Zusammenfassung zur Vorlesung Gruppentheorie in der Physik I

Yanick Sebastian Kind
yanick.kind@udo.edu

03.03.2023

Inhaltsverzeichnis

List of Theorems

1 Ergänzen

- Iso/Homomorphismus
- Permutationsgruppe
- triviale Darstellung als Isomorphismus
- vll. noch Kristallstruktur und Blochtheorem
- wichtigen Liegruppen und dessen Mannigfaltigkeit
- Sachen von Henry
- Mannigfaltigkeiten verbessern evtl. Bilder
- Hakenregel
- $SO(3) \simeq SU(2) \times SU(2)$

2 Abstrakte Gruppentheorie

2.1 Definition: Gruppe

Eine Menge $\mathcal{G} = \{A_2, A_3, ...\}$ bildet eine Gruppe, wenn mit einer Gruppenverknüpfung $*$ folgende vier Eigenschaften erfüllt sind:

1. **Abgeschlossenheit**: Mit $A_i, A_j \in \mathcal{G}$ folgt $A_i * A_j = A_k \in \mathcal{G}$, d.h. die Verknüpfung zweier Elemente ergibt wieder ein Element der Gruppe.
2. **Assoziativität**: Es gilt mit $A_i, A_j, A_k \in \mathcal{G}$, dass $(A_i * A_j) * A_k = A_i * (A_j * A_k)$.
3. **Neutrale Element**: Es exestiert ein eindeutiges Element $E \in \mathcal{G}$ mit $E * A_i = A_i * E = A_i$.
4. **Inverse Element**: Zu jedem Element $A_i \in \mathcal{G}$ exestiert ein eindeutiges inverses Element A_i^{-1}, so dass $A_i^{-1} * A_i = A_i * A_i^{-1} = E$ gilt.

2.1.1 Endliche Gruppe

Eine Gruppe mit einer endlichen Anzahl an Elementen heißt endliche Gruppe. Eine Gruppe $\mathcal{G} = \{E, A_2, \dots, A_h\}$ ist eine endliche Gruppe der Ordnung h. Man schreibt auch $|\mathcal{G}| = h$. [1]

[1] Im Folgenden wird das Symbol der Verknüpfung und die Angabe, dass ein Element ein Element einer Gruppe ist, weggelassen, sofern es eindeutig ist.

2.2 Multiplikationstabelle

Die Multiplikationstabelle gibt einfach an, welche Verknüpfungen welches Gruppenelement ergeben. Bsp. Symmetrische Gruppe S_3:

	e	a	a^2	b	c	d
e	e	a	a^2	b	c	d
a	a	a^2	e	c	d	b
a^2	a^2	e	a	d	b	c
b	b	d	c	e	a^2	a
c	c	b	d	a	e	a^2
d	d	c	b	a^2	a	e

2.2.1 Rearrangement Theorem

Sallop gesagt: In jeder Zeile und Spalte einer Multiplikationstabelle kann ein Gruppenelemnt nur einmal auftreten.
Mathematisch: In der Sequenz $EA_k, A_2A_k, \cdots, A_hA_k$ kommt jedes Element A_i nur einmal vor.

2.3 Zyklische Gruppe

Bei einer zyklischen Gruppe kann jedes Element durch mehrfacher Multiplikation eines Elements reproduziert werden, so dass sich jede zyklische Gruppe $\mathcal{G}$ als

$$\mathcal{G} = \{X, X^2, \dots, X^n = E\}$$

schreiben lässt, wobei die Ordnung die Periode der zyklischen Gruppe ist (Bsp.: Translationsgruppe eines Kirstalls)

2.4 Untergruppen und Nebenklassen

Sei $\mathcal{S} = \{E, S_2, \dots, S_g\}$ eine Untergruppe der Ordnung g der Gruppe $\mathcal{G}$ der Ordnung h, dann ist

$$\mathcal{S}X = \{EX, S_2X, \dots, S_gX\}$$

eine rechte Nebenklasse von $\mathcal{S}$ (linke Nebenklasse analog). Wäre $X \in \mathcal{S}$, dann wäre $X\mathcal{S}$ wieder $\mathcal{S}$ selbst und damit enthält eine Nebenklasse kein einziges Element der Untergruppe.

2.4.1 Satz: Disjunkheit oder Gleichheit

Zwei (linke oder rechte) Nebenklassen $X\mathcal{S}, Y\mathcal{S}$ einer Untergruppe $\mathcal{S}$ sind entweder disjunkt oder gleich.

2.4.2 Satz: Index einer Untergruppe

Die Ordnung einer Untergruppe $\mathcal{S}$ von $\mathcal{G}$, wobei $|\mathcal{S}| = g$ und $\mathcal{G} = h$ gilt, muss ein ganzzahliger Teiler von h sein, so dass

$$\frac{h}{g} = l \in \mathbb{Z}$$

gilt. Dabei wird l der Index der Untergruppe $\mathcal{S}$ in $\mathcal{G}$ genannt.

2.5 Konjugierte Elemente und Klassen

Zwei Elemente A, B sind zueinander konjugiert, wenn

$$B = XAX^{-1}$$

gilt. Damit folgt, dass wenn C und B zu A konjugiert sind, dass auch B und C zueinander konjugiert sind.

2.5.1 Konjugationsklasse

Alle Elemente einer Gruppe $\mathcal{G}$ die zueinander konjugiert sind bilden eine Konjugationsklasse

$$\mathcal{G}A = \{BAB^{-1} | B \in \mathcal{G}\},$$

wobei A ein beliebiges Element der Konjugationsklasse ist.

2.6 Normalteiler und Faktorgruppen

2.6.1 Definition: Normalteiler

Eine Untergruppe $\mathcal{S}$ einer Gruppe $\mathcal{G}$, die nur aus kompletten Klassen besteht, heißt **Normalteiler** oder **invariante Untergruppe**. Mit einer komplette Klasse meint man, dass, wenn A in $\mathcal{S}$ liegt, alle Elemente XAX^{-1} in $\mathcal{S}$ liegen, selbst wenn $X \in \mathcal{G}$ nicht in $\mathcal{S}$ liegt. Solche eine Untergruppe heißt invariant, da es unter Konjugation mit einem beliebigen Element von $\mathcal{G}$ invariant ist.

2.6.2 Einschub: Komplexe

Ein Komplex

$$\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_n\}$$

ist eine Menge von Gruppenelementen unter Vernachlässigung der Reihenfolge. Eine Multiplikation mit einen beliebigen Element X ist durch $\mathcal{K}X = \{K_1X, \dots, K_nX\}$ gegeben. Die Multiplikation zweier Komplexe $\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_n\}$ und $\mathcal{K}' = \{K'_1, \dots, K'_m\}$ ist durch $\mathcal{K}\mathcal{K}' = \{K_1K'_1, K_2K'_1, \dots, K_1K'_2, K_1K'_3, \dots, K_nK'_m\}$ gegeben. Doppelte Elemente werden, wie es bei einer Menge üblich ist, nicht mitgezählt.

2.6.3 Satz: Nebenklasse einer invarianten Untergruppe

Aus der Definition 2.6.1 folgt

$$XSX^{-1} = \mathcal{S} \iff X\mathcal{S} = \mathcal{S}X,$$

womit die rechte gleich der linken Nebenklasse einer invarianten Untergruppe ist.

2.6.4 Definiton: Faktorgruppe

Eine invariante Untergruppe $\mathcal{S}$ einer Gruppe G bildet mit all ihren $l-1$ Nebenklassen eine Faktorgruppe

$$\mathcal{G}/\mathcal{S} = \{S, \mathcal{S}X_1, \mathcal{S}X_2, \dots, \mathcal{S}X_{l-1}\},$$

wobei die invariante Untergruppe $\mathcal{S}$ das Einselement bildet. Die Ordnung der Faktorgruppe entspricht $|\mathcal{G}|/|\mathcal{S}|$.

3 Darstellungstheorie

Wir haben uns ausschließlich mit Matritzendarstellungen beschäftigt.

3.1 Definition: Darstellung

Bei einer Darstellung Γ wird jedem Gruppenelement eine quadratische Matrix zugeordnet:

$$\Gamma(A): \quad V \to V$$

mit dem Vektorraum V als Darstellungsraum mit Dim(V) $= d$ als Dimension der Darstellung. Eine lineare Darstellung $\Gamma(A)$ von $\mathcal{G}$ ist ein Homomorphismus der Gruppe GL(V)

$$\Gamma(A)\Gamma(B) = \Gamma(AB), \quad A, B \in \mathcal{G}.$$

Das Einselement wird durch die Einheitsmatrix dargestellt.

3.2 Definition: Äquivalente Darstellung

Eine andere Darstellung lässt sich durch eine Ähnlichkeitstransformation gewinnen

$$\Gamma'(A) = S^{-1}\Gamma(A)S \implies \Gamma'(A)\Gamma'(B) = \Gamma'(AB).$$

Die Darstellungen Γ und Γ' sind äquivalent.

3.3 (Ir)reduzibilität

Die direkte Summe von zwei Darstellungen

$$\Gamma(A) = \begin{pmatrix} \Gamma^1(A) & 0 \\ 0 & \Gamma^2(A) \end{pmatrix}, \quad \Gamma(A) = \Gamma^1(A) \bigoplus \Gamma^2(A)$$

ist eine weiter Form von Redundanz. Lässt sich eine Darstellung durch eine globale Ähnlichkeitstransformation auf eine Blockdiagonale bringen, ist sie reduzibel, sonst irreduzibel.

3.4 Satz: unitäre Darstellungen

Jede Darstellung lässt sich mit Hilfe einer Ähnlichkeitstransformation auf eine unitäre Darstellung abgebildet werden. Vorgehen: Konstruiere hermitische Matrix $\mathbf{H} = \sum_i^h \Gamma(A_i)\Gamma(A_i)^\dagger$. Dann diese diagonalisieren mit unitärer Trafo $\mathbf{d} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{U}$. Somit ist die Darstellung

$$\Gamma^{'}(A_j) = \mathbf{d}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{U}^{-1}\Gamma(A_j)\mathbf{U}\mathbf{d}^{\frac{1}{2}}$$

unitär.

3.5 Schur'sches Lemma

Jede Matrix, welche mit allen Matrizen einer irreduziblen Darstellung kommutiert, muss ein Vielfaches von der Einheitsmatrix (sog. konstante Matrix) sein. Wenn somit eine nicht-konstante Matrix mit mindestens einer Matrix einer Darstellung kommutiert, ist diese Darstellung reduzibel.

3.5.1 Alternative Formulierung

Gegeben seien zwei Darstellungen mit $\mathrm{Dim}(\Gamma^1(A_i)) = d_1$ und $\mathrm{Dim}(\Gamma^1(A_i)) = d_1$. Wenn dann mit einer beliebigen Matrix $\mathbf{M}$

$$\mathbf{M}\Gamma^1(A_1) = \Gamma^2(A_i)\mathbf{M}$$

gilt, dann muss (i) bei $d_1 \neq d_2$ $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ oder (ii) bei $d_1 = d_2$ entweder $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ oder $|\mathbf{M}| \neq 0$ gelten. Aus letzterem folgt $\Gamma^1(A_i) = \mathbf{M}\Gamma^2(A_i)\mathbf{M}^{-1}$, womit die Darstellungen äquivalent sind.

3.6 Orthogonalitätstheorem

Bei Betrachtung **nicht-äquivalenter**, unitärer, irreduziblen Darstellungen gilt

$$\sum_R \Gamma^i(R)^*_{\mu\nu}\Gamma^j(R)_{\alpha\beta} = \frac{h}{d_i}\delta_{ij}\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta}.$$

Geometrische Interpretation: die Gruppelemente $R = E, A_2, \dots, A_h$ spannen einen h-dimensionalen „Gruppenelement"-Vektorraum auf. Jeder Vektor in diesem Raum hat drei Indizes, i, μ, ν. Diese Vektoren sind orthogonal zueinander.

3.7 Satz von Burnside

Aus der geometrischen Interpretation des Orthogonalitätstheorems 3.6 folgt mit d_i als Dimension der i-ten irreduziblen Darstellung der Gruppe $\mathcal{G}$ direkt

$$\sum_i d_i^2 = |\mathcal{G}|,$$

da es zu jeder Darstellung Γ^i d_i^2 verschiedene Vektoren gibt. Das heißt, dass in Summe in diesem Vektorraum $\sum_i d_i^2$ verschiedene Vektoren exestieren. Da in einem h-dimensionalen Vektorraum nur maximal h zueinander orthogonale Vektoren exestieren können, folgt $\sum_i d_i^2 \leq h = |\mathcal{G}|$. Die eindeutige Gleichheit wird z.B. im Tinkham bewiesen.

3.8 Definition: Charakter

Der Charakter einer Darstellung $\Gamma^i(R)$ ist die Menge der h Zahlen $\chi^i(E), \chi^i(A_2), \dots, \chi^i(A_h)$ mit

$$\chi^i(R) = \mathrm{Tr}(\Gamma^i(R)) = \sum_j^{d_i} \mathit{\Gamma}^i(R)_{jj}.$$

Die Spur ist unter einer Ähnlichkeitstransformation invariant, so dass äquivalente Darstellungen und Elemente innerhalb einer Klasse denselben Charakter besitzen. Im Folgenden wird der Charakter für die k-te Klasse $\mathcal{G}_k$ durch $\chi^i(\mathcal{G}_k)$ angegeben.

3.9 Satz: Zeilenorthogonalität

Wir das Orthogonalitätstheorem genutzt, kann

$$\sum_R \chi^i(R)^* \chi^j(R) = \sum_R \chi^i(\mathcal{G}_k)^* \chi^j(\mathcal{G}_k) N_k = h\delta_{ij}$$

gezeigt werden, wobei N_k die Anzahl an Elementen in der k-ten Klasse ist. Somit formen die Charaktere der verschiedenen irreduziblen Darstellungen eine Menge von orthogonalen Vektoren

$$\chi^i = \begin{pmatrix} \chi^i(E) \\ \chi^i(A_2) \\ \dots \\ \chi^i(A_h) \end{pmatrix}$$

im Gruppenelement-Vektorraum aufgespannt durch die Klassen $\mathcal{G}_k$. Da die Anzahl der orthogonalen Vektoren nicht die Dimension des Vektorraums übersteigen kann, darf die Anzahl der Klassen nicht die Anzahl der irreduziblen Darstellungen übersteigen. Es gilt sogar

$$\text{Anzahl Klassen} = \text{Anzahl irreduzible Darstellungen.}$$

3.10 Charaktertafel

In den Zeilen stehen die irreduziblen Darstellungen und in den Spalten die Klassen mit der Anzahl an Elementen in der jeweiligen Klasse.

Tabelle 1: Charaktertafel der S_3

	$\mathcal{G}_1$	$3\mathcal{G}_2$	$2\mathcal{G}_3$
$\mathit{\Gamma}^1$	1	1	1
$\mathit{\Gamma}^2$	1	-1	1
$\mathit{\Gamma}^3$	2	0	-1

3.11 Satz: Spaltenorthogonalität

$$\sum_i \chi^i(\mathcal{G}_k)^* \chi^i(\mathcal{G}_l) = \frac{h}{N_k}\delta_{kl}$$

3.12 Dekomposition von reduziblen Darstellungen

Bringe die Darstellung erst auf blockdiagonale Form

$$\Gamma(R) = \begin{pmatrix} \Gamma^1(R) & & \\ & \Gamma^2(R) & \\ & & \ddots \end{pmatrix}, \quad \Gamma(R) = \Gamma^1(R) \bigoplus \Gamma^2(R) \bigoplus \cdots$$

mit den irreduziblen Darstellungen auf der Diagonale. Somit ist die Spur der reduziblen Darstellung die Summe der Spuren der irreduziblen Darstellungen

$$\chi_{\text{red}}(R) = \sum_i a_i \chi^i_{\text{irred}}(R),$$

wobei der Koeffizient a_i angibt, wie oft die i-te irreduzible Darstellung auf der Diagonale vorkommt. Durch Anwendung des Orthogonalitätstheorems 3.6, sind die Koeffizienten eindeutig durch den Charakter der reduziblen Darstellung bestimmt.

$$a_i = \frac{1}{h}\sum_k N_k \chi^i_{\text{irred}}(\mathcal{G}_k)^* \chi_{\text{red}}(\mathcal{G}_k).$$

3.13 Reguläre Darstellung

Hier schiebt man einfach die Elemente in der Multiplikationstabelle so rum, so dass auf der Hauptdiagonalen das Einselement liegt. Wenn man nun die reguläre Darstellung eines Elements bestimmen möchte, schaut man in der Multiplikationstabelle, wo dieses Element als Resultät der Multiplikationen steht. Damit bekommt die Matrix der regulären Darstellung eine 1 als Eintrag an dieser Stelle.

	E	A	B	C	D	F
E	E	A	B	C	D	F
A^{-1}	A	E	D	F	B	C
B^{-1}	B	F	E	D	C	A
C^{-1}	C	D	F	E	A	B
D^{-1}	F	B	C	A	E	D
F^{-1}	D	C	A	B	F	E

$$\mathit{\Gamma}_{\text{reg}}(A) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aus

$$\chi_{\text{reg}} \cdot \chi^i_{\text{irred}} = \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_i \\ x \\ \dots \end{pmatrix} = hd_i$$

folgt, dass die reguläre Darstellung **jede** irreduzible Darstellung genau d_i mal entält (s. Gl. (3.12)).

4 Symmetrieoperationen in der Quantenmechanik

Ausgangspunkt ist die Schrödingergleichung

$$\hat{H}\Psi_n = E_n^j \Psi_n.$$

Dabei gibt j den Grad der Entartung an. Ziel ist es nun einen Zusammenhang zwischen den Symmetrieoperationen und der Entartung der Energieniveaus zu finden.

4.1 Wirkung der Symmetrieoperationen auf Wellenfunktionen

Sei $\hat{P}_R$ eine Symmetrieoperationen, somit wirkt diese auf eine Wellenfunktionen gemäß

$$\hat{P}_R \Psi(\vec{r}) = \Psi(\mathbf{R}^{-1}\vec{r}).$$

Somit kann entweder der Vektor um einen Winkel im mathematisch positiven Drehsinn oder das Koordinatensystem um diese Winkel im mathematisch negativen Drehsinn gedreht werden. Die Symmetrieoperatoren bilden eine Gruppe, die isomoprh zu der Gruppe der Koordinatentransformationen ist.

4.2 Symmetrie des Hamiltonoperators

Wenn das System und damit auch der Hamiltonian invariant unter einer Symmetrieoperationen ist, vertauscht der Hamiltonian mit dem Symmetrieoperator und somit gilt

$$\hat{H}\Psi = E_n\Psi \iff \hat{P}_R\hat{H}\Psi = E_n\hat{P}_R\Psi \iff \hat{H}\hat{P}_R\Psi = \hat{H}\Psi' = E_n\Psi',$$

d.h. bei Symmetrien haben verschiedene Zustände die selbe Energie, womit Entartung vorliegt.

4.3 Die Gruppe der Schrödingergleichung

Sei nun eine Energieniveau E_n d_n-fach entartet. Dann wähle d_n orthonormale Eigenfunktionen, welche zu E_n gehören. Diese d_n Eigenfunktionen spannen den entarteten Unterraum $\mathcal{V} \in \mathcal{H}$ von dem gesamten Hilbertraum $\mathcal{H}$ auf, welcher invariant unter den Symmetrieoperationen, welche lineare Abbildungen

$$\hat{P}_R : \quad \mathcal{V} \to \mathcal{V}$$

sind, ist. Die Darstellungen sind irreduzibel, da in dem Raum $\mathcal{V}$ kein invarianter Unterraum exestiert.

4.4 Bestimmung einer Darstellung der Symmetriegruppe

Nach Abschnitt 4.3 erhält man durch Anwendung der Symmetrieoperation auf eine Eigenfunktion des entarteten Unterraums eine Linearkombination aller Eigenfunktionen

$$\hat{P}_R \Psi_\nu^n = \sum_\kappa \Gamma^n(R)_{\kappa\nu} \Psi_\kappa^n$$

Die Matrixen $\Gamma^n(R)$ bilden dann eine irreduzible Darstellung zu der Symmetriegruppe, unter welcher der entartete Unterraum mit dem Energiveau E_n invariant ist.

4.5 Unitarität der Darstellung

Nur wenn die Eigenfunktionen orthornmiert gewählt werden, sind die Darstellungen unitär.

4.6 Entartungsgrad

$$\text{Entartungsgrad} = \text{Dimension der irreduziblen Darstellung}$$

5 Liegruppen

1. erfüllen Gruppenaxiome
2. besitzen eine analytische Mannigfaltigkeit
3. Abstandsbegriff (bilden topologischen Raum, metrischen Raum)

5.1 Definiton: Liegruppe

Eine Gruppe $\mathcal{G}$ wird Liegruppe genannt, wenn

1. $\mathcal{G}$ besitzt mindestens eine endliche Darstellung $\Gamma(T)$ mit $T \in \mathcal{G}$ der Dimension d. Definiere einen Abstand

   $$d(T, T') = \sqrt{\sum_{j=1 k=1} \left|\Gamma(T)_{jk} - \Gamma(T')_{jk}\right|^2} = d(T', T) > 0$$

   und somit eine Metrik.

2. Jedes Element T kann durch n reelle Parameter $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ angegeben werden. n ist dann die Dimension der Liegruppe und die minimale Anzahl an Elementen.

3. Nähe zum Einselement. Sei η vorgegeben, dann gehört zu jedem Punkt $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$, für den $\sum_i^n \theta_i^2 < \eta^2$ gilt, ein Element $T \in \mathcal{G}$.

4. Die Darstellungen $\Gamma(T(\theta))$ sind in den Parametern analytisch und somit in eine Potenzreihe entwickelbar.

Die Gruppenelemente $T(\theta)$ sind „smooth“ bzgl. den Parametern. Das bedeutet, dass die wenn die Gruppenelemente nah beieinander sind, dass die Parameter ebenfalls nah beieinander sind. Ebenfalls soll das Einselement bei $\theta = 0$ liegen:

$$T(\theta)\big|_{\theta=0} = E \iff \Gamma(T(\theta))\big|_{\theta=0} = \mathbb{1}$$

5.2 Erzeugenden

Die n Erzeugenden/Generatoren einer n-dimensionalen Liealgebra sind gemäß

$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\Gamma(T(\theta))\bigg|_{\theta=0} = t_j$$

definiert. Der Faktor $^1/_i$ ist Konvention. Wenn man die Darstellungen bis zur ersten Ordnung entwickelt und fordert, dass die Darstellungen unitär sind, folgt dass die Generatoren hermitesch sein müssen.

$$\Gamma(T(\theta)) = \mathbb{1} + \frac{\partial\Gamma(T(\theta))}{\partial\theta_a}\bigg|_{\theta=0}\theta_a + \boldsymbol{\mathcal{O}}(\theta^2) = \mathbb{1} + it_a\theta_a + \boldsymbol{\mathcal{O}}(\theta^2)$$

$$\implies \Gamma(T(\theta))\Gamma(T(\theta))^\dagger \approx \mathbb{1} + i\theta_a(t_a - t_a^\dagger) \stackrel{!}{=} \mathbb{1} \iff t_a = t_a^\dagger$$

5.3 Strukturkonstanten

Ausgang ist die Gruppeneigenschaft. Somit muss mit $T(\theta),\ T(\theta') \in \mathcal{G}\ T(\theta)T(\theta') = T(f(\theta,\theta'))$ gelten. Es gilt ebenfalls $\theta = \theta_1, \dots, \theta_n,\ f = f_1, \dots, f_n$ mit n als Dimension der Gruppe. Bestimme nun $f(\theta,\theta')$ und entwickle f in die zweite Ordnung. Dann nochmal die Darstellungen in erste Ordnung entwickeln und dann Koeffizientenvergleich machen, womit die Bedingung für eine Liealgebra

$$[t_a, t_b] = i\sum_c^n f_{ab}^c t_c$$

folgt. Die f_{ab}^c als sind Strukturkonstanten, welche extrem wichtig sind, da diese die gesamte Gruppenmultiplikation zusammenfassen.

5.4 Exponentielle Parameterisierung

Wenn man nun etwas von der Eins weggeht, lässt sich die Darstellung durch ein Entwicklung in den Parametern darstellen:

$$\Gamma(\mathrm{d}\theta) = \mathbb{1} + i\sum_a^n t_a \mathrm{d}\theta_a$$

Wir können $\mathrm{d}\theta_a$ auch einfach durch $\mathrm{d}\theta_a = \frac{\theta}{k}$ darstellen und k gegeben Unendlich laufen lassen. Damit lässt sich die Darstellung

$$\Gamma(\theta) = \lim_{k\to\infty}(\mathbb{1} + i\sum_a^n t_a\frac{\theta_a}{k})^k = \mathrm{e}^{i\sum_a^n t_a\theta_a} = \mathrm{e}^{i\vec{t}\cdot\vec{\theta}}$$

finden.

5.5 Lie-Klammern

Die Erzeugenden erfüllen die Axiome einer Liealgebra, d.h. für die Generatoren $t_a \in \mathcal{V}$ ist zusätzlich eine Verknüpfung, die Lie-Klammer,

$$\mathcal{V} * \mathcal{V} \to \mathcal{V}$$
$$x, y \in \mathcal{V} \to [x, y] \in \mathcal{V}$$

definieren, welche die Eigenschaften

1. Biliniarität: $[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z]$
2. $[x, x] = 0$
3. Jacobi-Identität (zyklische Vertauschung): $[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$

erfüllen.

5.6 SO(3)

S für speziell (Determinante ist eins), O für orthogonal und drei für 3×3 Darstellungsmatrizen. Die SO(3) ist eigentlich einfach nur die Gruppe der Drehungen im $\mathbb{R}^3$. Generatoren J_i gemäß Gleichung (5.2) bestimmen:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Kommutatorrelation ist

$$[J_i, J_j] = i \sum_k \epsilon_{ijk} J_k$$

mit dem epsilon-Tensor als Strukturkonstanten und somit bilden die Generatoren J_i eine Liealgebra. Die Gruppenmannigfaltigkeit wird durch Drehungen im $\mathbb{R}^3$ auf einer Vollkugel mit dem Radius π um den Vektor $\hat{k} = \vec{k}/|\vec{k}| = (k_1, k_2, k_3)^T$ mit $|\vec{k}| = \theta$ als Drehwinkel beschrieben. Es gilt

$$\Gamma_{ij} = (1 - \cos(\theta)) k_i k_j + \cos(\theta) \delta_{ij} + \sin(\theta) \sum_m \epsilon_{imj} k_m.$$

Es gilt außerdem $\Gamma(\hat{k}) = \Gamma(-\hat{k})$.

5.7 SU(2)

Die Generatoren der SU(2) sind die Pauli-Matrizen gewichtet mit dem Faktor $1/2$

$$s_i = \frac{1}{2} \sigma_i,$$

welche die Kommutatorrelation

$$[s_i, s_j] = i \sum_k \epsilon_{ijk} s_k$$

erfüllen erneut mit dem epslion-Tensor als Strukturkonstanten. Die Gruppenmannigfaltigkeit ist die selbe wie die der SO(3) bis auf, dass die Vollkugel den Radius 2π besitzt. Die Darstellungen können durch das Matrixexponential (s. 5.4) gewonnen werden

$$\Gamma(\alpha) = \mathrm{e}^{i\alpha S_3} = \mathrm{i}\frac{\alpha}{2}\sigma_3 = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix}$$

jedoch gilt $\Gamma(\alpha + 2\pi) = -\Gamma(\alpha)$. Erst bei einer Verschiebung um 4π kommt man am selben Punkt an.

5.8 Vergleich SO(3) und SU(2)

Die Generatoren der SO(3) und SU(2) haben dieselben Kommutatorrelationen und somit auch die selbe Liealgebra (vielleicht genauer: deren Liealgebren sind isomorph). Sie unterscheiden sich lediglich in ihren Gruppenmannigfaltigkeiten. Due SU(2) ist eine doppelte Überlagerung der SO(3).