

Zusammenfassung zur Vorlesung Gruppentheorie in der Physik I

Yanick Sebastian Kind
yanick.kind@udo.edu

03.03.2023

Inhaltsverzeichnis

1	Ergänzen	4
2	Abstrakte Gruppentheorie	4
2.1	Definition: Gruppe	4
2.1.1	Endliche Gruppe	4
2.2	Multiplikationstabelle	5
2.2.1	Rearrangement Theorem	5
2.3	Zyklische Gruppe	5
2.4	Untergruppen und Nebenklassen	5
2.4.1	Satz: Disjunktheit oder Gleichheit	5
2.4.2	Satz: Index einer Untergruppe	6
2.5	Konjugierte Elemente und Klassen	6
2.5.1	Konjugationsklasse	6
2.6	Normalteiler und Faktorgruppen	6
2.6.1	Definition: Normalteiler	6
2.6.2	Einschub: Komplexe	6
2.6.3	Satz: Nebenklasse einer invarianten Untergruppe	7
2.6.4	Definiton: Faktorgruppe	7
3	Darstellungstheorie	7
3.1	Definition: Darstellung	7
3.2	Definition: Äquivalente Darstellung	7
3.3	(Ir)reduzibilität	7
3.4	Satz: unitäre Darstellungen	8
3.5	Schur'sches Lemma	8
3.5.1	Alternative Formulierung	8
3.6	Orthogonalitätstheorem	8
3.7	Satz von Burnside	8
3.8	Definition: Charakter	9
3.9	Satz: Zeilenorthogonalität	9
3.10	Charaktertafel	9
3.11	Satz: Spaltenorthogonalität	10
3.12	Dekomposition von reduziblen Darstellungen	10
3.13	Reguläre Darstellung	10
4	Symmetrioperationen in der Quantenmechanik	11
4.1	Wirkung der Symmetrioperationen auf Wellenfunktionen	11
4.2	Symmetrie des Hamiltonoperators	11
4.3	Die Gruppe der Schrödingergleichung	11
4.4	Bestimmung einer Darstellung der Symmetriegruppe	12
4.5	Unitarität der Darstellung	12
4.6	Entartungsgrad	12

5	Liegruppen	12
5.1	Definiton: Liegruppe	12
5.2	Erzeugenden	13
5.3	Strukturkonstanten	13
5.4	Exponentielle Parameterisierung	13
5.5	Lie-Klammern	14
5.6	$SO(3)$	14
5.7	$SU(2)$	14
5.8	Vergleich $SO(3)$ und $SU(2)$	15
5.9	Darstellungen der $SU(2)$ und $SO(3)$	15
6	Poincare-Gruppe	15
6.1	Lorentz-Transformation	15
6.2	Eigenschaften der Lorentz-Transformation	16
6.3	Lorentz-Gruppe als Liegruppe	16
6.4	Rapiditäten	16
6.5	Darstellung der Lorentzgruppe	17
6.5.1	Darstellung eines Vierervektors als hermitesche 2×2 -Matrix . . .	17
6.6	Die Gruppe L_+^\uparrow	17
6.7	Relativistische Schreibweise einer allgemeinen Lorentz-Transformation . . .	18
6.8	Transformation eines Spinors mit Spin $s = 1/2$ unter L_+^\uparrow	18

1 Ergänzen

- Iso/Homomorphismus
- Permutationsgruppe
- triviale Darstellung als Isomorphismus
- vll. noch Kristallstruktur und Blochtheorem
- wichtigen Liegruppen und dessen Mannigfaltigkeit
- Sachen von Henry
- Mannigfaltigkeiten verbessern evtl. Bilder
- Hakenregel
- Klassifizierung der Lorentz-Trafos (eigentlich, orthochron)
- Ab Darstellung eines Viervektors als hermitesche 2×2 Matrix recherchieren.
- Ende der Vorlesung 11 mit den Dirac-Spinoren und der Dirac-Gleichung

2 Abstrakte Gruppentheorie

2.1 Definition: Gruppe

Eine Menge $\mathcal{G} = \{A_2, A_3, \dots\}$ bildet eine Gruppe, wenn mit einer Gruppenverknpfung $*$ folgende vier Eigenschaften erfüllt sind:

1. **Abgeschlossenheit:** Mit $A_i, A_j \in \mathcal{G}$ folgt $A_i * A_j = A_k \in \mathcal{G}$, d.h. die Verknüpfung zweier Elemente ergibt wieder ein Element der Gruppe.
2. **Assoziativität:** Es gilt mit $A_i, A_j, A_k \in \mathcal{G}$, dass $(A_i * A_j) * A_k = A_i * (A_j * A_k)$.
3. **Neutrale Element:** Es existiert ein eindeutiges Element $E \in \mathcal{G}$ mit $E * A_i = A_i * E = A_i$.
4. **Inverse Element:** Zu jedem Element $A_i \in \mathcal{G}$ existiert ein eindeutiges inverses Element A_i^{-1} , so dass $A_i^{-1} * A_i = A_i * A_i^{-1} = E$ gilt.

2.1.1 Endliche Gruppe

Eine Gruppe mit einer endlichen Anzahl an Elementen heißt endliche Gruppe. Eine Gruppe $\mathcal{G} = \{E, A_2, \dots, A_h\}$ ist eine endliche Gruppe der Ordnung h . Man schreibt auch $|\mathcal{G}| = h$.¹

¹Im Folgenden wird das Symbol der Verknüpfung und die Angabe, dass ein Element ein Element einer Gruppe ist, weggelassen, sofern es eindeutig ist.

2.2 Multiplikationstabelle

Die Multiplikationstabelle gibt einfach an, welche Verknüpfungen welches Gruppenelement ergeben. Bsp. Symmetrische Gruppe S_3 :

	e	a	a^2	b	c	d
e	e	a	a^2	b	c	d
a	a	a^2	e	c	d	b
a^2	a^2	e	a	d	b	c
b	b	d	c	e	a^2	a
c	c	b	d	a	e	a^2
d	d	c	b	a^2	a	e

2.2.1 Rearrangement Theorem

Sallopp gesagt: In jeder Zeile und Spalte einer Multiplikationstabelle kann ein Gruppenelement nur einmal auftreten.

Mathematisch: In der Sequenz $EA_k, A_2A_k, \dots, A_hA_k$ kommt jedes Element A_i nur einmal vor.

2.3 Zyklische Gruppe

Bei einer zyklischen Gruppe kann jedes Element durch mehrfacher Multiplikation eines Elements reproduziert werden, so dass sich jede zyklische Gruppe \mathcal{G} als

$$\mathcal{G} = \{X, X^2, \dots, X^n = E\}$$

schreiben lässt, wobei die Ordnung die Periode der zyklischen Gruppe ist (Bsp.: Translationsgruppe eines Kristalls)

2.4 Untergruppen und Nebenklassen

Sei $S = \{E, S_2, \dots, S_g\}$ eine Untergruppe der Ordnung g der Gruppe \mathcal{G} der Ordnung h , dann ist

$$SX = \{EX, S_2X, \dots, S_gX\}$$

eine rechte Nebenklasse von S (linke Nebenklasse analog). Wäre $X \in S$, dann wäre XS wieder S selbst und damit enthält eine Nebenklasse kein einziges Element der Untergruppe.

2.4.1 Satz: Disjunktheit oder Gleichheit

Zwei (linke oder rechte) Nebenklassen XS, YS einer Untergruppe S sind entweder disjunkt oder gleich.

2.4.2 Satz: Index einer Untergruppe

Die Ordnung einer Untergruppe \mathcal{S} von \mathcal{G} , wobei $|\mathcal{S}| = g$ und $|\mathcal{G}| = h$ gilt, muss ein ganzzahliger Teiler von h sein, so dass

$$\frac{h}{g} = l \in \mathbb{Z}$$

gilt. Dabei wird l der Index der Untergruppe \mathcal{S} in \mathcal{G} genannt.

2.5 Konjugierte Elemente und Klassen

Zwei Elemente A, B sind zueinander konjugiert, wenn

$$B = XAX^{-1}$$

gilt. Damit folgt, dass wenn C und B zu A konjugiert sind, dass auch B und C zueinander konjugiert sind.

2.5.1 Konjugationsklasse

Alle Elemente einer Gruppe \mathcal{G} die zueinander konjugiert sind bilden eine Konjugationsklasse

$$\mathcal{G}A = \{BAB^{-1} | B \in \mathcal{G}\},$$

wobei A ein beliebiges Element der Konjugationsklasse ist.

2.6 Normalteiler und Faktorgruppen

2.6.1 Definition: Normalteiler

Eine Untergruppe \mathcal{S} einer Gruppe \mathcal{G} , die nur aus kompletten Klassen besteht, heißt **Normalteiler** oder **invariante Untergruppe**. Mit einer komplette Klasse meint man, dass, wenn A in \mathcal{S} liegt, alle Elemente XAX^{-1} in \mathcal{S} liegen, selbst wenn $X \in \mathcal{G}$ nicht in \mathcal{S} liegt. Solche eine Untergruppe heißt invariant, da es unter Konjugation mit einem beliebigen Element von \mathcal{G} invariant ist.

2.6.2 Einschub: Komplexe

Ein Komplex

$$\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_n\}$$

ist eine Menge von Gruppenelementen unter Vernachlässigung der Reihenfolge. Eine Multiplikation mit einem beliebigen Element X ist durch $\mathcal{K}X = \{K_1X, \dots, K_nX\}$ gegeben. Die Multiplikation zweier Komplexe $\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_n\}$ und $\mathcal{K}' = \{K'_1, \dots, K'_m\}$ ist durch $\mathcal{K}\mathcal{K}' = \{K_1K'_1, K_2K'_1, \dots, K_1K'_2, K_1K'_3, \dots, K_nK'_m\}$ gegeben. Doppelte Elemente werden, wie es bei einer Menge üblich ist, nicht mitgezählt.

2.6.3 Satz: Nebenklasse einer invarianten Untergruppe

Aus der Definition 2.6.1 folgt

$$XSX^{-1} = S \iff XS = SX,$$

womit die rechte gleich der linken Nebenklasse einer invarianten Untergruppe ist.

2.6.4 Definiton: Faktorgruppe

Eine invariante Untergruppe S einer Gruppe G bildet mit all ihren $l - 1$ Nebenklassen eine Faktorgruppe

$$\mathcal{G}/S = \{S, SX_1, SX_2, \dots, SX_{l-1}\},$$

wobei die invariante Untergruppe S das Einselement bildet. Die Ordnung der Faktorgruppe entspricht $|\mathcal{G}|/|S|$.

3 Darstellungstheorie

Wir haben uns ausschließlich mit Matritzendarstellungen beschäftigt.

3.1 Definition: Darstellung

Bei einer Darstellung Γ wird jedem Gruppenelement eine quadratische Matrix zugeordnet:

$$\Gamma(A) : V \rightarrow V$$

mit dem Vektorraum V als Darstellungsraum mit $\text{Dim}(V) = d$ als Dimension der Darstellung. Eine lineare Darstellung $\Gamma(A)$ von \mathcal{G} ist ein Homomorphismus der Gruppe $\text{GL}(V)$

$$\Gamma(A)\Gamma(B) = \Gamma(AB), \quad A, B \in \mathcal{G}.$$

Das Einselement wird durch die Einheitsmatrix dargestellt.

3.2 Definition: Äquivalente Darstellung

Eine andere Darstellung lässt sich durch eine Ähnlichkeitstransformation gewinnen

$$\Gamma'(A) = S^{-1}\Gamma(A)S \implies \Gamma'(A)\Gamma'(B) = \Gamma'(AB).$$

Die Darstellungen Γ und Γ' sind äquivalent.

3.3 (Ir)reduzibilität

Die direkte Summe von zwei Darstellungen

$$\Gamma(A) = \begin{pmatrix} \Gamma^1(A) & 0 \\ 0 & \Gamma^2(A) \end{pmatrix}, \quad \Gamma(A) = \Gamma^1(A) \oplus \Gamma^2(A)$$

ist eine weitere Form von Redundanz. Lässt sich eine Darstellung durch eine globale Ähnlichkeitstransformation auf eine Blockdiagonale bringen, ist sie reduzibel, sonst irreduzibel.

3.4 Satz: unitäre Darstellungen

Jede Darstellung lässt sich mit Hilfe einer Ähnlichkeitstransformation auf eine unitäre Darstellung abgebildet werden. Vorgehen: Konstruiere hermitesche Matrix $\mathbf{H} = \sum_i^h \Gamma(A_i)\Gamma(A_i)^\dagger$. Dann diese diagonalisieren mit unitärer Trafo $\mathbf{d} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{U}$. Somit ist die Darstellung

$$\Gamma'(A_j) = \mathbf{d}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{U}^{-1} \Gamma(A_j) \mathbf{U} \mathbf{d}^{\frac{1}{2}}$$

unitär.

3.5 Schur'sches Lemma

Jede Matrix, welche mit allen Matrizen einer irreduziblen Darstellung kommutiert, muss ein Vielfaches von der Einheitsmatrix (sog. konstante Matrix) sein. Wenn somit eine nicht-konstante Matrix mit mindestens einer Matrix einer Darstellung kommutiert, ist diese Darstellung reduzibel.

3.5.1 Alternative Formulierung

Gegeben seien zwei Darstellungen mit $\text{Dim}(\Gamma^1(A_i)) = d_1$ und $\text{Dim}(\Gamma^2(A_i)) = d_2$. Wenn dann mit einer beliebigen Matrix \mathbf{M}

$$\mathbf{M}\Gamma^1(A_i) = \Gamma^2(A_i)\mathbf{M}$$

gilt, dann muss (i) bei $d_1 \neq d_2$ $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ oder (ii) bei $d_1 = d_2$ entweder $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ oder $|\mathbf{M}| \neq 0$ gelten. Aus letzterem folgt $\Gamma^1(A_i) = \mathbf{M}\Gamma^2(A_i)\mathbf{M}^{-1}$, womit die Darstellungen äquivalent sind.

3.6 Orthogonalitätstheorem

Bei Betrachtung **nicht-äquivalenter**, unitärer, irreduziblen Darstellungen gilt

$$\sum_R \Gamma^i(R)_{\mu\nu}^* \Gamma^j(R)_{\alpha\beta} = \frac{h}{d_i} \delta_{ij} \delta_{\mu\alpha} \delta_{\nu\beta}.$$

Geometrische Interpretation: die Gruppenelemente $R = E, A_2, \dots, A_h$ spannen einen h -dimensionalen „Gruppenelement“-Vektorraum auf. Jeder Vektor in diesem Raum hat drei Indizes, i, μ, ν . Diese Vektoren sind orthogonal zueinander.

3.7 Satz von Burnside

Aus der geometrischen Interpretation des Orthogonalitätstheorems 3.6 folgt mit d_i als Dimension der i -ten irreduziblen Darstellung der Gruppe \mathcal{G} direkt

$$\sum_i d_i^2 = |\mathcal{G}|,$$

da es zu jeder Darstellung Γ^i d_i^2 verschiedene Vektoren gibt. Das heißt, dass in Summe in diesem Vektorraum $\sum_i d_i^2$ verschiedene Vektoren existieren. Da in einem h -dimensionalen Vektorraum nur maximal h zueinander orthogonale Vektoren existieren können, folgt $\sum_i d_i^2 \leq h = |\mathcal{G}|$. Die eindeutige Gleichheit wird z.B. im Tinkham bewiesen.

3.8 Definition: Charakter

Der Charakter einer Darstellung $\Gamma^i(R)$ ist die Menge der h Zahlen $\chi^i(E), \chi^i(A_2), \dots, \chi^i(A_h)$ mit

$$\chi^i(R) = \text{Tr}(\Gamma^i(R)) = \sum_j^{d_i} \Gamma^i(R)_{jj}.$$

Die Spur ist unter einer Ähnlichkeitstransformation invariant, so dass äquivalente Darstellungen und Elemente innerhalb einer Klasse denselben Charakter besitzen. Im Folgenden wird der Charakter für die k -te Klasse \mathcal{G}_k durch $\chi^i(\mathcal{G}_k)$ angegeben.

3.9 Satz: Zeilenorthogonalität

Wir das Orthogonalitätstheorem genutzt, kann

$$\sum_R \chi^i(R)^* \chi^j(R) = \sum_R \chi^i(\mathcal{G}_k)^* \chi^j(\mathcal{G}_k) N_k = h \delta_{ij}$$

gezeigt werden, wobei N_k die Anzahl an Elementen in der k -ten Klasse ist. Somit formen die Charaktere der verschiedenen irreduziblen Darstellungen eine Menge von orthogonalen Vektoren

$$\chi^i = \begin{pmatrix} \chi^i(E) \\ \chi^i(A_2) \\ \dots \\ \chi^i(A_h) \end{pmatrix}$$

im Gruppenelement-Vektorraum aufgespannt durch die Klassen \mathcal{G}_k . Da die Anzahl der orthogonalen Vektoren nicht die Dimension des Vektorraums übersteigen kann, darf die Anzahl der Klassen nicht die Anzahl der irreduziblen Darstellungen übersteigen. Es gilt sogar

$$\text{Anzahl Klassen} = \text{Anzahl irreduzible Darstellungen}.$$

3.10 Charaktertafel

In den Zeilen stehen die irreduziblen Darstellungen und in den Spalten die Klassen mit der Anzahl an Elementen in der jeweiligen Klasse.

Tabelle 1: Charaktertafel der S_3

	\mathcal{G}_1	$3\mathcal{G}_2$	$2\mathcal{G}_3$
Γ^1	1	1	1
Γ^2	1	-1	1
Γ^3	2	0	-1

3.11 Satz: Spaltenorthogonalität

$$\sum_i \chi^i(\mathcal{G}_k)^* \chi^i(\mathcal{G}_l) = \frac{h}{N_k} \delta_{kl}$$

3.12 Dekomposition von reduziblen Darstellungen

Bringe die Darstellung erst auf blockdiagonale Form

$$\Gamma(R) = \begin{pmatrix} \Gamma^1(R) & & \\ & \Gamma^2(R) & \\ & & \ddots \end{pmatrix}, \quad \Gamma(R) = \Gamma^1(R) \oplus \Gamma^2(R) \oplus \dots$$

mit den irreduziblen Darstellungen auf der Diagonale. Somit ist die Spur der reduziblen Darstellung die Summe der Spuren der irreduziblen Darstellungen

$$\chi_{\text{red}}(R) = \sum_i a_i \chi_{\text{irred}}^i(R),$$

wobei der Koeffizient a_i angibt, wie oft die i -te irreduzible Darstellung auf der Diagonale vorkommt. Durch Anwendung des Orthogonalitätstheorems 3.6, sind die Koeffizienten eindeutig durch den Charakter der reduziblen Darstellung bestimmt.

$$a_i = \frac{1}{h} \sum_k N_k \chi_{\text{irred}}^i(\mathcal{G}_k)^* \chi_{\text{red}}(\mathcal{G}_k).$$

3.13 Reguläre Darstellung

Hier schiebt man einfach die Elemente in der Multiplikationstabelle so rum, so dass auf der Hauptdiagonalen das Einselement liegt. Wenn man nun die reguläre Darstellung eines Elements bestimmen möchte, schaut man in der Multiplikationstabelle, wo dieses Element als Resultat der Multiplikationen steht. Damit bekommt die Matrix der regulären Darstellung eine 1 als Eintrag an dieser Stelle.

	E	A	B	C	D	F
E	E	A	B	C	D	F
A^{-1}	A	E	D	F	B	C
B^{-1}	B	F	E	D	C	A
C^{-1}	C	D	F	E	A	B
D^{-1}	F	B	C	A	E	D
F^{-1}	D	C	A	B	F	E

$$\Gamma_{\text{reg}}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aus

$$\chi_{\text{reg}} \cdot \chi_{\text{irred}}^i = \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_i \\ x \\ \dots \end{pmatrix} = h d_i$$

folgt, dass die reguläre Darstellung **jede** irreduzible Darstellung genau d_i mal enthält (s. Gl. (3.12)).

4 Symmetrieoperationen in der Quantenmechanik

Ausgangspunkt ist die Schrödingergleichung

$$\hat{H}\Psi_n = E_n^j \Psi_n.$$

Dabei gibt j den Grad der Entartung an. Ziel ist es nun einen Zusammenhang zwischen den Symmetrieoperationen und der Entartung der Energieniveaus zu finden.

4.1 Wirkung der Symmetrieoperationen auf Wellenfunktionen

Sei \hat{P}_R eine Symmetrieoperationen, somit wirkt diese auf eine Wellenfunktionen gemäß

$$\hat{P}_R \Psi(\vec{r}) = \Psi(\mathbf{R}^{-1} \vec{r}).$$

Somit kann entweder der Vektor um einen Winkel im mathematisch positiven Drehsinn oder das Koordinatensystem um diesen Winkel im mathematisch negativen Drehsinn gedreht werden. Die Symmetrieoperatoren bilden eine Gruppe, die isomorph zu der Gruppe der Koordinatentransformationen ist.

4.2 Symmetrie des Hamiltonoperators

Wenn das System und damit auch der Hamiltonian invariant unter einer Symmetrieoperationen ist, vertauscht der Hamiltonian mit dem Symmetrieoperator und somit gilt

$$\hat{H}\Psi = E_n \Psi \iff \hat{P}_R \hat{H}\Psi = E_n \hat{P}_R \Psi \iff \hat{H} \hat{P}_R \Psi = \hat{H}\Psi' = E_n \Psi',$$

d.h. bei Symmetrien haben verschiedene Zustände die selbe Energie, womit Entartung vorliegt.

4.3 Die Gruppe der Schrödingergleichung

Sei nun ein Energieniveau E_n d_n -fach entartet. Dann wähle d_n orthonormale Eigenfunktionen, welche zu E_n gehören. Diese d_n Eigenfunktionen spannen den entarteten Unterraum $\mathcal{V} \in \mathcal{H}$ von dem gesamten Hilbertraum \mathcal{H} auf, welcher invariant unter den Symmetrieoperationen, welche lineare Abbildungen

$$\hat{P}_R: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$$

sind, ist. Die Darstellungen sind irreduzibel, da in dem Raum \mathcal{V} kein invarianter Unterraum existiert.

4.4 Bestimmung einer Darstellung der Symmetriegruppe

Nach Abschnitt 4.3 erhält man durch Anwendung der Symmetrioperation auf eine Eigenfunktion des entarteten Unterraums eine Linearkombination aller Eigenfunktionen

$$\hat{P}_R \Psi_\nu^n = \sum_{\kappa} \Gamma^n(R)_{\kappa\nu} \Psi_\kappa^n$$

Die Matrixen $\Gamma^n(R)$ bilden dann eine irreduzible Darstellung zu der Symmetriegruppe, unter welcher der entartete Unterraum mit dem Energielevel E_n invariant ist.

4.5 Unitarität der Darstellung

Nur wenn die Eigenfunktionen orthonormiert gewählt werden, sind die Darstellungen unitär.

4.6 Entartungsgrad

Entartungsgrad = Dimension der irreduziblen Darstellung

5 Liegruppen

1. erfüllen Gruppenaxiome
2. besitzen eine analytische Mannigfaltigkeit
3. Abstandsbegriff (bilden topologischen Raum, metrischen Raum)

5.1 Definition: Liegruppe

Eine Gruppe \mathcal{G} wird Liegruppe genannt, wenn

1. \mathcal{G} besitzt mindestens eine endliche Darstellung $\Gamma(T)$ mit $T \in \mathcal{G}$ der Dimension d .
Definiere einen Abstand

$$d(T, T') = \sqrt{\sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d |\Gamma(T)_{jk} - \Gamma(T')_{jk}|^2} = d(T', T) > 0$$

und somit eine Metrik.

2. Jedes Element T kann durch n reelle Parameter $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ angegeben werden.
 n ist dann die Dimension der Liegruppe und die minimale Anzahl an Elementen.
3. Nähe zum Einselement. Sei η vorgegeben, dann gehört zu jedem Punkt $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$, für den $\sum_i^n \theta_i^2 < \eta^2$ gilt, ein Element $T \in \mathcal{G}$.
4. Die Darstellungen $\Gamma(T(\theta))$ sind in den Parametern analytisch und somit in eine Potenzreihe entwickelbar.

Die Gruppenelemente $T(\theta)$ sind „smooth“ bzgl. den Parametern. Das bedeutet, dass wenn die Gruppenelemente nah beieinander sind, dass die Parameter ebenfalls nah beieinander sind. Ebenfalls soll das Einselement bei $\theta = 0$ liegen:

$$T(\theta)|_{\theta=0} = E \iff \Gamma(T(\theta))|_{\theta=0} = \mathbb{1}$$

5.2 Erzeugenden

Die n Erzeugenden/Generatoren einer n -dimensionalen Liealgebra sind gemäß

$$\left. \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \Gamma(T(\theta)) \right|_{\theta=0} = t_j$$

definiert. Der Faktor $1/i$ ist Konvention. Wenn man die Darstellungen bis zur ersten Ordnung entwickelt und fordert, dass die Darstellungen unitär sind, folgt dass die Generatoren hermitesch sein müssen.

$$\begin{aligned} \Gamma(T(\theta)) &= \mathbb{1} + \left. \frac{\partial \Gamma(T(\theta))}{\partial \theta_a} \right|_{\theta=0} \theta_a + \mathcal{O}(\theta^2) = \mathbb{1} + i t_a \theta_a + \mathcal{O}(\theta^2) \\ \implies \Gamma(T(\theta)) \Gamma(T(\theta))^\dagger &\approx \mathbb{1} + i \theta_a (t_a - t_a^\dagger) \stackrel{!}{=} \mathbb{1} \iff t_a = t_a^\dagger \end{aligned}$$

5.3 Strukturkonstanten

Ausgang ist die Gruppeneigenschaft. Somit muss mit $T(\theta), T(\theta') \in \mathcal{G}$ $T(\theta)T(\theta') = T(f(\theta, \theta'))$ gelten. Es gilt ebenfalls $\theta = \theta_1, \dots, \theta_n$, $f = f_1, \dots, f_n$ mit n als Dimension der Gruppe. Bestimme nun $f(\theta, \theta')$ und entwickle f in die zweite Ordnung. Dann nochmal die Darstellungen in erste Ordnung entwickeln und dann Koeffizientenvergleich machen, womit die Bedingung für eine Liealgebra

$$[t_a, t_b] = i \sum_c^n f_{ab}^c t_c$$

folgt. Die f_{ab}^c als sind Strukturkonstanten, welche extrem wichtig sind, da diese die gesamte Gruppenmultiplikation zusammenfassen.

5.4 Exponentielle Parameterisierung

Wenn man nun etwas von der Eins weggeht, lässt sich die Darstellung durch ein Entwicklung in den Parametern darstellen:

$$\Gamma(d\theta) = \mathbb{1} + i \sum_a^n t_a d\theta_a$$

Wir können $d\theta_a$ auch einfach durch $d\theta_a = \frac{\theta_a}{k}$ darstellen und k gegeben Unendlich laufen lassen. Damit lässt sich die Darstellung

$$\Gamma(\theta) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\mathbb{1} + i \sum_a^n t_a \frac{\theta_a}{k} \right)^k = e^{i \sum_a^n t_a \theta_a} = e^{i \vec{t} \cdot \vec{\theta}}$$

finden.

5.5 Lie-Klammern

Die Erzeugenden erfüllen die Axiome einer Liealgebra, d.h. für die Generatoren $t_a \in \mathcal{V}$ ist zusätzlich eine Verknüpfung, die Lie-Klammer,

$$\begin{aligned}\mathcal{V} * \mathcal{V} &\rightarrow \mathcal{V} \\ x, y \in \mathcal{V} &\rightarrow [x, y] \in \mathcal{V}\end{aligned}$$

definieren, welche die Eigenschaften

1. Bilinearität: $[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z]$
2. $[x, x] = 0$
3. Jacobi-Identität (zyklische Vertauschung): $[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$

erfüllen.

5.6 SO(3)

S für speziell (Determinante ist eins), O für orthogonal und drei für 3×3 Darstellungsmatrizen. Die SO(3) ist eigentlich einfach nur die Gruppe der Drehungen im \mathbb{R}^3 . Generatoren J_i gemäß Gleichung (5.2) bestimmen:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Kommutatorrelation ist

$$[J_i, J_j] = i \sum_k \epsilon_{ijk} J_k$$

mit dem epsilon-Tensor als Strukturkonstanten und somit bilden die Generatoren J_i eine Liealgebra. Die Gruppenmannigfaltigkeit wird durch Drehungen im \mathbb{R}^3 auf einer Vollkugel mit dem Radius π um den Vektor $\hat{k} = \vec{k}/|\vec{k}| = (k_1, k_2, k_3)^T$ mit $|\vec{k}| = \theta$ als Drehwinkel beschrieben. Es gilt

$$\Gamma_{ij} = (1 - \cos(\theta))k_i k_j + \cos(\theta)\delta_{ij} + \sin(\theta) \sum_m \epsilon_{imj} k_m.$$

Es gilt außerdem $\Gamma(\hat{k}) = \Gamma(-\hat{k})$. Auf der Vollkugel sind die gegenüberliegenden Punkte zu identifizieren, wo dann die Elemente identisch sind (**hier bin ich mir nicht sicher**)

5.7 SU(2)

Die SU(2) ist die lineare Gruppe der unitären (U für unitär) Matrizen mit Determinante (S für spezielle) 1. Die Generatoren der SU(2) sind die Pauli-Matrizen gewichtet mit dem Faktor $1/2$

$$s_i = \frac{1}{2}\sigma_i,$$

welche die Kommutatorrelation

$$[s_i, s_j] = i \sum_k \epsilon_{ijk} s_k$$

erfüllen erneut mit dem epsilon-Tensor als Strukturkonstanten. Die Gruppenmannigfaltigkeit ist die selbe wie die der $SO(3)$ bis auf, dass die Vollkugel den Radius 2π besitzt. Die Darstellungen können durch das Matrixexponential (s. 5.4) gewonnen werden

$$\Gamma(\alpha) = e^{i\alpha S_3} = i \frac{\alpha}{2} \sigma_3 = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix}$$

jedoch gilt $\Gamma(\alpha + 2\pi) = -\Gamma(\alpha)$. Erst bei einer Verschiebung um 4π kommt man am selben Punkt an (eine Drehung um 4π entspricht dem Einheitsselement), wobei hier wieder die gegenüberliegenden Punkte auf der Vollkugel mit Radius 2π zu identifizieren sind, welche die selben Elemente bilden (**hier bin ich mir wieder nicht sicher**).

5.8 Vergleich $SO(3)$ und $SU(2)$

Die Generatoren der $SO(3)$ und $SU(2)$ haben dieselben Kommutatorrelationen und somit auch die selbe Liealgebra (vielleicht genauer: deren Liealgebren sind isomorph). Sie unterscheiden sich lediglich in ihren Gruppenmannigfaltigkeiten. Die $SU(2)$ ist eine doppelte Überlagerung der $SO(3)$.

5.9 Darstellungen der $SU(2)$ und $SO(3)$

$\sigma_z/2$ (**nicht sicher hier, in Vorlesung steht $s_z/2$ aber sehe noch nicht die Richtigkeit**) bilden 2 dimensionale Darstellung und $(\epsilon_i)_{jk}$ bilden 3 dimensionale Darstellung. Im Allgemeinen gilt für beliebiges j (ganz- oder halbzahlige)

$$J_z^{2j+1} = \begin{pmatrix} j & & & \\ & j-1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -j \end{pmatrix} \Rightarrow \Gamma(\alpha) = e^{i\alpha J_z} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha j} & & & \\ & e^{i\alpha(j-1)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{-i\alpha j} \end{pmatrix}$$

Bei ganzzahligem j folgt $\Gamma(\alpha + 2\pi)$, bei halbzahligen j folgt $\Gamma(\alpha + 2\pi) = -\Gamma(\alpha)$

6 Poincare-Gruppe

Ab hier wird die Einsteinsche Summenkonvention verwendet.

6.1 Lorentz-Transformation

Eine Lorentz-Transformation (LT) ist ein Λ ist eine lineare Transformation, die Raumzeitpunkte x^μ auf $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$ abbilden. Im Folgenden werden nur die homogenen LT, d.h. $a^\mu = 0$ gebraucht. Es wird gefordert, dass die LT das Skalarprodukt $x_\mu x^\mu$ nicht ändert, so dass die Metrik $g_{\nu\mu}$ unter der LT invariant ist

$$\Lambda^\mu_\nu \Lambda^\delta_\sigma g_{\mu\delta} = g_{\nu\sigma}$$

6.2 Eigenschaften der Lorentz-Transformation

$\text{Det}(\lambda) = \pm 1$, da

$$\Lambda g \Lambda^T = g \iff \text{Det}(\Lambda^2) \text{Det}(g) = \text{Det}(g) \implies \text{Det}(\Lambda) = \pm 1.$$

Außerdem folgt aus $\Lambda_0^\mu \Lambda_0^\rho g_{\mu\rho} = g_{00}$, dass

$$\Lambda_0^0 \geq 1 \quad \text{oder} \quad \Lambda_0^0 \leq 1$$

6.3 Lorentz-Gruppe als Liegruppe

Die Erzeugenden der Drehungen erfüllen die Algebra

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k$$

und die Winkel sind additiv, womit

$$e^{i\theta J_i} e^{i\varphi J_i} = e^{i(\theta+\varphi) J_i}$$

gilt. Jedoch sind die Parameter der Boosts nicht additiv. Somit wird ein Satz neuer Parameter, die Rapiditäten, gesucht, die additiv sind.

6.4 Rapiditäten

Die Rapidität χ sind gemäß

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \cosh(\chi)$$

definiert. Aus $\cosh^2(\chi) - \sinh^2(\chi) = 1$ folgt $\sinh^2(\chi) = \gamma^2 - 1 = \beta^2 \gamma^2$ und somit $\beta = \tanh(\chi)$. Die relativistische Geschwindigkeitsaddition erfolgt gemäß $v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$. Ein

Lorentzboost in x -Richtung ist

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\chi) & \sinh(\chi) & 0 & 0 \\ \sinh(\chi) & \cosh(\chi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Rapiditäten sind nun additive Parameter. Die Generatoren der Boosts K_i gewinnt man wie üblich mit Hilfe von Gleichung (5.2) mit $(K_j)^\nu_\mu = 1/i \partial \Lambda^\nu_\mu / \partial \chi_j$ gewonnen, womit

$$K_i = \frac{1}{i} (\delta_{1i} + \delta_{i1}),$$

welcher antihermitesch sind. Als Beispiel ergibt sich der Generator des Boosts in x -Richtung

$$(K_1)^\mu_\nu = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Generatoren der Boosts sind nicht kompakt, was an den Kommutatorrelationen

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J^k, \quad [K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J^k, \quad [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K^k$$

ersichtlich wird.

6.5 Darstellung der Lorentzgruppe

Definiere $A_k = \frac{1}{2}(J_k + iK_k)$ und $B_k = \frac{1}{2}(J_k - iK_k)$. Diese Generatoren bilden wieder eine kompakte Liealgebra mit

$$[A_i, A_j] = i\epsilon_{ijk}A^k, \quad [B_i, B_j] = i\epsilon_{ijk}B^k, \quad [A_i, B_j] = 0$$

An Gleichung (6.5) wird ersichtlich, dass die homogene Lorentzgruppe eine $SO(3) \simeq SU(2) \times SU(2)$ ist.

6.5.1 Darstellung eines Vierervektors als hermitesche 2×2 -Matrix

Ein Vierervektor $x^\mu = (v_0, v_1, V_2, V_3)^T$ kann als hermitesche 2×2 -Matrix gemäß

$$v^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} v^0 + v^3 & v^1 - iv^2 \\ v^1 + iv^2 & v^0 - v^3 \end{pmatrix}$$

mit den Pauli-Matrizen σ_μ ($\sigma_0 = \mathbb{1}_{2 \times 2}$) dargestellt werden. Somit gilt $v^\mu v_\mu = (v^0)^2 - \vec{v}^2 = \text{Det}(v^\mu \sigma_\mu)$. Die LT bilden dann komplexe 2×2 -Matrizen mit Determinante +1, also die $SL(2, \mathbb{C})$ (special linear, komplex zweidimensional). Mit $\lambda(A) \in SL(2, \mathbb{C})$ wird ein Viervektor gemäß

$$\lambda(v^\mu \sigma_\mu) \lambda^\dagger = (\Lambda^\mu_\nu v^\nu) \sigma_\mu$$

transformiert. Als Beispiel ein Boost in z -Richtung: Es gilt

$$\lambda = e^{\frac{\chi}{2}\sigma_z} = \begin{pmatrix} e^{\frac{\chi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\chi}{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow e^{\frac{\chi}{2}\sigma_z} \begin{pmatrix} v^0 + v^3 & v^1 - iv^2 \\ v^1 + iv^2 & v^0 - v^3 \end{pmatrix} e^{\frac{\chi}{2}\sigma_z} = \tilde{v} = \begin{pmatrix} e^\chi(v^0 + v^3) & v^1 - iv^2 \\ v^1 + iv^2 & e^{-\chi}(v^0 - v^3) \end{pmatrix}$$

6.6 Die Gruppe L_+^\uparrow

Die eigentlich-orthochrone Lorentz-Gruppe hat die Generatoren

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J^k, \quad [K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J^k, \quad [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K^k$$

und entspricht der $SO(1,3)$ mit den Darstellungen

$$e^{i(\vec{\theta} \cdot \vec{J} + \vec{\chi} \cdot \vec{K})}.$$

6.7 Relativistische Schreibweise einer allgemeinen Lorentz-Transformation

Definiere zwei neue Tensor, die einmal die Boosts und Drehungen zusammenfasst und einmal die dazugehörigen Parameter

$$J_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -K_1 & -K_2 & -K_3 \\ K_1 & 0 & J_3 & -J_2 \\ K_2 & -J_3 & 0 & J_1 \\ K_3 & J_2 & -J_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\chi_1 & -\chi_2 & -\chi_3 \\ \chi_1 & 0 & \theta_3 & -\theta_2 \\ \chi_2 & -\theta_3 & 0 & \theta_1 \\ \chi_3 & \theta_2 & -\theta_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit können die LT durch

$$\Lambda(\omega) = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}}$$

dargestellt werden.

6.8 Transformation eines Spinors mit Spin $s = 1/2$ unter L_+^\uparrow

Suche eine Spinordarstellung für die Algebra (6.6). Nutze dazu die Darstellung eines Vektors als hermitesche 2×2 -Matrix (s. 6.5.1). Ein Weyl-Spinor ist ein zweikomponentiges Objekt, dass wie

$$x'_\alpha = \lambda_\alpha^\beta x_\beta$$

Strich bei rechte Vektor vll. falsch transformiert mit $\lambda \in SL(2, \mathbb{C})$. λ und λ^* sind die unabhängigen Darstellung der $SL(2, \mathbb{C})$, d.h., dass keine Trafo $\lambda = U^{-1}\lambda^*U$ existiert. Die Weyl-Spinoren $\eta_{\dot{\beta}}$ transformieren unter λ^* wie

$$\eta'_{\dot{\alpha}} = \lambda_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}*}$$

mit dem gepunkteten Spinor, wobei $\dot{\alpha} = 1, 2$, $\alpha = 1, 2$ gilt. Das Rauf- und Runterziehen der Indizes geschieht mit Hilfe des antisymmetrischen Tensors

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon^{\alpha\beta} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Transformiere wieder auf $A_k = \frac{1}{2}(J_k + iK_k)$ und $B_k = \frac{1}{2}(J_k - iK_k)$, die eine $SU(2) \times SU(2)$ -Algebra bilden. x_α transformiert unter $\lambda \in SL(2, \mathbb{C})$ so, dass $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$, $\vec{B} = \vec{0}$, damit gilt $\vec{J} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$, $\vec{K} = -\frac{i}{2}\vec{\sigma}$, womit eine allgemeine LT eines linkshändigen Spinors $(1/2, 0)$ durch

$$e^{i(\vec{J} \cdot \vec{\theta} + \vec{K} \cdot \vec{\chi})}$$

gegeben ist. Bei einem linkshändigen (gepunkteten) Spinor $(0, 1/2)^*$ gilt unter λ^* $\vec{A} = \vec{0}$, $\vec{B} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}^*$ und somit $\vec{J} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}^*$, $\vec{K} = \frac{i}{2}\vec{\sigma}^*$ mit der Transformation

$$e^{i(\frac{\vec{\sigma}^* \cdot \vec{\theta}}{2} + \frac{\vec{\chi} \cdot \vec{\sigma}^*}{2})}$$