Tabla del Metodo Dual

jueves, 3 de marzo de 2022   09:42 a. m.

Consideremos el siguente PL

$$\min(CX)$$

$$\text{Sujeto a} \quad AX \geq b \;;\; X \geq 0$$

Sea B una base que no necesariamente sea factible

	Z								
Z	1	z_1-c_1	z_2-c_2	$\cdots$	z_n-c_n	$z_{n+1}-c_{n+1}$	$\cdots$	$z_{n+m}-c_{n+m}$	$C_B\bar{b}$
X_{B1}	0	y_{11}	y_{12}	$\cdots$	y_{1n}	$y_{1\,n+1}$	$\cdots$	$y_{1\,n+m}$	$\bar{b}_1$
X_{B2}	0	y_{21}	y_{22}	$\cdots$	y_{2n}	$y_{2\,n+1}$	$\cdots$	$y_{2\,n+m}$	$\bar{b}_2$
$\vdots$									$\vdots$
X_{Bm}	0	y_{m1}	y_{m2}	$\cdots$	y_{mn}	$y_{m\,n+1}$	$\cdot$	$y_{m\,n+m}$	$\bar{b}_m$

Defina $\omega = C_B B^{-1}$; $j = 1, \dots, n$

$$z_j - c_j = C_B B^{-1} a_j - c_j = \omega a_j - c_j$$

Por tanto $\quad z_j - c_j \leq 0 \quad ; j = 1, \dots, n$

$$\omega a_j - c_j \leq 0$$

$$\Rightarrow \omega a_j \leq c_j$$

Note que

$$a_{n+i} = -e_i \;,\; c_{n+i} = 0 \quad ; i = 1, \dots, m$$

$$z_{n+i} - c_{n+i} = \omega a_{n+i} - c_{n+i} \leq 0$$
$$\omega(-e_i) - 0$$
$$= -\omega_i \leq 0$$

$\therefore \omega_i \geq 0 \quad ; i = 1, \dots, m$ $\rightarrow$ Por tanto la solucion del problema dual es factible

Intentamos cambiar los valores $z_j - c_j$ de la tabla a ≤ 0 de forma que usemos el dual

	Z								
Z	1	z_1-c_1	z_2-c_2	$\cdots$	z_n-c_n	$z_{n+1}-c_{n+1}$	$\cdots$	$z_{n+m}-c_{n+m}$	$C_B\bar{b}$
X_{B1}	0	y_{11}	y_{12}	$\cdots$	y_{1n}	$y_{1\,n+1}$	$\cdots$	$y_{1\,n+m}$	$\bar{b}_1$
X_{B2}	0	y_{21}	y_{22}	$\cdots$	y_{2n}	$y_{2\,n+1}$	$\cdots$	$y_{2\,n+m}$	$\bar{b}_2$
$\vdots$									$\vdots$
X_{Bm}	0	y_{m1}	y_{m2}	$\cdots$	y_{mn}	$y_{m\,n+1}$	$\cdot$	$y_{m\,n+m}$	$\bar{b}_m$

En la tabla anterior $(z_j - c_j) \leq 0 \;\; \forall j$, implica que la solución dual es factible si ademas $\bar{b}_i \geq 0$, la solución del problema primal es factible y se tiene una solución optima.

Consideramos $\bar{b}_r < 0$. Seleccionando la fila r como pivote y alguna columna K tal que $y_{rk} < 0$, la intención es que mediante algunos pasos $\bar{b}_r \geq 0$.

La idea es hacer $\bar{b}_i \geq 0$ manteniendo $(z_j - c_j \leq 0)$.

La columna pivote k se determina con aquel K tal que cumpla

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \min\left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} \;\middle|\; y_{rj} > 0 \right\}$$

Note que las entradas de la columna 0 despues del pivoteo son:

$$(z_j - c_j)' = (z_j - c) - \frac{y_{rj}}{y_{rk}}(z_k - c_k)$$

Si $y_{rj} \geq 0$, puesto que $(z_k - c_k) \leq 0$ y $y_{rk} < 0$

$$\Rightarrow \quad (z_j - c_j)' \leq (z_j - c_j) \leq 0$$

Si $y_{rj} < 0$

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \min\left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} \;\middle|\; y_{rj} < 0 \right\}$$

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} \geq \frac{z_j - c_j}{y_{rj}}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \geq (z_j - c_j)' = (z_j - c_j) - \frac{y_{rj}}{y_{rk}}(z_k - c_k)$$

esto es $(z_j - c_j)' \leq 0 \quad \forall j$. Ademas la evaluación en la función objetivo despues del pivoteo es

$$c_B B^{-1} b - (z_k - c_k)\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} \geq c_B B^{-1} b = wb$$

Algoritmo

$$\begin{array}{c|c|ccccccc|c|}
 & z & & & & & & & & \\
z & 1 & z_1 - c_1 & z_2 - c_2 & \cdots & z_n - c_n & z_{n+1} - c_{n+1} & \cdots & z_{n+m} - c_{n+m} & c_B \bar{b} \\
\hline
x_{B_1} & 0 & y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} & y_{1\,n+1} & \cdots & y_{1\,n+m} & \bar{b}_1 \\
x_{B_2} & 0 & y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} & y_{2\,n+1} & \cdots & y_{2\,n+m} & \bar{b}_2 \\
\vdots & & & & & & & & & \vdots \\
x_{B_m} & 0 & y_{m1} & y_{m2} & \cdots & y_{mn} & y_{m\,n+1} & \cdots & y_{m\,n+m} & \bar{b}_m
\end{array}$$

Encuentre una base del problema primal tal que

$$\forall j \quad (z_j - c_j) = c_B B^{-1} a_j - c_j \leq 0$$

Paso Inicial

1: Si $\bar{b} = B^{-1} b \geq 0$, la solución es optima

De otra forma elija la fila pivote r como "r" tal que $\bar{b}_r = \min\{\bar{b}_i\}$

2: Si $y_{rj} \geq 0 \quad \forall j$, el problema primal poseé región factible vacia.

De otra manera elija la columna pivote k como aquel indice tal que

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \min\left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} \;\middle|\; y_{rj} < 0 \right\}$$

Pivoteé en y_{rk} y regrese al paso 1.

Ejemplo

Minimizar $2x_1 + 3x_2 + 4x_3$

Sujeto a:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 4$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} z - 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 &= 0 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 &= -3 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
\\ z \\ \\ \\
\end{array}
\begin{array}{c|ccccc|c}
z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & RHS \\
\hline
1 & -2 & -3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & -3 \\
0 & -2 & 1 & -3 & 0 & 1 & -4
\end{array}
\longrightarrow \text{Pivoteamos} \longrightarrow
\left[\begin{array}{c|ccccc|c}
1 & 0 & -4 & -1 & 0 & -1 & 4 \\
\hline
0 & 0 & -5/2 & 1/2 & 1 & -1/2 & -1 \\
0 & 1 & -1/2 & 3/2 & 0 & -1/2 & 2
\end{array}\right]
\longrightarrow \text{Pivoteamos} \longrightarrow
\left[\begin{array}{c|ccccc|c}
1 & 0 & 0 & -4/5 & -8/5 & -1/5 & 28/5 \\
\hline
0 & 0 & 1 & -1/5 & -2/5 & 1/5 & 2/5 \\
0 & 1 & 0 & 7/5 & -1/5 & -2/5 & 11/5
\end{array}\right]$$

$r = \min \bar{b}_i$

$y_{rk} = \min \frac{z_k - c_k}{y_{rk}} \rightarrow$ Pivote

llegamos al optimo

$x_B = [0, 0, -4/5, -8/5, -1/5]$