

**Escuela Superior de Cómputo del Instituto Politécnico Nacional**  
**1er Examen de Matemáticas Avanzadas para la Ingeniería**  
**(Análisis Complejo)**

Profesor: Cristhian Alejandro Ávila-Sánchez

**Fecha: 22 de Diciembre del 2020**



**Alumno:** \_\_\_\_\_

**Grupo:** \_\_\_\_\_ **No. de Boleta:** \_\_\_\_\_

**Viento Escarpado: Expedición hacia lo Desconocido.** Bienvenido a la Fuerza Aérea, piloto. Ha sido un largo año, comenzando con una situación intempestiva que ha irrumpido en nuestras vidas, seguida por meses tumultuosos. Si bien se ha tenido una respuesta inmediata y actuado para mantener una continuidad, el futuro sigue en juego y seguiremos luchando por el bienestar de todos. Su primera misión, de esta nueva campaña, consistirá en incursionar en un nuevo territorio con un ambiente inusual y exótico y realizar un vuelo de exploración, con la finalidad de recabar información novedosa que sea útil para hacer la diferencia ante esta contienda. La maquinaria de su avión incluye celdas de energía, turbinas y motores nuevos, adecuados para atravesar el espacio-tiempo aéreo complejo de esta región y con ello poder ejecutar las maniobras y acrobacias de vuelo de muy alta complejidad. Su conocimiento, experiencia y pericia serán necesarios para realizar un excelente vuelo, ver la respuesta de la aeronave y después incorporarse a un escuadrón, junto a otros pilotos, para una futura misión. Las circunstancias apremian, conserve la calma, mantenga la mente fría y enfocada y actúe con asertividad. Contará, en todo momento, con comunicación con el centro de comando y con soporte aéreo en caso de ser necesario. Las respuestas que proveerá serán sumamente valiosas para generar nuevas ideas, ayudar a otros y seguir peleando por nuestro futuro. ¡Vuelen rápido y ágiles como el viento, pilotos! Cuídense unos a otros. Todos confiamos en ustedes.

**Instrucciones:** Por favor lea cuidadosamente cada pregunta y resuelva 4 de los siguientes 6 problemas. Cada pregunta tiene un valor de 2.5 puntos (Total de 10 puntos). ¡Mucho éxito, comencemos!

0. Frontera de lo real a lo imaginario. Cruzando el evento horizonte. Portal entre dos mundos, ubicación: sin revelar, hora: indeterminada. Se encuentra ingresando a la zona de interés. Active los sistemas y sensores de su aeronave para realizar mapeos cartesianos y polares y así adaptarse ante las nuevas condiciones complejas. Demuestre, utilizando series de Taylor, que un número complejo  $z = x + iy$ , con componente real  $x$  y componente imaginaria  $y$  es equivalente al número  $z = re^{i\theta}$ , con magnitud  $r$  y argumento  $\theta$ . Utilizando este resultado pruebe la *identidad de Euler*  $e^{i\pi} + 1 = 0$  y la *Fórmula de De Moivre*  $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = (\cos n\theta + i \sin n\theta)$ .
1. Inmersión exitosa. Aumentando la velocidad del vuelo. Los sensores han renderizado la zona, generando el polinomio  $P(z) = z^4 - 3z^2 + 1$ . Evalúe los polinomios  $P(z)$  y  $P(\bar{z})$  en los puntos  $z = \sqrt{3}e^{i\pi/6}$  y  $z = 1 + i$ , indique su localización y diríjase a los puntos resultantes del mapeo. Complete su análisis de la región, encontrando las raíces del polinomio (i.e.  $P(z) = 0$ ), las raíces unitarias de  $z^4 = 1$  y las raíces de  $z^2 = 1 + i\sqrt{5}$ . Ubique sus puntos en el plano de Argand.

2. Distorsión de la realidad. Alterando el espacio tiempo. Las estrellas han cambiado su ubicación y su brillo en el firmamento. El entorno esta comenzado a cambiar. Considere un ángulo complejo  $w = \theta + i\varphi$  y demuestre las siguientes identidades:

$$\cosh(\theta + i\varphi) = \cosh \theta \cos \varphi + i \sinh \theta \sin \varphi$$

$$\sinh(\theta + i\varphi) = \sinh \theta \cos \varphi + i \cosh \theta \sin \varphi$$

3. Safari de tormenta. Cruce a todo galope. Encienda las turbinas y acelere su aeronave para avanzar al triple de revoluciones. Demuestre que  $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$  y  $\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$ . A partir de este resultado, acelere al quíntuple de revoluciones y calcule  $z^5$ , para  $z = \cos \theta + i \sin \theta$ .
4. Superficies vertiginosas. Adentrándose en la dimensión desconocida. Los sensores indican la presencia de fuertes corrientes de viento y vórtices, modelando el fenómeno por la multifunción  $f(z) = \sqrt[1/3]{z^6 - 1}$ . Determine los puntos de ramificación, para localizar los vórtices y dibuje la superficie de Riemann correspondiente para poder sortearlos y realizar las maniobras y acrobacias necesarias, una vez que se encuentre dentro de la corriente. ¿Cuántas revoluciones tiene que dar para regresar a un mismo punto?
5. Un nuevo hogar. Familiarizándose con lo desconocido. La tormenta ha arreciado, se está perdiendo la comunicación, y el portal de regreso se está desvaneciendo, ahora que comienza a comprender la dinámica de este nuevo sitio. Tiempo de volver. Suba la potencia de su aeronave al máximo y vuele a toda velocidad para cruzar el espacio-tiempo complejo. Su aeronave se encuentra en el punto  $z = \rho e^{i\phi}$  y el portal en el punto  $z^c$ , con  $c = x - iy$ . Demuestre que  $z^c = e^{i2\pi kx} e^{2\pi ky} [z^c]$ , con rama principal:

$$[z^c] = \rho^x e^{y\phi} e^{i(x\phi - y \ln \rho)}$$

Tip: Recuerde que el logaritmo es una multifunción  $\log w = \ln|w| + i \arg(w) + i2\pi k$ .

La función  $z^c$  es una multifunción. ¿Bajo qué condiciones podrá salir de la dimensión desconocida y regresar a casa?

6. ¡Ha sido un excelente vuelo, pilotos! Se vislumbra un nuevo amanecer. Han provisto un nuevo destello y con ello una nueva esperanza. Regresen al hangar y recuperen fuerzas. Todos en la Fuerza Aérea estamos orgullosos de ustedes. Tomen un descanso, disfruten las festividades con su familia y seres queridos. Recarguen baterías para su próxima misión. ¡Qué haya cielos claros y despejados en su horizonte!