealgebra . . . . .	22
7.3	Flavour $SU(3)$ . . . . .	23

# 1 Ergänzen

- Iso/Homomorphismus
- Permutationsgruppe
- triviale Darstellung als Isomorphismus
- vll. noch Kristallstruktur und Blochtheorem
- wichtigen Liegruppen und dessen Mannigfaltigkeit
- Sachen von Henry
- Mannigfaltigkeiten verbessern evtl. Bilder
- Hakenregel
- Klassifizierung der Lorentz-Trafos (eigentlich, orthochron)
- Ab Darstellung eines Viervektors als hermitesche  $2 \times 2$  Matrix recherchieren.
- Ende der Vorlesung 11 mit den Dirac-Spinoren und der Dirac-Gleichung

## 2 Abstrakte Gruppentheorie

### 2.1 Definition: Gruppe

Eine Menge  $\mathcal{G} = \{A_1, A_2, A_3, \dots\}$  bildet eine Gruppe, wenn mit einer Gruppenverknpfung  $*$  folgende vier Eigenschaften erfüllt sind:

1. **Abgeschlossenheit:** Mit  $A_i, A_j \in \mathcal{G}$  folgt  $A_i * A_j = A_k \in \mathcal{G}$ , d.h. die Verknüpfung zweier Elemente ergibt wieder ein Element der Gruppe.
2. **Assoziativität:** Es gilt mit  $A_i, A_j, A_k \in \mathcal{G}$ , dass  $(A_i * A_j) * A_k = A_i * (A_j * A_k)$ .
3. **Neutrale Element:** Es existiert ein eindeutiges Element  $E \in \mathcal{G}$  mit  $E * A_i = A_i * E = A_i$ .
4. **Inverse Element:** Zu jedem Element  $A_i \in \mathcal{G}$  existiert ein eindeutiges inverses Element  $A_i^{-1}$ , so dass  $A_i^{-1} * A_i = A_i * A_i^{-1} = E$  gilt.

#### 2.1.1 Endliche Gruppe

Eine Gruppe mit einer endlichen Anzahl an Elementen heißt endliche Gruppe. Eine Gruppe  $\mathcal{G} = \{E, A_2, \dots, A_h\}$  ist eine endliche Gruppe der Ordnung  $h$ . Man schreibt auch  $|\mathcal{G}| = h$ .<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Im Folgenden wird das Symbol der Verknüpfung und die Angabe, dass ein Element ein Element einer Gruppe ist, weggelassen, sofern es eindeutig ist.

## 2.2 Multiplikationstabelle

Die Multiplikationstabelle gibt einfach an, welche Verknüpfungen welches Gruppenelement ergeben. Bsp. Symmetrische Gruppe  $S_3$ :

	$e$	$a$	$a^2$	$b$	$c$	$d$
$e$	$e$	$a$	$a^2$	$b$	$c$	$d$
$a$	$a$	$a^2$	$e$	$c$	$d$	$b$
$a^2$	$a^2$	$e$	$a$	$d$	$b$	$c$
$b$	$b$	$d$	$c$	$e$	$a^2$	$a$
$c$	$c$	$b$	$d$	$a$	$e$	$a^2$
$d$	$d$	$c$	$b$	$a^2$	$a$	$e$

### 2.2.1 Rearrangement Theorem

Sallop gesagt: In jeder Zeile und Spalte einer Multiplikationstabelle kann ein Gruppenelement nur einmal auftreten.

Mathematisch: In der Sequenz  $EA_k, A_2A_k, \dots, A_hA_k$  kommt jedes Element  $A_i$  nur einmal vor.

## 2.3 Zyklische Gruppe

Bei einer zyklischen Gruppe kann jedes Element durch mehrfacher Multiplikation eines Elements reproduziert werden, so dass sich jede zyklische Gruppe  $\mathcal{G}$  als

$$\mathcal{G} = \{X, X^2, \dots, X^n = E\}$$

schreiben lässt, wobei die Ordnung die Periode der zyklischen Gruppe ist (Bsp.: Translationsgruppe eines Kristalls)

## 2.4 Untergruppen und Nebenklassen

Sei  $\mathcal{S} = \{E, S_2, \dots, S_g\}$  eine Untergruppe der Ordnung  $g$  der Gruppe  $\mathcal{G}$  der Ordnung  $h$ , dann ist

$$\mathcal{S}X = \{EX, S_2X, \dots, S_gX\}$$

eine rechte Nebenklasse von  $\mathcal{S}$  (linke Nebenklasse analog). Wäre  $X \in \mathcal{S}$ , dann wäre  $\mathcal{S}X$  wieder  $\mathcal{S}$  selbst und damit enthält eine Nebenklasse kein einziges Element der Untergruppe.

### 2.4.1 Satz: Disjunktheit oder Gleichheit

Zwei (linke oder rechte) Nebenklassen  $X\mathcal{S}, Y\mathcal{S}$  einer Untergruppe  $\mathcal{S}$  sind entweder disjunkt oder gleich.

### 2.4.2 Satz: Index einer Untergruppe

Die Ordnung einer Untergruppe  $\mathcal{S}$  von  $\mathcal{G}$ , wobei  $|\mathcal{S}| = g$  und  $|\mathcal{G}| = h$  gilt, muss ein ganzzahliger Teiler von  $h$  sein, so dass

$$\frac{h}{g} = l \in \mathbb{Z}$$

gilt. Dabei wird  $l$  der Index der Untergruppe  $\mathcal{S}$  in  $\mathcal{G}$  genannt.

## 2.5 Konjugierte Elemente und Klassen

Zwei Elemente  $A, B$  sind zueinander konjugiert, wenn

$$B = XAX^{-1}$$

gilt. Damit folgt, dass wenn  $C$  und  $B$  zu  $A$  konjugiert sind, dass auch  $B$  und  $C$  zueinander konjugiert sind.

### 2.5.1 Konjugationsklasse

Alle Elemente einer Gruppe  $\mathcal{G}$ , die zueinander konjugiert sind, bilden eine Konjugationsklasse

$$\mathcal{G}A = \{BAB^{-1} | B \in \mathcal{G}\},$$

wobei  $A$  ein beliebiges Element der Konjugationsklasse ist.

## 2.6 Normalteiler und Faktorgruppen

### 2.6.1 Definition: Normalteiler

Eine Untergruppe  $\mathcal{S}$  einer Gruppe  $\mathcal{G}$ , die nur aus kompletten Klassen besteht, heißt **Normalteiler** oder **invariante Untergruppe**. Mit einer komplette Klasse meint man, dass, wenn  $A$  in  $\mathcal{S}$  liegt, alle Elemente  $XAX^{-1}$  in  $\mathcal{S}$  liegen, selbst wenn  $X \in \mathcal{G}$  nicht in  $\mathcal{S}$  liegt. Solche eine Untergruppe heißt invariant, da es unter Konjugation mit einem beliebigen Element von  $\mathcal{G}$  invariant ist.

### 2.6.2 Einschub: Komplexe

Ein Komplex

$$\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_n\}$$

ist eine Menge von Gruppenelementen unter Vernachlässigung der Reihenfolge. Eine Multiplikation mit einem beliebigen Element  $X$  ist durch  $\mathcal{K}X = \{K_1X, \dots, K_nX\}$  gegeben. Die Multiplikation zweier Komplexe  $\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_n\}$  und  $\mathcal{K}' = \{K'_1, \dots, K'_m\}$  ist durch  $\mathcal{K}\mathcal{K}' = \{K_1K'_1, K_2K'_1, \dots, K_1K'_2, K_1K'_3, \dots, K_nK'_m\}$  gegeben. Doppelte Elemente werden, wie es bei einer Menge üblich ist, nicht mitgezählt.

### 2.6.3 Satz: Nebenklasse einer invarianten Untergruppe

Aus der Definition 2.6.1 folgt

$$XSX^{-1} = S \iff XS = SX,$$

womit die rechte gleich der linken Nebenklasse einer invarianten Untergruppe ist.

### 2.6.4 Definiton: Faktorgruppe

Eine invariante Untergruppe  $S$  einer Gruppe  $G$  bildet mit all ihren  $l - 1$  Nebenklassen eine Faktorgruppe

$$\mathcal{G}/S = \{S, SX_1, SX_2, \dots, SX_{l-1}\},$$

wobei die invariante Untergruppe  $S$  das Einselement bildet. Die Ordnung der Faktorgruppe entspricht  $|\mathcal{G}|/|S|$ .

## 3 Darstellungstheorie

Wir haben uns ausschließlich mit Matrizendarstellungen beschäftigt.

### 3.1 Definition: Darstellung

Bei einer Darstellung  $\Gamma$  wird jedem Gruppenelement eine quadratische Matrix zugeordnet

$$\Gamma(A) : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}.$$

Der Vektorraum  $\mathcal{V}$  wird Darstellungsraum genannt, wobei  $\text{Dim}(\mathcal{V}) = d$  die Dimension der Darstellung ist. Eine lineare Darstellung  $\Gamma(A)$  von  $\mathcal{G}$  ist ein Homomorphismus der Gruppe  $\text{GL}(\mathcal{V})$

$$\Gamma(A)\Gamma(B) = \Gamma(AB), \quad A, B \in \mathcal{G}.$$

Das Einselement wird durch die Einheitsmatrix dargestellt.

### 3.2 Definition: Äquivalente Darstellung

Eine andere Darstellung lässt sich durch eine Ähnlichkeitstransformation gewinnen

$$\Gamma'(A) = S^{-1}\Gamma(A)S \implies \Gamma'(A)\Gamma'(B) = \Gamma'(AB).$$

Die Darstellungen  $\Gamma$  und  $\Gamma'$  sind äquivalent.

### 3.3 (Ir)reduzibilität

Die direkte Summe von zwei Darstellungen

$$\Gamma(A) = \begin{pmatrix} \Gamma^1(A) & 0 \\ 0 & \Gamma^2(A) \end{pmatrix}, \quad \Gamma(A) = \Gamma^1(A) \oplus \Gamma^2(A)$$

ist eine weitere Form von Redundanz. Lässt sich eine Darstellung durch eine globale Ähnlichkeitstransformation auf eine Blockdiagonale bringen, ist sie reduzibel, sonst irreduzibel.

### 3.4 Satz: unitäre Darstellungen

Jede Darstellung lässt sich mit Hilfe einer Ähnlichkeitstransformation auf eine unitäre Darstellung abbilden. Vorgehen: Konstruiere hermitesche Matrix  $\mathbf{H} = \sum_i^h \Gamma(A_i)\Gamma(A_i)^\dagger$ . Dann diese diagonalisieren mit unitärer Trafo  $\mathbf{d} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{U}$ . Somit ist die Darstellung

$$\Gamma'(A_j) = \mathbf{d}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{U}^{-1}\Gamma(A_j)\mathbf{U}\mathbf{d}^{\frac{1}{2}}$$

unitär.

### 3.5 Schur'sches Lemma

Jede Matrix, welche mit allen Matrizen einer irreduziblen Darstellung kommutiert, muss ein Vielfaches von der Einheitsmatrix (sog. konstante Matrix) sein. Wenn somit eine nicht-konstante Matrix mit mindestens einer Matrix einer Darstellung kommutiert, ist diese Darstellung reduzibel.

#### 3.5.1 Alternative Formulierung

Gegeben seien zwei Darstellungen mit  $\text{Dim}(\Gamma^1(A)) = d_1$  und  $\text{Dim}(\Gamma^2(A)) = d_2$ . Wenn dann mit einer beliebigen Matrix  $\mathbf{M}$

$$\mathbf{M}\Gamma^1(A) = \Gamma^2(A)\mathbf{M}$$

gilt, dann muss (i) bei  $d_1 \neq d_2$   $\mathbf{M} = \mathbf{0}$  oder (ii) bei  $d_1 = d_2$  entweder  $\mathbf{M} = \mathbf{0}$  oder  $|\mathbf{M}| \neq 0$  gelten. Aus letzterem folgt  $\Gamma^1(A) = \mathbf{M}\Gamma^2(A)\mathbf{M}^{-1}$ , womit die Darstellungen äquivalent sind.

### 3.6 Orthogonalitätstheorem

Bei Betrachtung **nicht-äquivalenter**, unitärer, irreduziblen Darstellungen gilt

$$\sum_R \Gamma^i(R)_{\mu\nu}^* \Gamma^j(R)_{\alpha\beta} = \frac{h}{d_i} \delta_{ij} \delta_{\mu\alpha} \delta_{\nu\beta}.$$

Geometrische Interpretation: die Gruppenelemente  $R = E, A_2, \dots, A_h$  spannen einen  $h$ -dimensionalen „Gruppenelement“-Vektorraum auf. Jeder Vektor in diesem Raum hat drei Indizes,  $i, \mu, \nu$ . Diese Vektoren sind orthogonal zueinander.

### 3.7 Satz von Burnside

Aus der geometrischen Interpretation des Orthogonalitätstheorems 3.6 folgt mit  $d_i$  als Dimension der  $i$ -ten irreduziblen Darstellung der Gruppe  $\mathcal{G}$  direkt

$$\sum_i d_i^2 = |\mathcal{G}|,$$

da es zu jeder Darstellung  $\Gamma^i$   $d_i^2$  verschiedene Vektoren gibt. Das heißt, dass in Summe in diesem Vektorraum  $\sum_i d_i^2$  verschiedene Vektoren existieren. Da in einem  $h$ -dimensionalen Vektorraum nur maximal  $h$  zueinander orthogonale Vektoren existieren können, folgt  $\sum_i d_i^2 \leq h = |\mathcal{G}|$ . Die eindeutige Gleichheit wird z.B. im Tinkham bewiesen.



### 3.8 Definition: Charakter

Der Charakter einer Darstellung  $\Gamma^i(R)$  ist die Menge der  $h$  Zahlen  $\chi^i(E), \chi^i(A_2), \dots, \chi^i(A_h)$  mit

$$\chi^i(R) = \text{Tr}(\Gamma^i(R)) = \sum_j \Gamma^i(R)_{jj}.$$

Die Spur ist unter einer Ähnlichkeitstransformation invariant, so dass äquivalente Darstellungen und Elemente innerhalb einer Klasse denselben Charakter besitzen. Im Folgenden wird der Charakter für die  $k$ -te Klasse  $\mathcal{G}_k$  durch  $\chi^i(\mathcal{G}_k)$  angegeben.

### 3.9 Satz: Zeilenorthogonalität

Wird das Orthogonalitätstheorem genutzt, kann

$$\sum_R \chi^i(R)^* \chi^j(R) = \sum_R \chi^i(\mathcal{G}_k)^* \chi^j(\mathcal{G}_k) N_k = h \delta_{ij}$$

gezeigt werden, wobei  $N_k$  die Anzahl an Elementen in der  $k$ -ten Klasse ist. Somit formen die Charaktere der verschiedenen irreduziblen Darstellungen eine Menge von orthogonalen Vektoren

$$\chi^i = \begin{pmatrix} \chi^i(E) \\ \chi^i(\mathcal{G}_2) \\ \dots \\ \chi^i(\mathcal{G}_n) \end{pmatrix}$$

in einem  $n$ -dimensionalen Vektorraum, welcher durch die Klassen  $\mathcal{G}_k$  aufgespannt wird. Da die Anzahl der orthogonalen Vektoren die Dimension des Vektorraums nicht übersteigen kann, darf die Anzahl der Klassen nicht die Anzahl der irreduziblen Darstellungen übersteigen. Es gilt sogar

$$\text{Anzahl Klassen} = \text{Anzahl irreduzible Darstellungen}.$$

### 3.10 Charaktertafel

In den Zeilen stehen die irreduziblen Darstellungen und in den Spalten die Klassen mit der Anzahl an Elementen in der jeweiligen Klasse.

**Tabelle 1:** Charaktertafel der  $S_3$

	$\mathcal{G}_1$	$3\mathcal{G}_2$	$2\mathcal{G}_3$
$\Gamma^1$	1	1	1
$\Gamma^2$	1	-1	1
$\Gamma^3$	2	0	-1

### 3.11 Satz: Spaltenorthogonalität

Für irreduzible Darstellungen  $\chi^i$  und  $\chi^j$  gilt

$$\sum_i \chi^i(\mathcal{G}_k)^* \chi^i(\mathcal{G}_l) = \frac{h}{N_k} \delta_{kl}.$$

### 3.12 Dekomposition von reduziblen Darstellungen

Bringe die Darstellung erst auf blockdiagonale Form

$$\Gamma(R) = \begin{pmatrix} \Gamma^1(R) & & \\ & \Gamma^2(R) & \\ & & \ddots \end{pmatrix}, \quad \Gamma(R) = \Gamma^1(R) \oplus \Gamma^2(R) \oplus \dots$$

mit den irreduziblen Darstellungen auf der Diagonale. Somit ist die Spur der reduziblen Darstellung die Summe der Spuren der irreduziblen Darstellungen

$$\chi_{\text{red}}(R) = \sum_i a_i \chi_{\text{irred}}^i(R),$$

wobei der Koeffizient  $a_i$  angibt, wie oft die  $i$ -te irreduzible Darstellung auf der Diagonale vorkommt. Durch Anwendung des Orthogonalitätstheorems 3.6, sind die Koeffizienten eindeutig durch den Charakter der reduziblen Darstellung bestimmt.

$$a_i = \frac{1}{h} \sum_k N_k \chi_{\text{irred}}^i(\mathcal{G}_k)^* \chi_{\text{red}}(\mathcal{G}_k). \quad (1)$$

### 3.13 Reguläre Darstellung

Hier schiebt man einfach die Elemente in der Multiplikationstabelle so rum, so dass auf der Hauptdiagonalen das Einselement liegt. Wenn man nun die reguläre Darstellung eines Elements bestimmen möchte, schaut man in der Multiplikationstabelle, wo dieses Element als Resultat der Multiplikationen steht. Damit bekommt die Matrix der regulären Darstellung eine 1 als Eintrag an dieser Stelle.

	$E$	$A$	$B$	$C$	$D$	$F$
$E$	$E$	$A$	$B$	$C$	$D$	$F$
$A^{-1}$	$A$	$E$	$D$	$F$	$B$	$C$
$B^{-1}$	$B$	$F$	$E$	$D$	$C$	$A$
$C^{-1}$	$C$	$D$	$F$	$E$	$A$	$B$
$D^{-1}$	$F$	$B$	$C$	$A$	$E$	$D$
$F^{-1}$	$D$	$C$	$A$	$B$	$F$	$E$

$$\Gamma_{\text{reg}}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aus

$$\chi_{\text{reg}} \cdot \chi_{\text{irred}}^i = \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_i \\ x \\ \dots \end{pmatrix} = h d_i$$

folgt, dass die reguläre Darstellung **jede** irreduzible Darstellung genau  $d_i$  mal enthält (s. Gl. (1)).

## 4 Symmetrioperationen in der Quantenmechanik

Ausgangspunkt ist die Schrödingergleichung

$$\hat{H}\Psi_n = E_n^j \Psi_n.$$

Dabei gibt  $j$  den Grad der Entartung an. Ziel ist es nun einen Zusammenhang zwischen den Symmetrioperationen und der Entartung der Energieniveaus zu finden.

### 4.1 Wirkung der Symmetrioperationen auf Wellenfunktionen

Sei  $\hat{P}_R$  eine Symmetrioperation. Diese wirkt auf eine Wellenfunktion gemäß

$$\hat{P}_R \Psi(\vec{r}) = \Psi(\mathbf{R}^{-1} \vec{r}).$$

Somit kann entweder der Vektor um einen Winkel im mathematisch positiven Drehsinn oder das Koordinatensystem um diesen Winkel im mathematisch negativen Drehsinn gedreht werden. Die Symmetrioperatoren bilden eine Gruppe, die isomorph zu der Gruppe der Koordinatentransformationen ist.

### 4.2 Symmetrie des Hamiltonoperators

Wenn das System und damit auch der Hamiltonian invariant unter einer Symmetrioperation ist, vertauscht der Hamiltonian mit dem Symmetrioperator und somit gilt

$$\hat{H}\Psi = E_n \Psi \iff \hat{P}_R \hat{H}\Psi = E_n \hat{P}_R \Psi \iff \hat{H} \hat{P}_R \Psi = \hat{H}\Psi' = E_n \Psi',$$

d.h. bei Symmetrien haben verschiedene Zustände die selbe Energie, womit Entartung vorliegt.

### 4.3 Die Gruppe der Schrödingergleichung

Sei nun ein Energieniveau  $E_n$   $d_n$ -fach entartet. Dann wähle  $d_n$  orthonormale Eigenfunktionen, welche zu  $E_n$  gehören. Diese  $d_n$  Eigenfunktionen spannen den entarteten Unterraum  $\mathcal{V} \in \mathcal{H}$  von dem gesamten Hilbertraum  $\mathcal{H}$  auf, welcher invariant unter den Symmetrioperationen, welche lineare Abbildungen

$$\hat{P}_R : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$$

sind, ist. Die Darstellungen sind irreduzibel, da in dem Raum  $\mathcal{V}$  kein invarianter Unterraum existiert.

#### 4.4 Bestimmung einer Darstellung der Symmetriegruppe

Nach Abschnitt 4.3 erhält man durch Anwendung der Symmetrieeoperation auf eine Eigenfunktion des entarteten Unterraums eine Linearkombination aller Eigenfunktionen

$$\hat{P}_R \Psi_\nu^n = \sum_{\kappa} \Gamma^n(R)_{\kappa\nu} \Psi_\kappa^n.$$

Die Matrixen  $\Gamma^n(R)$  bilden dann eine irreduzible Darstellung zu der Symmetriegruppe, unter welcher der entartete Unterraum mit dem Energielevel  $E_n$  invariant ist.

#### 4.5 Unitarität der Darstellung

Nur wenn die Eigenfunktionen orthonormiert gewählt werden, sind die Darstellungen unitär.

#### 4.6 Entartungsgrad

Entartungsgrad = Dimension der irreduziblen Darstellung

### 5 Liegruppen

1. erfüllen Gruppenaxiome
2. besitzen eine analytische Mannigfaltigkeit
3. Abstandsbegriff (bilden topologischen Raum, metrischen Raum)

#### 5.1 Definition: Liegruppe

Eine Gruppe  $\mathcal{G}$  wird Liegruppe genannt, wenn

1.  $\mathcal{G}$  besitzt mindestens eine endliche Darstellung  $\Gamma(T)$  mit  $T \in \mathcal{G}$  der Dimension  $d$ .  
Definiere einen Abstand

$$d(T, T') = \sqrt{\sum_{j=1, k=1}^d |\Gamma(T)_{jk} - \Gamma(T')_{jk}|^2} = d(T', T) > 0$$

und somit eine Metrik.

2. Jedes Element  $T$  kann durch  $n$  reelle Parameter  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$  angegeben werden.  
 $n$  ist dann die Dimension der Liegruppe und die minimale Anzahl an Elementen.
3. Nähe zum Einselement. Sei  $\eta$  vorgegeben, dann gehört zu jedem Punkt  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ , für den  $\sum_i^n \theta_i^2 < \eta^2$  gilt, ein Element  $T \in \mathcal{G}$ .
4. Die Darstellungen  $\Gamma(T(\theta))$  sind in den Parametern analytisch und somit in eine Potenzreihe entwickelbar.

Die Gruppenelemente  $T(\theta)$  sind „smooth“ bzgl. den Parametern. Das bedeutet, dass, wenn die Gruppenelemente nah beieinander sind, die Parameter ebenfalls nah beieinander sind. Ebenfalls soll das Einselement bei  $\theta = 0$  liegen

$$T(\theta)|_{\theta=0} = E \iff \Gamma(T(\theta))|_{\theta=0} = \mathbb{1}.$$

## 5.2 Erzeugenden

Die  $n$  Erzeugenden/Generatoren einer  $n$ -dimensionalen Liealgebra sind gemäß

$$\left. \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \Gamma(T(\theta)) \right|_{\theta=0} = t_j \quad (2)$$

definiert. Der Faktor  $1/i$  ist Konvention. Wenn man die Darstellungen bis zur ersten Ordnung entwickelt und fordert, dass die Darstellungen unitär sind, folgt, dass die Generatoren hermitesch sein müssen.

$$\begin{aligned} \Gamma(T(\theta)) &= \mathbb{1} + \left. \frac{\partial \Gamma(T(\theta))}{\partial \theta_a} \right|_{\theta=0} \theta_a + \mathcal{O}(\theta^2) = \mathbb{1} + i t_a \theta_a + \mathcal{O}(\theta^2) \\ \implies \Gamma(T(\theta)) \Gamma(T(\theta))^\dagger &\approx \mathbb{1} + i \theta_a (t_a - t_a^\dagger) \stackrel{!}{=} \mathbb{1} \iff t_a = t_a^\dagger \end{aligned}$$

## 5.3 Strukturkonstanten

Ausgang ist die Gruppeneigenschaft. Somit muss mit  $T(\theta), T(\theta') \in \mathcal{G}$

$$T(\theta)T(\theta') = T(f(\theta, \theta'))$$

gelten. Es gilt ebenfalls  $\theta = \theta_1, \dots, \theta_n$ ,  $f = f_1, \dots, f_n$  mit  $n$  als Dimension der Gruppe. Bestimme nun  $f(\theta, \theta')$  und entwickle  $f$  in die zweite Ordnung. Dann nochmal die Darstellungen in erste Ordnung entwickeln und dann einen Koeffizientenvergleich machen, womit die Bedingung für eine Liealgebra

$$[t_a, t_b] = i \sum_c^n f_{ab}^c t_c$$

folgt. Die  $f_{ab}^c$  als sind Strukturkonstanten, welche extrem wichtig sind, da diese die gesamte Gruppenmultiplikation zusammenfassen.

## 5.4 Exponentielle Parameterisierung

Eine infinitesimale Transformation lässt sich durch eine Reihenentwicklung bis zur ersten Ordnung darstellen.

$$\Gamma(d\theta) = \mathbb{1} + i \sum_a^n t_a d\theta_a.$$

Man stelle sich vor, dass eine Transformation in  $k$  gleiche Stücke unterteilt wird und diese Teil-Transformationen  $k$  mal ausgeführt werden

$$\Gamma(\theta) = (\mathbb{1} + i \sum_a^n t_a d\theta_a)(\mathbb{1} + i \sum_a^n t_a d\theta_a) \cdots (\mathbb{1} + i \sum_a^n t_a d\theta_a) = (\mathbb{1} + i \sum_a^n t_a d\theta_a)^k.$$

Um nun eine infinitesimale Transformation zu beschreiben, können wir den Parameter  $d\theta_a$  auch einfach durch  $d\theta_a = \frac{\theta}{k}$  darstellen und  $k$  gegeben Unendlich laufen lassen. Um nun aber eine finite Transformation zu erhalten, müssen wir diese infinitesimale Transformation unendlich oft anwenden. Damit lässt sich die Transformation als Limite

$$\Gamma(\theta) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbb{1} + i \sum_a^n t_a \frac{\theta_a}{k})^k = e^{i \sum_a^n t_a \theta_a} = e^{i \vec{t} \cdot \vec{\theta}}$$

finden, wobei der Übergang zur Exponentialfunktion gemacht wurde.

#### 5.4.1 Einschub: Name „Generator“

Den Namen „Generator“ lässt sich begründen, indem man ein Element der Gruppe als Matrix um die Eins entwickelt, also

$$\Gamma(\theta) = \mathbb{1} + \frac{d\Gamma}{d\theta} \Big|_{\theta=0} \theta + \frac{d^2\Gamma}{d\theta^2} \Big|_{\theta=0} \theta^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n \Gamma}{d\theta^n} \Big|_{\theta=0} \theta^n.$$

In diese Reihenentwicklung können die Generatoren einfach eingesetzt werden und damit sieht man, dass die Generatoren tatsächlich die Transformationen generieren.

### 5.5 Lie-Klammern

Die Erzeugenden erfüllen die Axiome einer Liealgebra, d.h. für die Generatoren  $t_a \in \mathcal{V}$  ist zusätzlich eine Verknüpfung, die Lie-Klammer,

$$\begin{aligned} \mathcal{V} * \mathcal{V} &\rightarrow \mathcal{V} \\ x, y \in \mathcal{V} &\rightarrow [x, y] \in \mathcal{V} \end{aligned}$$

definiert, welche die Eigenschaften

1. Bilinearität:  $[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z]$
2.  $[x, x] = 0$
3. Jacobi-Identität (zyklische Vertauschung):  $[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$

erfüllen.

## 5.6 $SO(3)$

S für speziell (Determinante ist eins), O für orthogonal und drei für  $3 \times 3$ -Matrizen. Die  $SO(3)$  ist eigentlich einfach nur die Gruppe der Drehungen im  $\mathbb{R}^3$ . Die Generatoren  $J_i$  können gemäß Gleichung (2) bestimmt werden

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Kommutatorrelation ist

$$[J_i, J_j] = i \sum_k \epsilon_{ijk} J_k$$

mit dem epsilon-Tensor als Strukturkonstanten. Somit bilden die Generatoren  $J_i$  eine Liealgebra. Die Gruppenmannigfaltigkeit wird durch Drehungen im  $\mathbb{R}^3$  auf einer Vollkugel mit dem Radius  $\pi$  um den Vektor  $\hat{k} = \vec{k}/|\vec{k}| = (k_1, k_2, k_3)^T$  mit  $|\vec{k}| = \theta$  als Drehwinkel beschrieben. Es gilt

$$\Gamma_{ij} = (1 - \cos(\theta))k_i k_j + \cos(\theta)\delta_{ij} + \sin(\theta) \sum_m \epsilon_{imj} k_m.$$

Es gilt außerdem  $\Gamma(\hat{k}) = \Gamma(-\hat{k})$ . Auf der Vollkugel sind die gegenüberliegenden Punkte zu identifizieren, wo dann die Elemente identisch sind (hier bin ich mir nicht sicher).

## 5.7 $SU(2)$

Die  $SU(2)$  ist die lineare Gruppe der unitären (U für unitär)  $2 \times 2$ -Matrizen mit Determinante (S für spezielle) 1. Die Generatoren der  $SU(2)$  sind die Pauli-Matrizen gewichtet mit dem Faktor  $1/2$

$$s_i = \frac{1}{2}\sigma_i,$$

welche die Kommutatorrelation

$$[s_i, s_j] = i \sum_k \epsilon_{ijk} s_k$$

erfüllen. Erneut bildet der epsilon-Tensor die Strukturkonstanten. Die Gruppenmannigfaltigkeit ist die selbe wie die der  $SO(3)$  bis auf, dass die Vollkugel den Radius  $2\pi$  besitzt. Die Darstellungen können durch das Matrixexponential (s. 5.4) gewonnen werden

$$\Gamma(\alpha) = e^{i\alpha S_3} = i \frac{\alpha}{2} \sigma_3 = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix}.$$

Jedoch gilt  $\Gamma(\alpha + 2\pi) = -\Gamma(\alpha)$ . Erst bei einer Verschiebung um  $4\pi$  kommt man am selben Punkt an (eine Drehung um  $4\pi$  entspricht dem Einheitsselement), wobei hier wieder die gegenüberliegenden Punkte auf der Vollkugel mit Radius  $2\pi$  zu identifizieren sind, welche die selben Elemente bilden (hier bin ich mir wieder nicht sicher).

## 5.8 Vergleich $SO(3)$ und $SU(2)$

Die Generatoren der  $SO(3)$  und  $SU(2)$  haben dieselben Kommutatorrelationen und somit auch die selbe Liealgebra (vielleicht genauer: deren Liealgebren sind isomorph). Sie unterscheiden sich lediglich in ihren Gruppenmannigfaltigkeiten. Die  $SU(2)$  ist eine doppelte Überlagerung der  $SO(3)$ .

## 5.9 Darstellungen der $SU(2)$ und $SO(3)$

$\sigma_z/2$  (nicht sicher hier, in Vorlesung steht  $s_z/2$  aber sehe noch nicht die Richtigkeit) bilden eine zwei-dimensionale Darstellung und der epsilon-Tensor  $(\epsilon_i)_{jk}$  bildet eine dreidimensionale Darstellung. Im Allgemeinen gilt für beliebiges  $j$  (ganz- oder halbzahlige)

$$J_z^{2j+1} = \begin{pmatrix} j & & & \\ & j-1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -j \end{pmatrix} \Rightarrow \Gamma(\alpha) = e^{i\alpha J_z} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha j} & & & \\ & e^{i\alpha(j-1)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{-i\alpha j} \end{pmatrix}$$

Bei ganzzahligem  $j$  folgt  $\Gamma(\alpha + 2\pi)$ , wobei bei halbzahligen  $j$  folgt  $\Gamma(\alpha + 2\pi) = -\Gamma(\alpha)$  folgt.

# 6 Poincare-Gruppe

Die Poincaré-Gruppe ist das semidirekte Produkt der Lorentzgruppe  $O(3,1)$  (3 Raumdimensionen + 1 Zeitdimension) und der Gruppe der Translationen im  $\mathbb{R}^{3+1}$ . Ab hier wird die Einsteinsche Summenkonvention verwendet.

## 6.1 Lorentz-Transformation

Eine Lorentz-Transformation (LT)  $\Lambda$  ist eine lineare Transformation, die Raumzeitpunkte  $x^\mu$  auf  $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$  abbilden. Im Folgenden werden nur die homogenen LT, d.h.  $a^\mu = 0$  gebraucht, also es wird nur die Lorentz-Gruppe  $O(3,1)$  betrachtet. Es wird gefordert, dass die LT das Pseudo-Skalarprodukt  $x_\mu x^\mu$  nicht ändert, so dass die Metrik  $g_{\nu\mu}$  unter der LT invariant ist

$$\Lambda^\mu_\nu \Lambda^\delta_\sigma g_{\mu\delta} = g_{\nu\sigma}.$$

Das ist die definierende Eigenschaft der LT

### 6.1.1 Einschub: Warum $O(3,1)$ und nicht $O(4)$ ?

In Abschnitt 6.1 wurde bereits angemerkt, dass die LT das Pseudo-Skalarprodukt  $x_\mu x^\mu = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$  invariant lässt. Dabei wurde die Metrik direkt auf

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$



gesetzt. Die  $O(4)$  lässt das Skalarprodukt  $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$  invariant. Da kann der Unterschied zwischen  $O(4)$  und  $O(3,1)$  gesehen werden.

## 6.2 Lorentz-Gruppe

Die Lorentz-Gruppe kann durch folgende beiden Eigenschaften unterteilt werden:

1.  $\text{Det}(\Lambda) = \pm 1$ , da

$$\Lambda^T g \Lambda = g \iff \text{Det}(\Lambda^2) \text{Det}(g) = \text{Det}(g) \implies \text{Det}(\Lambda) = \pm 1.$$

2. Aus  $\Lambda_0^\mu \Lambda_0^\rho g_{\mu\rho} = g_{00}$  folgt, dass

$$\Lambda_0^0 \geq 1 \quad \text{oder} \quad \Lambda_0^0 \leq -1.$$

Die Unterteilung erfolgt durch

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_+^\uparrow : \quad & \text{Det}(\Lambda) = +1, \quad \Lambda_0^0 \geq 1 \\ \mathcal{L}_-^\uparrow : \quad & \text{Det}(\Lambda) = -1, \quad \Lambda_0^0 \geq 1 \\ \mathcal{L}_+^\downarrow : \quad & \text{Det}(\Lambda) = +1, \quad \Lambda_0^0 \leq -1 \\ \mathcal{L}_-^\downarrow : \quad & \text{Det}(\Lambda) = -1, \quad \Lambda_0^0 \leq -1. \end{aligned}$$

Nur die eigentlich ( $\text{Det}(\Lambda) = +1$ , Nach der Trafo bleibt ein rechtshändiges Koordinatensystem rechtshändig) orthochrone ( $\Lambda_0^0 \geq 1$ , ändert nicht die Orientierung der Zeit) Lorentz-Gruppe  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  kann durch infinitesimale Transformationen generiert werden (Das sieht man daran, dass  $\mathbb{1}_0^0 = 1$  und  $\text{Det}(\mathbb{1}) = 1$  und die infinitesimalen Transformationen kontinuierlich an das Einselement gebunden sind). Außerdem können die restlichen Gruppen der Lorentz-Gruppe durch die Zeit- und Raumumkehrtransformationen

$$\Lambda_T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gewonnen werden. Die Lorentz-Gruppe lässt sich damit als Vereinigung von vier Mengen  $O(3,1) = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \Lambda_P \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \Lambda_T \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \Lambda_T \Lambda_P \mathcal{L}_+^\uparrow$  verstehen. **Vorsicht!** Nur die Menge  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  ist eine Gruppe, da die anderen drei Mengen nicht das Einselement enthalten.

## 6.3 Die Gruppe $\mathcal{L}_+^\uparrow$

Die Generatoren der Gruppe der eigentlich-orthochronen LT, die als  $SO(3,1)$  bezeichnet wird, bilden die Liealgebra

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J^k, \quad [K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk} J^k, \quad [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk} K^k. \quad (3)$$

Die drei Generatoren

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sind die Generatoren der Drehungen. Die Boosts werden durch die Generatoren

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugt. Somit wirken die Lorentz-Transformationen als  $4 \times 4$ -Matrix auf einen Vierervektor. Die Generatoren können, wie immer, mit den Parametern und der exponentiellen Parameterisierung genutzt werden, um eine LT zu generieren

$$\Lambda(\vec{\theta}, \vec{\chi}) = e^{i(\vec{\theta} \cdot \vec{J} + \vec{\chi} \cdot \vec{K})}.$$

Die Parameter  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  sind die Drehwinkel und  $\chi_1, \chi_2, \chi_3$  die Rapiditäten. Wie in Gleichung (3) ersichtlich wird, sind die Generatoren der Boosts nicht geschlossen unter Kommutation (Die Algebra der Boosts ist nicht kompakt).

### 6.3.1 Definition: Rapiditäten

Die Rapidität  $\chi$  ist gemäß

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \cosh(\chi)$$

definiert. Aus  $\cosh^2(\chi) - \sinh^2(\chi) = 1$  folgt  $\sinh^2(\chi) = \gamma^2 - 1 = \beta^2 \gamma^2$  und somit  $\beta = \tanh(\chi)$ . Die relativistische Geschwindigkeitsaddition erfolgt gemäß  $v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$ . Ein Lorentzboost in  $x$ -Richtung ist

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\chi) & \sinh(\chi) & 0 & 0 \\ \sinh(\chi) & \cosh(\chi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Rapiditäten sind nun additive Parameter.

## 6.4 Andere Basis für die eigentlich-orthochrone LT

In Abschnitt 6.3 ist hervorgegangen, dass die Algebra der Boosts nicht kompakt ist. Die Generatoren können in einer anderen Basis gewählt werden

$$A_k = \frac{1}{2}(J_k + iK_k), \quad B_k = \frac{1}{2}(J_k - iK_k),$$

welche zwei unabhängige  $SU(2)$ -Algebren ergeben

$$[A_i, A_j] = i\epsilon_{ijk}A^k, \quad [B_i, B_j] = i\epsilon_{ijk}B^k, \quad [A_i, B_j] = 0.$$

Hier sieht man, dass  $SO(3, 1) \cong SU(2) \otimes SU(2)$  gilt. Die Liealgebra von  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  besteht somit aus zwei „Kopien“ von der  $SU(2)$ . Das sind gute Neuigkeiten, da wir bereits wissen, wie man die irreduziblen Darstellung der  $SU(2)$  konstruiert. Genauer gilt für die komplexen Lie-Algebren der Isomorphismus

$$\mathbb{C} \otimes SO(3) \simeq SL(2, \mathbb{C}) \otimes SL(2, \mathbb{C})$$

Die Menge der komplexen Zahlen wirken hier mit, da komplexe Linearkombinationen von den Erzeugern der  $SO(3, 1)$  gebildet werden. Damit lassen sich die endlich-dimensionalen Darstellungen von  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  durch zwei Drehimpulse  $(j_1, j_2)$  (direkte Summe) mit der Dimension  $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$  charakterisieren.

## 6.5 Darstellungen der Lorentzgruppe

Prinzipiell geht man hier einfach verschiedene Werte für  $j_1$  und  $j_2$  aus Abschnitt 6.4 durch.

### 6.5.1 (0,0)

Diese Darstellung ist relativ langweilig, da die Räume beider  $SU(2)$ -Algebren (damit auch die Generatoren) eindimensional sind. Der einzige Skalar, der die Kommutatorrelationen (6.4) erfüllt, ist die Null. Demnach ist jede LT einfach eins ( $\Lambda(\theta_i) = e^{i\theta_i J_i} = e^0 = 1$ ). Damit kann man schlussfolgern, dass die (0,0)-Darstellung jedes Objekt, auf welches diese Darstellung wirkt, invariant lässt.

### 6.5.2 (1/2, 0)

Hier ist  $B_k = 0$  (eindimensionale Darstellung für Spin 0). Aus der Diskussion zur  $SU(2)$  wissen wir, dass die zweidimensionale Darstellung für Spin 1/2 durch die Pauli-Matrizen gewonnen werden kann, also setzt man  $A_k = \frac{\sigma_k}{2}$ . Da  $B_k = 0$  gilt, folgt  $K_k = \frac{-i\sigma_k}{2} = \frac{J_k}{i}$ . Damit lässt sich durch exponentieren wieder eine Drehung oder ein Boost erzeugen

$$\Lambda = e^{i(\vec{\theta} \cdot \vec{J} + \vec{\chi} \cdot \vec{K})} = e^{\frac{i\vec{\theta} \cdot \vec{\sigma} + \vec{\chi} \cdot \vec{\sigma}}{2}}.$$

Beispielweise eine Drehung um die  $x$ -Achse:

$$\Lambda(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) & i \sin(\frac{\theta}{2}) \\ i \sin(\frac{\theta}{2}) & \cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}.$$

Diese  $2 \times 2$ -Matrizen wirken nicht auf Vierervektoren sondern auf Weyl-Spinoren, in diesem Fall wegen  $(1/2, 0)$  auf linkshändige Weyl-Spinoren

$$\chi_L = \begin{pmatrix} (\chi_L)_1 \\ (\chi_L)_2 \end{pmatrix}.$$

Bei der Rotation fällt auf, dass die Weyl-Spinoren, im Gegensatz zu gewöhnlichen Vierervektoren, erst nach einer Drehung um  $4\pi$  in sich selbst übergehen.

### 6.5.3 (0,1/2)

Hier wird analog zu dem linkshändigen Spinor 6.5.2 gerechnet, außer, dass  $A_k = 0$  gilt. Als Ergebnis findet man die LT

$$\Lambda = e^{i(\vec{\theta} \cdot \vec{J} + \vec{\chi} \cdot \vec{K})} = e^{\frac{i\vec{\theta} \cdot \vec{\sigma} - \vec{\chi} \cdot \vec{\sigma}}{2}}.$$

Der Unterschied zum linkshändigen Spinor liegt darin, dass der Exponent der Boosts um ein Minuszeichen besitzt. Diese LT wirkt auf einen rechtshändigen Weyl-Spinor

$$\chi_R = \begin{pmatrix} (\chi_R)_1 \\ (\chi_R)_2 \end{pmatrix}.$$

## 6.6 Dirac-Spinor

Der Dirac-Spinor  $\Psi$  ist die direkte Summe aus dem rechts- und linkshändigen Weyl-Spinor. Damit ist der Dirac-Spinor durch

$$\Psi = \begin{pmatrix} \chi_L \\ \chi_R \end{pmatrix}$$

gegeben. Der Dirac-Spinor unterliegt der Dirac-Gleichung

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0,$$

wobei die Gamma-Matrizen mit  $\gamma^\mu$  bezeichnet werden.

### 6.6.1 Darstellung eines Vierervektors als hermitesche $2 \times 2$ -Matrix

Ein Vierervektor  $x^\mu = (v_0, v_1, v_2, v_3)^T$  kann als hermitesche  $2 \times 2$ -Matrix gemäß

$$v^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} v^0 + v^3 & v^1 - iv^2 \\ v^1 + iv^2 & v^0 - v^3 \end{pmatrix}$$

mit den Pauli-Matrizen  $\sigma_\mu$  ( $\sigma_0 = \mathbb{1}_{2 \times 2}$ ) dargestellt werden. Somit gilt  $v^\mu v_\mu = (v^0)^2 - \vec{v}^2 = \text{Det}(v^\mu \sigma_\mu)$ . Die LT bilden dann komplexe  $2 \times 2$ -Matrizen mit Determinante +1, also die  $SL(2, \mathbb{C})$  (special linear, komplex zweidimensional). Mit  $\lambda(A) \in SL(2, \mathbb{C})$  wird ein Vierervektor gemäß

$$\lambda(v^\mu \sigma_\mu) \lambda^\dagger = (\Lambda^\mu_\nu v^\nu) \sigma_\mu$$

transformiert. Als Beispiel ein Boost in  $z$ -Richtung:

$$\lambda = e^{\frac{\chi}{2} \sigma_z} = \begin{pmatrix} e^{\frac{\chi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\chi}{2}} \end{pmatrix} \implies e^{\frac{\chi}{2} \sigma_z} \begin{pmatrix} v^0 + v^3 & v^1 - iv^2 \\ v^1 + iv^2 & v^0 - v^3 \end{pmatrix} e^{\frac{\chi}{2} \sigma_z} = \tilde{v} = \begin{pmatrix} e^\chi (v^0 + v^3) & v^1 - iv^2 \\ v^1 + iv^2 & e^{-\chi} (v^0 - v^3) \end{pmatrix}$$

## 6.7 Relativistische Schreibweise einer allgemeinen Lorentz-Transformation

Definiere zwei neue Tensor, die einmal die Boosts und Drehungen zusammenfasst und einmal die dazugehörigen Parameter

$$J_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -K_1 & -K_2 & -K_3 \\ K_1 & 0 & J_3 & -J_2 \\ K_2 & -J_3 & 0 & J_1 \\ K_3 & J_2 & -J_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\chi_1 & -\chi_2 & -\chi_3 \\ \chi_1 & 0 & \theta_3 & -\theta_2 \\ \chi_2 & -\theta_3 & 0 & \theta_1 \\ \chi_3 & \theta_2 & -\theta_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit können die LT durch

$$\Lambda(\omega) = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}}$$

dargestellt werden.

## 6.8 Transformation eines Spinors mit Spin $s = 1/2$ unter $\mathbf{L}_+^\uparrow$

Das ist einfach aus der Vorlesung übernommen. Jedoch ist das redundant zu dem Abschnitt zu den Darstellungen und die gepunkteten Spinoren finde ich komisch. Suche eine Spinordarstellung für die Algebra (3). Nutze dazu die Darstellung eines Viervektors als hermitesche  $2 \times 2$ -Matrix (s. 6.6.1). Ein Weyl-Spinor ist ein zweikomponentiges Objekt, dass wie

$$x'_\alpha = \lambda_\alpha^\beta x_\beta$$

transformiert mit  $\lambda \in SL(2, \mathbb{C})$ .  $\lambda$  und  $\lambda^*$  sind die unabhängigen Darstellung der  $SL(2, \mathbb{C})$ , d.h., dass keine Trafo  $\lambda = U^{-1}\lambda^*U$  existiert. Die Weyl-Spinoren  $\eta_{\dot{\beta}}$  transformieren unter  $\lambda^*$  wie

$$\eta'_{\dot{\alpha}} = \lambda_{\dot{\alpha}}^{*\dot{\beta}} \eta_{\dot{\beta}}$$

mit dem gepunkteten Spinor, wobei  $\dot{\alpha} = 1, 2$ ,  $\alpha = 1, 2$  gilt. Das Rauf- und Runterziehen der Indizes geschieht mit Hilfe des antisymmetrischen Tensors

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon^{\alpha\beta} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Transformiere wieder auf  $A_k = \frac{1}{2}(J_k + iK_k)$  und  $B_k = \frac{1}{2}(J_k - iK_k)$ , die eine  $SU(2) \times SU(2)$ -Algebra bilden.  $x_\alpha$  transformiert unter  $\lambda \in SL(2, \mathbb{C})$  so, dass  $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$ ,  $\vec{B} = \vec{0}$ , damit gilt  $\vec{J} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$ ,  $\vec{K} = -\frac{i}{2}\vec{\sigma}$ , womit eine allgemeine LT eines linkshändigen Spinors  $(1/2, 0)$  durch

$$\lambda(A) = e^{i(\vec{J} \cdot \vec{\theta} + \vec{K} \cdot \vec{\chi})} = e^{i(-\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\theta}}{2} + \frac{\vec{\chi} \cdot \vec{\sigma}}{2})}$$

gegeben ist. Bei einem rechtshändigen (gepunkteten) Spinor  $(0, 1/2)$  gilt  $\vec{A} = \vec{0}$ ,  $\vec{B} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}^*$  und somit  $\vec{J} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}^*$ ,  $\vec{K} = \frac{i}{2}\vec{\sigma}^*$  mit der Transformation

$$\lambda(A) = e^{i(\frac{\vec{\sigma}^* \cdot \vec{\theta}}{2} + \frac{\vec{\chi} \cdot \vec{\sigma}^*}{2})}.$$

Ein Dirac-Spinor transformiert dann wie

$$\Psi' = \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \epsilon \lambda^* \epsilon^T \end{pmatrix} \Psi$$

## 7 Die SU(N)

Die SU(N) ist die Gruppe der unitären  $N \times N$ -Matrizen mit Determinante Eins. Ein Element kann durch  $e^{i\vec{\theta} \cdot \vec{T}}$  dargestellt werden. Aus der Unitarität folgt wieder, dass die Generatoren hermitesch sein müssen. Eine SU(N) hat

$$N^2 - 1 \quad (4)$$

Generatoren.

### 7.1 Die SU(2)

Aus den Überlegungen aus Gleichung (4) folgt, dass die SU(3) 8 Generatoren, die Gell-Matrizen  $\lambda_i$  (gewichtet mit dem Faktor 1/2 analog zu den Pauli-Matrizen in der SU(2)) hat. Als Beispiel

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Gell-Matrizen haben die Normierung

$$\text{Tr}[\lambda_a \lambda_b] = 2\delta_{ab}.$$

und bilden eine Basis der SU(3) für die Elemente  $e^{i\vec{\theta} \cdot \vec{\lambda}}$ . Die Gell-Matrizen  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  bilden eine Basis für die SU(2). Die Basiszustände der fundamentalen Darstellung sind dreidimensionale Vektoren, die der SU(2) sind zweidimensionale Vektoren. Die Farbladung und der Flavour wird durch die SU(3) beschrieben. Die QCD (Quantenchromodynamik) beinhaltet exakte Symmetrien, Baryonen und Mesonen und Color-Singulett (???). Der Flavour hat  $(u, d, s)$  als fundamentale Darstellung der SU(3).

### 7.2 Cartan'sche Unterlgebra einer Liealgebra

Die Cartansche Unterlgebra (CU) bildet eine abelsche Unterlgebra einer Liealgebra  $\mathcal{L}$ . Das heißt die Elemente  $H_i$  für die  $[H_i, H_j] = 0 \quad \forall i, j, \quad i = 1, \dots, l$  gilt, bilden die Cartansche Unterlgebra. Die kommutierenden Elemente sind  $H_1 = \frac{\lambda_3}{2}, H_2 = \frac{\lambda_8}{2}$ . Die Dimension der CU gibt den Rang der Gruppe an. Die Dimension der CU ist zwei und somit der Rang der SU(3) ebenfalls zwei. Die Eigenwerte der Elemente der CU nennt man Gewichte. Da die Gewichte der CU der SU(3) diagonal sind, lassen sich diese einfach ablesen

$$H_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_8 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Aus den Gewichten der beiden Generatoren der CU (5) lassen sich Gewichtsvektoren („weightvectors“)  $\vec{\mu}_i = |(H_1)_{ii}, (H_2)_{ii}\rangle$  basteln. Damit ergibt sich Abbildung 1.

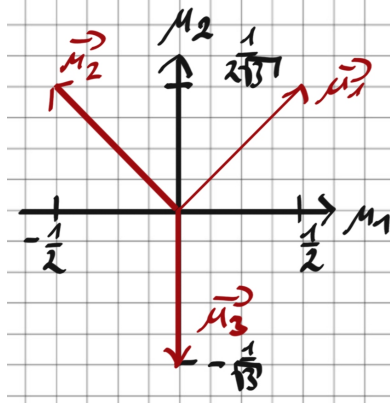


Abbildung 1: weightvectors der CU der SU(3).

### 7.3 Flavour SU(3)

Hier wird in Abbildung 1 auf die  $x$ -Achse der Isospin aufgetragen. Also entsprechen die Komponenten von  $H_1$  dem Isospin  $I_3$ . Auf der  $y$ -Achse wird die Hyperladung  $Y$  reskaliert mit  $2/\sqrt{3}$  aufgetragen, also entspricht  $H_2$  der Hyperladung bis auf den Vorfaktor. Prinzipiell wird jedem weightvector einfach nur ein Quark zugeordnet (s. Abb. 2). Bei der SU(N)

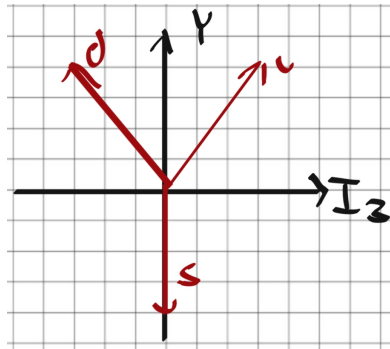
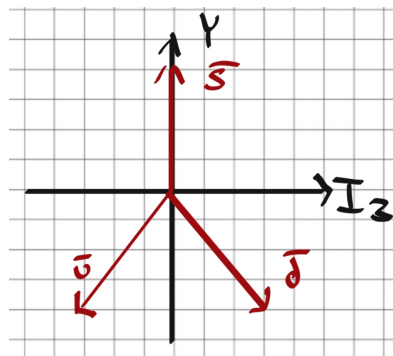


Abbildung 2: Hyperladung-Isospin-Diagramm der Quarks.

mit  $N \geq 3$  gibt es noch die Darstellung

$$U^* = \left(1 + \frac{\lambda_a \theta^a}{2}\right)^* = \left(1 - \frac{\lambda_a^* \theta^a}{2}\right)$$

mit  $T_a^* = \frac{-\lambda_a^*}{2} = \frac{\lambda_a^T}{2}$ . Die Antiquarks transformieren unter der Darstellung  $U^*$ . Analog zu den Quarks lassen sich dazu wieder die weightvectors aufstellen und jedem eine Antiquark zuordnen, womit die Abbildung 3 entsteht.



**Abbildung 3:** Hyperladung-Isospin-Diagramm der Antiquarks.