Portafolios con multiples activos (n)

5/diciembre

Definimos $O = (1, 1, \ldots, 1)$ dimensión n

$M = (M_1, M_2, \ldots, M_n)$ y nuevamente consideramos a los precios $w_1, \ldots, w_n$

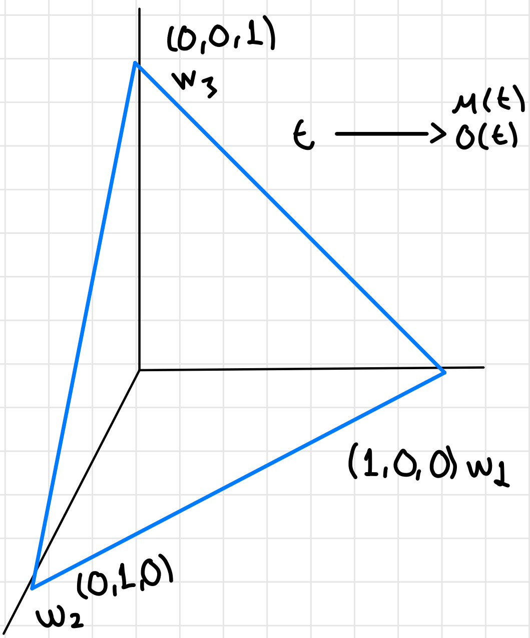
$(w_1 + \ldots + w_n = 1)$ y $C = (C_{ij})$

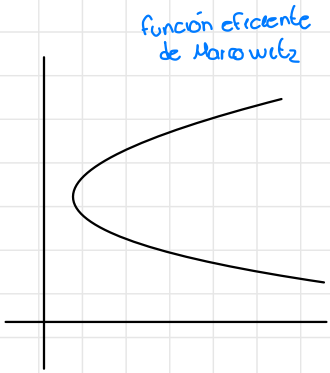
La matriz de varianza del portafolio donde

$C_{ij} = Cov(R_i, R_j)$ Note $C_{ii} = Var(R_i)$ y ademas puede ser demostrado que C es simétrica semidefinida positiva (es decir que $\forall A, ACA^T \geq 0$) y supondremos que es invertible.

La ganancia esperada del portafolio es $M = MW^t = M_1W_1 + \ldots + M_nW_n$

$\sigma^2 = Var(W_1R_1 + \ldots + W_nR_n) = W(W^t$





5/decembre

Denotamos por f la función que toma cada vector de precios $(w_1, \dots, w_n)$ al plano riesgo/ esperanza esto es

$$f(w_1, \dots, w_n) = (\sigma, \mu)$$

Trataremos de estudiar el comportamiento de f de manera general.

$$L(t) = (a_1 t + b_1, \dots, a_n t + b_n) = At + B$$

$\mu(L(f)) = M(At+B) = MAt + MB$ la cuál es una función lineal de t

Ahora respecto al riesgo $\sigma^2(L(t)) = (At+B)C(At+B)^t = (At+B)C(A^t+B^t)$

$= (AC A^t)t^2 + (BCA^t + ACB^t)t + BCB^t = \gamma t^2 + \delta t + \varepsilon$

Teorema

El portafolio de mínimo riesgo es aquel con pesos

$$w = \frac{OC^{-1}}{OC^{-1}O^t}$$

Demostración.

Buscaremos minimizar

$$\sigma^2 = \sum_{i,j}^{n} C_{ij} w_i w_j = WCW^t$$

Sujeto a la restricciones

$$Ow^t = w_1 + \dots w_n = 1$$

De acuerdo a la tecnica de los multiplicadores de lagrange $J(w_1 \dots w_n, \alpha) = \sum_{i+j=1}^{n} C_{ij} w_i w_j + \alpha(1 - (w_1 \dots + w_n)) = 0$

$$\frac{\partial y}{\partial w_l} = \frac{\partial}{\partial w_l} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} w_i w_j + \alpha(1-(w_1 + \dots w_n))$$

$$= \frac{\partial}{\partial w_l} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} w_i w_j + \frac{\partial}{\partial w_l} \sum_{j=1} C_{ij} w_i w_j \Big|_{i=l}^{-1}$$

5/decembre

$$\frac{\partial}{\partial w_l} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq l}}^{n} \left[\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq l}}^{n} C_{l\ell} w_l w_\ell + C_{ll} w_l w_l \right] = \frac{\partial}{\partial w_l} \left[\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq l}}^{n} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell = l}}^{n} C_{l\ell} w_l w_\ell + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq l}}^{n} C_{l\ell} w_l w_\ell \right]$$