

## Quantum annealing und Logistik

---

Yanick Kind

**12. Juli 2023**

Fakultät Physik

## Übersicht

Einleitung

Simulated und quantum annealing

Quadratic unconstrained binary optimization

Hardware embedding

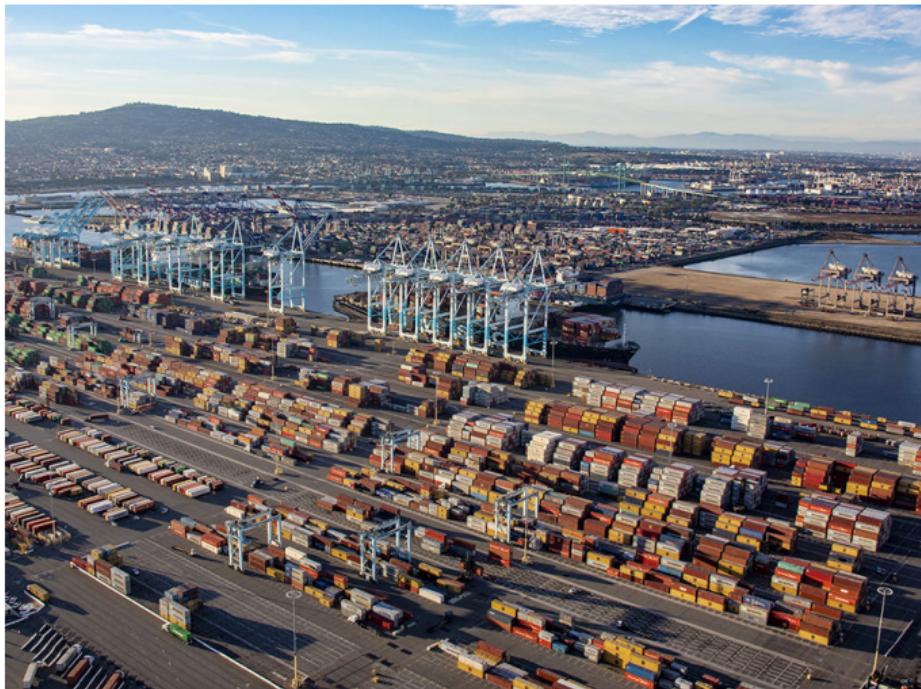
Fallbeispiel Aisin Corporation

Zusammenfassung und Ausblick



azom.com

## Motivation



[supplychainbrain.com](http://supplychainbrain.com)

## Traveling Salesman Problem

## Traveling Salesman Problem

- klassisches kombinatorische Optimierungsproblem

## Traveling Salesman Problem

- klassisches kombinatorische Optimierungsproblem
- Beispiel: Ein Lieferwagen hat  $n$  Lieferorte

## Traveling Salesman Problem

- klassisches kombinatorische Optimierungsproblem
- Beispiel: Ein Lieferwagen hat  $n$  Lieferorte
  - $(n - 1)!$  verschiedene Routen

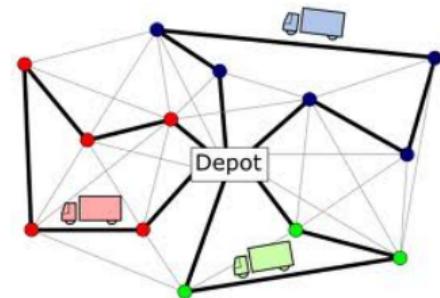
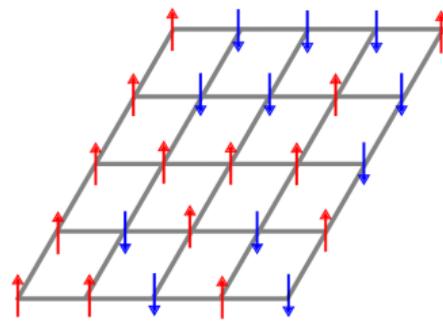
## Traveling Salesman Problem

- klassisches kombinatorische Optimierungsproblem
- Beispiel: Ein Lieferwagen hat  $n$  Lieferorte
  - $(n - 1)!$  verschiedene Routen
- NP-hard
  - skaliert nicht polynomiell sondern **exponentiell** mit Systemgröße
- Globales Optimum mittels numerischen Lösungsverfahren finden, ist extrem aufwändig

## Traveling Salesman Problem

- klassisches kombinatorische Optimierungsproblem
- Beispiel: Ein Lieferwagen hat  $n$  Lieferorte
  - $(n - 1)!$  verschiedene Routen
- NP-hard
  - skaliert nicht polynomiell sondern **exponentiell** mit Systemgröße
- Globales Optimum mittels numerischen Lösungsverfahren finden, ist extrem aufwändig
- Local search Algorithmen als heuristische Näherungsverfahren nutzen

## Annealing als Lösung?

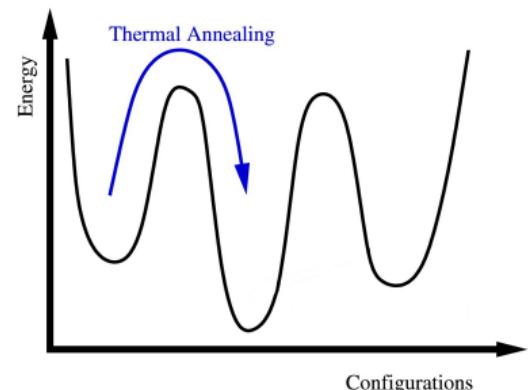


r-bloggers.com

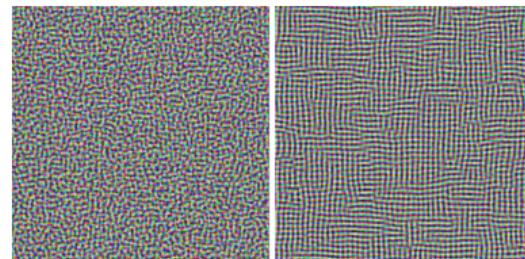
$E$

$f$

## Simulated annealing



V. Bapst et al., Physics Reports 523 (2013), editiert

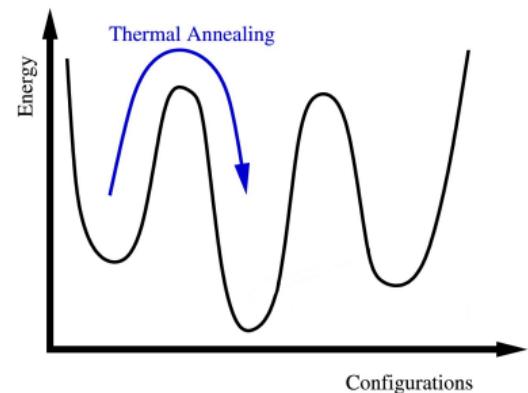


Cyp, wikipedia.org

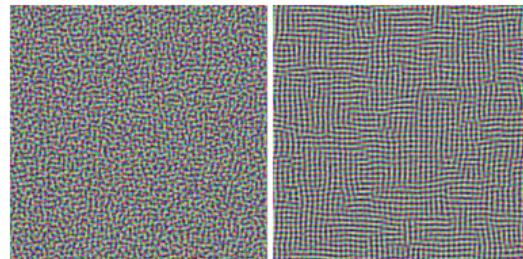
Simulated und quantum annealing

## Simulated annealing

- in Analogie zu auskühlenden Metallen



V. Bapst et al., Physics Reports 523 (2013), editiert

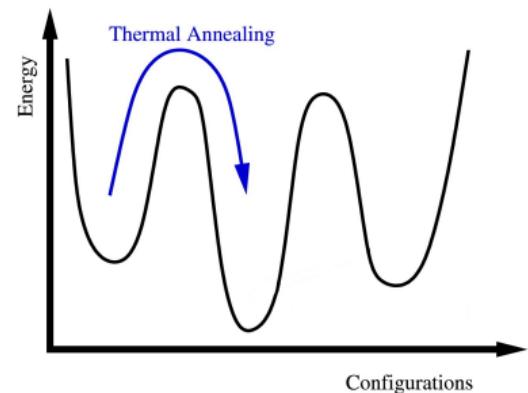


Cyp, wikipedia.org

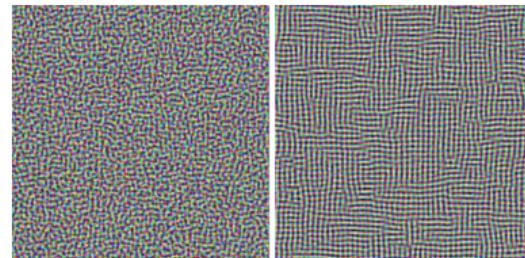
Simulated und quantum annealing

## Simulated annealing

- in Analogie zu auskühlenden Metallen
  - schneller auskühlen → suboptimaler Zustand (amorph)



V. Bapst et al., Physics Reports 523 (2013), editiert

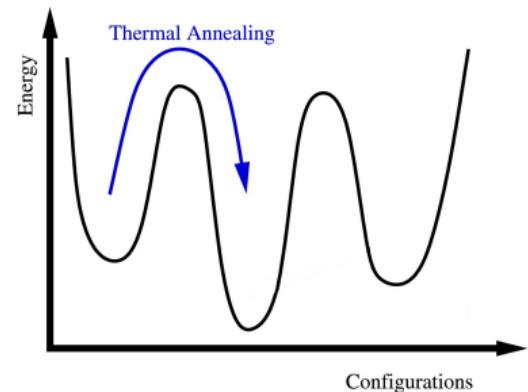


Cyp, wikipedia.org

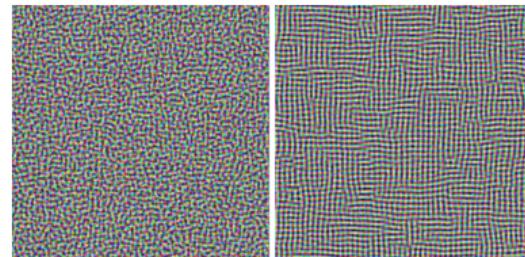
Simulated und quantum annealing

## Simulated annealing

- in Analogie zu auskühlenden Metallen
  - schneller auskühlen → suboptimaler Zustand (amorph)
  - langsamer auskühlen → optimaler Zustand (kristallin)



V. Bapst et al., Physics Reports 523 (2013), editiert

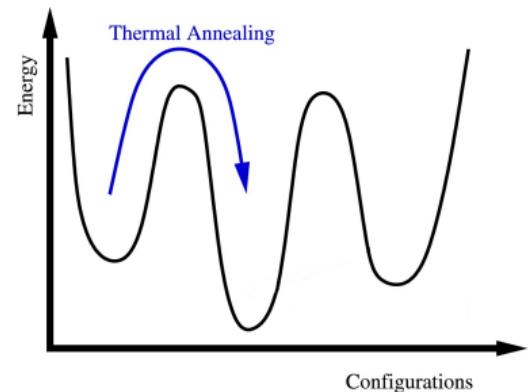


Cyp, wikipedia.org

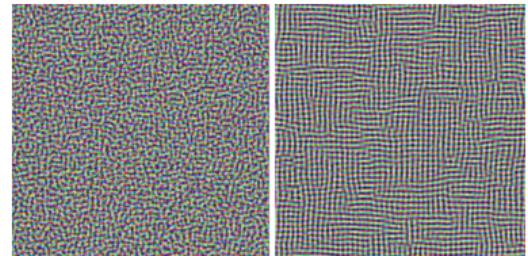
Simulated und quantum annealing

## Simulated annealing

- in Analogie zu auskühlenden Metallen
  - schneller auskühlen → suboptimaler Zustand (amorph)
  - langsamer auskühlen → optimaler Zustand (kristallin)
- nutzt thermische Fluktuationen, um lokalen Minima zu entkommen



V. Bapst et al., Physics Reports 523 (2013), editiert

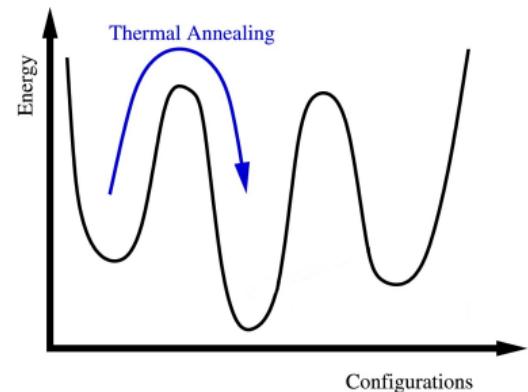


Cyp, wikipedia.org

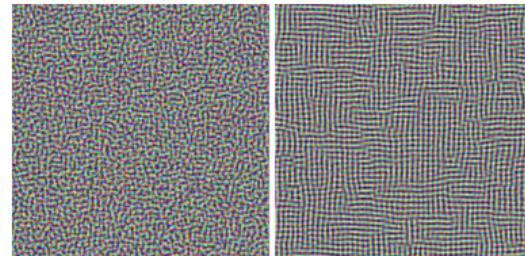
Simulated und quantum annealing

## Simulated annealing

- in Analogie zu auskühlenden Metallen
  - schneller auskühlen → suboptimaler Zustand (amorph)
  - langsamer auskühlen → optimalerer Zustand (kristallin)
- nutzt thermische Fluktuationen, um lokalen Minima zu entkommen
- Wahrscheinlichkeit  $P_i$  folgen Mastergleichung  $\frac{dP_i}{dt} = \sum_j L_{ij} P_j$



V. Bapst et al., Physics Reports 523 (2013), editiert



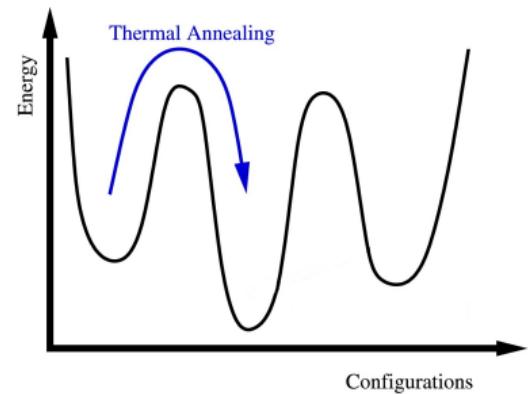
Cyp, wikipedia.org

Simulated und quantum annealing

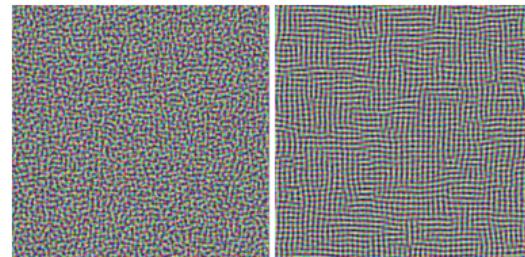
## Simulated annealing

- in Analogie zu auskühlenden Metallen
  - schneller auskühlen → suboptimaler Zustand (amorph)
  - langsamer auskühlen → optimaler Zustand (kristallin)
- nutzt thermische Fluktuationen, um lokalen Minima zu entkommen
- Wahrscheinlichkeit  $P_i$  folgen Mastergleichung  $\frac{dP_i}{dt} = \sum_j L_{ij} P_j$

$$L_{ij} = \begin{cases} \left[1 + \exp((E_i - E_j)/T_t)\right]^{-1} & \text{einzelne Spin-Differenz} \\ -\sum_{k \neq i} L_{ki} & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



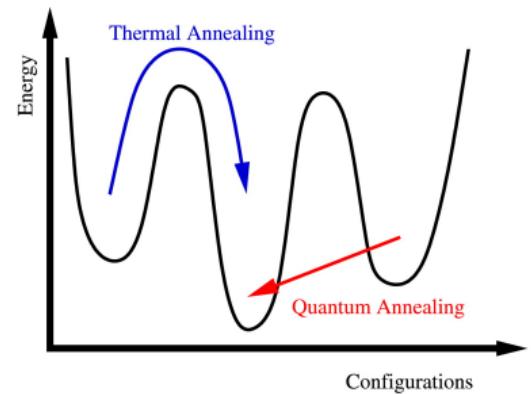
V. Bapst et al., Physics Reports 523 (2013), editiert



Cyp, wikipedia.org

Simulated und quantum annealing

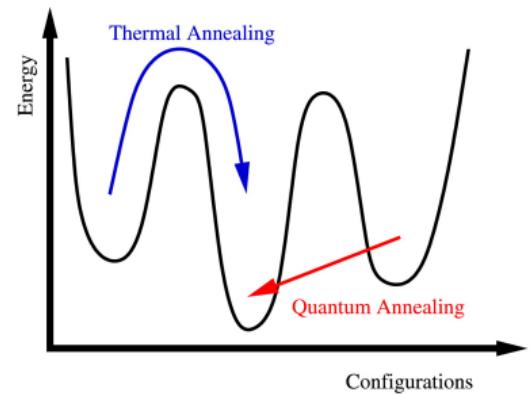
## Quantum Annealing



V. Bapst et al., Physics Reports 523 (2013)

## Quantum Annealing

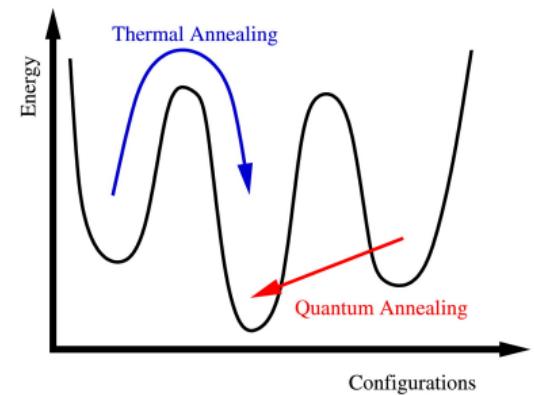
- transversales Ising-Modell  $H(t) = \underbrace{-\sum_{ij} J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z - h \sum_i \sigma_i^z}_{H_f} - \underbrace{\Gamma(t) \sum_i \sigma_i^x}_{H_i(t)}$



V. Bapst et al., Physics Reports 523 (2013)

## Quantum Annealing

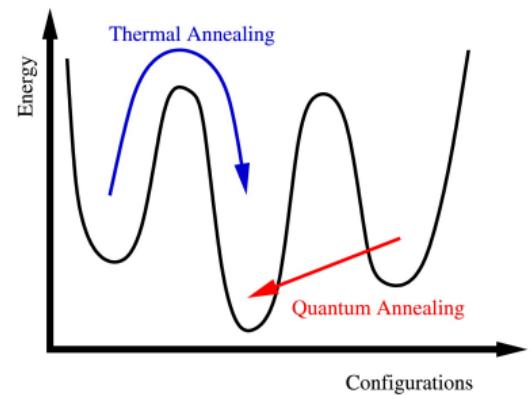
- transversales Ising-Modell  $H(t) = \underbrace{-\sum_{ij} J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z - h \sum_i \sigma_i^z}_{H_f} - \underbrace{\Gamma(t) \sum_i \sigma_i^x}_{H_i(t)}$
- $H_x(t)$  verursacht Tunneln zwischen Eigenzuständen von  $H_0$



V. Bapst et al., Physics Reports 523 (2013)

## Quantum Annealing

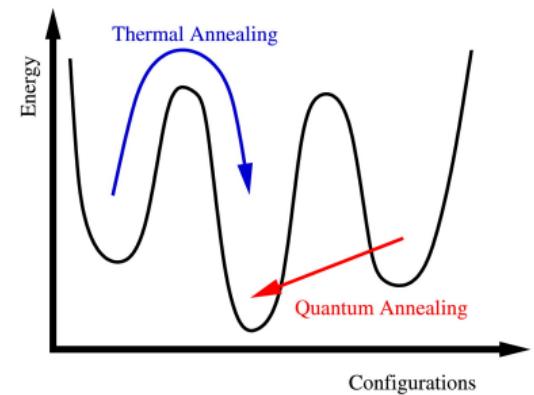
- transversales Ising-Modell  $H(t) = \underbrace{-\sum_{ij} J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z - h \sum_i \sigma_i^z}_{H_f} - \underbrace{\Gamma(t) \sum_i \sigma_i^x}_{H_i(t)}$
- $H_x(t)$  verursacht Tunneln zwischen Eigenzuständen von  $H_0$



V. Bapst et al., Physics Reports 523 (2013)

## Quantum Annealing

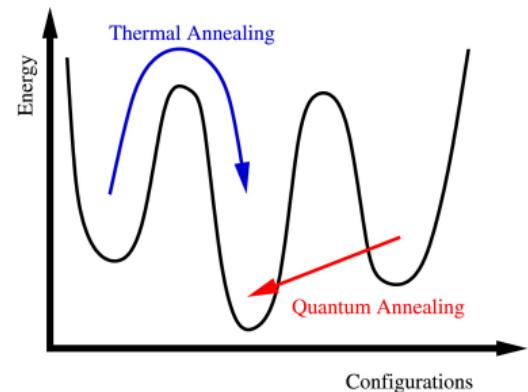
- transversales Ising-Modell  $H(t) = \underbrace{-\sum_{ij} J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z - h \sum_i \sigma_i^z}_{H_f} - \underbrace{\Gamma(t) \sum_i \sigma_i^x}_{H_i(t)}$
- $H_x(t)$  verursacht Tunneln zwischen Eigenzuständen von  $H_0$ 
  - schnellere Konvergenz



V. Bapst et al., Physics Reports 523 (2013)

## Quantum Annealing

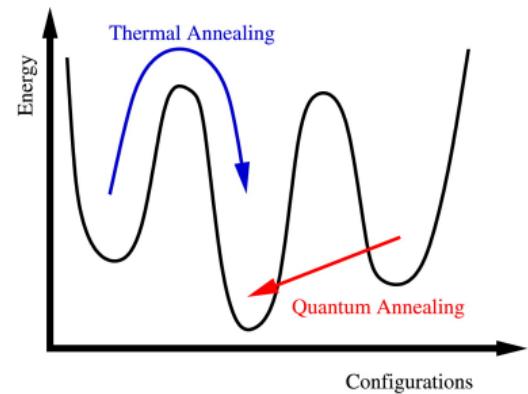
- transversales Ising-Modell  $H(t) = \underbrace{-\sum_{ij} J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z}_{H_f} - h \sum_i \sigma_i^z - \Gamma(t) \sum_i \sigma_i^x$
- $H_x(t)$  verursacht Tunneln zwischen Eigenzuständen von  $H_0$ 
  - schnellere Konvergenz
- $|\Psi(t)\rangle$  durch Schrödinger-Gleichung  $i \frac{\partial |\Psi(t)\rangle}{\partial t} = H(t) |\Psi(t)\rangle$  festgelegt



V. Bapst et al., Physics Reports 523 (2013)

## Quantum Annealing

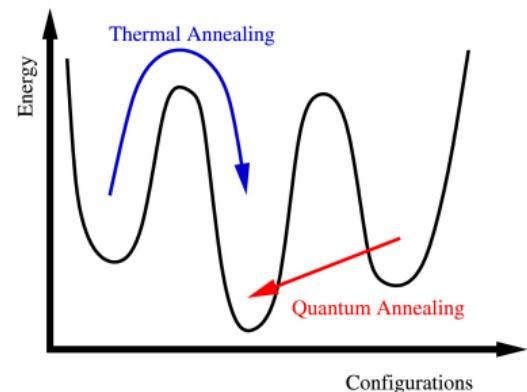
- transversales Ising-Modell  $H(t) = \underbrace{-\sum_{ij} J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z - h \sum_i \sigma_i^z}_{H_f} - \Gamma(t) \sum_i \sigma_i^x$
- $H_x(t)$  verursacht Tunneln zwischen Eigenzuständen von  $H_0$ 
  - schnellere Konvergenz
- $|\Psi(t)\rangle$  durch Schrödinger-Gleichung  $i \frac{\partial |\Psi(t)\rangle}{\partial t} = H(t) |\Psi(t)\rangle$  festgelegt
- wähle monoton fallende Funktionen für  $\Gamma(t)$  („ausglühen“)



V. Bapst et al., Physics Reports 523 (2013)

## Quantum Annealing

- transversales Ising-Modell  $H(t) = \underbrace{-\sum_{ij} J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z - h \sum_i \sigma_i^z}_{H_f} - \Gamma(t) \sum_i \sigma_i^x$
- $H_x(t)$  verursacht Tunneln zwischen Eigenzuständen von  $H_0$ 
  - schnellere Konvergenz
- $|\Psi(t)\rangle$  durch Schrödingergleichung  $i \frac{\partial |\Psi(t)\rangle}{\partial t} = H(t) |\Psi(t)\rangle$  festgelegt
- wähle monoton fallende Funktionen für  $\Gamma(t)$  („ausglühen“)

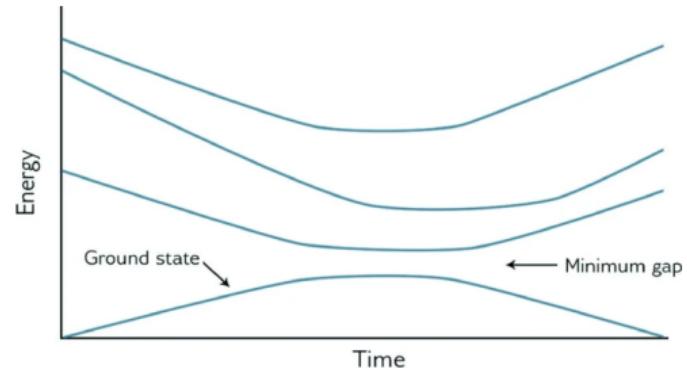


V. Bapst et al., Physics Reports 523 (2013)

## Adiabatisches Theorem der Quantenmechanik

System bleibt im selben Eigenzustand von  $H$ , wenn sich  $H$  hinreichend langsam ändert

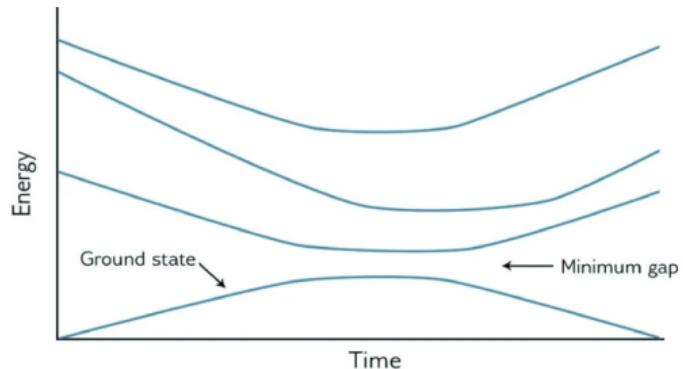
## Adiabatische Zeit



E. R. Miranda (Ed.), Quantum Computer Music (2022)

## Adiabatische Zeit

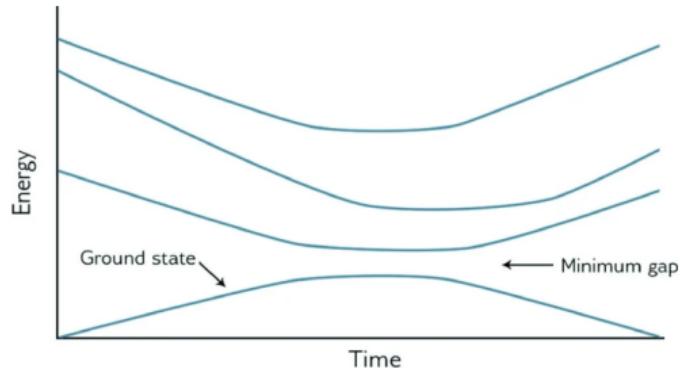
- minimale Zeit, damit sich System adiabatisch ändert  $\tau$



E. R. Miranda (Ed.), Quantum Computer Music (2022)

## Adiabatische Zeit

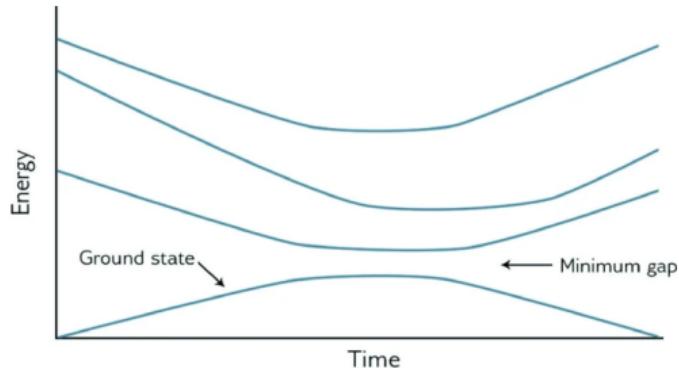
- minimale Zeit, damit sich System adiabatisch ändert  $\tau$
- $\Delta(s) = E_1(s) - E_0(s)$



E. R. Miranda (Ed.), Quantum Computer Music (2022)

## Adiabatische Zeit

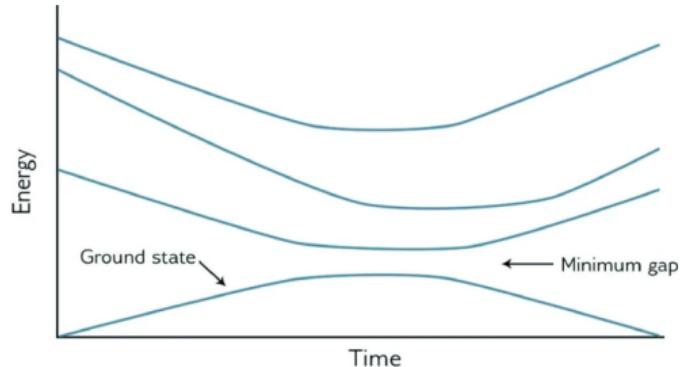
- minimale Zeit, damit sich System adiabatisch ändert  $\tau$
- $\Delta(s) = E_1(s) - E_0(s)$
- mindestens  $\tau \propto \frac{1}{\Delta(s)^2}$ , schlimmstenfalls  $\tau \propto \frac{1}{\Delta(s)^3}$



E. R. Miranda (Ed.), Quantum Computer Music (2022)

## Adiabatische Zeit

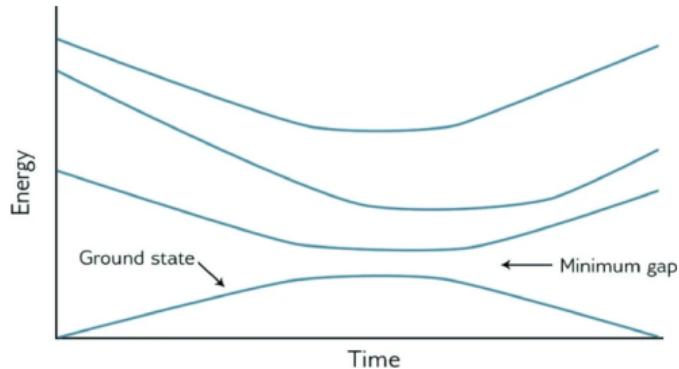
- minimale Zeit, damit sich System adiabatisch ändert  $\tau$
- $\Delta(s) = E_1(s) - E_0(s)$
- mindestens  $\tau \propto \frac{1}{\Delta(s)^2}$ , schlimmstenfalls  $\tau \propto \frac{1}{\Delta(s)^3}$
- Problem:  $\Delta(s)$  sehr klein



E. R. Miranda (Ed.), Quantum Computer Music (2022)

## Adiabatische Zeit

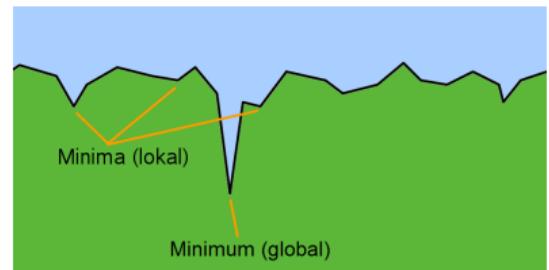
- minimale Zeit, damit sich System adiabatisch ändert  $\tau$
- $\Delta(s) = E_1(s) - E_0(s)$
- mindestens  $\tau \propto \frac{1}{\Delta(s)^2}$ , schlimmstenfalls  $\tau \propto \frac{1}{\Delta(s)^3}$
- Problem:  $\Delta(s)$  sehr klein
  - $\tau \rightarrow \infty$



E. R. Miranda (Ed.), Quantum Computer Music (2022)

## Simulation zu simulated und quantum annealing

$$H(t) = \underbrace{- \sum_{ij} J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z}_{H_f} - h \sum_i \sigma_i^z - \Gamma(t) \sum_i \sigma_i^x$$

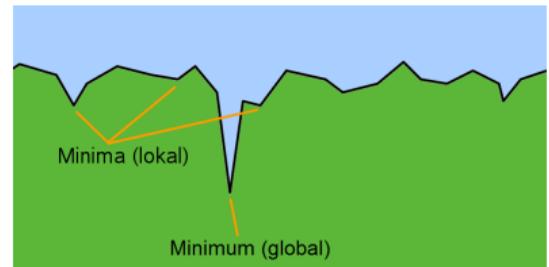


Fleischer, K., wikipedia.org

## Simulation zu simulated und quantum annealing

- $P_{SA}(t)$ : Wahrscheinlichkeit System in GZ zu finden
- $P_{QA}(t) = |\langle g | \Psi(t) \rangle|^2$ : Wahrscheinlichkeit System in GZ  $|g\rangle$  von  $H_0$  zu finden
- $P_{SA}^{st}(T)$ : Boltzmann-Faktor des GZ von  $H_0$
- $P_{QA}^{st}(\Gamma) = |\langle g | \Psi_\Gamma \rangle|^2$  mit  $|\Psi_\Gamma\rangle$  als GZ von  $H$
- $\lim_{t \rightarrow 0} \Gamma(t) = \lim_{t \rightarrow 0} T(t) = \infty$

$$H(t) = - \underbrace{\sum_{ij} J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z}_{H_f} - h \underbrace{\sum_i \sigma_i^z}_{\Gamma(t)} \underbrace{- \Gamma(t) \sum_i \sigma_i^x}_{H_i(t)}$$

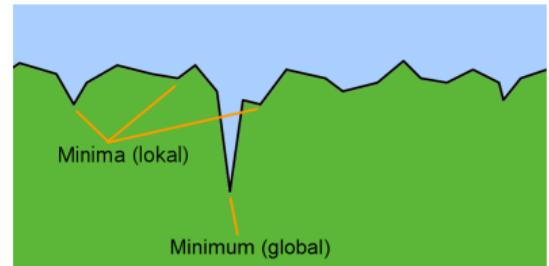


Fleischer, K., wikipedia.org

## Simulation zu simulated und quantum annealing

- $P_{SA}(t)$ : Wahrscheinlichkeit System in GZ zu finden
- $P_{QA}(t) = |\langle g | \Psi(t) \rangle|^2$ : Wahrscheinlichkeit System in GZ  $|g\rangle$  von  $H_0$  zu finden
- $P_{SA}^{st}(T)$ : Boltzmann-Faktor des GZ von  $H_0$
- $P_{QA}^{st}(\Gamma) = |\langle g | \Psi_\Gamma \rangle|^2$  mit  $|\Psi_\Gamma\rangle$  als GZ von  $H$
- $\lim_{t \rightarrow 0} \Gamma(t) = \lim_{t \rightarrow 0} T(t) = \infty$ 
  - Superposition aller Zustände gleicher Amplitude (QA)
  - Alle Zustände gleich wahrscheinlich (SA)

$$H(t) = - \underbrace{\sum_{ij} J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z}_{H_f} - h \underbrace{\sum_i \sigma_i^z}_{\Gamma(t)} \underbrace{- \Gamma(t) \sum_i \sigma_i^x}_{H_i(t)}$$

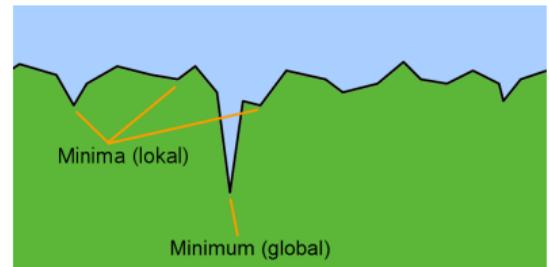


Fleischer, K., wikipedia.org

## Simulation zu simulated und quantum annealing

- $P_{SA}(t)$ : Wahrscheinlichkeit System in GZ zu finden
- $P_{QA}(t) = |\langle g | \Psi(t) \rangle|^2$ : Wahrscheinlichkeit System in GZ  $|g\rangle$  von  $H_0$  zu finden
- $P_{SA}^{st}(T)$ : Boltzmann-Faktor des GZ von  $H_0$
- $P_{QA}^{st}(\Gamma) = |\langle g | \Psi_\Gamma \rangle|^2$  mit  $|\Psi_\Gamma\rangle$  als GZ von  $H$
- $\lim_{t \rightarrow 0} \Gamma(t) = \lim_{t \rightarrow 0} T(t) = \infty$ 
  - Superposition aller Zustände gleicher Amplitude (QA)
  - Alle Zustände gleich wahrscheinlich (SA)
- Idealfall (adiabatisch):  $\lim_{t \rightarrow \infty} P_{QA}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{SA}(t) = 1$

$$H(t) = - \underbrace{\sum_{ij} J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z}_{H_f} - h \underbrace{\sum_i \sigma_i^z}_{\Gamma(t)} \underbrace{- \Gamma(t) \sum_i \sigma_i^x}_{H_i(t)}$$

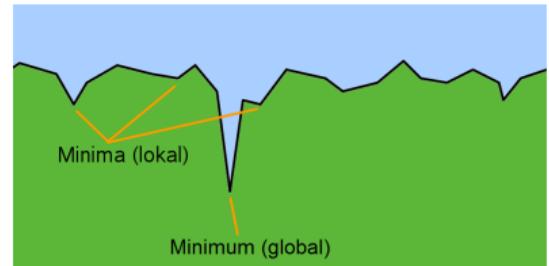


Fleischer, K., wikipedia.org

## Simulation zu simulated und quantum annealing

- $P_{SA}(t)$ : Wahrscheinlichkeit System in GZ zu finden
- $P_{QA}(t) = |\langle g | \Psi(t) \rangle|^2$ : Wahrscheinlichkeit System in GZ  $|g\rangle$  von  $H_0$  zu finden
- $P_{SA}^{st}(T)$ : Boltzmann-Faktor des GZ von  $H_0$
- $P_{QA}^{st}(\Gamma) = |\langle g | \Psi_\Gamma \rangle|^2$  mit  $|\Psi_\Gamma\rangle$  als GZ von  $H$
- $\lim_{t \rightarrow 0} \Gamma(t) = \lim_{t \rightarrow 0} T(t) = \infty$ 
  - Superposition aller Zustände gleicher Amplitude (QA)
  - Alle Zustände gleich wahrscheinlich (SA)
- Idealfall (adiabatisch):  $\lim_{t \rightarrow \infty} P_{QA}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{SA}(t) = 1$ 
  - Grundzustand gefunden

$$H(t) = - \underbrace{\sum_{ij} J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z}_{H_f} - h \underbrace{\sum_i \sigma_i^z}_{\Gamma(t)} \underbrace{- \Gamma(t) \sum_i \sigma_i^x}_{H_i(t)}$$

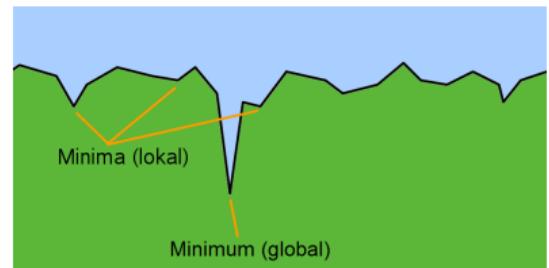


Fleischer, K., wikipedia.org

## Simulation zu simulated und quantum annealing

- $P_{SA}(t)$ : Wahrscheinlichkeit System in GZ zu finden
- $P_{QA}(t) = |\langle g | \Psi(t) \rangle|^2$ : Wahrscheinlichkeit System in GZ  $|g\rangle$  von  $H_0$  zu finden
- $P_{SA}^{st}(T)$ : Boltzmann-Faktor des GZ von  $H_0$
- $P_{QA}^{st}(\Gamma) = |\langle g | \Psi_\Gamma \rangle|^2$  mit  $|\Psi_\Gamma\rangle$  als GZ von  $H$
- $\lim_{t \rightarrow 0} \Gamma(t) = \lim_{t \rightarrow 0} T(t) = \infty$ 
  - Superposition aller Zustände gleicher Amplitude (QA)
  - Alle Zustände gleich wahrscheinlich (SA)
- Idealfall (adiabatisch):  $\lim_{t \rightarrow \infty} P_{QA}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{SA}(t) = 1$ 
  - Grundzustand gefunden
  - sonst: In einem lokalen Minimum „hängen“ geblieben

$$H(t) = - \underbrace{\sum_{ij} J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z}_{H_f} - h \underbrace{\sum_i \sigma_i^z}_{\Gamma(t)} \underbrace{- \Gamma(t) \sum_i \sigma_i^x}_{H_i(t)}$$

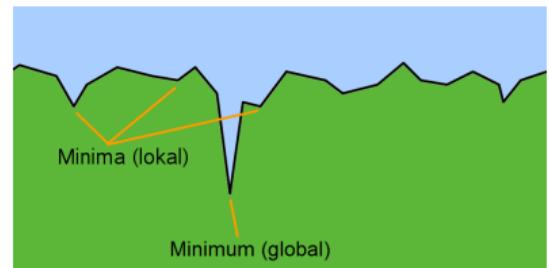


Fleischer, K., wikipedia.org

## Simulation zu simulated und quantum annealing

- $P_{SA}(t)$ : Wahrscheinlichkeit System in GZ zu finden
- $P_{QA}(t) = |\langle g | \Psi(t) \rangle|^2$ : Wahrscheinlichkeit System in GZ  $|g\rangle$  von  $H_0$  zu finden
- $P_{SA}^{st}(T)$ : Boltzmann-Faktor des GZ von  $H_0$
- $P_{QA}^{st}(\Gamma) = |\langle g | \Psi_\Gamma \rangle|^2$  mit  $|\Psi_\Gamma\rangle$  als GZ von  $H$
- $\lim_{t \rightarrow 0} \Gamma(t) = \lim_{t \rightarrow 0} T(t) = \infty$ 
  - Superposition aller Zustände gleicher Amplitude (QA)
  - Alle Zustände gleich wahrscheinlich (SA)
- Idealfall (adiabatisch):  $\lim_{t \rightarrow \infty} P_{QA}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{SA}(t) = 1$ 
  - Grundzustand gefunden
  - sonst: In einem lokalen Minimum „hängen“ geblieben
- 8 spins

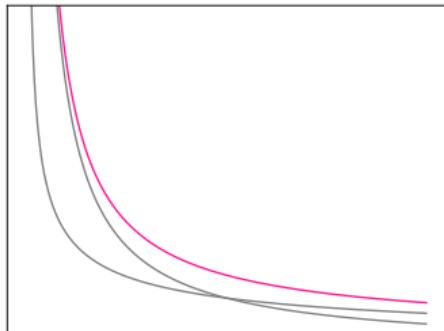
$$H(t) = - \underbrace{\sum_{ij} J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z}_{H_f} - h \underbrace{\sum_i \sigma_i^z}_{\Gamma(t)} \underbrace{- \Gamma(t) \sum_i \sigma_i^x}_{H_i(t)}$$



Fleischer, K., wikipedia.org

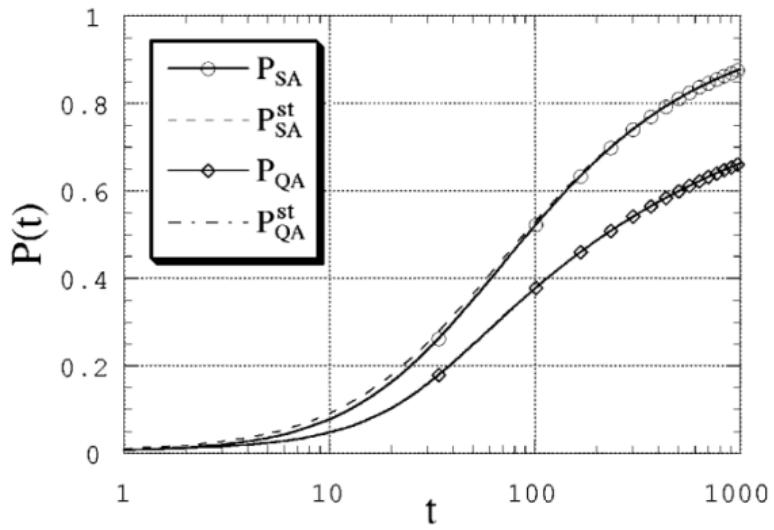
## Ergebnisse zu simulated und quantum annealing

- $P_{SA}(t)$ : Wahrscheinlichkeit System in GZ zu finden
- $P_{QA}(t) = |\langle g | \Psi(t) \rangle|^2$ : Wahrscheinlichkeit System in GZ  $|g\rangle$  von  $H_0$  zu finden
- $P_{SA}^{st}(T)$ : Boltzmann-Faktor des GZ von  $H_0$
- $P_{QA}^{st}(\Gamma) = |\langle g | \Psi_\Gamma \rangle|^2$  mit  $|\Psi_\Gamma\rangle$  als GZ von  $H$



$\blacksquare J_{ij} = const > 0$   
 $\blacksquare h = 0.1$

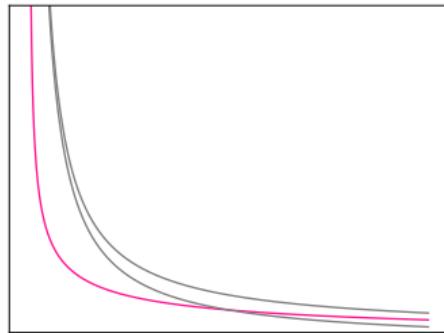
$$\Gamma(t) = T(t) = 3/\ln(t + 1)$$



Kadowaki, T., Nishimori, H., PHYSICAL REVIEW E 1998

## Ergebnisse zu simulated und quantum annealing

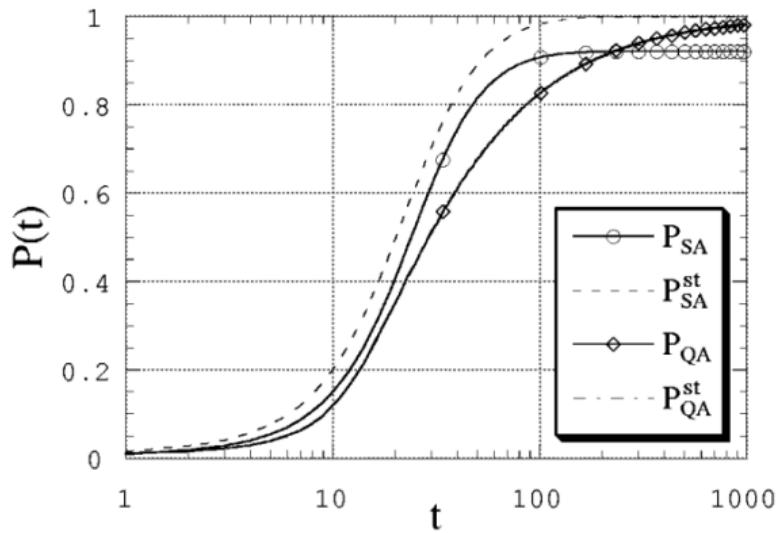
- $P_{SA}(t)$ : Wahrscheinlichkeit System in GZ zu finden
- $P_{QA}(t) = |\langle g | \Psi(t) \rangle|^2$ : Wahrscheinlichkeit System in GZ  $|g\rangle$  von  $H_0$  zu finden
- $P_{SA}^{st}(T)$ : Boltzmann-Faktor des GZ von  $H_0$
- $P_{QA}^{st}(\Gamma) = |\langle g | \Psi_\Gamma \rangle|^2$  mit  $|\Psi_\Gamma\rangle$  als GZ von  $H$



Kadowaki, T., Nishimori, H., PHYSICAL REVIEW E 1998

- $J_{ij} = const > 0$
- $h = 0.1$

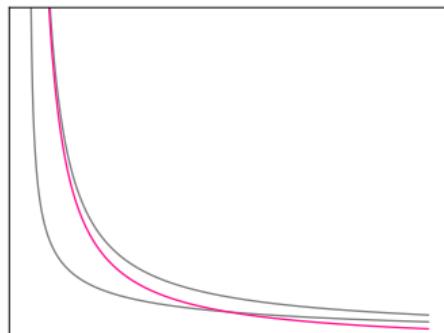
$$\Gamma(t) = T(t) = 3/\sqrt{t}$$



Simulated und quantum annealing

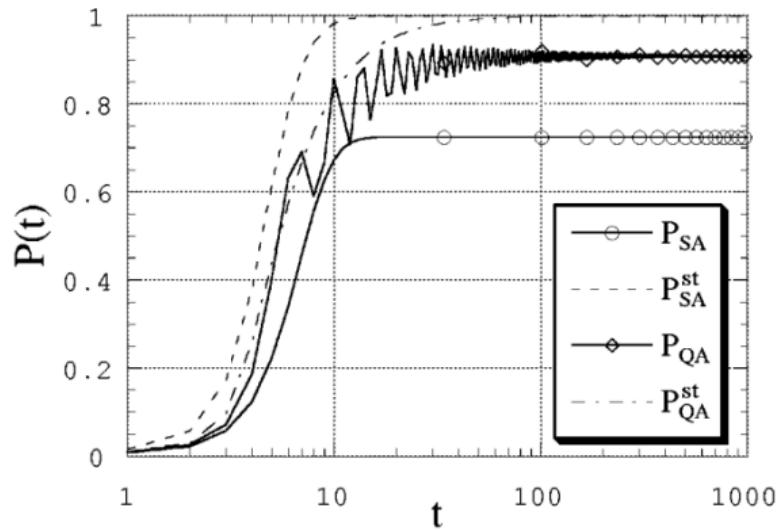
## Ergebnisse zu simulated und quantum annealing

- $P_{SA}(t)$ : Wahrscheinlichkeit System in GZ zu finden
- $P_{QA}(t) = |\langle g | \Psi(t) \rangle|^2$ : Wahrscheinlichkeit System in GZ  $|g\rangle$  von  $H_0$  zu finden
- $P_{SA}^{st}(T)$ : Boltzmann-Faktor des GZ von  $H_0$
- $P_{QA}^{st}(\Gamma) = |\langle g | \Psi_\Gamma \rangle|^2$  mit  $|\Psi_\Gamma\rangle$  als GZ von  $H$



■  $J_{ij} = const > 0$   
■  $h = 0.1$

$$\Gamma(t) = T(t) = 3/t$$



Kadowaki, T., Nishimori, H., PHYSICAL REVIEW E 1998

## Binäre Variable

## Binäre Variable

- $x \in \{0, 1\}$

## Binäre Variable

- $x \in \{0, 1\}$
- Beispiel: Aufenthaltsort von einem Truck
- Formulierung als Graph mit  $N$  Knoten  $i$

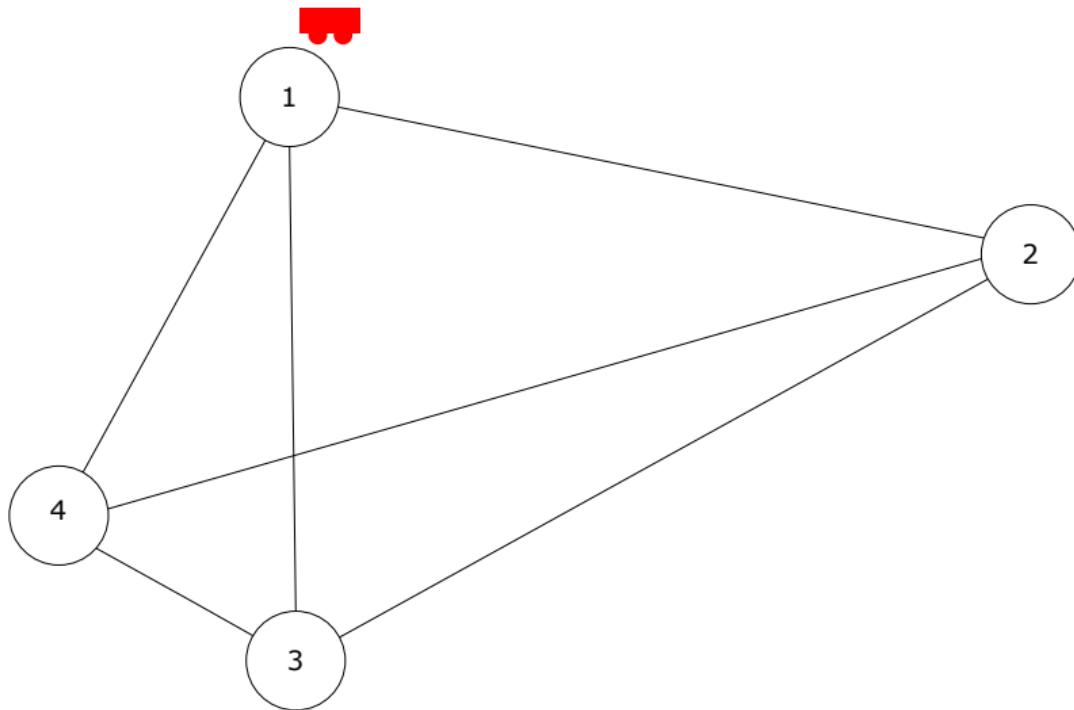
## Binäre Variable

- $x \in \{0, 1\}$
- Beispiel: Aufenthaltsort von einem Truck
- Formulierung als Graph mit  $N$  Knoten  $i$ 
  - ordne jedem Knoten  $i$  eine binäre Variable zu

## Binäre Variable

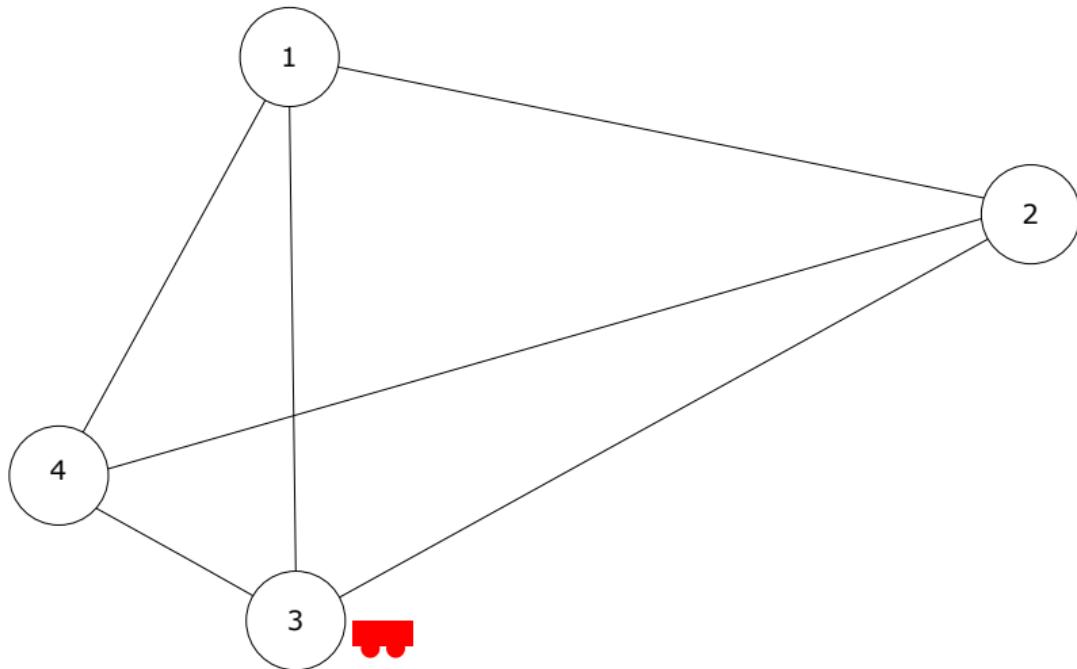
- $x \in \{0, 1\}$
- Beispiel: Aufenthaltsort von einem Truck
- Formulierung als Graph mit  $N$  Knoten  $i$ 
  - ordne jedem Knoten  $i$  eine binäre Variable zu
  - jedem Truck kann ein Vektor  $x^j = (x_1^j, \dots, x_N^j)$  von binären Variablen zugeordnet werden
- Truck  $j$  an Knoten  $i \rightarrow x_i^j = 1$  sonst  $x_k^j = 0$

## Binäre Variable



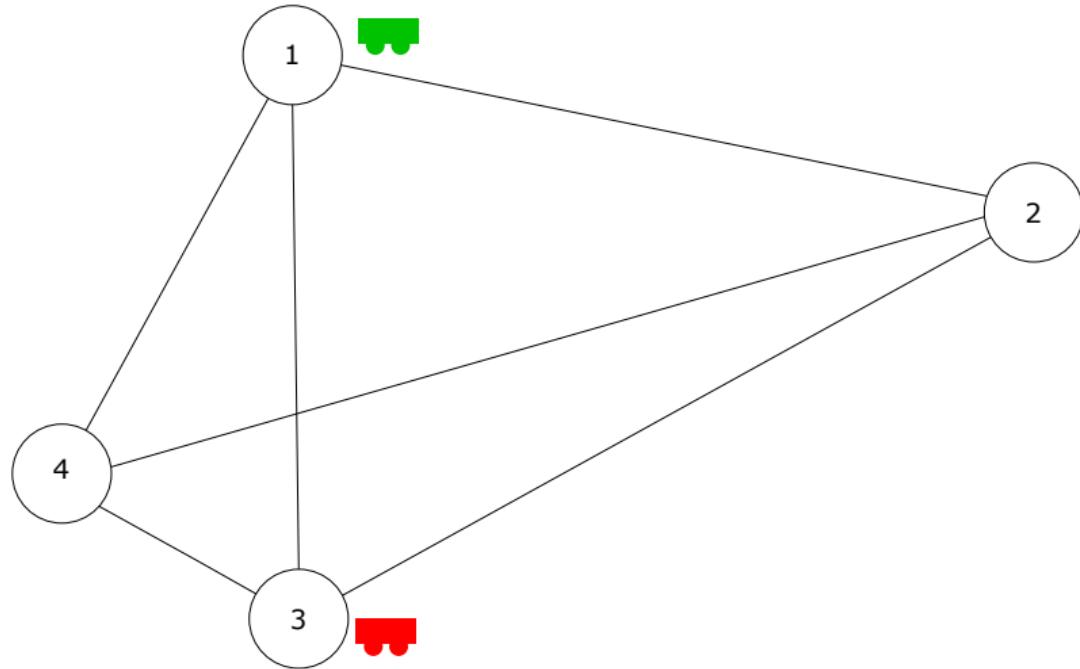
$$\underline{x}^{\text{rot}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## Binäre Variable



$$\underline{x}^{\text{rot}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

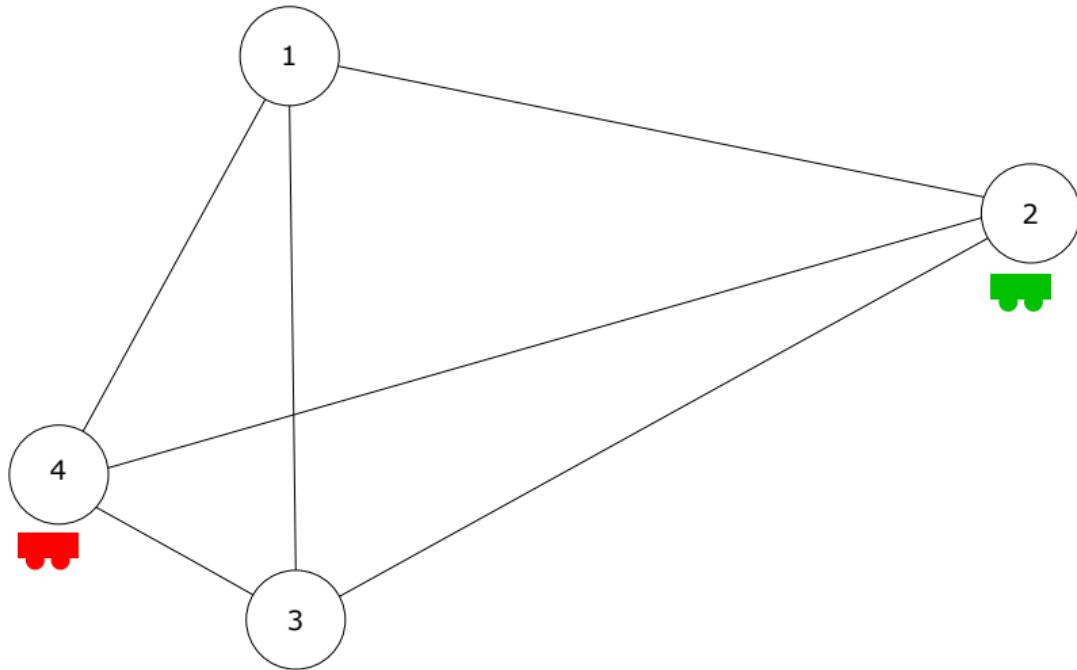
## Binäre Variable



$$\underline{x}^{\text{rot}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x}^{\text{grün}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## Binäre Variable



$$\underline{x}^{\text{rot}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x}^{\text{grün}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## Quadratic unconstrained binary optimization (QUBO)

## Quadratic unconstrained binary optimization (QUBO)

### Aufgabe

$$\text{Minimiere } f(\underline{x}, \underline{\underline{Q}}) = \sum_{ij} Q_{ij} x_i x_j$$

## Quadratic unconstrained binary optimization (QUBO)

### Aufgabe

$$\text{Minimiere } f(\underline{x}, \underline{\underline{Q}}) = \sum_{ij} Q_{ij} x_i x_j$$

- $x_i \in \{0, 1\}$  als binäre Variable

## Quadratic unconstrained binary optimization (QUBO)

### Aufgabe

$$\text{Minimiere } f(\underline{x}, \underline{\underline{Q}}) = \sum_{ij} Q_{ij} x_i x_j$$

- $x_i \in \{0, 1\}$  als binäre Variable
  - lässt sich mittels  $s_i = 2x_i - 1 \in \{-1, 1\}$  auf Ising-Variablen („spin-1/2“) transformieren

## Quadratic unconstrained binary optimization (QUBO)

### Aufgabe

$$\text{Minimiere } f(\underline{x}, \underline{\underline{Q}}) = \sum_{ij} Q_{ij} x_i x_j$$

- $x_i \in \{0, 1\}$  als binäre Variable
  - lässt sich mittels  $s_i = 2x_i - 1 \in \{-1, 1\}$  auf Ising-Variablen („spin-1/2“) transformieren
- $Q_{ij}$  definiert Wechselwirkung zwischen  $x_i$

## Quadratic unconstrained binary optimization (QUBO)

### Aufgabe

$$\text{Minimiere } f(\underline{x}, \underline{\underline{Q}}) = \sum_{ij} Q_{ij} x_i x_j$$

- $x_i \in \{0, 1\}$  als binäre Variable
  - lässt sich mittels  $s_i = 2x_i - 1 \in \{-1, 1\}$  auf Ising-Variablen („spin-1/2“) transformieren
- $Q_{ij}$  definiert Wechselwirkung zwischen  $x_i$ 
  - allg. hermitesch (symmetrisch im Ising-Modell)

## Quadratic unconstrained binary optimization constrains

## Quadratic unconstrained binary optimization constrains

- constraints lassen sich nicht direkt in der Hardware implementieren

## Quadratic unconstrained binary optimization constrains

- constraints lassen sich nicht direkt in der Hardware implementieren
  - constraints als „Strafe“ in der Kostenfunktion implementieren

## Quadratic unconstrained binary optimization constrains

- constraints lassen sich nicht direkt in der Hardware implementieren
  - constraints als „Strafe“ in der Kostenfunktion implementieren
- Beispiel: Ein Truck darf sich nur an einem Punkt aufhalten

## Quadratic unconstrained binary optimization constrains

- constraints lassen sich nicht direkt in der Hardware implementieren
  - constraints als „Strafe“ in der Kostenfunktion implementieren
- Beispiel: Ein Truck darf sich nur an einem Punkt aufhalten
  - $\sum_i x_i = 1 \iff \sum_i x_i - 1 = 0$

## Quadratic unconstrained binary optimization constrains

- constraints lassen sich nicht direkt in der Hardware implementieren
  - constraints als „Strafe“ in der Kostenfunktion implementieren
- Beispiel: Ein Truck darf sich nur an einem Punkt aufhalten
  - $\sum_i x_i = 1 \iff \sum_i x_i - 1 = 0$
  - in QUBO Problem umwandeln  $\rightarrow g(x_i) = (\sum_i x_i - 1)^2$

## Quadratic unconstrained binary optimization constrains

- constraints lassen sich nicht direkt in der Hardware implementieren
  - constraints als „Strafe“ in der Kostenfunktion implementieren
- Beispiel: Ein Truck darf sich nur an einem Punkt aufhalten
  - $\sum_i x_i = 1 \iff \sum_i x_i - 1 = 0$
  - in QUBO Problem umwandeln  $\rightarrow g(x_i) = (\sum_i x_i - 1)^2$
  - $f \rightarrow f + \lambda g$

## Quadratic unconstrained binary optimization constrains

- constraints lassen sich nicht direkt in der Hardware implementieren
  - constraints als „Strafe“ in der Kostenfunktion implementieren
- Beispiel: Ein Truck darf sich nur an einem Punkt aufhalten
  - $\sum_i x_i = 1 \iff \sum_i x_i - 1 = 0$
  - in QUBO Problem umwandeln  $\rightarrow g(x_i) = (\sum_i x_i - 1)^2$
  - $f \rightarrow f + \lambda g$
  - constraint verletzt → Kostenfunktion erhöht

## Quadratic unconstrained binary optimization constrains

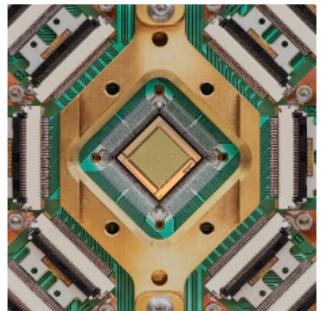
- constraints lassen sich nicht direkt in der Hardware implementieren
  - constraints als „Strafe“ in der Kostenfunktion implementieren
- Beispiel: Ein Truck darf sich nur an einem Punkt aufhalten
  - $\sum_i x_i = 1 \iff \sum_i x_i - 1 = 0$
  - in QUBO Problem umwandeln  $\rightarrow g(x_i) = (\sum_i x_i - 1)^2$
  - $f \rightarrow f + \lambda g$
  - constraint verletzt → Kostenfunktion erhöht
- Lagrangeparameter  $\lambda$  sehr groß wählen, damit constraint eingehalten

## Quantum annealer von D-Wave Systems

- D-Wave Systems als Hersteller von quantum annealer



[techcrunch.com](https://techcrunch.com)



[dwavesys.com](https://dwavesys.com)

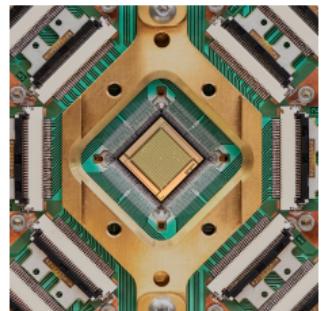
Hardware embedding

## Quantum annealer von D-Wave Systems

- D-Wave Systems als Hersteller von quantum annealer
- Quantum Processing Unit (QPU) mit QUBITs und couplern



[techcrunch.com](https://techcrunch.com)



[dwavesys.com](https://dwavesys.com)

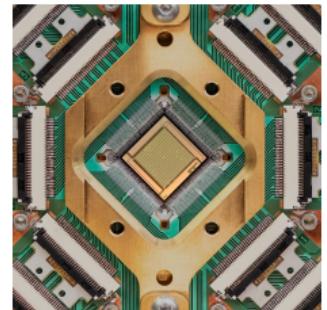
Hardware embedding

## Quantum annealer von D-Wave Systems

- D-Wave Systems als Hersteller von quantum annealer
- Quantum Processing Unit (QPU) mit QUBITs und couplern
  - QUBITs und coupler sind gewichtet



[techcrunch.com](https://techcrunch.com)



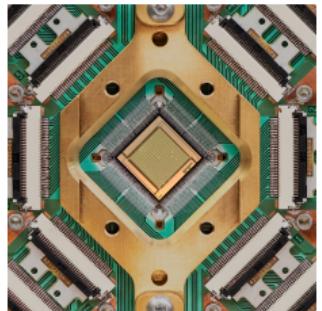
[dwavesys.com](https://dwavesys.com)

## Quantum annealer von D-Wave Systems

- D-Wave Systems als Hersteller von quantum annealer
- Quantum Processing Unit (QPU) mit QUBITs und couplern
  - QUBITs und coupler sind gewichtet
- neuste Version: 5000 QUBITs mit 15 couplern pro QUBIT



[techcrunch.com](https://techcrunch.com)



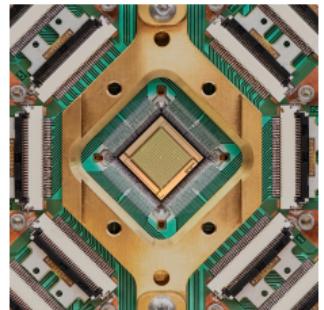
[dwavesys.com](https://dwavesys.com)

## Quantum annealer von D-Wave Systems

- D-Wave Systems als Hersteller von quantum annealer
- Quantum Processing Unit (QPU) mit QUBITs und couplern
  - QUBITs und coupler sind gewichtet
- neuste Version: 5000 QUBITs mit 15 couplern pro QUBIT
- Nach annealing-Prozess die QUBITs auslesen



[techcrunch.com](https://techcrunch.com)



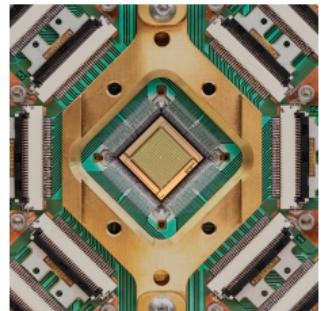
[dwavesys.com](https://dwavesys.com)

## Quantum annealer von D-Wave Systems

- D-Wave Systems als Hersteller von quantum annealer
- Qantum Processing Unit (QPU) mit QUBITs und couplern
  - QUBITs und coupler sind gewichtet
- neuste Version: 5000 QUBITs mit 15 couplern pro QUBIT
- Nach annealing-Prozess die QUBITs auslesen
  - mögliches Energieminimum gefunden



[techcrunch.com](https://techcrunch.com)



[dwavesys.com](https://dwavesys.com)

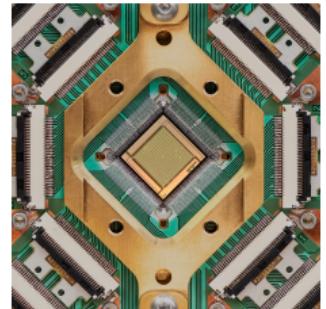
## Quantum annealer von D-Wave Systems

- D-Wave Systems als Hersteller von quantum annealer
- Quantum Processing Unit (QPU) mit QUBITs und couplern
  - QUBITs und coupler sind gewichtet
- neuste Version: 5000 QUBITs mit 15 couplern pro QUBIT
- Nach annealing-Prozess die QUBITs auslesen
  - mögliches Energieminimum gefunden



[techcrunch.com](https://techcrunch.com)

Unterschied zu Quantencomputer



[dwavesys.com](https://dwavesys.com)

Hardware embedding

## Quantum annealer von D-Wave Systems

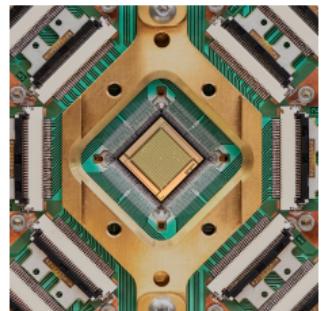
- D-Wave Systems als Hersteller von quantum annealer
- Qantum Processing Unit (QPU) mit QUBITs und couplern
  - QUBITs und coupler sind gewichtet
- neuste Version: 5000 QUBITs mit 15 couplern pro QUBIT
- Nach annealing-Prozess die QUBITs auslesen
  - mögliches Energieminimum gefunden



[techcrunch.com](https://techcrunch.com)

## Unterschied zu Quantencomputer

- Quantum annealer nur für kombinatorische Optimierungsprobleme



[dwavesys.com](https://dwavesys.com)

## Quantum annealer von D-Wave Systems

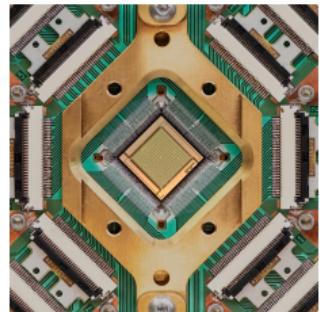
- D-Wave Systems als Hersteller von quantum annealer
- Quantum Processing Unit (QPU) mit QUBITs und couplern
  - QUBITs und coupler sind gewichtet
- neuste Version: 5000 QUBITs mit 15 couplern pro QUBIT
- Nach annealing-Prozess die QUBITs auslesen
  - mögliches Energieminimum gefunden



[techcrunch.com](https://techcrunch.com)

## Unterschied zu Quantencomputer

- Quantum annealer nur für kombinatorische Optimierungsprobleme
- Quantencomputer nutzen Quantengatter (unitäre Operationen)



[dwavesys.com](https://dwavesys.com)

## Quantum annealer von D-Wave Systems

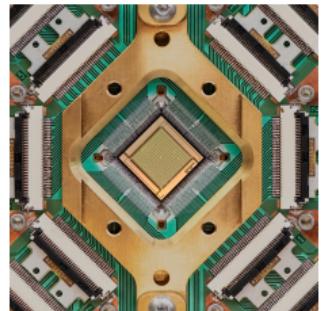
- D-Wave Systems als Hersteller von quantum annealer
- Quantum Processing Unit (QPU) mit QUBITs und couplern
  - QUBITs und coupler sind gewichtet
- neuste Version: 5000 QUBITs mit 15 couplern pro QUBIT
- Nach annealing-Prozess die QUBITs auslesen
  - mögliches Energieminimum gefunden



[techcrunch.com](https://techcrunch.com)

## Unterschied zu Quantencomputer

- Quantum annealer nur für kombinatorische Optimierungsprobleme
- Quantencomputer nutzen Quantengatter (unitäre Operationen)
  - kann mehr Probleme lösen



[dwavesys.com](https://dwavesys.com)

## Quantum annealer von D-Wave Systems

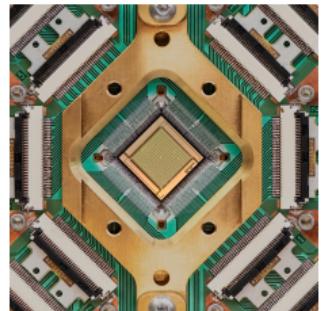
- D-Wave Systems als Hersteller von quantum annealer
- Quantum Processing Unit (QPU) mit QUBITs und couplern
  - QUBITs und coupler sind gewichtet
- neuste Version: 5000 QUBITs mit 15 couplern pro QUBIT
- Nach annealing-Prozess die QUBITs auslesen
  - mögliches Energieminimum gefunden



[techcrunch.com](https://techcrunch.com)

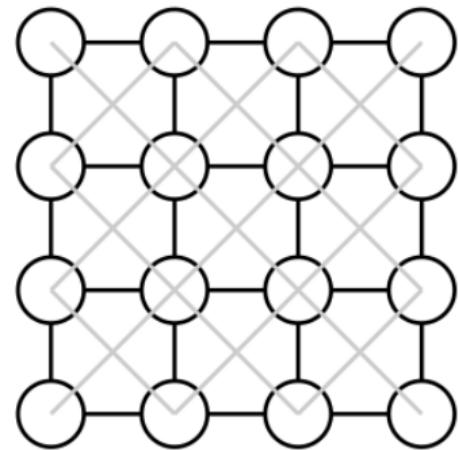
## Unterschied zu Quantencomputer

- Quantum annealer nur für kombinatorische Optimierungsprobleme
- Quantencomputer nutzen Quantengatter (unitäre Operationen)
  - kann mehr Probleme lösen



[dwavesys.com](https://dwavesys.com)

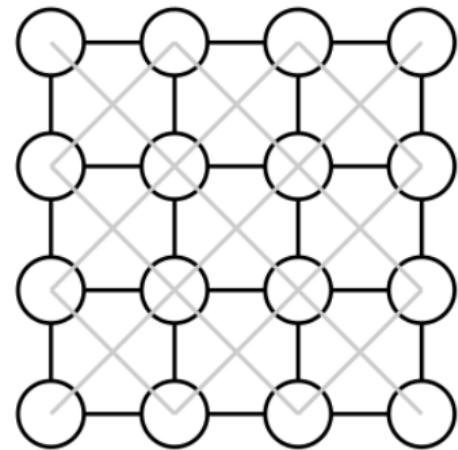
## Embedding



V. Choi, D-Wave Systems Inc. (2008)

## Embedding

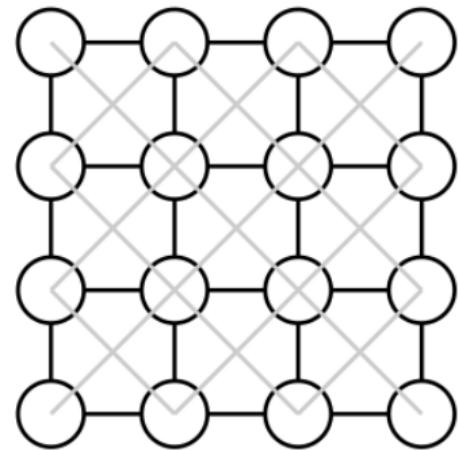
- D-Wave's QPU kann als Graph  $U$  gesehen werden



V. Choi, D-Wave Systems Inc. (2008)

## Embedding

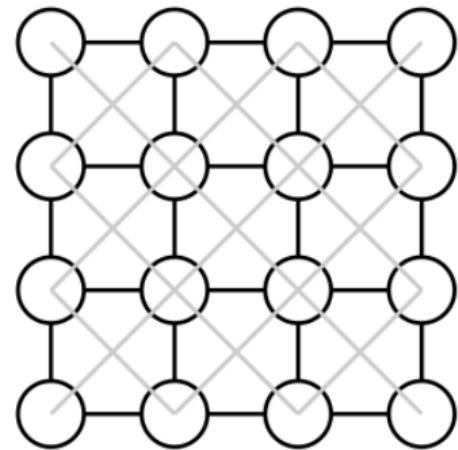
- D-Wave's QPU kann als Graph  $U$  gesehen werden
  - Gewichtete Vertices (QUBIT)  $i \in V(U)$



V. Choi, D-Wave Systems Inc. (2008)

## Embedding

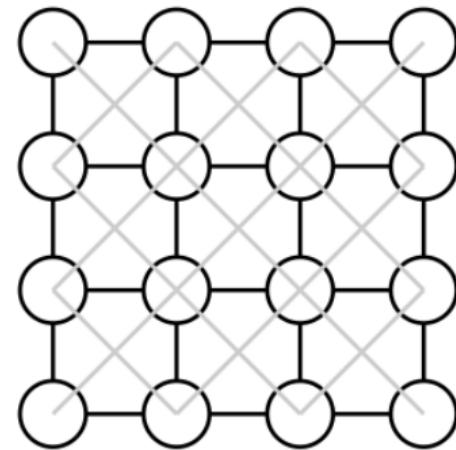
- D-Wave's QPU kann als Graph  $U$  gesehen werden
  - Gewichtete Vertices (QUBIT)  $i \in V(U)$
  - Gewichtete Kanten (coupler)  $ij \in E(U)$



V. Choi, D-Wave Systems Inc. (2008)

## Embedding

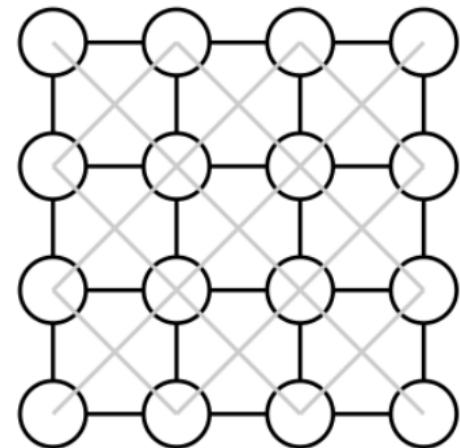
- D-Wave's QPU kann als Graph  $U$  gesehen werden
  - Gewichtete Vertices (QUBIT)  $i \in V(U)$
  - Gewichtete Kanten (coupler)  $ij \in E(U)$
- Gewichte:



V. Choi, D-Wave Systems Inc. (2008)

## Embedding

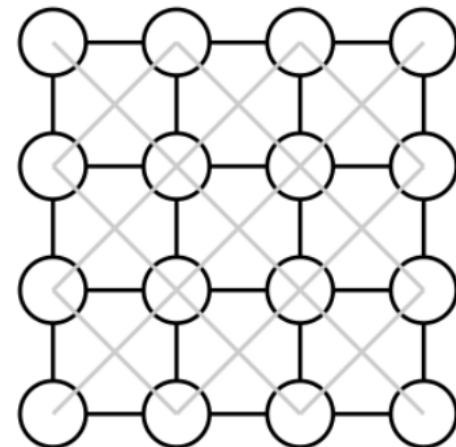
- D-Wave's QPU kann als Graph  $U$  gesehen werden
  - Gewichtete Vertices (QUBIT)  $i \in V(U)$
  - Gewichtete Kanten (coupler)  $ij \in E(U)$
- Gewichte:
  - $h_i(t)$  „QUBIT bias“
  - $\Delta_i(t)$  „tunneling amplitude“
  - $J_{ij}(t)$  „coupler strength“



V. Choi, D-Wave Systems Inc. (2008)

## Embedding

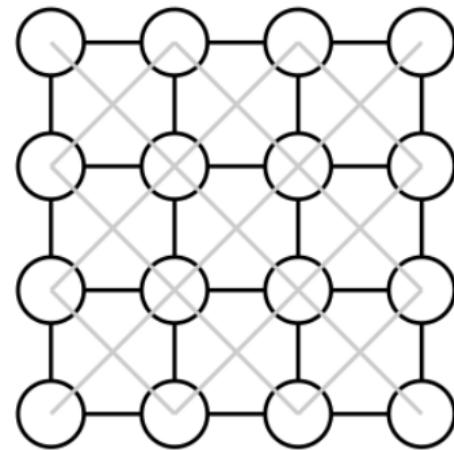
- D-Wave's QPU kann als Graph  $U$  gesehen werden
  - Gewichtete Vertices (QUBIT)  $i \in V(U)$
  - Gewichtete Kanten (coupler)  $ij \in E(U)$
- Gewichte:
  - $h_i(t)$  „QUBIT bias“
  - $\Delta_i(t)$  „tunneling amplitude“
  - $J_{ij}(t)$  „coupler strength“
- formuliere transversalen Ising-Hamiltonian auf Graph  $G$
- $H(t) = \sum_{i \in V(G)} h_i(t) \sigma_i^z + \sum_{ij \in E(G)} J_{ij}(t) \sigma_i^z \sigma_j^z + \sum_{i \in V(G)} \Delta_i(t) \sigma_i^x$



V. Choi, D-Wave Systems Inc. (2008)

## Embedding

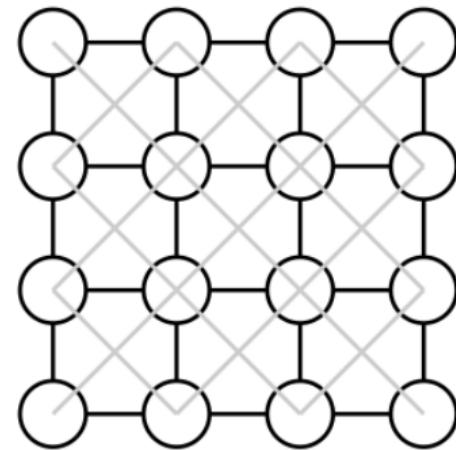
- D-Wave's QPU kann als Graph  $U$  gesehen werden
  - Gewichtete Vertices (QUBIT)  $i \in V(U)$
  - Gewichtete Kanten (coupler)  $ij \in E(U)$
- Gewichte:
  - $h_i(t)$  „QUBIT bias“
  - $\Delta_i(t)$  „tunneling amplitude“
  - $J_{ij}(t)$  „coupler strength“
- formuliere transversalen Ising-Hamiltonian auf Graph  $G$
- $H(t) = \sum_{i \in V(G)} h_i(t) \sigma_i^z + \sum_{ij \in E(G)} J_{ij}(t) \sigma_i^z \sigma_j^z + \sum_{i \in V(G)} \Delta_i(t) \sigma_i^x$
- Eigenergie des Ising-Hamiltonians  $\epsilon(s_1, \dots, s_n) = \sum_{i \in V(G)} h_i s_i + \sum_{ij \in E(G)} J_{ij} s_i s_j$



V. Choi, D-Wave Systems Inc. (2008)

## Embedding

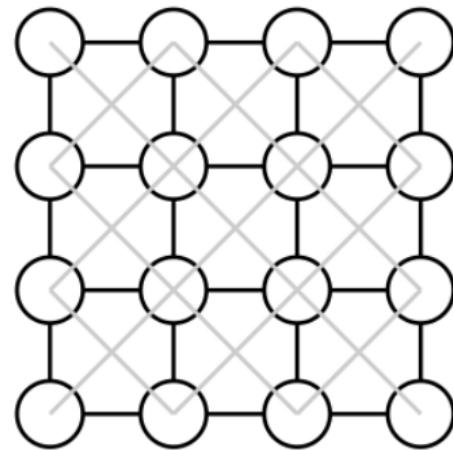
- D-Wave's QPU kann als Graph  $U$  gesehen werden
  - Gewichtete Vertices (QUBIT)  $i \in V(U)$
  - Gewichtete Kanten (coupler)  $ij \in E(U)$
- Gewichte:
  - $h_i(t)$  „QUBIT bias“
  - $\Delta_i(t)$  „tunneling amplitude“
  - $J_{ij}(t)$  „coupler strength“
- formuliere transversalen Ising-Hamiltonian auf Graph  $G$
- $H(t) = \sum_{i \in V(G)} h_i(t) \sigma_i^z + \sum_{ij \in E(G)} J_{ij}(t) \sigma_i^z \sigma_j^z + \sum_{i \in V(G)} \Delta_i(t) \sigma_i^x$
- Eigenergie des Ising-Hamiltonians  $\epsilon(s_1, \dots, s_n) = \sum_{i \in V(G)} h_i s_i + \sum_{ij \in E(G)} J_{ij} s_i s_j$ 
  - spins  $s_i \in \{-1, 1\}$



V. Choi, D-Wave Systems Inc. (2008)

## Embedding

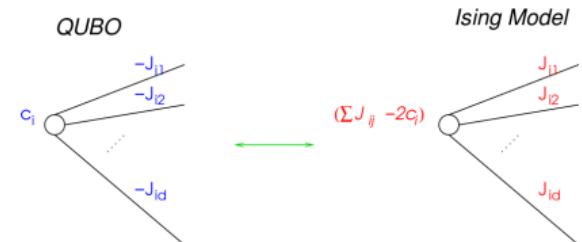
- D-Wave's QPU kann als Graph  $U$  gesehen werden
  - Gewichtete Vertices (QUBIT)  $i \in V(U)$
  - Gewichtete Kanten (coupler)  $ij \in E(U)$
- Gewichte:
  - $h_i(t)$  „QUBIT bias“
  - $\Delta_i(t)$  „tunneling amplitude“
  - $J_{ij}(t)$  „coupler strength“
- formuliere transversalen Ising-Hamiltonian auf Graph  $G$
- $H(t) = \sum_{i \in V(G)} h_i(t) \sigma_i^z + \sum_{ij \in E(G)} J_{ij}(t) \sigma_i^z \sigma_j^z + \sum_{i \in V(G)} \Delta_i(t) \sigma_i^x$
- Eigenergie des Ising-Hamiltonians  $\epsilon(s_1, \dots, s_n) = \sum_{i \in V(G)} h_i s_i + \sum_{ij \in E(G)} J_{ij} s_i s_j$ 
  - spins  $s_i \in \{-1, 1\}$
- Suche nach Grundzustandsenergie ist das „Ising-Problem“



V. Choi, D-Wave Systems Inc. (2008)

## Embedding

- Ising Problem äquivalent zu QUBO Problem auf dem selben Graph  $G$

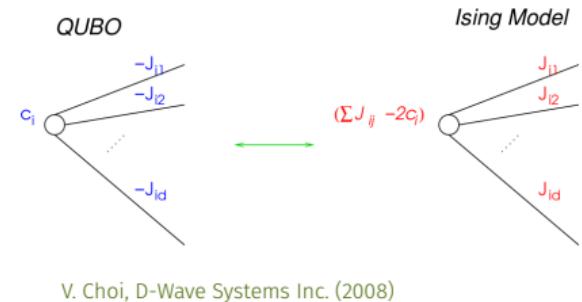


V. Choi, D-Wave Systems Inc. (2008)

## Embedding

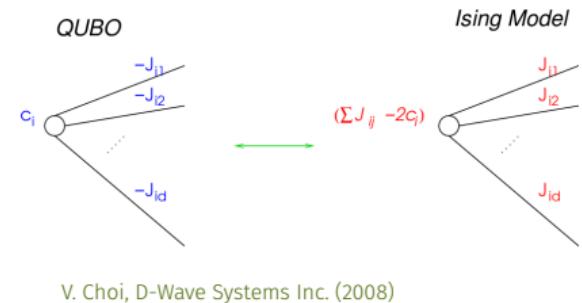
- Ising Problem äquivalent zu QUBO Problem auf dem selben Graph  $G$

- $Y(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i \in V(G)} c_i x_i - \sum_{ij \in E(G)} J_{ij} x_i x_j$  maximieren
- $x_i \in \{0, 1\}$



## Embedding

- Ising Problem äquivalent zu QUBO Problem auf dem selben Graph  $G$ 
  - $Y(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i \in V(G)} c_i x_i - \sum_{ij \in E(G)} J_{ij} x_i x_j$  maximieren
  - $x_i \in \{0, 1\}$



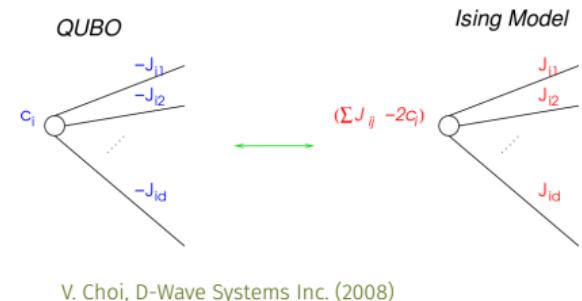
V. Choi, D-Wave Systems Inc. (2008)

## Ziel

$G$  in  $U$  einbetten („subgraph-embedding“) und somit das Ising/QUBO-Problem lösen

## Embedding

- Ising Problem äquivalent zu QUBO Problem auf dem selben Graph  $G$ 
  - $Y(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i \in V(G)} c_i x_i - \sum_{ij \in E(G)} J_{ij} x_i x_j$  maximieren
  - $x_i \in \{0, 1\}$



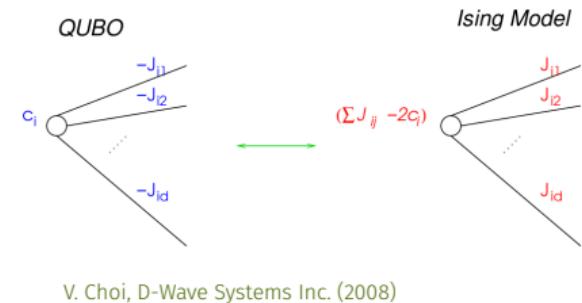
## Ziel

$G$  in  $U$  einbetten („subgraph-embedding“) und somit das Ising/QUBO-Problem lösen

- Problem: Einschränkungen auf  $U$  (z.B. Anzahl der coupler) übertragen sich auf  $G$

## Embedding

- Ising Problem äquivalent zu QUBO Problem auf dem selben Graph  $G$ 
  - $Y(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i \in V(G)} c_i x_i - \sum_{ij \in E(G)} J_{ij} x_i x_j$  maximieren
  - $x_i \in \{0, 1\}$

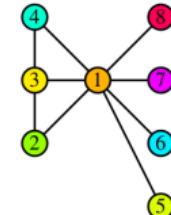


## Ziel

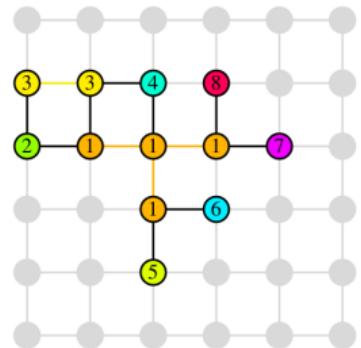
$G$  in  $U$  einbetten („subgraph-embedding“) und somit das Ising/QUBO-Problem lösen

- Problem: Einschränkungen auf  $U$  (z.B. Anzahl der coupler) übertragen sich auf  $G$ 
  - „dummy“-Vertices mit ferromagnetischer Kopplung einführen

## Minor embedding



$G$



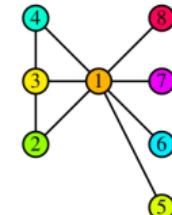
$G_{\text{emb}}$

Choi, V., D-Wave Systems Inc. (2008)

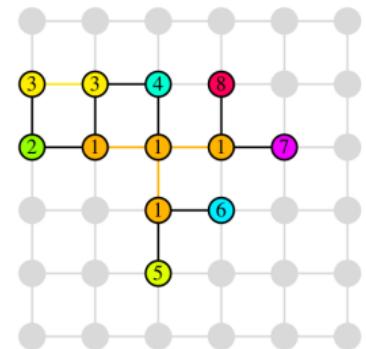
Hardware embedding

## Minor embedding

- logischer QUBIT  $i$  aus  $G$  wird auf subtree  $T_i$  physischer QUBITS aus  $G_{\text{emb}} \subset U$  abgebildet



$G$

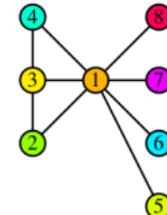


$G_{\text{emb}}$

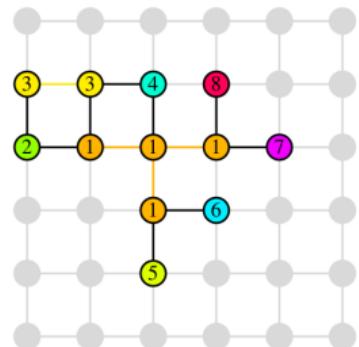
Choi, V., D-Wave Systems Inc. (2008)

## Minor embedding

- logischer QUBIT  $i$  aus  $G$  wird auf subtree  $T_i$  physischer QUBITS aus  $G_{\text{emb}} \subset U$  abgebildet
- ferromagnetische Kopplung zwischen „dummy“-Vertices muss hinreichend groß sein



$G$



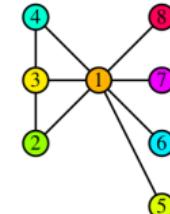
Choi, V., D-Wave Systems Inc. (2008)

## Minor embedding

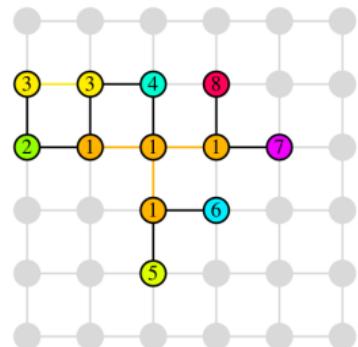
- logischer QUBIT  $i$  aus  $G$  wird auf subtree  $T_i$ ; physischer QUBITS aus  $G_{\text{emb}} \subset U$  abgebildet
- ferromagnetische Kopplung zwischen „dummy“-Vertices muss hinreichend groß sein

### Ziel

Parameter des minor-embedding auf ursprüngliche Ising/QUBO-Parameter zurückführen



$G$

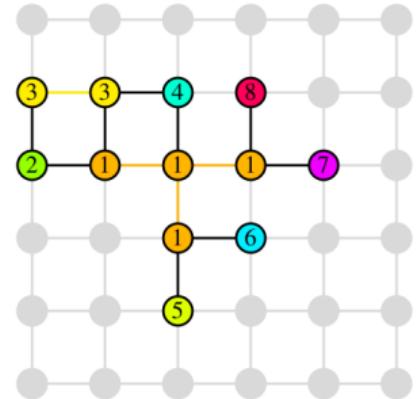


$G_{\text{emb}}$

Choi, V., D-Wave Systems Inc. (2008)

## Minor embedding

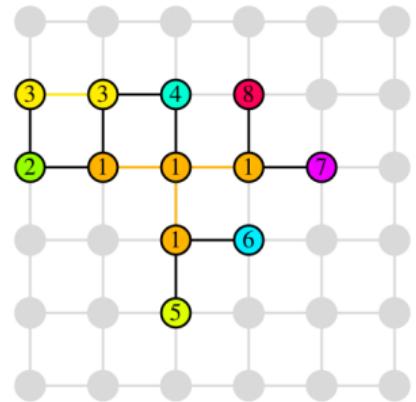
- $\epsilon^{\text{emb}}(s_1, \dots, s_N) = \sum_{i \in V(G_{\text{emb}})} h'_i s_i + \sum_{ij \in E(G_{\text{emb}})} J'_{ij} s_i s_j$  minimieren



V. Choi, D-Wave Systems Inc. (2008)

## Minor embedding

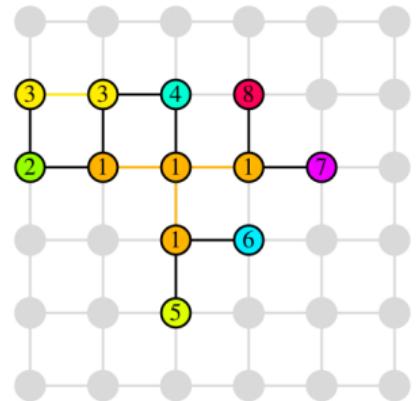
- $\epsilon^{\text{emb}}(s_1, \dots, s_N) = \sum_{i \in V(G_{\text{emb}})} h'_i s_i + \sum_{ij \in E(G_{\text{emb}})} J'_{ij} s_i s_j$  minimieren
- $\tau : V(G) \times V(G) \rightarrow V(U)$ , so dass  $i_{\tau(i,j)} \in V(T_i)$ ,  $j_{\tau(j,i)} \in V(T_j)$  mit  $i_{\tau(i,j)} j_{\tau(j,i)} \in E(U)$



V. Choi, D-Wave Systems Inc. (2008)

## Minor embedding

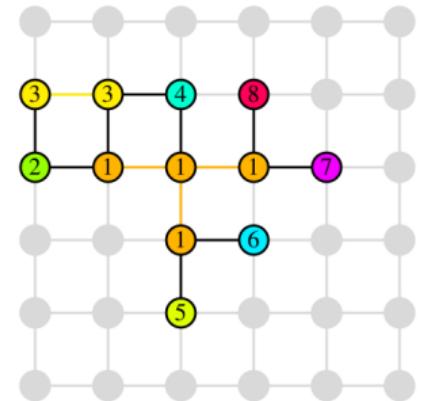
- $\epsilon^{\text{emb}}(s_1, \dots, s_N) = \sum_{i \in V(G_{\text{emb}})} h'_i s_i + \sum_{ij \in E(G_{\text{emb}})} J'_{ij} s_i s_j$  minimieren
- $\tau : V(G) \times V(G) \rightarrow V(U)$ , so dass  $i_{\tau(i,j)} \in V(T_i)$ ,  $j_{\tau(j,i)} \in V(T_j)$  mit  $i_{\tau(i,j)} j_{\tau(j,i)} \in E(U)$
- $\text{OE}(G_{\text{emb}}) = \cup_{ij \in E(G)} i_{\tau(i,j)} j_{\tau(j,i)}$  sind ursprüngliche coupler



V. Choi, D-Wave Systems Inc. (2008)

## Minor embedding

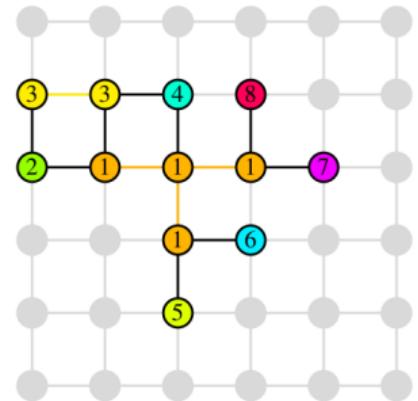
- $\epsilon^{\text{emb}}(s_1, \dots, s_N) = \sum_{i \in V(G_{\text{emb}})} h'_i s_i + \sum_{ij \in E(G_{\text{emb}})} J'_{ij} s_i s_j$  minimieren
- $\tau : V(G) \times V(G) \rightarrow V(U)$ , so dass  $i_{\tau(i,j)} \in V(T_i)$ ,  $j_{\tau(j,i)} \in V(T_j)$  mit  $i_{\tau(i,j)} j_{\tau(j,i)} \in E(U)$
- $\text{OE}(G_{\text{emb}}) = \cup_{ij \in E(G)} i_{\tau(i,j)} j_{\tau(j,i)}$  sind ursprüngliche coupler  
 →  $J'_{i_{\tau(i,j)} j_{\tau(j,i)}} = J_{ij}$  für  $i_{\tau(i,j)} j_{\tau(j,i)} \in \text{OE}(G_{\text{emb}})$



V. Choi, D-Wave Systems Inc. (2008)

## Minor embedding

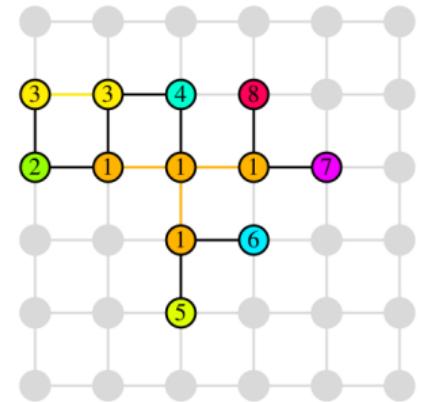
- $\epsilon^{\text{emb}}(s_1, \dots, s_N) = \sum_{i \in V(G_{\text{emb}})} h'_i s_i + \sum_{ij \in E(G_{\text{emb}})} J'_{ij} s_i s_j$  minimieren
- $\tau : V(G) \times V(G) \rightarrow V(U)$ , so dass  $i_{\tau(i,j)} \in V(T_i)$ ,  $j_{\tau(j,i)} \in V(T_j)$  mit  $i_{\tau(i,j)} j_{\tau(j,i)} \in E(U)$
- $\text{OE}(G_{\text{emb}}) = \cup_{ij \in E(G)} i_{\tau(i,j)} j_{\tau(j,i)}$  sind ursprüngliche coupler  
 →  $J'_{i_{\tau(i,j)} j_{\tau(j,i)}} = J_{ij}$  für  $i_{\tau(i,j)} j_{\tau(j,i)} \in \text{OE}(G_{\text{emb}})$
- ferromagnetic coupler strength  $F_k^{ij}$  für  $ij \in E(T_i)$



V. Choi, D-Wave Systems Inc. (2008)

## Minor embedding

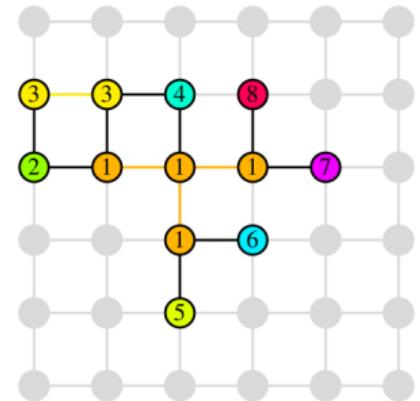
- $\epsilon^{\text{emb}}(s_1, \dots, s_N) = \sum_{i \in V(G_{\text{emb}})} h'_i s_i + \sum_{ij \in E(G_{\text{emb}})} J'_{ij} s_i s_j$  minimieren
- $\tau : V(G) \times V(G) \rightarrow V(U)$ , so dass  $i_{\tau(i,j)} \in V(T_i)$ ,  $j_{\tau(j,i)} \in V(T_j)$  mit  $i_{\tau(i,j)} j_{\tau(j,i)} \in E(U)$
- $\text{OE}(G_{\text{emb}}) = \cup_{ij \in E(G)} i_{\tau(i,j)} j_{\tau(j,i)}$  sind ursprüngliche coupler  
 →  $J'_{i_{\tau(i,j)} j_{\tau(j,i)}} = J_{ij}$  für  $i_{\tau(i,j)} j_{\tau(j,i)} \in \text{OE}(G_{\text{emb}})$
- ferromagnetische coupler strength  $F_k^{ij}$  für  $ij \in E(T_i)$
- bias  $h_i$  der logischen QUBITs auf physische QUBITs verteilen



V. Choi, D-Wave Systems Inc. (2008)

## Minor embedding

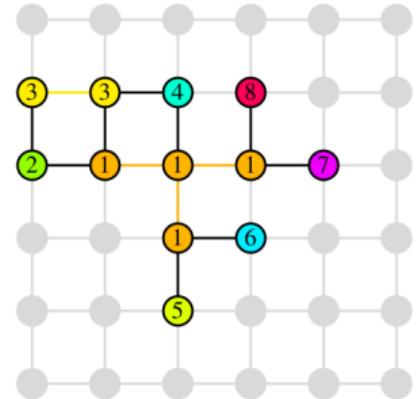
- $\epsilon^{\text{emb}}(s_1, \dots, s_N) = \sum_{i \in V(G_{\text{emb}})} h'_i s_i + \sum_{ij \in E(G_{\text{emb}})} J'_{ij} s_i s_j$  minimieren
- $\tau : V(G) \times V(G) \rightarrow V(U)$ , so dass  $i_{\tau(i,j)} \in V(T_i)$ ,  $j_{\tau(j,i)} \in V(T_j)$  mit  $i_{\tau(i,j)} j_{\tau(j,i)} \in E(U)$
- $\text{OE}(G_{\text{emb}}) = \cup_{ij \in E(G)} i_{\tau(i,j)} j_{\tau(j,i)}$  sind ursprüngliche coupler  
 →  $J'_{i_{\tau(i,j)} j_{\tau(j,i)}} = J_{ij}$  für  $i_{\tau(i,j)} j_{\tau(j,i)} \in \text{OE}(G_{\text{emb}})$
- ferromagnetische coupler strength  $F_k^{ij}$  für  $ij \in E(T_i)$
- bias  $h_i$  der logischen QUBITs auf physische QUBITs verteilen  
 →  $\sum_{i_k \in V(T_i)} h'_{i_k} = h_i$



V. Choi, D-Wave Systems Inc. (2008)

## Minor embedding

- $\epsilon^{\text{emb}}(s_1, \dots, s_N) = \sum_{i \in V(G_{\text{emb}})} h'_i s_i + \sum_{ij \in E(G_{\text{emb}})} J'_{ij} s_i s_j$  minimieren
  - $\tau : V(G) \times V(G) \rightarrow V(U)$ , so dass  $i_{\tau(i,j)} \in V(T_i)$ ,  $j_{\tau(j,i)} \in V(T_j)$  mit  $i_{\tau(i,j)} j_{\tau(j,i)} \in E(U)$
  - $\text{OE}(G_{\text{emb}}) = \cup_{ij \in E(G)} i_{\tau(i,j)} j_{\tau(j,i)}$  sind ursprüngliche coupler  
 →  $J'_{i_{\tau(i,j)} j_{\tau(j,i)}} = J_{ij}$  für  $i_{\tau(i,j)} j_{\tau(j,i)} \in \text{OE}(G_{\text{emb}})$
  - ferromagnetische coupler strength  $F_k^{ij}$  für  $ij \in E(T_i)$
  - bias  $h_i$  der logischen QUBITs auf physische QUBITs verteilen  
 →  $\sum_{i_k \in V(T_i)} h'_{i_k} = h_i$
- S

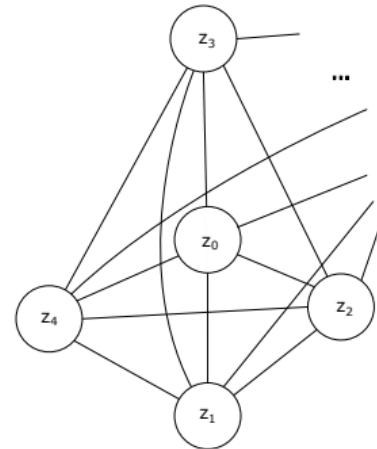


V. Choi, D-Wave Systems Inc. (2008)

## Finale Energie

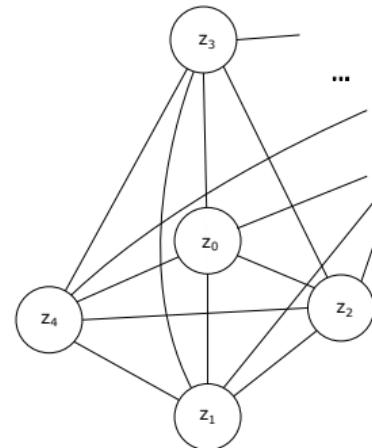
$$\epsilon^{\text{emb}}(s_1, \dots, s_N) = \sum_{i \in V(G)} \left( \sum_{i_k \in V(T_i)} h'_{i_k} s_{i_k} + \sum_{i_p i_q \in E(T_i)} F_i^{pq} s_{i_p} s_{i_q} \right) + \sum_{ij \in E(G)} J_{ij} s_{i_{\tau(i,j)}} s_{j_{\tau(i,j)}}$$

## Fallbeispiel Aisin Corporation



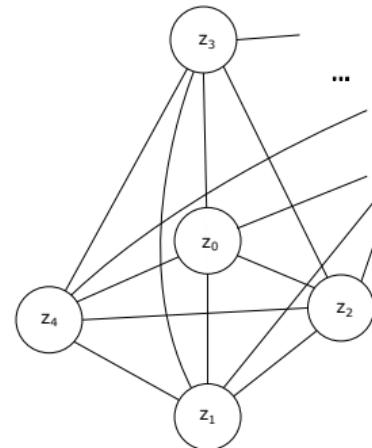
## Fallbeispiel Aisin Corporation

- Zeit für Route  $\xi$ :  $\text{time}(\xi) = \sum_{t=1}^{k-1} T_{\xi_t, \xi_{t+1}}$



## Fallbeispiel Aisin Corporation

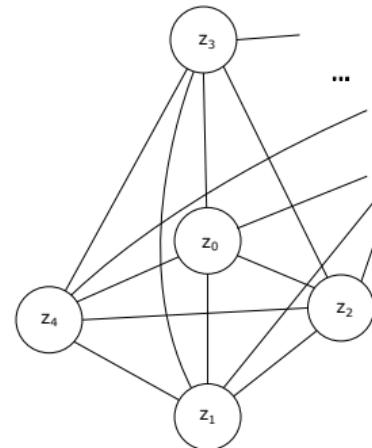
- Zeit für Route  $\xi$ :  $\text{time}(\xi) = \sum_{t=1}^{k-1} T_{\xi_t, \xi_{t+1}}$
- off-board-demand  $D_{ij}$ , der von  $i$  nach  $j$  gebracht werden muss



## Fallbeispiel Aisin Corporation

- Zeit für Route  $\xi$ :  $\text{time}(\xi) = \sum_{t=1}^{k-1} T_{\xi_t, \xi_{t+1}}$
- off-board-demand  $D_{ij}$ , der von  $i$  nach  $j$  gebracht werden muss

Terme für QUBO-Formulierung:

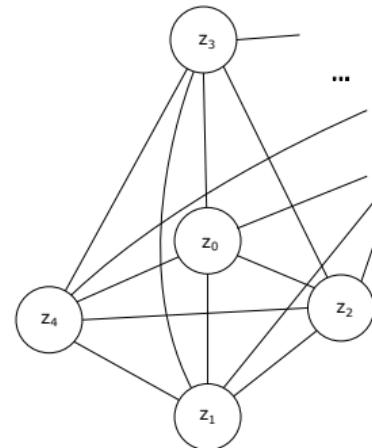


## Fallbeispiel Aisin Corporation

- Zeit für Route  $\xi$ :  $\text{time}(\xi) = \sum_{t=1}^{k-1} T_{\xi_t, \xi_{t+1}}$
- off-board-demand  $D_{ij}$ , der von  $i$  nach  $j$  gebracht werden muss

Terme für QUBO-Formulierung:

- $f_{\text{local}}(\{x_i\}) = A_{\text{local}} \sum_t (1 - \sum_i x_{it})^2$

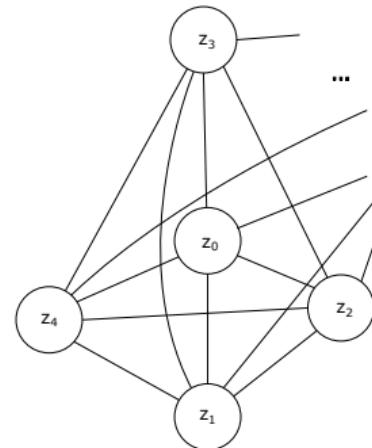


## Fallbeispiel Aisin Corporation

- Zeit für Route  $\xi$ :  $\text{time}(\xi) = \sum_{t=1}^{k-1} T_{\xi_t, \xi_{t+1}}$
- off-board-demand  $D_{ij}$ , der von  $i$  nach  $j$  gebracht werden muss

Terme für QUBO-Formulierung:

- $f_{\text{local}}(\{x_i\}) = A_{\text{local}} \sum_t (1 - \sum_i x_{it})^2$
- $f_{\text{time}}(\{x_i\}) = A_{\text{time}} \sum_{ijt} T_{ij} x_{it} x_{jt+1}$

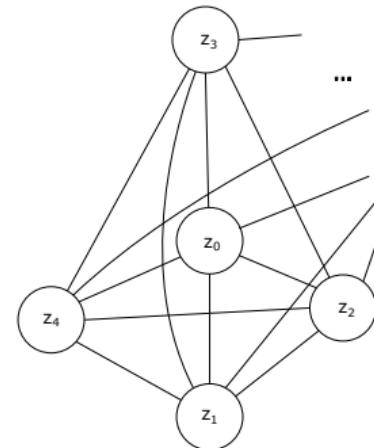


## Fallbeispiel Aisin Corporation

- Zeit für Route  $\xi$ :  $\text{time}(\xi) = \sum_{t=1}^{k-1} T_{\xi_t, \xi_{t+1}}$
- off-board-demand  $D_{ij}$ , der von  $i$  nach  $j$  gebracht werden muss

Terme für QUBO-Formulierung:

- $f_{\text{local}}(\{x_i\}) = A_{\text{local}} \sum_t (1 - \sum_i x_{it})^2$
- $f_{\text{time}}(\{x_i\}) = A_{\text{time}} \sum_{ijt} T_{ij} x_{it} x_{jt+1}$
- $f_{\text{demand}}(\{x_i\}) = -A_{\text{demand}} \sum_{ijt} \sum_{\delta=1}^{\delta_*(t)} D_{ij} x_{it} x_{jt+\delta}$  mit  $\delta_*(t) = \min(\delta_{\max}, \tau - 1 - t)$

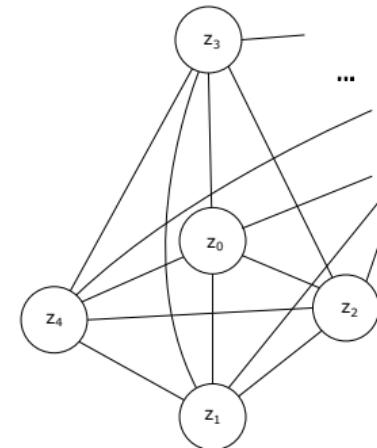


## Fallbeispiel Aisin Corporation

- Zeit für Route  $\xi$ :  $\text{time}(\xi) = \sum_{t=1}^{k-1} T_{\xi_t, \xi_{t+1}}$
- off-board-demand  $D_{ij}$ , der von  $i$  nach  $j$  gebracht werden muss

Terme für QUBO-Formulierung:

- $f_{\text{local}}(\{x_i\}) = A_{\text{local}} \sum_t (1 - \sum_i x_{it})^2$
- $f_{\text{time}}(\{x_i\}) = A_{\text{time}} \sum_{ijt} T_{ij} x_{it} x_{jt+1}$
- $f_{\text{demand}}(\{x_i\}) = -A_{\text{demand}} \sum_{ijt} \sum_{\delta=1}^{\delta_*(t)} D_{ij} x_{it} x_{jt+\delta}$  mit  $\delta_*(t) = \min(\delta_{\max}, \tau - 1 - t)$
- $f'_{\text{nonredundant}}(\{x_i\}) = A_{\text{nonredundant}} \sum_{ij} I_{ij} \sum_{\delta=2}^{\tau-2} \sum_{t=0}^{\tau-2-\delta} x_{it} x_{jt+1} x_{it+\delta} x_{jt+1+\delta}$

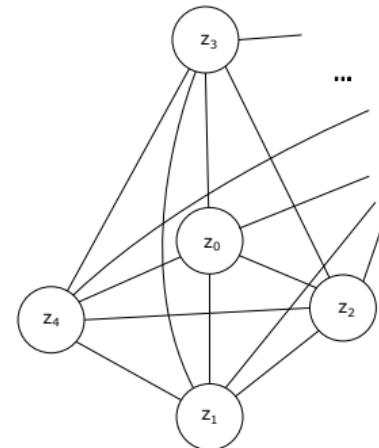


## Fallbeispiel Aisin Corporation

- Zeit für Route  $\xi$ :  $\text{time}(\xi) = \sum_{t=1}^{k-1} T_{\xi_t, \xi_{t+1}}$
- off-board-demand  $D_{ij}$ , der von  $i$  nach  $j$  gebracht werden muss

Terme für QUBO-Formulierung:

- $f_{\text{local}}(\{x_i\}) = A_{\text{local}} \sum_t (1 - \sum_i x_{it})^2$
- $f_{\text{time}}(\{x_i\}) = A_{\text{time}} \sum_{ijt} T_{ij} x_{it} x_{jt+1}$
- $f_{\text{demand}}(\{x_i\}) = -A_{\text{demand}} \sum_{ijt} \sum_{\delta=1}^{\delta_*(t)} D_{ij} x_{it} x_{jt+\delta}$  mit  $\delta_*(t) = \min(\delta_{\max}, \tau - 1 - t)$
- $f'_{\text{nonredundant}}(\{x_i\}) = A_{\text{nonredundant}} \sum_{ij} I_{ij} \sum_{\delta=2}^{\tau-2} \sum_{t=0}^{\tau-2-\delta} x_{it} x_{jt+1} x_{it+\delta} x_{jt+1+\delta}$ 
  - Vorsicht: Grad des Polynoms muss noch auf zwei reduziert werden



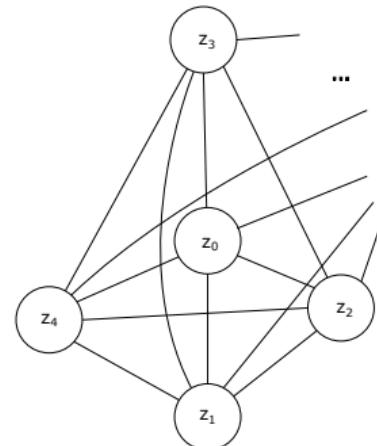
## Fallbeispiel Aisin Corporation

- Zeit für Route  $\xi$ :  $\text{time}(\xi) = \sum_{t=1}^{k-1} T_{\xi_t, \xi_{t+1}}$
- off-board-demand  $D_{ij}$ , der von  $i$  nach  $j$  gebracht werden muss

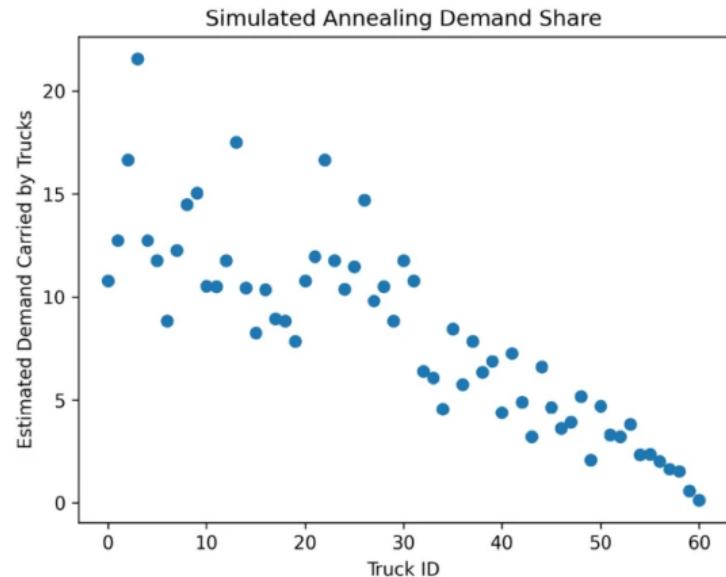
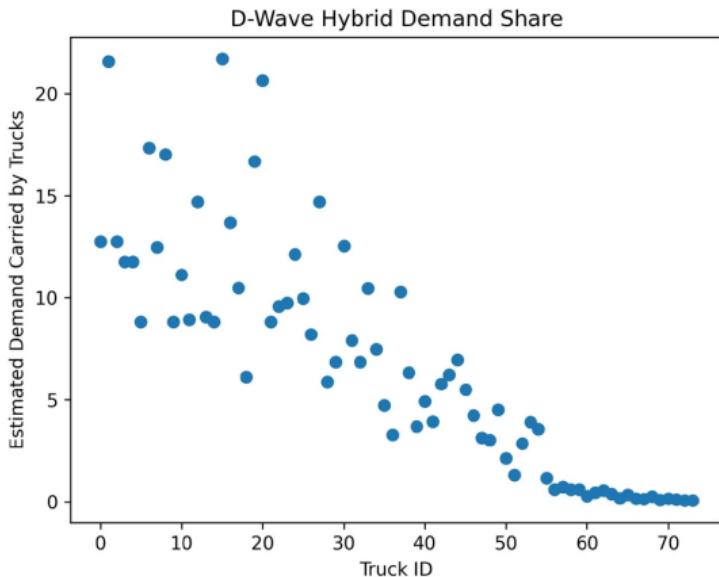
Terme für QUBO-Formulierung:

- $f_{\text{local}}(\{x_i\}) = A_{\text{local}} \sum_t (1 - \sum_i x_{it})^2$
- $f_{\text{time}}(\{x_i\}) = A_{\text{time}} \sum_{ijt} T_{ij} x_{it} x_{jt+1}$
- $f_{\text{demand}}(\{x_i\}) = -A_{\text{demand}} \sum_{ijt} \sum_{\delta=1}^{\delta_*(t)} D_{ij} x_{it} x_{jt+\delta}$  mit  $\delta_*(t) = \min(\delta_{\max}, \tau - 1 - t)$
- $f'_{\text{nonredundant}}(\{x_i\}) = A_{\text{nonredundant}} \sum_{ij} I_{ij} \sum_{\delta=2}^{\tau-2} \sum_{t=0}^{\tau-2-\delta} x_{it} x_{jt+1} x_{it+\delta} x_{jt+1+\delta}$ 
  - Vorsicht: Grad des Polynoms muss noch auf zwei reduziert werden

$$A_{\text{local}} = 5000, \quad A_{\text{demand}} = 320, \quad A_{\text{time}} = 0.01, \quad A_{\text{nonredundant}} = 1$$

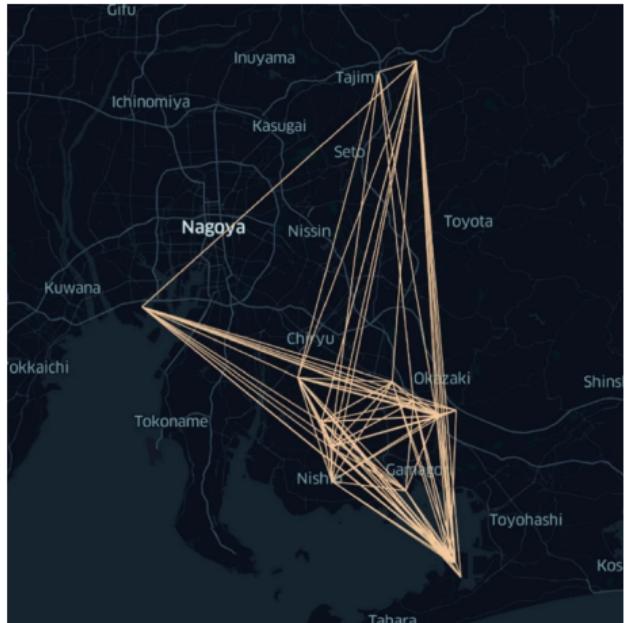
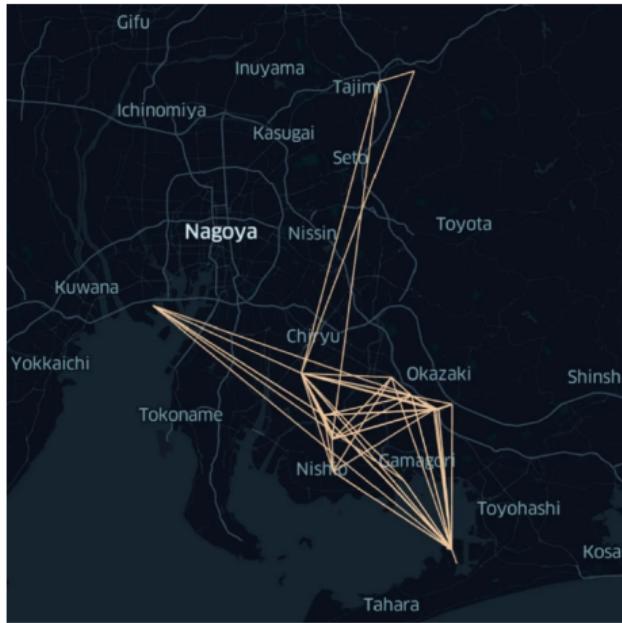


## Fallbeispiel Aisin Corporation



Weinberg, S.J., Sanches, F., Ide, T. et al. Sci Rep 13, 4770 (2023)

## Fallbeispiel Aisin Corporation



Weinberg, S.J., Sanches, F., Ide, T. et al. Sci Rep 13, 4770 (2023)

## Zusammenfassung und Ausblick

## Quellen

- Bapst, V. et al., The quantum adiabatic algorithm applied to random optimization problems: The quantum spin glass perspective, ScienceDirect 523 (2013), <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2012.10.002>
- Kadowaki, T. et al. Quantum annealing in the transverse Ising model, PHYSICAL REVIEW E 58 (1998), <https://doi.org/10.48550/arXiv.cond-mat/9804280>
- Rieffel, E.G., Venturelli, D., O’Gorman, B. et al. A case study in programming a quantum annealer for hard operational planning problems. Quantum Inf Process 14, 1–36 (2015). <https://doi.org/10.1007/s11128-014-0892-x>
- Choi, V. Minor-embedding in adiabatic quantum computation: I. The parameter setting problem. Quantum Inf Process 7, 193–209 (2008). <https://doi.org/10.1007/s11128-008-0082-9>
- Jain, S, Solving the Traveling Salesman Problem on the D-Wave Quantum Computer, Frontiers in Physics, Volume 9, id.646 (2021) ,doi: 10.3389/fphy.2021.760783
- Sangwan, Shabnam. (2018). Literature Review on Travelling Salesman Problem. International Journal of Research. 5. 1152.
- Weinberg, S.J., Sanches, F., Ide, T. et al. Supply chain logistics with quantum and classical annealing algorithms. Sci Rep 13, 4770 (2023). <https://doi.org/10.1038/s41598-023-31765-8>
- Yarkoni, S et al., Quantum annealing for industry applications: introduction and review, IOP Publishing 85-10 (2022), <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6633/ac8c54>

## Backup-Folien für Detailfragen

Details, evtl. Rechnungen und Zahlenwerte für Fragen