SPRAWOZDANIE NUMERYCZNE

NUM7:

(Zadanie numeryczne NUM 7) Znajdź i wykreśl wielomiany interpolacyjne stopnia n, $W_n(x)$, na przedziale $x \in \langle -1, 1 \rangle$ dla funkcji $y(x) = \frac{1}{1+50x^2}$ dla

(a) jednorodnych węzłów interpolacji, tj. $x_i = -1 + 2\frac{i}{n+1}$ $(i = 0, \dots, n)$,

(b) $x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi\right)$ $(i = 0, \dots, n)$.

Dla węzłów z pkt. (a) i (b) wybierz kilka wartości n i porównaj zachowanie się tych wielomianów dla dużego n (najlepiej w tym celu wykreślić $W_n(x)$ dla różnych n na jednym wykresie). Zaproponuj również inne funkcje i znajdź dla nich wielomiany interpolacyjne dla węzłów zdefiniowanych w pkt. (a) i (b). Czy nasuwają się jakieś wnioski?

UWAGA: Nie można korzystać z procedur bibliotecznych służących do interpolacji (chyba, że do sprawdzenia wyniku). Algorytm należy zaimplementować samodzielnie.

Sformułuj problem interpolacji za pomocą funkcji sklejanych ("splajnów").

Cel badania:

Celem badania jest zrozumienie działania algorytmu interpolacji Lagrange'a oraz porównanie wielomianów interpolacyjnych dla różnych stopni n, różnych układów węzłów interpolacji i różnych funkcji.

Metoda badawsza:

Opis działania algorytmu

Algorytm interpolacji Lagrange'a opiera się na konstrukcji wielomianu interpolacyjnego w postaci Lagrange'a. Dla danego zestawu węzłów x_i i odpowiadających im wartości funkcji y_i, wielomian interpolacyjny $W_n(x)$ jest dany wzorem:

$$W_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot L_i(x)$$

gdzie $L_i(x)$ to wielomiany Lagrange'a, zdefiniowane jako:

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Opis działania kodu

Kod implementuje algorytm interpolacji Lagrange'a dla trzech różnych funckji i dwu różnych siatek jednorodnych z równoodległymi punktami:

$$y(x) = \frac{1}{1 + 50x^2}$$

$$y(x) = \cos(5x\pi) + sin(3x\pi)$$

$$y(x) = 5x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x$$

$$x_i = -1 + 2\frac{i}{n+1}$$

$$x_i = cos(\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi)$$

X jest podany w przedziłach od -1 do 1, punkty mają odległość 0.01 ale odległość może być w łatwy sposób zmieniona.

Funckja **wzor_a()** oraz **wzor_b()** obliczają węzły interpolacji dla odpowiednich wzorów.

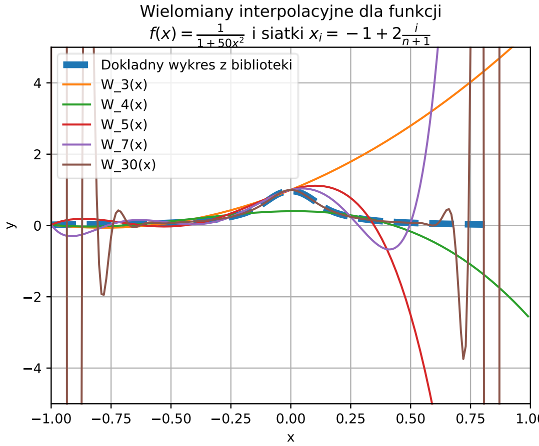
first_function(), second_fucntion() i third_function() wyliczają wartości y dla odpowiednich wzorów funkcji, po **czym w_calculation()** wylicza wartości wielomianu, który w końcu będzie używany dla generowania wykresu.

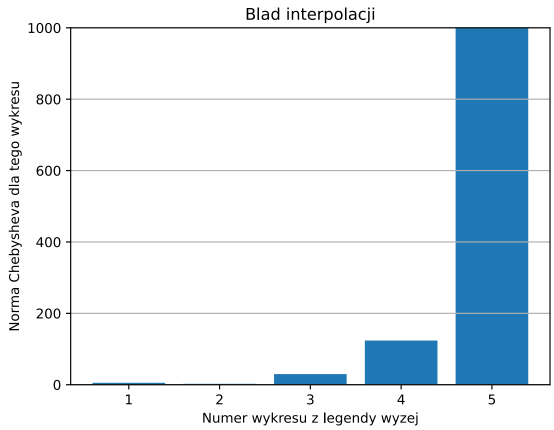
Dodatkowo został stworzony wykres dla funkcji bibliotecznej dla porównania wyniku własnej implementacji z dokładnym. Przez węzły interpolacji przeprowadzamy naturalny splajn kubiczny w ramach realizacji metody bibliotecznej.

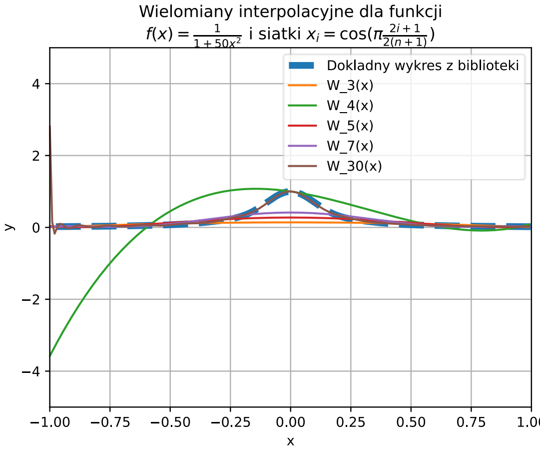
Wyniki

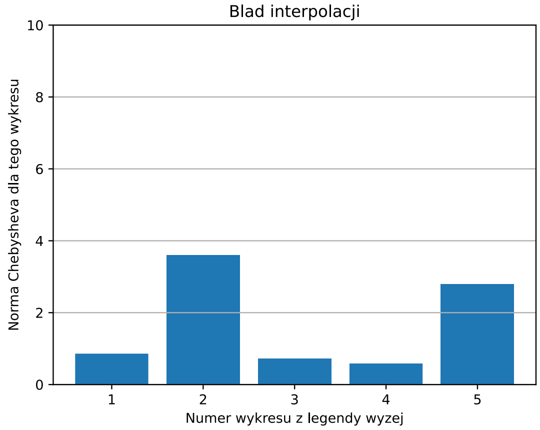
Wyniki prezentowane są na wykresach wielomianów interpolacyjnych dla różnych stopni *n* oraz dwóch różnych układów węzłów interpolacji. W ramach zadania warto było by omówić, że różne wielomiany interpolacyjne mogą dawać różną dokładność wyniku. Dla obliczenia błedu pomiędzy polami interpolacji możemy skorzystać z norm Chebysheva, która oblicza maksymalną wartośc bewzględną różnicy między wartościami rzeczywistymi a interpolowanymi.

Błędy przedstawione są po prawej stronie od odpowiedniego wykresu w postaci kolumn, gdzie pierwsza liczba na osi x odpowiada pierwszemu wykresowi w legendzie po lewej. Błąd metody bibliotecznej nie jest reprezentowana, bo zakładamy, że jest on bliski zera.





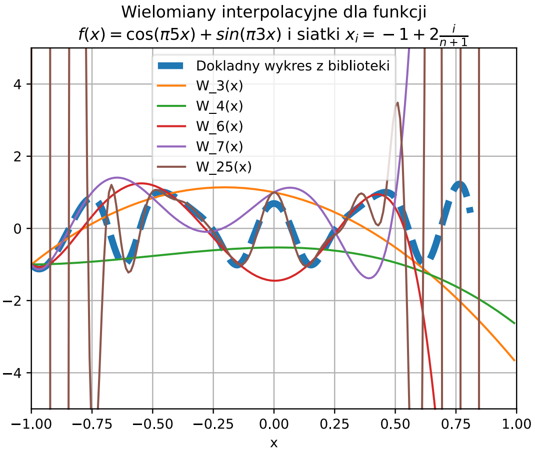


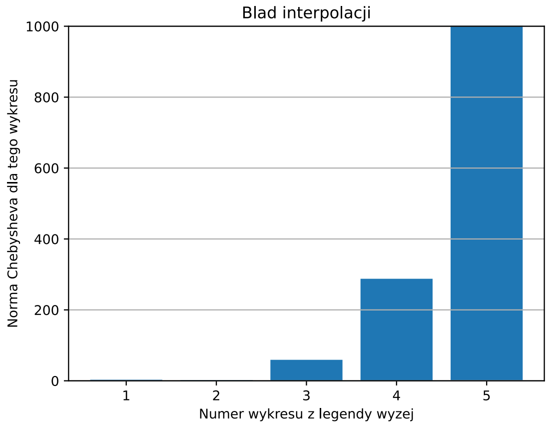


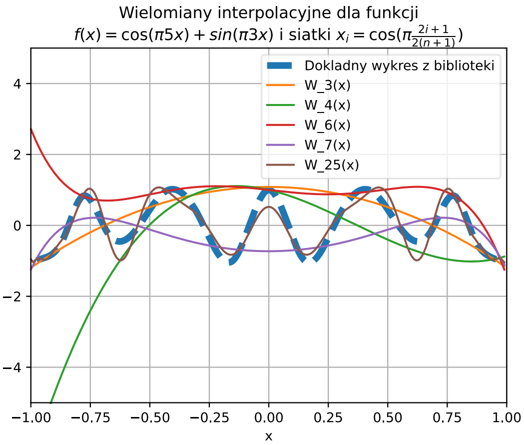
Pierwsza funkcja pokazuje, że pierwsza siatka zachowuje się w sposób bardziej czuły na zmiany w przypadku wielomianów małego stopnia. Prawie wszystkie wykresy zaczynają wzrost w tym samym momencie, co i wykres biblioteczny, a jednak kiedy funkcja zaczyna maleć pojawia się dośc istotny błąd pomiędzy polami interpolacji. Dla równoodległych węzłów interpolacyjnych, wielomian interpolacyjny wysokiego stopnia może wykazywać znaczne oscylacje na końcach przedziału interpolacji. To zjawisko jest szczególnie zauważalne, gdy stosujemy interpolację wielomianową przy użyciu równoodległych węzłów na równomiernie rozmieszczonej siatce.

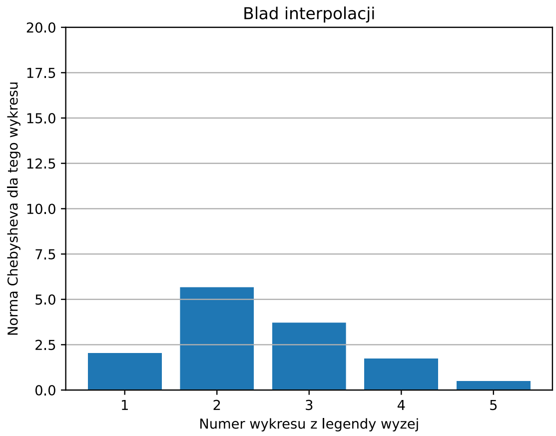
Asymetria Rungego jest wynikiem faktu, że węzły interpolacji skupione są bardziej na końcach przedziału interpolacji, a wielomiany wysokiego stopnia mogą w próbie dopasowania się do tych węzłów prowadzić do znaczących oscylacji w innych częściach przedziału. To zjawisko jest szczególnie problematyczne, gdy staramy się zastosować interpolację wielomianową na dużym przedziale z równoodległymi węzłami.

Aby złagodzić ten problem, można zastosować węzły Czebyszewa, które są bardziej zagęszczone na krańcach przedziału. Na drugim wykresie widać, że węzły Czebyszewa pomagają zminimalizować oscylacje wielomianu interpolacyjnego w przypadku równomiernego rozmieszczenia.

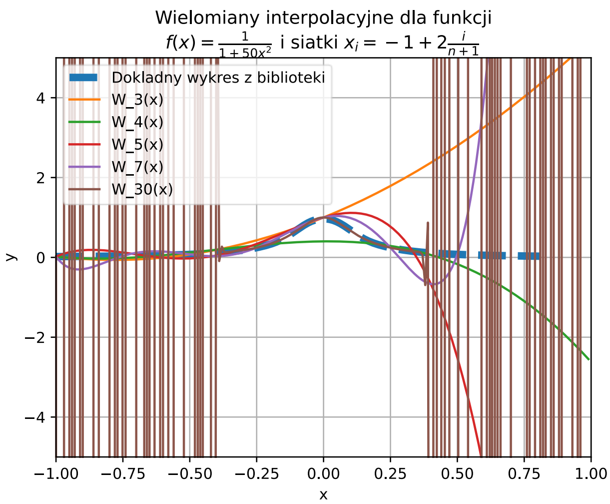




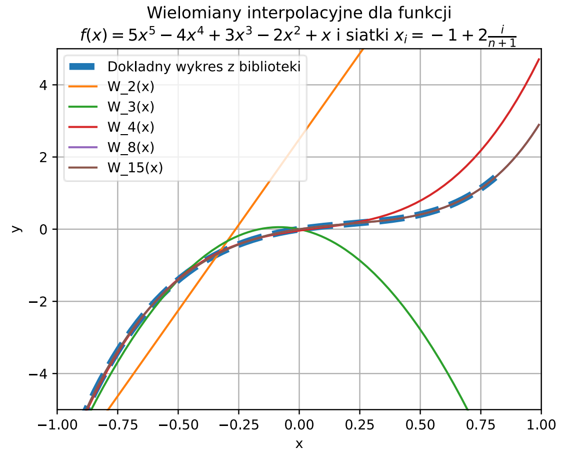


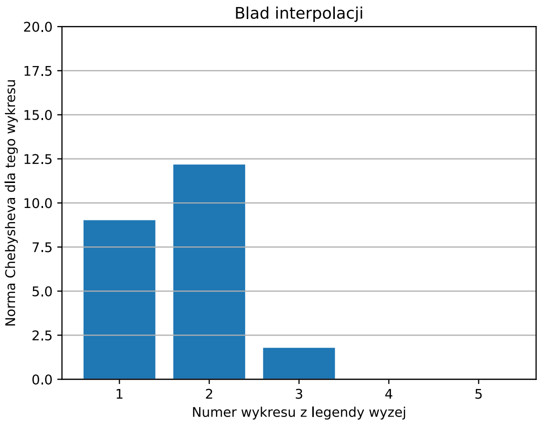


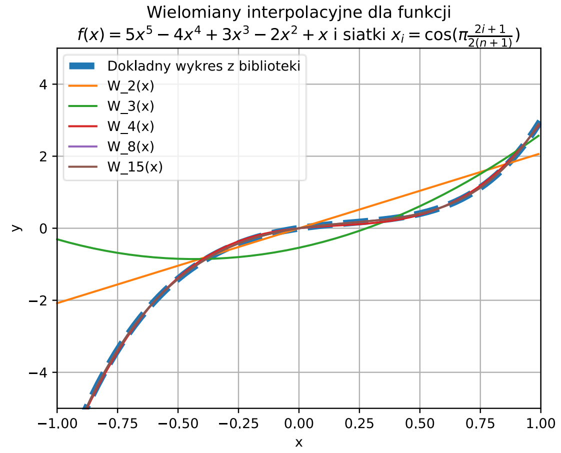
Dla kolejnej funkcji dobrze widać, że węzły Chebysheva dają znaczny przyrost dokładności wyniku poprzez usuwanie ascylacji Rungego, ale dla wielomianów niskiego stopnia pokazują gorsze wyniki.

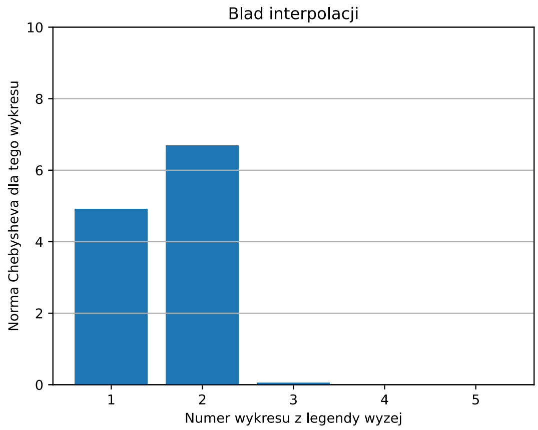


Może się zdarzyć, że dalsze powiększanie liczby węzłów poprawi jakość interpolacji, jednak jednak zbyt duża ilość węzłów doprowadza do tak dużej amplitudy ascylacji Rungego, że z wykresu już nie da się odczytać co za funkcje badamy.









Oczywiście są przykłądy funkcji, dla których węzły Chebysheva dają lepszy wynik dla dowolnej ilości węzłów, jak np. na powyższym wykresie, gdzie funkcja nie wykazuje znacznych zmian na danym przedziale.

Wnioski

Porównując wyniki interpolacji przy użyciu równoodległych węzłów i węzłów Czebyszewa, można zauważyć, że węzły Czebyszewa skutecznie redukują efekt oscylacji Rungego w interpolacji wielomianowej. Efekt ten jest szczególnie widoczny w przypadku interpolacji wielomianem o wysokim stopniu na równoodległej siatce w porównaniu z węzłami Czebyszewa.

Węzły Czebyszewa są rozmieszczone w taki sposób, że skupiają się bardziej na obszarach, gdzie funkcja interpolowana ma bardziej złożony charakter. Dzięki temu można uzyskać bardziej stabilne wyniki interpolacji na całym przedziale, nawet dla wysokich stopni wielomianu. Natomiast równoodległa siatka może prowadzić do efektu oscylacji Rungego, szczególnie na krańcach przedziału.

W praktyce, przy wyborze węzłów interpolacyjnych, zastosowanie węzłów Czebyszewa może być korzystne dla uzyskania dokładniejszych wyników interpolacji, zwłaszcza w przypadku funkcji, które wykazują znaczne zmiany lub oscylacje na danym przedziale.

Autor

Maksym Yankovenko