# Zadanie Numeryczne 4

# Sprawodzanie numeryczne

## Cel badania

Celem badania było sprawdzenie efektywności rozwiązywania układu równań metodą wyznaczenia macierzy A^-1 według wzoru Shermana-Morrisona dla macierzy, mającej wartości 12 i 8 na głownej diagonali i nad diagonała odpowiednio oraz jedynki na pozostawych pozycjach.

## Zadanie numeryczne NUM4:

1) Dla zadanej macierzy A i wektora b obliczyć równanie Ay = b, stosując odpowiednią metodę, zaimplementowaną samodzielnie.
2) Sprawdzać wynik należy przy użyciu procedur bibliotecznych lub pakietów algebry komputerowej.
3) Potraktować N jako zmienną i zmierzyć czas potrzebny do uzyskania rozwiązania w funkcji N.
4) 4) Wynik przedstawić na wykresie.

## Metoda Badawcza

Dla sprawdzania wyników korzystamy z metody bibliotecznej, dla której w sposób standardowy, używajać dwu pętli for tworzymy macierz A i wektor b. Następnie przy użyciu funkcji **np.linalg.solve()** obliczmy wynik i czas, za który metoda biblioteczna rozwiązuje dane równanie.

W metodzie własnej w sposób jawny nie definiujemy macierz **A**, bo nie jest to nam potrzebne. Macierz naszą możemy rozłożyć na sumu dwu macierzy, niech ta będą **A1** oraz **A2**.
**A1** jest to macierz dwudiagonalna , która ma na każdej pozycji głownej diagonali wartość **11** oraz **7** nad głowną diagonalą, pozostałe miejsca wypełnione są zerami. **A2** jest wypełniona **jedynkami** na każdej pozycji.
Macierz **A2** można zapisać jako iloczyn dwu wektorów, niech to będzie ***u*** oraz ***v^T.***

Maicerz **A** = **A1 + *u*v^T, u = v.***

Podstawiając do naszego równania otrzymujemy **(A1 + *u*v^T, u = v)*y = b***

Chcemy więc wyrazić z tego **y**:

***y =*** ((**A1 +** ***u*v^T, u = v)^-1)*b***

To z kolei możemy zapisać według wzoru Shermana-Morrisona:

***A^-1*b = (A^-1*u*v^T*A^-1*b)/(1+v^T*A^-1*u)***

Niech:

**1) A^-1*u = x**

**2) A^-1*b = z**

Gdzie x oraz z to jakieś wektory Nx1

Wtedy:

**1) Ax =u**

**2) Az = b**

Co powoduje do:

***y = z – ((v^T*z)*x)/(1+v^T*x)***

Z tego wzoru korzystamy w rozwiązaniu naszego równania.

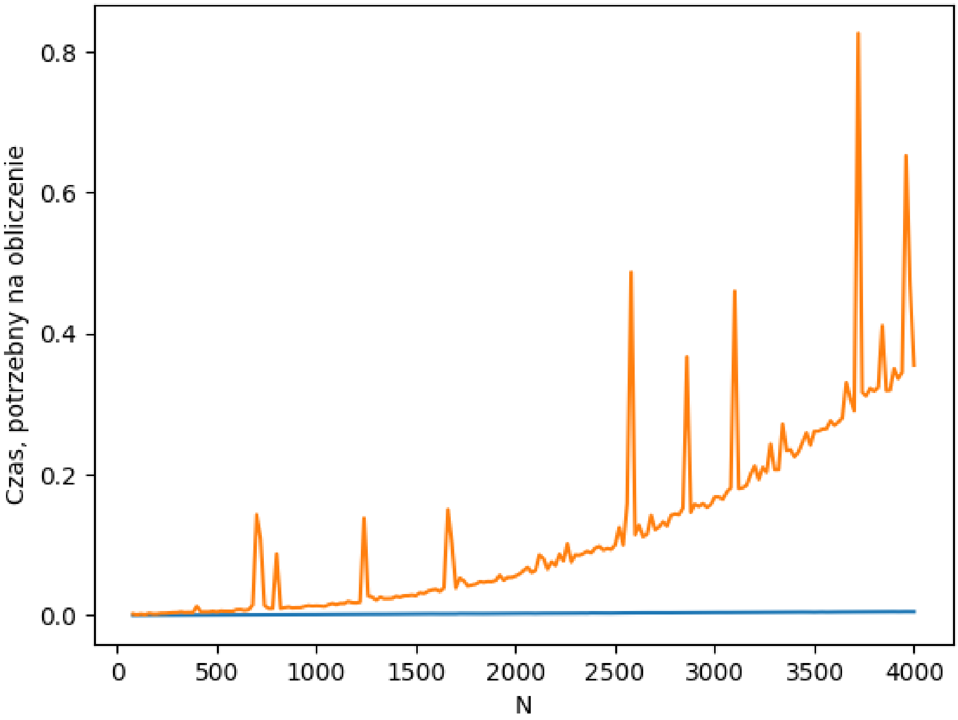
Dla wyliczenia wektorów **x** i **z** korzystamy z części metody rozkładu LU, która się nazywa *backward substitutuion.* Ponieważ nasza macierz A(wcześniej A2) jest macierzą trójkątną dwudiagonalną z wartościami **11** na diagonali i **7** nad głowną diagonalą. Nie ma konieczności korzytsania z implementacji macierzy A i wektora b w programie, skoro mają one jednakowe warości w każdym wierszu, korzystamy więc tylko z tych wartości.

Iloczyn **v^T** i wektorów **z** oraz **x** są po prostu skalarami i dla obliczenia ich wartości trzeba zsumować wartości wektora **z** w pierwszym przypadku i wektora **x** w drugim. Wektor wyniku **y** obliczamy w czasie O(n), odejmując od wektora **z** pomnożony przez skalar wektor **x.**

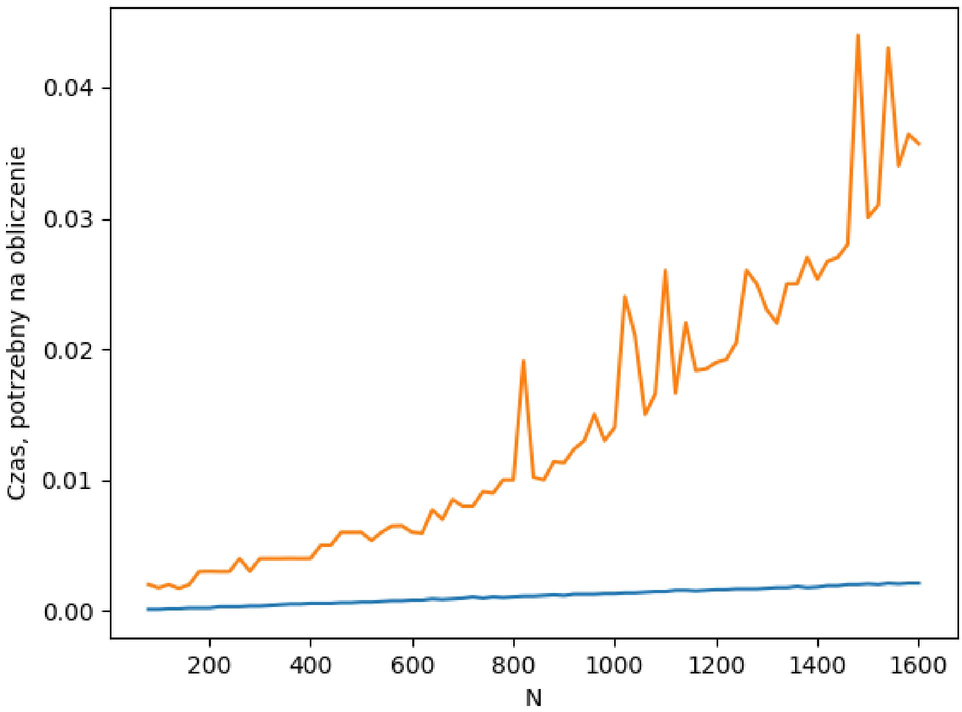
Dany eksperyment został przeprowadzony dla różnych N[80, 4000] oraz dla różnej ilości powtórzeń żeby pokazać graficzne uśredniony wynik, który jest dokładniejszy.

## Wyniki

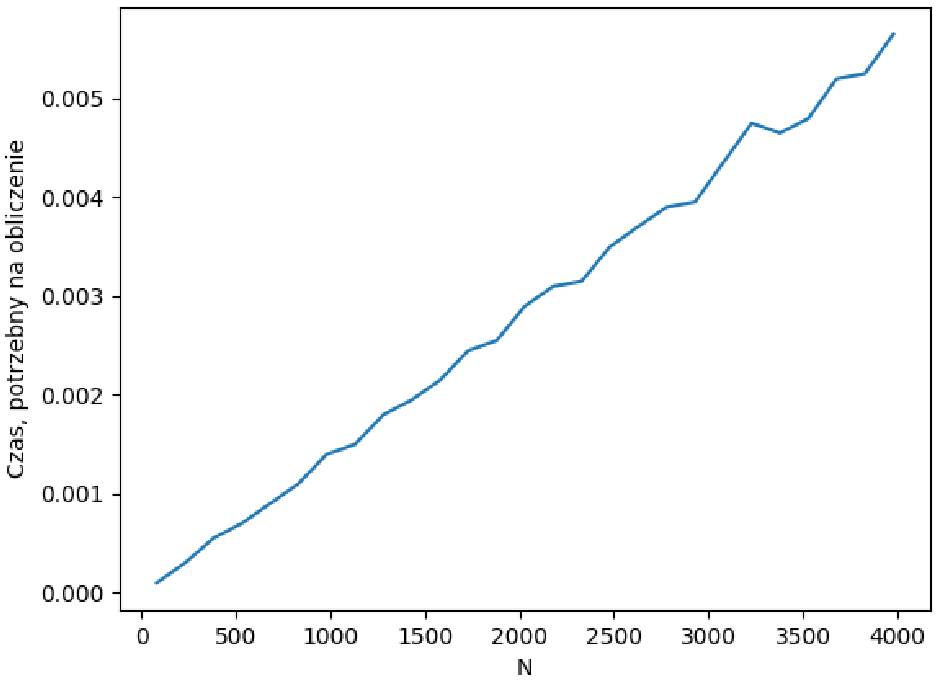
Korzystanie ze wzory Shermana_Morrisona i odpowiedniego algorytmu spowodowało, że obliczamy następujące równanie w czasie lioniowym O(n), co jest optymicacją czasową i pamięciową, co pokazuje następny wykres. Pomarańczowy wykres jest czaasem odbliczenia za pomocą metody bibliotecznej. Niebieski wykres jest czasem rozwiązywania równania przez własną metodę.




Widać z wykresu, że różnica jest tak duża, że niebieski wykres wygląda tak, jakby wcale nie wzrastał, chociaż w rzeczywistości on rośnie, możemy to zobaczyć jeżeli zmiejszymy zakres badania N.

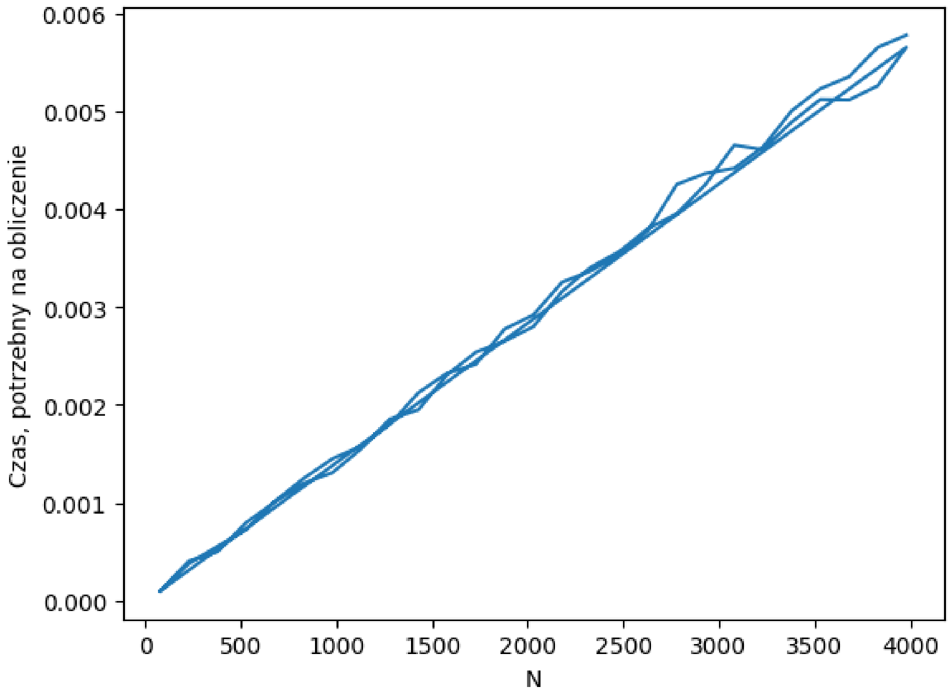



Niestabilność pomarańczowego wykresu jest spowodowana działaniem innych programów na komputerze, dlatego dla osiągnięnia idealnych wyników warto korzystać z odpowiednich narzędzi(komputerów). Na tym wykresie liniowy wzrost niebieskiego wykresu już jest zauważalny, a jednak i tak zostaje bardzo mały. Zobaczymy jak on będzie wyglądać bez pomarańczowego wykresu.

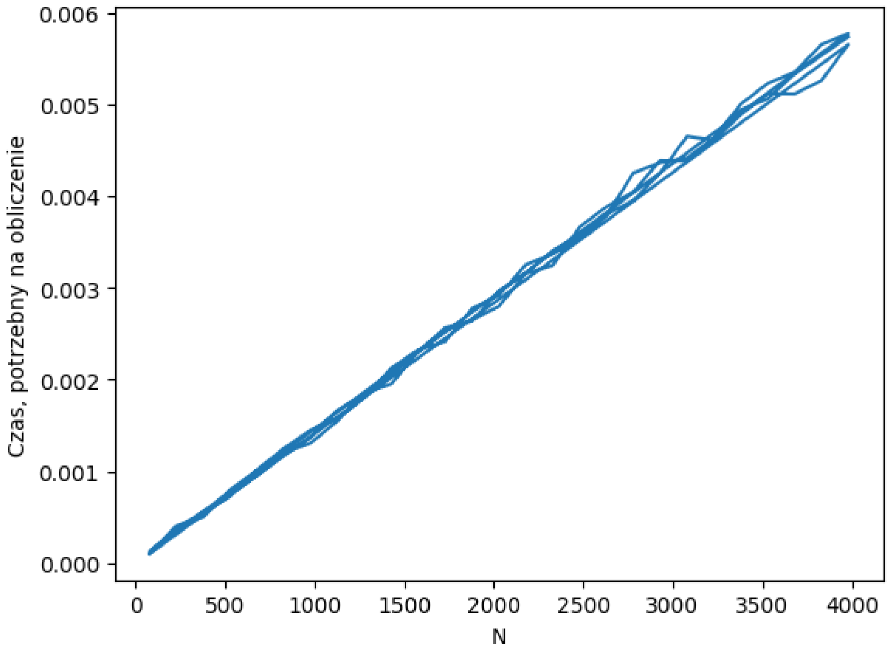



Teraz dla większej dokładności narysujemy sobie więcej wykerów, co pokaże nam, że przy odpowiedniej ilości powtórzeń wykres będzie zbliżać się do prostej linii.

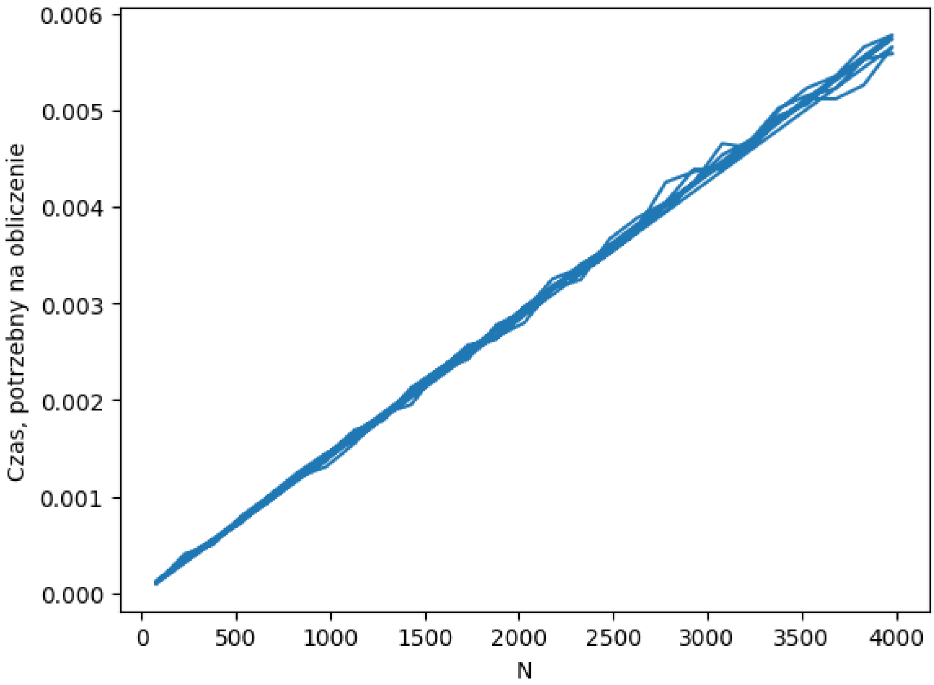
Trzy wykresy



6 wykresów




12 wykresów




Widzimy, że zależność czasu i rozmiaru macierzy jest liniowa, jak i oczekiwaliśmy.

# Wyniki działania programu

Wynik metoda wlasna:

[0.05081874647092  0.05081874647092  0.05081874647092  0.05081874647092
 0.05081874647092  0.050818746470921 0.05081874647092  0.050818746470921
 0.05081874647092  0.050818746470921 0.050818746470919 0.050818746470922
 0.050818746470918 0.050818746470924 0.050818746470915 0.050818746470929
 0.050818746470906 0.050818746470942 0.050818746470886 0.050818746470974
 0.050818746470836 0.050818746471054 0.050818746470711 0.050818746471249
 0.050818746470403 0.050818746471733 0.050818746469644 0.050818746472927
 0.050818746467768 0.050818746475875 0.050818746463135 0.050818746483155
 0.050818746451695 0.050818746501132 0.050818746423445 0.050818746545525
 0.050818746353685 0.050818746655148 0.05081874618142  0.050818746925849
 0.050818745756032 0.050818747594316 0.050818744705584 0.05081874924502
 0.050818742111621 0.050818753321248 0.050818735706119 0.050818763387037
 0.050818719888452 0.05081878824337  0.050818680828499 0.050818849623297
 0.050818584374328 0.050819001194136 0.050818346191581 0.050819375481311
 0.050817758026021 0.050820299741477 0.050816305617189 0.050822582098213
 0.050812719056603 0.05082821812199  0.050803862447811 0.050842135650093
 0.050781992046507 0.050876503423571 0.050727985545327 0.050961370782567
 0.050594622552619 0.05117094119968  0.050265297611442 0.05168845182153
 0.049452066634248 0.052966386214262 0.047443884017097 0.0561221017555
 0.042484902452296 0.063914787071616 0.030239254098399 0.083157948770597]

Wynik metoda biblioteczna:

[0.05081874647092  0.05081874647092  0.05081874647092  0.05081874647092
 0.05081874647092  0.050818746470921 0.05081874647092  0.050818746470921
 0.05081874647092  0.050818746470921 0.050818746470919 0.050818746470922
 0.050818746470918 0.050818746470924 0.050818746470915 0.050818746470929
 0.050818746470906 0.050818746470942 0.050818746470886 0.050818746470974
 0.050818746470836 0.050818746471054 0.050818746470711 0.050818746471249

0.050818746470403 0.050818746471733 0.050818746469644 0.050818746472927
0.050818746467768 0.050818746475875 0.050818746463135 0.050818746483155
0.050818746451695 0.050818746501132 0.050818746423445 0.050818746545525
0.050818746353685 0.050818746655148 0.05081874618142 0.050818746925849
0.050818745756032 0.050818747594316 0.050818744705584 0.05081874924502
0.050818742111621 0.050818753321249 0.050818735706119 0.050818763387037
0.050818719888452 0.05081878824337 0.050818680828499 0.050818849623297
0.050818584374328 0.050819001194136 0.050818346191581 0.050819375481311
0.050817758026021 0.050820299741477 0.050816305617189 0.050822582098213
0.050812719056603 0.05082821812199 0.050803862447811 0.050842135650093
0.050781992046507 0.050876503423571 0.050727985545327 0.050961370782567
0.050594622552619 0.05117094119968 0.050265297611442 0.05168845182153
0.049452066634248 0.052966386214262 0.047443884017097 0.0561221017555
0.042484902452296 0.063914787071616 0.030239254098399 0.083157948770597]

Wynik pomiaru czasu z wlasnej metody:

0.00010063648223876954

Wynik pomiaru czasu z metudy bibliotecznej:

0.02324652671813965

Z wyników działania programy wnioskujemy, że program oblicza wektor **y** w sposob poprawny, ale robi to znacznie szybciej. Obliczenia prowadzone dla N=80, czas jest uśredniony z 50 prób.

## Autor: Maksym Yankovenko.