

# Metody Numeryczne

## Zadanie:

6. (Zadanie numeryczne NUM1) Napisz program wyliczający przybliżenie pochodnej ze wzorów:

$$(a) D_h f(x) \equiv \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

$$(b) D_h f(x) \equiv \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}.$$

Przeanalizuj, jak zachowuje się błąd  $|D_h f(x) - f'(x)|$  dla funkcji  $f(x) = \sin(x^2)$  oraz punktu  $x = 0.2$  przy zmianie parametru  $h$  dla różnych typów zmiennoprzecinkowych (float, double). Wykreśl  $|D_h f(x) - f'(x)|$  w funkcji  $h$  w skali logarytmicznej. Poeksperymentuj również używając innych funkcji i punktów.

## Wprowadzenie:

W niniejszym sprawozdaniu omówimy problem wyliczania pochodnych funkcji za pomocą różnych wzorów, a także dokonamy analizy błędów obliczeniowych, które występują przy wykorzystaniu tych wzorów. Pochodne są kluczowymi pojęciami w matematyce, fizyce i innych dziedzinach nauki, a ich dokładne obliczenia są często niezbędne do zrozumienia zachowania funkcji.

### Iloraz różnicy:

Jednym z popularnych sposobów obliczania pochodnych jest wykorzystanie wzoru na iloraz różnicy. Jest to przydatna metoda, która pozwala na przybliżone obliczenie pochodnej funkcji. Wzór ten można przedstawić jako:

$$f'(x) \approx (f(x+h) - f(x)) / h$$

### Symetryczny iloraz różnicowy:

Oprócz wzoru na iloraz różnicy, wybraliśmy również symetryczny iloraz różnicowy jako drugi sposób obliczeń. Wzór ten jest przedstawiony jako:

$$f'(x) \approx (f(x+h) - f(x-h)) / (2h)$$

## Wybór dwóch różnych wzorów:

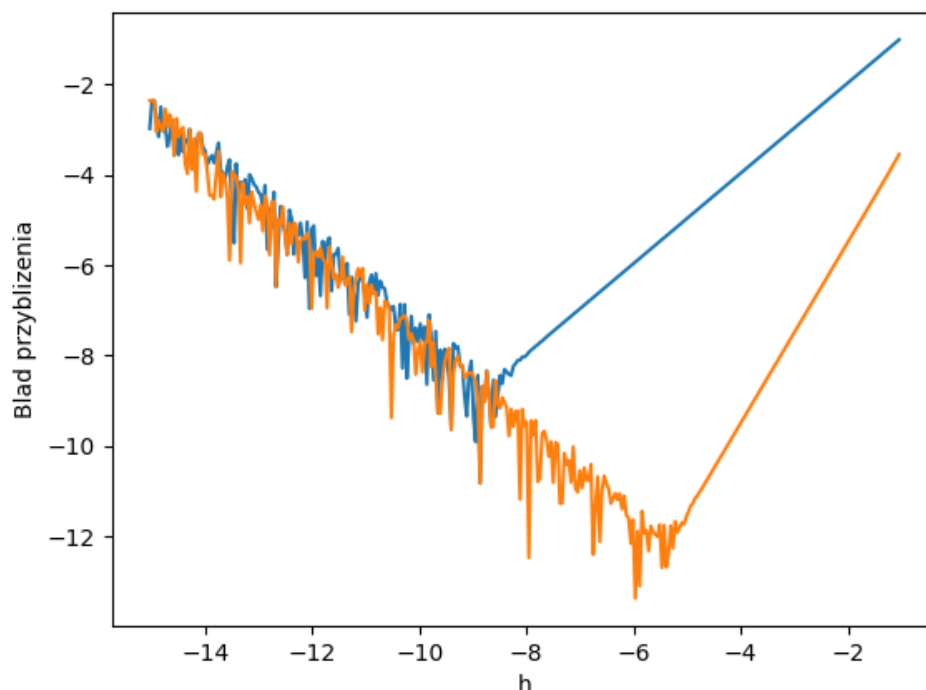
W celu analizy problemu wyliczania pochodnych wybraliśmy dwa różne wzory do obliczeń:

1. Wzór na iloraz różnicy.
2. Symetryczny iloraz różnicowy.
3. Dokładny wzór pochodnej funkcji, który jest znany i dokładny w sensie teoretycznym.

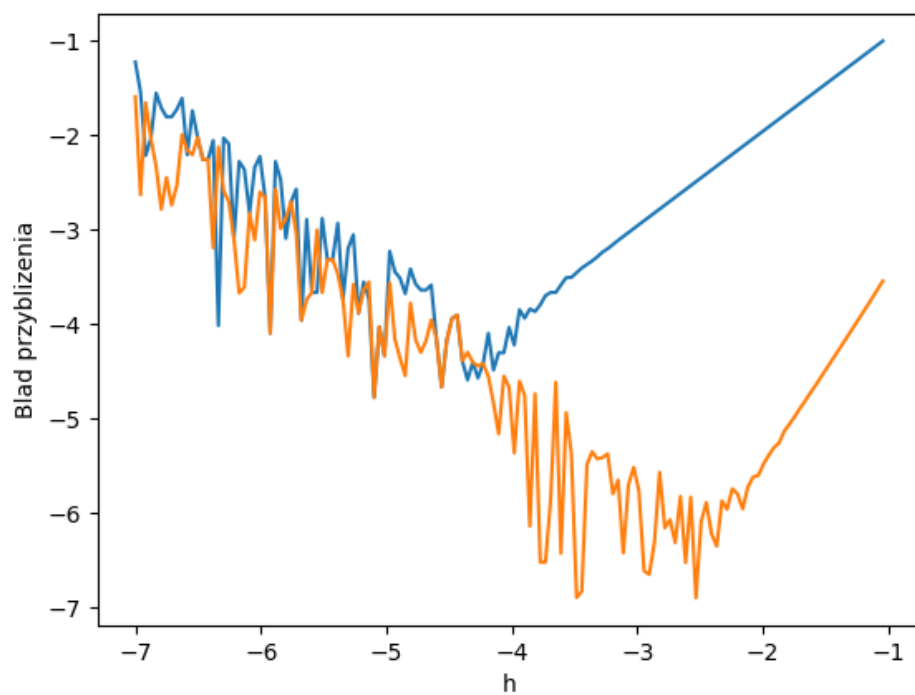
## Kroki eksperymentu:

1. Wybraliśmy funkcję, dla której obliczamy pochodną. Funkcja ta jest dostatecznie skomplikowana, aby wyniki nie były trywialne i jednocześnie prostą, aby można było obliczyć dokładną pochodną.
2. Określiliśmy wartość  $x$ , dla której obliczamy pochodną.
3. Dla wybranych wartości  $h$ , obliczyliśmy przybliżoną pochodną za pomocą wzoru ilorazu różnicy, symetrycznego ilorazu różnicowego oraz dokładną pochodną za pomocą wzoru na pochodną funkcji.
4. Powtórzyliśmy ten proces dla różnych wartości  $h$ , w tym bardzo małych wartości, aby zbadać błąd obliczeniowy.

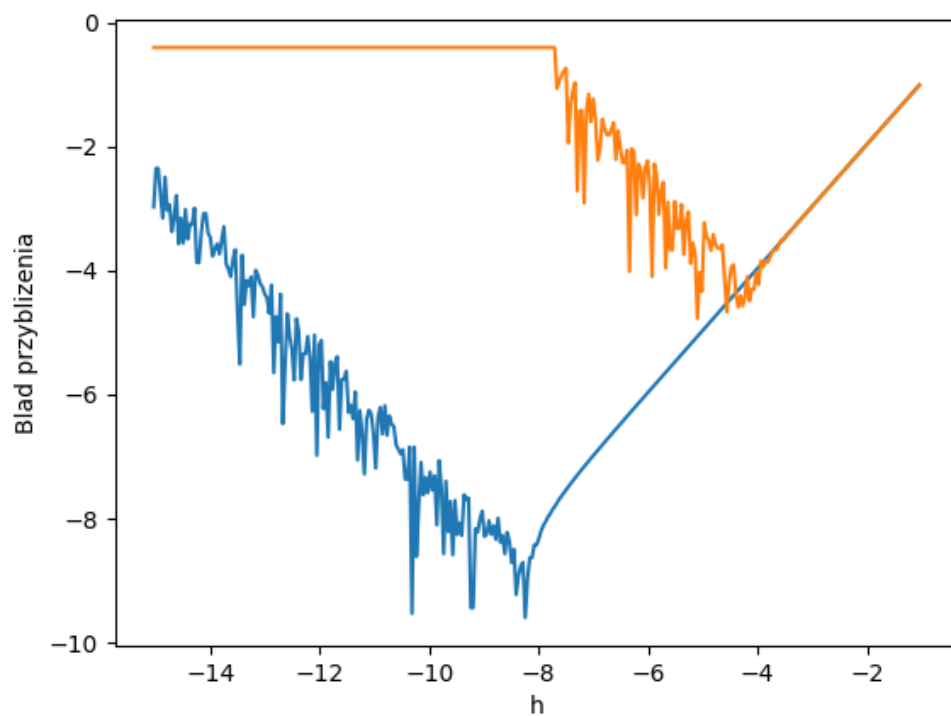
## Wyniki



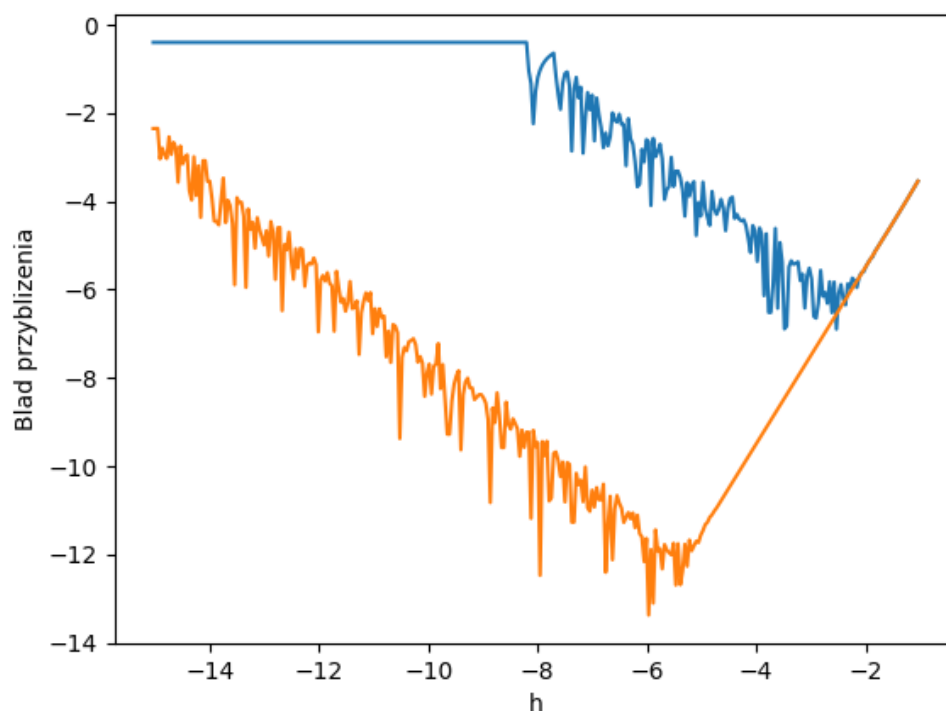
Wykres ilorazu różnicy oraz symetrycznego ilorazu różnicowego dla typu double



Wykres ilorazu różnicy oraz symetrycznego ilorazu różnicowego dla typu float



Wykres ilorazu różnicy dla typu double oraz typu float



Wykres symetrycznego ilorazu różnicowego dla typu double oraz typu float

## Analiza wyników:

1. Wykresy funkcji dla różnych typów danych: Nałączone wykresy jednoznacznie pokazują, że wykorzystanie typu danych **double** w porównaniu z typem **float** prowadzi do dokładniejszych wyników. Widoczne są różnice w precyzji, szczególnie w przypadku bardziej skomplikowanych funkcji, gdzie nawet niewielkie zmiany mogą mieć duży wpływ na wyniki obliczeń.
2. Porównanie błędów obliczeniowych: W przypadku analizy tego samego wzoru dla dwóch różnych typów danych, tj. **float** i **double**, zauważono, że symetryczny rachunek różnicowy zwraca mniejszy błąd obliczeniowy w porównaniu z ilorazem różnicy dla obu typów danych. Oznacza to, że dokładność wyników jest zwiększona, gdy korzystamy z symetrycznego ilorazu różnicowego.

3. Wpływ wartości numerycznych na błąd obliczeniowy: Analiza wykresów ukazuje, że niektóre wartości posiadające charakterystykę potęg dwójki mają mniejszy błąd obliczeniowy. Jest to związane z ich specyficzną reprezentacją w systemie binarnym, co wpływa na mniejszą liczbę zaokrągleń i błędów numerycznych.

## **Wnioski:**

1. Wykorzystanie typu danych `double` przynosi większą precyzję i dokładność obliczeń w porównaniu z typem `float`, szczególnie dla bardziej złożonych funkcji.
2. Symetryczny iloraz różnicowy jest bardziej skuteczną metodą obliczeń, ponieważ generuje mniejszy błąd obliczeniowy niż iloraz różnicy, szczególnie w przypadku analizy różnych typów danych.
3. Wartości, które są potęgami dwójki, wykazują mniejsze błędy obliczeniowe, co wskazuje na konieczność rozważenia specyfiki reprezentacji numerycznej w analizie wyników.

To sprawozdanie podsumowuje eksperymenty związane z obliczaniem pochodnej za pomocą różnych wzorów, w tym ilorazu różnicy i symetrycznego ilorazu różnicowego, i zwraca uwagę na znaczenie precyzyjnej kontroli wartości  $h$  w procesie obliczeń numerycznych.

## **Instrukcja uruchomiania programu**

1. Zainstalować biblioteki `numpy`, `sympy`, `mpmath` oraz `matplotlib`
2. Uruchomić plik `main.py` komendą `python main.py`
3. Wpisać dane, o które program będzie prosił