DUALIDAD EN PROGRAMACION LINEAL

<u>*Relaciones primal-dual*</u>

Asociado a cada problema lineal existe otro problema de programación lineal denominado ***problema dual (PD)*** , que posee importantes propiedades y relaciones notables con respecto al problema lineal original, problema que para diferencia del dual se denomina entonces como ***problema primal (PP)***.

Las relaciones las podemos enumerar como siguen:

a) El problema *dual* tiene tantas *variables* como *restricciones* tiene el programa *primal*.

b) El problema *dual* tiene tantas *restricciones* como *variables* tiene el programa *primal*

c) Los coeficientes de la función objetivo del problema *dual* son los términos independientes de las restricciones o RHS del programa *primal*.

d) Los términos independientes de las restricciones o RHS del *dual* son los coeficientes de la función objetivo del problema *primal*.

e) La matriz de coeficientes técnicos del problema *dual* es la traspuesta de la matriz técnica del problema *primal*.

f) El sentido de las desigualdades de las restricciones del problema *dual* y el signo de las variables del mismo problema, dependen de la forma de que tenga el signo de las variables del problema *primal* y del sentido de las restricciones del mismo problema. (Ver tabla de TUCKER)

g) Si el programa *primal* es un problema de *maximización*, el programa *dual* es un problema de *minimización*.

h) El problema *dual* de un problema *dual* es el programa *primal* original.

Tabla de TUCKER

MAXIMIZACION			MINIMIZACION.
RESTRICCIONES	$\leq$	$\geq$	VARIABLES
	$\geq$	$\leq$	
	$=$	$><$	
VARIABLES	$\geq$	$\geq$	RESTRICCIONES
	$\leq$	$\leq$	
	$><$	$=$	

Los problemas **duales simétricos** son los que se obtienen de un problema primal en forma canónica y 'normalizada', es decir, cuando llevan asociadas desigualdades de la forma mayor o igual en los problemas de minimización, y desigualdades menor o igual para los problemas de maximización. Es decir, si el problema original es de la siguiente forma:

Máx $Z(x) = c^t x$

s.a:

$A x \leq b$

$x \geq 0$

El problema dual (**dual simétrico**) es :

Mín $G(\lambda) = \lambda b$

s.a:

$\lambda A \geq c$

$\lambda \geq 0$

Los restantes tipos de combinaciones de problemas, se conocen con el nombre de **duales asimétricos**. Como por ejemplo:

Máx $Z(x) = c^t x$

s.a:

$A x = b$

$x \geq 0$

El problema dual (**dual asimétrico**) es :

Mín $G(\lambda) = \lambda b$

s.a:

$\lambda A \geq c$

$\lambda >< 0$, es decir, variables libres.

PREGUNTAS:

¿ Porqué se plantea el programa dual?.

¿ Que significado tiene su solución?.

¿ La solución del dual se puede obtener desde el primal?.

RESPUESTAS:

a) Por una parte permite resolver problemas lineales donde el numero de restricciones es mayor que el numero de variables. Gracias a los teoremas que expondremos a continuación la solución de unos de los problemas (primal o dual) nos proporciona de forma automática la solución del otro programa.

b) La dualidad permite realizar importantes interpretaciones económicas de los problemas de programación lineal.

c) La dualidad permite generar métodos como el *método dual del simplex* de gran importancia en el análisis de post-optimización y en la programación lineal parametrica.

Otra de las ventajas de la dualidad, es la posibilidad de resolver gráficamente algunos problemas.

Consideremos el siguiente problema lineal:

$$\text{Min } Z(x) = 2\,x_1 + 3\,x_2 + 5\,x_3 + 2\,x_4 + 3\,x_5$$

s.a:

$$x_1 + x_2 + 2\,x_3 + x_4 + 3\,x_5 \geq 4$$

$$2\,x_1 - x_2 + 3\,x_3 + x_4 + x_5 \geq 3$$

$$x_1 \geq 0\,,\ x_2 \geq 0\,,\ x_3 \geq 0\,,\ x_4 \geq 0\,,\ x_5 \geq 0$$

Dado que se trata de un programa lineal en forma canónica, ello nos proporciona un dual en forma simétrica como el siguiente:

$$\text{Max } G(\lambda) = 4\,\lambda_1 + 3\,\lambda_2$$

s.a:

$$\lambda_1 + 2\,\lambda_2 \leq 2$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 \leq 3$$

$$2\,\lambda_1 + 3\,\lambda_2 \leq 5$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 \leq 2$$

$$3\,\lambda_1 + \lambda_2 \leq 3$$

$$\lambda_1 \geq 0\,,\ \lambda_2 \geq 0$$

Este problema solo tiene dos variables y cinco restricciones por tanto se puede resolver gráficamente:

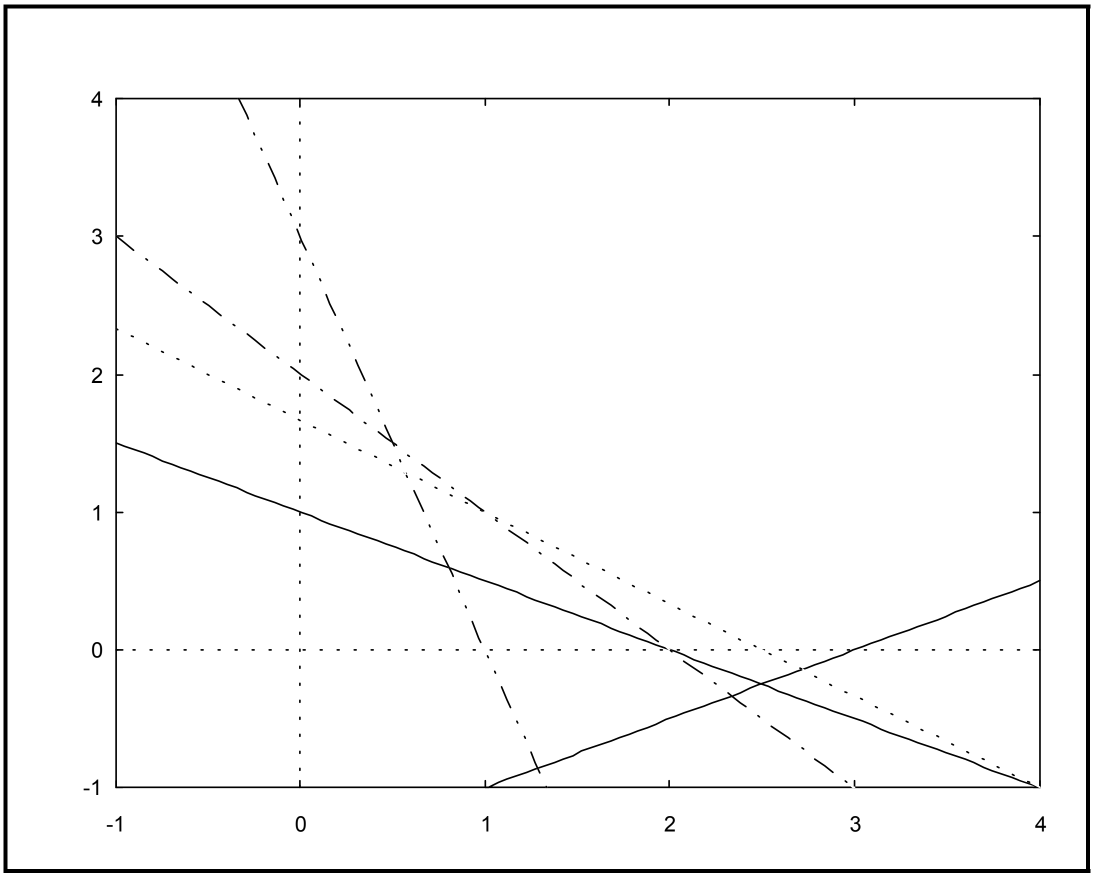

Gráfico 2

vértice solución es el punto (4/5,3/5) con un valor de la función objetivo de 5.

$$x_1 + 3\,x_5 = 4$$
$$2\,x_1 + x_5 = 3$$

La solución de este sistema es : $x_1 = 1$ y $x_5 = 1$, lo cual nos proporciona un valor de la función objetivo de $Z(x) = 5$, idéntico a la solución del dual

6.1. Condiciones de Kuhn-Tucker en los problemas lineales (primales y duales).

Consideremos el siguiente programa lineal, que denominaremos **PRIMAL:**

$$
\begin{aligned}
&\text{Máx } Z(x) = c^t x \\
&\text{s.a:} \\
&\qquad A\,x \leq b \\
&\qquad x \geq 0
\end{aligned}
$$

La función lagrangiana de esta programa será:

$$L(x,\lambda) = c\,x + \lambda\,(b - Ax)$$

donde $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ representa el vector de los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones.

Las condiciones de optimalidad de este problema (Condiciones de Kuhn-Tucker) respecto de las variables, son:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = c - \lambda A \leq 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} x = (c - \lambda A) x = 0$$

$$x \geq 0$$

Respecto a los multiplicadores, son:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = b - Ax \geq 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} \lambda = \lambda (b - Ax) = 0$$

$$\lambda \geq 0$$

Asociado a este programa primal tenemos otro problema lineal denominado **DUAL** (posteriormente explicaremos las relaciones entre ambos):

Mín $G(\lambda) = \lambda b$

s.a:

$$\lambda A \geq c$$

$$\lambda \geq 0$$

La función lagrangiana de este programa será:

$L(\lambda,x) = \lambda b + (c - \lambda A) x$

en donde el vector $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ representa los multiplicadores asociados a las restricciones del dual.

Obteniendo las condiciones de Kuhn-Tucker respecto de las variables son:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = b - Ax \geq 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} \lambda = \lambda (b - Ax) = 0$$

$$\lambda \geq 0$$

Respecto a los multiplicadores, son:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = c - \lambda A \leq 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} x = (c - \lambda A) x = 0$$

$$x \geq 0$$

Como puede observarse, ambas condiciones de optimalidad son las mismas para los dos problemas. A la misma consideración se puede llegar sin más que comparar la función de Lagrange de los dos problemas y ver que son iguales:

$$L(x,\lambda) = c\,x + \lambda\,(b - Ax)$$

$$L(\lambda,x) = \lambda\, b +(c - \lambda A)x = \lambda\, b + cx-\lambda Ax = cx + \lambda(b - Ax)$$

Por lo tanto, asociado a todo problema de programación lineal existe otro problema de programación lineal denominado ***programa dual*** que tiene importantes relaciones con el problema original denominado ***programa primal*** . Como acabamos de ver, es evidente, que el programa dual de un programa dual proporciona el programa primal original.

CONDICIONES DE KUNH-TUCKER EN DUALES SIMÉTRICOS

PRIMAL Max $F(x) = c^t x$ s.a: $A x \leq b$ $x \geq 0$ $L(x,\lambda) = c x + \lambda (b - Ax)$	**DUAL** Mín $G(\lambda) = \lambda b$ s.a: $\lambda A \geq c$ $\lambda \geq 0$ $L(\lambda,x) = \lambda b + (c - \lambda A) x$
VARIABLES $\frac{\partial L}{\partial x} = c - \lambda A \leq 0$ $\frac{\partial L}{\partial x} \bullet x = (c - \lambda A) \bullet x = 0$ $x \geq 0$	*VARIABLES* $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = b - Ax \geq 0$ $\lambda \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \lambda(b - Ax) \geq 0$ $\lambda \geq 0$
MULTIPLICADORES $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = b - Ax \geq 0$ $\lambda \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \lambda(b - Ax) \geq 0$ $\lambda \geq 0$	*MULTIPLICADORES* $\frac{\partial L}{\partial x} = c - \lambda A \leq 0$ $\frac{\partial L}{\partial x} \bullet x = (c - \lambda A) \bullet x = 0$ $x \geq 0$

6.3 Teoremas de dualidad.

Teorema de existencia.

La condición necesaria y suficiente para que un problema de programación lineal tenga solución es que, tanto el conjunto de oportunidades del primal (S) como en conjunto de oportunidades del dual (S') no sean vacíos, es decir, que ambos problemas sean factibles.

$$\exists\ (x^{*} , \lambda^{*}) \longleftrightarrow S \neq \varnothing \wedge S' \neq \varnothing$$

Corolario del teorema de existencia.

Una vez analizadas las condiciones que han de cumplirse para que exista solución optima, vamos a ver los diferentes casos posibles:

a) $S \neq \varnothing \wedge S' \neq \varnothing$ Ambos problemas tienen solución optima finita.

b) $S = \varnothing \wedge S' \neq \varnothing$ El programa primal es infactible, y el programa dual es no acotado.

c) $S \neq \varnothing \wedge S' = \varnothing$ El programa dual es infactible, y el programa primal es no acotado.

d) $S = \varnothing \wedge S' = \varnothing$ Ambos problemas son infactibles.

Teorema de la Dualidad.

La condición necesaria y suficiente para que exista solución óptima del primal (x^*), es que exista una solución óptima para el dual (λ^*) y que valor de la función objetivo de ambos programas sea igual, es decir $Z(x^*) = G(\lambda^*)$.

$$\exists\, x^* \longleftrightarrow \exists\, \lambda^* \;/\; Z(x^*) = G(\lambda^*)$$

Teorema del Holgura complementaria.

La condición necesaria y suficiente para que (x^*, λ^*) sean soluciones óptimas del programa primal y dual, es que satisfagan las condiciones de holgura complementaria:

$$(c - \lambda^* A)\, x^* = 0$$

$$\lambda^* (b - A\, x^*) = 0$$

6.4. Relaciones entre las soluciones del programa primal y del programa dual.

Como se ha comentado con anterioridad, tanto el *programa primal* como el *programa dual* son dos formas de abordar el mismo problema, y por lo tanto, si tienen solución, tienen la misma solución. Entonces, cabe preguntarse cuál es la relación entre las soluciones de ambos problemas.

Partiendo de las condiciones de holgura complementaria, desarrolladas como sigue:

$$\sum_{j=1}^{n} (c_j - a_{1j}\,\lambda_1 - a_{2j}\,\lambda_2 - \dots - a_{mj}\,\lambda_m)\, x_j = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i(b_i - a_{i1}\,x_1 - a_{i2}\,x_2 - \dots - a_{in}\,x_n) = 0$$

Dado que (x^*, λ^*) son óptimos, debe cumplirse que cada términos del sumatorio sea cero. En particular, y recurriendo a las variables auxiliares (de holgura) sabemos que:

$$(c_j - a_{1j}\,\lambda_1 - a_{2j}\,\lambda_2 -\ldots. - a_{mj}\,\lambda_m) = -\lambda_j^h \qquad \forall j$$

$$(b_i - a_{i1}\,x_1 - a_{i2}\,x_2 -\ldots. - a_{in}\,x_n) = x_i^h \qquad \forall i$$

por tanto las relaciones anteriores equivalen a :

$$\lambda_j^h\ x_j = 0$$

$$x_i^h\ \lambda_i = 0$$

En consecuencia tenemos:

1.- Si una restricción del primal es no saturada, entonces la variable de dual asociada debe ser nula.

2.- Si una variable de primal es positiva, entonces la correspondiente restricción del dual es una restricción saturada, es decir, se verifica como una igualdad.

Tomando esto en consideración, así como los teoremas de la dualidad, podemos establecer las siguientes relaciones entre las soluciones de primal y del dual.

1.- Por el teorema de la dualidad, y si ambos problemas tienen solución, entonces se verifica que:

$$Z(x^*) = G(\lambda^*)$$

$$c\,x^* = \lambda^* b$$

como $$cx^* = c_B B^{-1} b$$

se tiene que : $$\lambda^* = c_B B^{-1}$$

Por tanto, conociendo la solución optima del programa primal, se puede determinar el valor de las variables duales en su solución óptima.(Véase el ejemplo anterior, resuelto gráficamente)

2.- En base al Teorema de holgura complementaria, existe una relación entre el comportamiento de las variables de un problema y su dual:

Variables principales primal $\longleftrightarrow$ Variables holgura dual

Variables holgura primal $\longleftrightarrow$ Variables principales dual

3.- Si existe solución optima del primal (x^*) el valor de las variables básicas en la solución optima es:

$$x_B = B^{-1} b = b^* \geq 0.$$

Además por ser óptima deberá verificar que :

$$w_j = c_j - z_j \leq 0 \qquad \forall j.$$

Desarrollando esta ultima expresión tenemos que :

$$w_j = c_j - c_B B^{-1} P_j = c_j - \lambda P_j \leq 0 , \ \forall j.$$

Por lo tanto se verifica que: $\lambda A \geq c$, que es una de las condiciones de la factibilidad dual, dado que los vectores P_j forman las columnas de la matriz A..

4.- Para las variables de holgura del programa primal (x^h), sus respectivos coeficientes en la función objetivo son cero, y los vectores asociados a estas variables son los vectores de la base canónica, es decir, un vector de ceros excepto en la i-esima posición que toma el valor 1.

Por tanto, los rendimientos marginales de las variables de holgura serán:

$$w_i^h = 0- c_B\, B^{-1}\, P_i^h = - \lambda_i \ \leq 0 \Rightarrow\ \lambda_i \geq 0\ \ \forall\, i \quad \Rightarrow \quad \lambda \geq 0$$

lo que supone el cumplir la segunda condición de factibilidad dual.

Por tanto con las relaciones anteriores (3-4) podemos comprobar que la optimalidad primal garantiza la factibilidad dual.

Por tanto conociendo estas relaciones podemos determinar la solución de ambos problemas de forma inmediata.

Sea x^* una solución factible y optima de un problema lineal, es decir se cumple que :

$$x_B = B^{-1}\, b = b^* \geq 0.$$
$$w_j = c_j - z_j \leq 0$$

A partir de estos valores sabemos:

a) Valor de la variables principales del dual λ^* serán iguales a los rendimientos marginales de las variables de holgura del problema primas pero cambiadas de signo. $w_i^h = - \lambda_i$.

b) Valor de las variables de holgura del dual λ^{h*} se corresponden con los rendimientos marginales de las variables principales del primal. En particular, para las variables no básicas, de las que se obtienen las variables básicas del dual se tiene:

$$w_j = c_j - z_j \leq 0 \ , \ \forall j$$

Si, en particular, la variable x_k es no básica:

$$w_k = c_k - \lambda P_k \ .$$

Si consideramos: $\lambda P_k - \lambda_k^h = c_k$ tenemos que: $- \lambda_k^h = w_k$.

Conviene no perder de vista la relación entre las variables básicas de un problema con las no básicas de su dual. Es decir, si una variable de primal es básica, la variable de dual asociada a ella será una variable no básica, y por la misma razón si una variable de primal es no básica, la correspondiente variable de dual será una variable básica.

c) Por ultimo, aunque parezca superfluo recordarlo, el valor de la función objetivo de ambos problemas es el mismo. Conviene notar que si establecemos las relaciones entre las tablas óptimas de los dos problemas, veremos que el valor que aparece en las respectivas tablas optimas es el mismo pero cambiado de signo, ello se debe a que en un problema estamos maximizando y en el otro estamos minimizando, y para este problema de minimización realizamos la transformación de mínimo a máximo, cambiando el signo de la función, por ello a la hora de comparar los valores de ambos problemas no se puede hacer directamente desde una tabla a la otra.

Con el fin de comprobar las relaciones entre las soluciones de los dos problemas (primal y dual), vamos a plantear las tablas óptimas de los problemas planteados con anterioridad.

Problema Primal:

Min $Z(x) = 2\ x_1 + 3\ x_2 + 5\ x_3 + 2\ x_4 + 3\ x_5$

s.a:

$x_1 + x_2 + 2\ x_3 + x_4 + 3\ x_5 \geq 4$

$2\ x_1 - x_2 + 3\ x_3 + x_4 + x_5 \geq 3$

$x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0\ ,\ x_3 \geq 0\ ,\ x_4 \geq 0\ ,\ x_5 \geq 0$

La tabla óptima de este problema,

		-2	-3	-5	-2	-3	0	0	M	M	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^h	x_2^h	x_1^a	x_2^a	
-3	x_5	0	.6	.2	.2	1	-.4	.2	.4	-.2	1
-2	x_1	1	-.8	1.4	.4	0	.2	-.6	-.2	.6	1
	z_j	0	-.2	-3.4	-1.4	-3	.8	.6	.8	.6	
	w_j	0	-2.8	-1.6	-.6	0	-.8	-.6	M-.8	M-.6	-5

El problema dual asociado es:

$$\text{Max } G(\lambda) = 4\,\lambda_1 + 3\,\lambda_2$$

s.a:

$$\lambda_1 + 2\,\lambda_2 \le 2$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 \le 3$$

$$2\,\lambda_1 + 3\,\lambda_2 \le 5$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 \le 2$$

$$3\,\lambda_1 + \lambda_2 \le 3$$

$$\lambda_1 \ge 0\,,\ \lambda_2 \ge 0$$

La tabla óptima de este problema es:

		4	3	0	0	0	0	0	
		λ_1	λ_2	λ_1^h	λ_2^h	λ_3^h	λ_4^h	λ_5^h	
3	λ_2	0	1	.6	0	0	0	-.2	.6
0	λ_2^h	0	0	.8	1	0	0	-.6	2.8
0	λ_3^h	0	0	-1.4	0	1	0	-.2	1.6
0	λ_4^h	0	0	-.4	0	0	1	-.2	.6
4	λ_1	1	0	-.2	0	0	0	.4	.8
	z_j	4	3	1	0	0	0	1	
	w_j	0	0	-1	0	0	0	-1	5

Variables principales primal $\longleftrightarrow$ Variables holgura dual

Variables holgura primal $\longleftrightarrow$ Variables principales dual

Variables principales del dual:

$$\lambda_1 \longleftrightarrow x_1^h$$

$$\lambda_2 \longleftrightarrow x_2^h$$

$$\lambda_1^h \longleftrightarrow x_1$$

$$\lambda_2^h \longleftrightarrow x_2$$

$$\lambda_3^h \longleftrightarrow x_3$$

$$\lambda_4^h \longleftrightarrow x_4$$

$$\lambda_5^h \longleftrightarrow x_5$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A' = B^{-1} A$$

$$x_B = B^{-1} b$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.2 \\ -0.2 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0.2 & 0.2 & 1 & -0.4 & 0.2 \\ 1 & -0.8 & 1.4 & 0.4 & 0 & 0.2 & -0.6 \end{pmatrix}$$

$$x_B = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.2 \\ -0.2 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Max } [- Z(x)] = -2 x_1 - 3 x_2 - 5 x_3 - 2 x_4 - 3 x_5$$

		-2	-3	-5	-2	-3	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^h	x_2^h	
-3	x_5	0	.6	.2	.2	1	-.4	.2	1
-2	x_1	1	-.8	1.4	.4	0	.2	-.6	1
	z_j	0	-.2	-3.4	-1.4	-3	.8	.6	
	w_j	0	-2.8	-1.6	-.6	0	-.8	-.6	-5

$$\text{Min } F = -\text{ Max } [-Z(x)] = -(-5) = 5$$

6.5. Interpretación económica de las variables duales.

El significado de las variables duales es el mismo que en el caso de los multiplicadores de Lagrange, es decir miden la sensibilidad de la función objetivo respecto a cambios (infinitesimales) de los términos independientes de cada restricción.

$$\text{Max } F = c^t x$$

s.a:

$$A\,x = b$$

$$x \geq 0$$

Donde asumimos que $x \in R^n$, $c \in R^n$, $b \in R^m$ y $A \in M(n,m)$.

Si suponemos que x^* es una solución factible básica no degenerada y óptima del problema anterior, es decir, verifica que:

$$x^* = B^{-1}\, b \geq 0 \quad ; \qquad b \geq 0$$

$$A\, x^* = b$$

y que para una variación del vector de términos independientes b, cuando este vector pasa a ser $(b+\Delta b)$, siendo $(b+\Delta b) \geq 0$, y que esta variación deje inalterada las variables básicas de la solución, es decir que se cumpla que:

$x^* = B^{-1} (b + \Delta b) \geq 0; (b + \Delta b) \geq 0$

$A x^* = (b + \Delta b)$

En estas condiciones la derivada de la función de Lagrange:

$L(x,\lambda) = cx + \lambda (b - Ax)$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = \lambda$$

este valor de λ nos indica en cuanto varia la función objetivo ante una variación (infinitesimal) de b, y que mantenga la factibilidad de la solución.