Dualidad

miércoles, 23 de febrero de 2022 09:40 a. m.

Asociado con cada problema de programación lineal existe otro problema de programación lineal llamado dual.

Supongamos definido un P.P.L (Primal) en la forma:

P: minimizar $C^T x$

sujeto a: $Ax \geq b$; $x \geq 0$

Entonces el PPL (dual) está dado por.

D: maximizar wb

sujeto a: $wA \leq C$; $w \geq 0$

Forma Canónica

Ejemplo:

P: minimizar $6x_1 + 8x_2 = C^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

sujeto a: $3x_1 + x_2 \geq 4$; $Ax \geq b$; $x_1, x_2 \geq 0$
$5x_1 + 2x_2 \geq 7$

$C = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$; $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

D: Maximizar $(w_1, w_2)\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = 4w_1 + 7w_2$

Sujeto a $\left[(w_1, w_2)\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\right]^T = (3w_1 + 5w_2 , w_1 + 2w_2)^T \leq \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\Downarrow$

$3w_1 + 5w_2 \leq 6$

$w_1 + 2w_2 \leq 8$; $w_1, w_2 \geq 0$

Trabajando en Forma Estandar.

P: minimizar Cx

Sujeto a: $Ax = b$; $x \geq 0$

D: maximizar wb

sujeto a $wA \leq C$ con w sin restricciones

Demostrando la equivalencia entre D y P en su forma Estandar

Supongamos

P: minimizar Cx
sujeto a: $Ax \geq b$
$x \geq 0$
$\rightarrow$
P: minimizar Cx
Sujeto a: $Ax - Ix_s = b$ $\rightarrow$ Se resta para no romper la ...

P: minimizar Cx
sujeto a: $Ax \geq b$
$x \geq 0$

Canonica

$\rightarrow$

P: minimizar Cx
Sujeto a ; $Ax - Ix_s = b$
$x, x_s \geq 0$

$\rightarrow$ Se resta para no romper la restriccion de NN

Estandar

D: Maximizar wb
Sujeto a: $wA \leq \begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow w[A \mid I] \leq \begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix}$ ESTANDAR

$wA \leq C$; $w \cdot I \leq 0 \Rightarrow wI \geq 0$

Demostrando que el (Dual de un Dual es el Primal.)

Dado un PPL con Dual

D: Maximizar wb
sujeto a: $wA \leq C$
$w \geq 0$

$\Longrightarrow$

El problema es equivalente a

D_2 : minimizar $(w(-b))^t$
sujeto a ; $(-wA)^t \geq (-C)^t$
$w^t \geq 0$

$\Longrightarrow$

D_3 minimizar $(-b^t)\, w^t$
$-A^t w^t \geq -C^t$
$w^t \geq 0$

El problema D_3 dado que esta en su forma canonica.

Maximizar $w'^t(-C^t)$
sujeto a: $w'^t(-A^t) \leq (-b^t)$
$w'^t \geq 0$

Aplicando transpuesta

Maximizar $(-C)\, w'$
$-Aw' \leq -b$
$w' \geq 0$

$\Longrightarrow$

minimizar Cw
sujeto a: $Aw' \geq b$
$w' \geq 0$

Homogeneizando dualidades mixtas

Considere el sig. PPL

minimizar Cx
sujeto a: $A_1 x \geq b_1$
$A_2 x = b_2$
$A_3 x \leq b_3$
con $x \geq 0$

El problema anterior puede ser escrito como:

El problema anterior puede ser escrito como:

minimizar cx

sujeto a: $A_1 x - I x_S = b_1$

$A_2 x = b_2$

$A_3 x + I x_T = b_3$

con $x, x_S, x_T \geq 0$

$\Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \text{mimizar } C'X' \\ \text{Sujeto a: } \begin{bmatrix} A_1 & -I & 0 \\ A_2 & 0 & 0 \\ A_3 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_S \\ x_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \end{array}\right]$$

A' $\quad x'$ $\quad b'$

Su problema dual es

Maximizar wb'

sujeto a, $wA' \leq C'$

w sin restriccion

$\Longleftrightarrow$

Maximizar $w_1 b_1 + w_2 b_2 + w_3 b_3$

$$[w_1 | w_2 | w_3] \begin{bmatrix} A_1 & -I & 0 \\ A_2 & 0 & 0 \\ A_3 & 0 & I \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} C \\ 0_S \\ 0_T \end{bmatrix}$$

$w_1 A_1 + w_2 A_2 + w_3 A_3 \leq C$

$-w_1 I \leq 0_S$

$w_3 I \leq 0_T$

con w_1, w_2, w_3 sin restricciones

Relaciones Primal - Dual

Consideramos la forma canonica de un PPL y su Programa Dual, sean X_0 y W_0 dos soluciones factibles de problema primal y dual respectivamente.

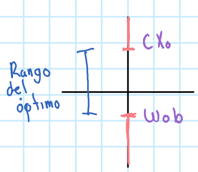
$A x_0 \geq b$, $x_0 \geq 0$

$w_0 A \leq C$; $w_0 \geq 0$

$$C x_0 \geq W_0 A x_0 \geq W_0 b$$

$C \geq W_0 A$ $\qquad$ $A x_0 \geq b$

La evaluación de cualquier solución factible en la función objetivo al problema de minimización (Primal) es siempre mayor o igual, que la evaluacion de cualquier solución factible en la función objetivo del problema de maximización. (Dual)



Acotan las Soluciones

$\Rightarrow$ En caso que $X_0 = W_0$ encontramos el óptimo. Corolario

$\Rightarrow$ Si existe una solución No Acotada entonces, no existen soluciones factibles del otro problema. Corolario

Estructura de la Definicion de Problema Dual

Dualidad y las condiciones de Optimalidad de Kuhn-Tucker

Las condiciones de optimalidad de un PPL.

minimiza Cx

sujeto a. $Ax \geq b$; $x \geq 0$

Pueden ser descritas de la siguiente forma:

1) $Ax^* \geq b$, $x^* \geq 0$

2) $w^*A \leq C$, $w^* \geq 0$

3) $w^*(Ax^* - b) = 0$; $(C - w^*A)x^* = 0$

para algunos x^* y w^*

Theorem 1 (Fundamental Theorem of Duality)

With regard to the primal and dual linear programming problems, exactly one of the following statements is true.

1. Both possess optimal solutions $\mathbf{x}^*$ and $\mathbf{w}^*$ with $\mathbf{cx}^* = \mathbf{w}^*\mathbf{b}$.
2. One problem has unbounded objective value, in which case the other problem must be infeasible.
3. Both problems are infeasible.

From this theorem we see that duality is not completely symmetric. The best we can say is that (here optimal means finite optimal, and unbounded means having an unbounded optimal objective):

P	OPTIMAL	$\Leftrightarrow$	D	OPTIMAL
P	UNBOUNDED	$\Rightarrow$	D	INFEASIBLE
D	UNBOUNDED	$\Rightarrow$	P	INFEASIBLE
P	INFEASIBLE	$\Rightarrow$	D	UNBOUNDED OR INFEASIBLE
D	INFEASIBLE	$\Rightarrow$	P	UNBOUNDED OR INFEASIBLE

Lema 3

Si uno de los problemas poseé una solución optima, entonces ambos problema poseen solución optima y las evaluaciones coinciden