

Zadanie Numeryczne 4

Sprawodzenie numeryczne

Cel badania

Celem badania było sprawdzenie efektywności rozwiązywania układu równań metodą wyznaczenia macierzy A^{-1} według wzoru Shermana-Morrisona dla macierzy, mającej wartości 12 i 8 na głównej diagonalu i nad diagonalą odpowiednio oraz jedynki na pozostawionych pozycjach.

Zadanie numeryczne NUM4:

- 1) Dla zadanej macierzy A i wektora b obliczyć równanie $Ay = b$, stosując odpowiednią metodę, zaimplementowaną samodzielnie.
- 2) Sprawdzać wynik należy przy użyciu procedur bibliotecznych lub pakietów algebry komputerowej.
- 3) Potraktować N jako zmienną i zmierzyć czas potrzebny do uzyskania rozwiązania w funkcji N .
- 4) Wynik przedstawić na wykresie.

Metoda Badawcza

Dla sprawdzania wyników korzystamy z metody bibliotecznej, dla której w sposób standardowy, używając dwu pętli for tworzymy macierz A i wektor b . Następnie przy użyciu funkcji `np.linalg.solve()` obliczymy wynik i czas, za który metoda biblioteczna rozwiązuje dane równanie.

W metodzie własnej w sposób jawny nie definiujemy macierz A , bo nie jest to nam potrzebne. Macierz naszą możemy rozłożyć na sumę dwu macierzy, niech ta będą A_1 oraz A_2 .

A_1 jest to macierz dwudiagonalna, która ma na każdej pozycji głównej diagonalu wartość 11 oraz 7 nad główną diagonalą, pozostałe miejsca wypełnione są zerami. A_2 jest wypełniona **jedynkami** na każdej pozycji.

Macierz A_2 można zapisać jako iloczyn dwu wektorów, niech to będzie u oraz v^T .

Macierz $A = A_1 + u \cdot v^T$, $u = v$.

Podstawiając do naszego równania otrzymujemy $(A_1 + u \cdot v^T) \cdot y = b$

Chcemy więc wyrazić z tego y :

$$y = ((A1 + u \cdot v^T, u = v)^{-1}) \cdot b$$

To z kolei możemy zapisać według wzoru Shermana-Morrisona:

$$A^{-1} \cdot b = (A^{-1} \cdot u \cdot v^T \cdot A^{-1} \cdot b) / (1 + v^T \cdot A^{-1} \cdot u)$$

Niech:

$$1) A^{-1} \cdot u = x$$

$$2) A^{-1} \cdot b = z$$

Gdzie x oraz z to jakieś wektory $N \times 1$

Wtedy:

$$1) Ax = u$$

$$2) Az = b$$

Co powoduje do:

$$y = z - ((v^T \cdot z) \cdot x) / (1 + v^T \cdot x)$$

Z tego wzoru korzystamy w rozwiązaniu naszego równania.

Dla wyliczenia wektorów x i z korzystamy z części metody rozkładu LU, która się nazywa *backward substitution*. Ponieważ nasza macierz A (wcześniej $A2$) jest macierzą trójkątną dwudiagonalną z wartościami **11** na diagonalu i **7** nad główną diagonalą. Nie ma konieczności korzystania z implementacji macierzy A i wektora b w programie, skoro mają one jednakowe wartości w każdym wierszu, korzystamy więc tylko z tych wartości.

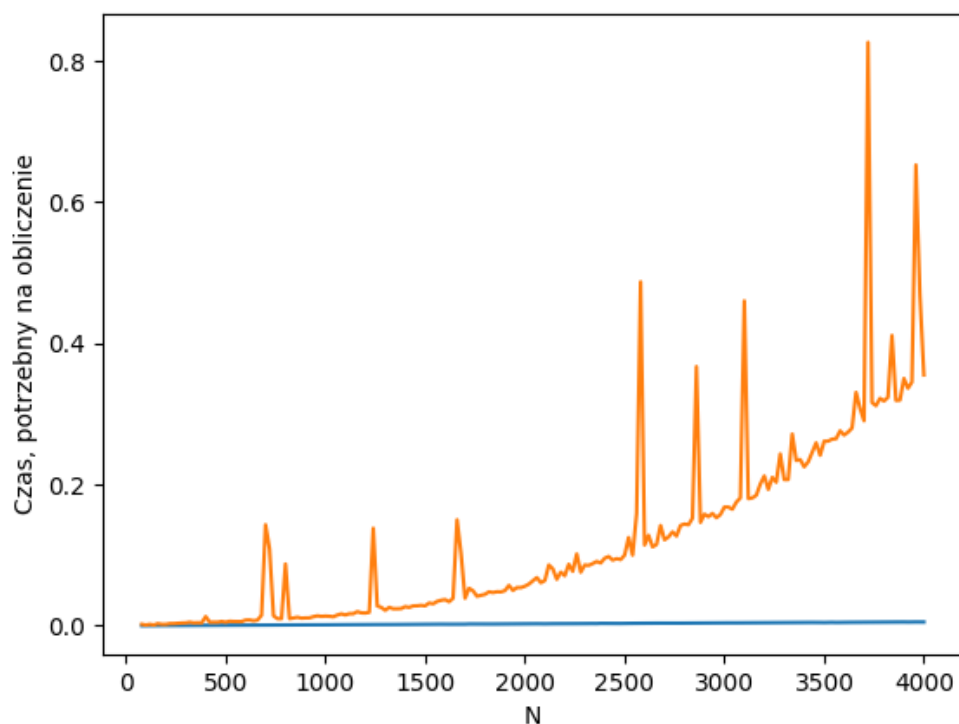
Iloczyn v^T i wektorów z oraz x są po prostu skalarami i dla obliczenia ich wartości trzeba zsumować wartości wektora z w pierwszym przypadku i wektora x w drugim. Wektor wyniku y obliczamy w czasie $O(n)$, odejmując od wektora z pomnożony przez skalar wektor x .

Dany eksperyment został przeprowadzony dla różnych $N[80, 4000]$ oraz dla różnej ilości powtórzeń żeby pokazać graficzne uśredniony wynik, który jest dokładniejszy.

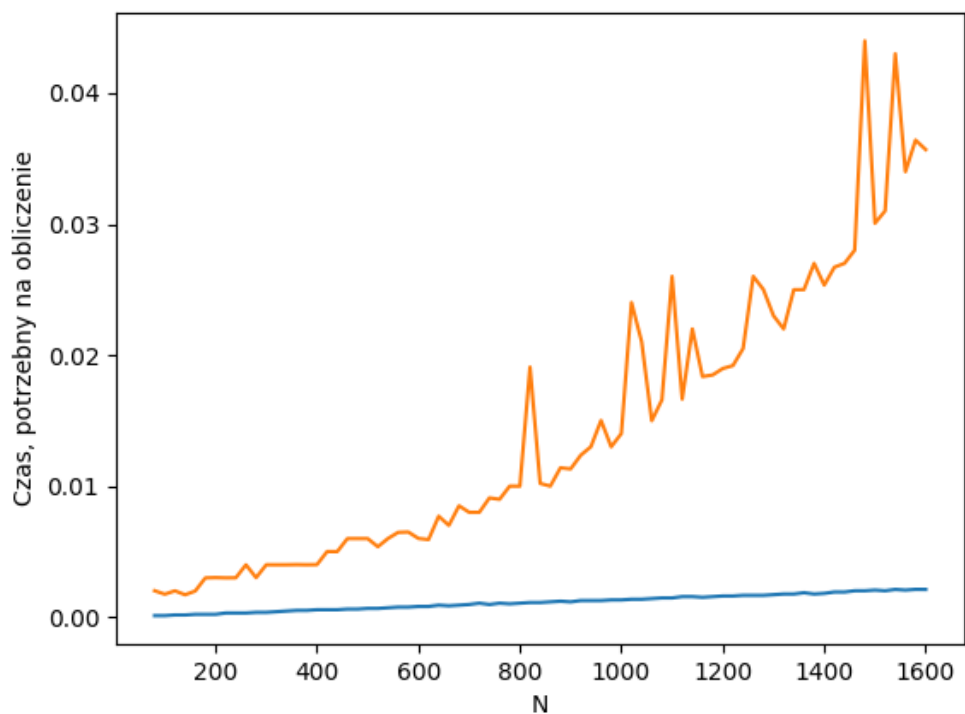
Wyniki

Korzystanie ze wzory Shermana_Morrisona i odpowiedniego algorytmu spowodowało, że obliczamy następujące równanie w czasie liniowym $O(n)$, co jest optymiczną czasową i pamięciową, co pokazuje następny wykres. Pomarańczowy wykres jest czasem obliczenia za pomocą metody bibliotecznej. Niebieski wykres jest czasem

rozwiązywania równania przez własną metodę.

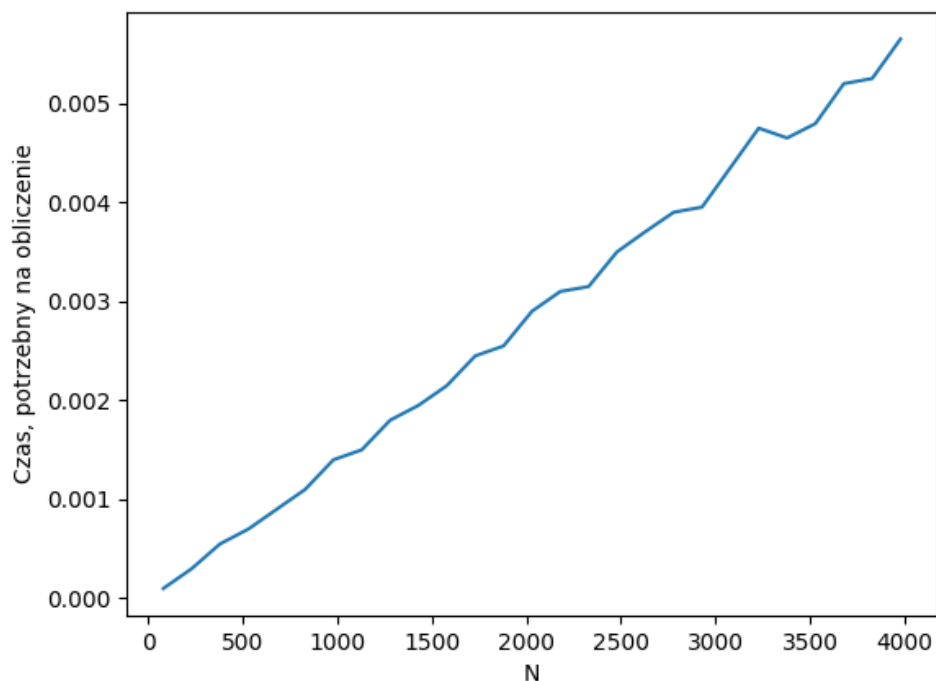


Widać z wykresu, że różnica jest tak duża, że niebieski wykres wygląda tak, jakby wcale nie wzrastał, chociaż w rzeczywistości on rośnie, możemy to zobaczyć jeżeli zmniejszymy zakres badania N .



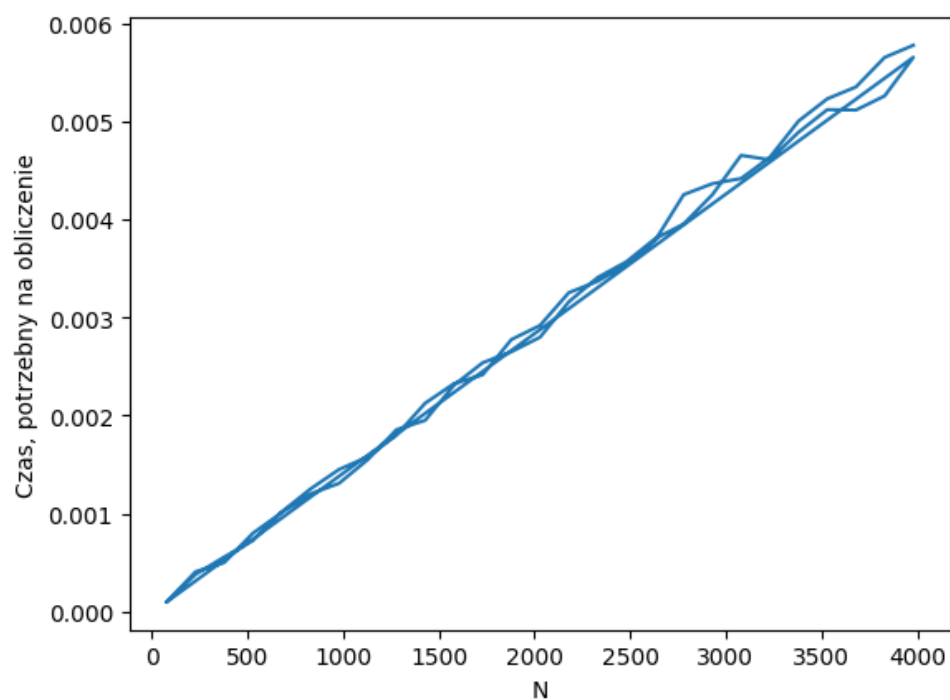
Niestabilność pomarańczowego wykresu jest spowodowana działaniem innych programów na komputerze, dlatego dla osiągnięcia idealnych wyników warto korzystać

z odpowiednich narzędzi(komputerów). Na tym wykresie liniowy wzrost niebieskiego wykresu już jest zauważalny, a jednak i tak zostaje bardzo mały. Zobaczmy jak on będzie wyglądać bez pomarańczowego wykresu.

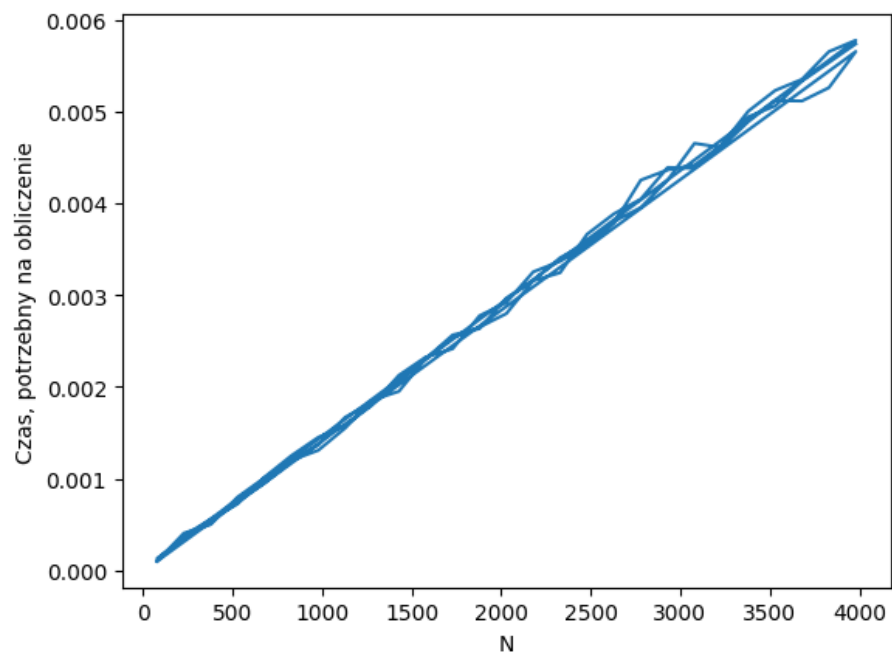


Teraz dla większej dokładności narysujemy sobie więcej wykresów, co pokaże nam, że przy odpowiedniej ilości powtórzeń wykres będzie zbliżać się do prostej linii.

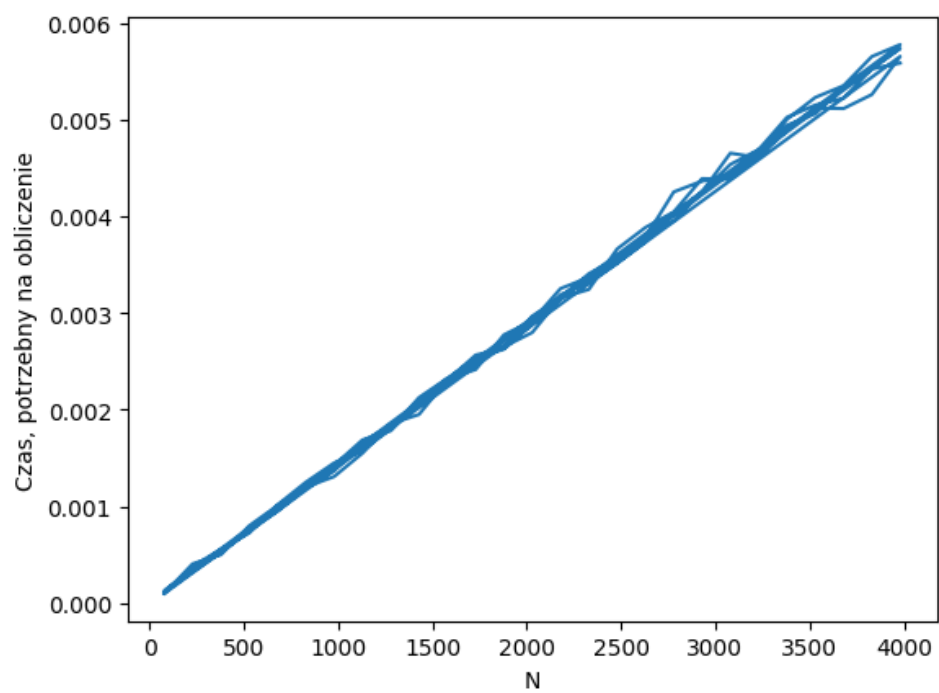
Trzy wykresy



6 wykresów



12 wykresów



Widzimy, że zależność czasu i rozmiaru macierzy jest liniowa, jak i oczekiwaliśmy.

Wyniki działania programu

Wynik metoda własna:

[0.05081874647092 0.05081874647092 0.05081874647092 0.05081874647092
0.05081874647092 0.050818746470921 0.05081874647092 0.050818746470921
0.05081874647092 0.050818746470921 0.050818746470919 0.050818746470922
0.050818746470918 0.050818746470924 0.050818746470915 0.050818746470929
0.050818746470906 0.050818746470942 0.050818746470886 0.050818746470974
0.050818746470836 0.050818746471054 0.050818746470711 0.050818746471249
0.050818746470403 0.050818746471733 0.050818746469644 0.050818746472927
0.050818746467768 0.050818746475875 0.050818746463135 0.050818746483155
0.050818746451695 0.050818746501132 0.050818746423445 0.050818746545525
0.050818746353685 0.050818746655148 0.05081874618142 0.050818746925849
0.050818745756032 0.050818747594316 0.050818744705584 0.05081874924502
0.050818742111621 0.050818753321248 0.050818735706119 0.050818763387037
0.050818719888452 0.05081878824337 0.050818680828499 0.050818849623297
0.050818584374328 0.050819001194136 0.050818346191581 0.050819375481311
0.050817758026021 0.050820299741477 0.050816305617189 0.050822582098213
0.050812719056603 0.05082821812199 0.050803862447811 0.050842135650093
0.050781992046507 0.050876503423571 0.050727985545327 0.050961370782567
0.050594622552619 0.05117094119968 0.050265297611442 0.05168845182153
0.049452066634248 0.052966386214262 0.047443884017097 0.0561221017555
0.042484902452296 0.063914787071616 0.030239254098399 0.083157948770597]

Wynik metoda biblioteczna:

[0.05081874647092 0.05081874647092 0.05081874647092 0.05081874647092
0.05081874647092 0.050818746470921 0.05081874647092 0.050818746470921
0.05081874647092 0.050818746470921 0.050818746470919 0.050818746470922
0.050818746470918 0.050818746470924 0.050818746470915 0.050818746470929
0.050818746470906 0.050818746470942 0.050818746470886 0.050818746470974
0.050818746470836 0.050818746471054 0.050818746470711 0.050818746471249

0.050818746470403 0.050818746471733 0.050818746469644 0.050818746472927
0.050818746467768 0.050818746475875 0.050818746463135 0.050818746483155
0.050818746451695 0.050818746501132 0.050818746423445 0.050818746545525
0.050818746353685 0.050818746655148 0.05081874618142 0.050818746925849
0.050818745756032 0.050818747594316 0.050818744705584 0.05081874924502
0.050818742111621 0.050818753321249 0.050818735706119 0.050818763387037
0.050818719888452 0.05081878824337 0.050818680828499 0.050818849623297
0.050818584374328 0.050819001194136 0.050818346191581 0.050819375481311
0.050817758026021 0.050820299741477 0.050816305617189 0.050822582098213
0.050812719056603 0.05082821812199 0.050803862447811 0.050842135650093
0.050781992046507 0.050876503423571 0.050727985545327 0.050961370782567
0.050594622552619 0.05117094119968 0.050265297611442 0.05168845182153
0.049452066634248 0.052966386214262 0.047443884017097 0.0561221017555
0.042484902452296 0.063914787071616 0.030239254098399 0.083157948770597]

Wynik pomiaru czasu z własnej metody:

0.00010063648223876954

Wynik pomiaru czasu z metody bibliotecznej:

0.02324652671813965

Z wyników działania programu wnioskujemy, że program oblicza wektor y w sposób poprawny, ale robi to znacznie szybciej. Obliczenia prowadzone dla $N=80$, czas jest uśredniony z 50 prób.

Autor: Maksym Yankovenko.