Escuela Superior de Cómputo
Ejercicios para práctica
Métodos numéricos
8 de noviembre de 2021

Instrucciones: Resuelva todos los ejercicios que pueda, mismos que procederán a realizarse en conjunto a fin de poder practicar los contenido previamente analizados:

1. A partir de los siguientes datos, determine la derivada en los puntos con la mejor aproximación posible (ecuaciones en diferencias)

x	$f(x)$	$f'(x)$
2.1	-1.70984654	
2.2	-1.37382306	
2.3	-1.11921364	
2.4	-0.91601429	
2.5	-0.74702230	
2.6	-0.60159661	

2. A partir de los siguientes datos, determine la derivada en los puntos con la mejor aproximación posible (ecuaciones en diferencias)

x	$f(x)$	$f'(x)$
-3.0	9.36787944	
-2.8	8.23324072	
-2.6	7.18035038	
-2.4	6.20932896	
-2.2	5.32030530	
-2.0	4.51341712	

3. Aproxime la derivada con diferencias centrales de primer y segundo orden para las siguientes funciones, empleando el tamaño de h señalado y compare contra el valor real:

   a) $f(x) = e^{2x}$ con $h = 0.1$ en el punto $x = 1.3$.
   b) $f(x) = x\log(x)$ con $h = 0.2$ en el punto $x = 8.5$.
   c) $f(x) = x\cos(x) - x^2\sin(x)$ con $h = 0.1$ en el punto $x = 3.0$.
   d) $f(x) = 2(\log(x))^2 + 3\sin(x)$ con $h = 0.2$ en el punto $x = 2.1$.

4. Aplique el método de interpolación de Richardson para obtener una aproximación de orden $O(h^10)$ con la función señalada y con el tamaño de h indicado:

   a) $f(x) = \log(x)$ con $h = 0.4$ en el punto $x = 1.0$.
   b) $f(x) = x + e^x$ con $h = 0.4$ en el punto $x = 0.0$.
   c) $f(x) = 2^x\sin(x)$ con $h = 0.4$ en el punto $x = 1.10$.
   d) $f(x) = x^3\cos(x)$ con $h = 0.4$ en el punto $x = 2.5$.

5. Aplique todas las cuadraturas de Newton - Cotes abiertas y cerradas para determinar una aproximación de las siguientes integrales, por otra parte, compare la aproximación con el valor real.

a) $\int_{0.5}^{1} x^4 dx$.

b) $\int_{0}^{0.5} \frac{2x}{x-4} dx$.

c) $\int_{1}^{1.5} x^2 \log(x) dx$.

d) $\int_{0}^{1} x^2 e^{-x} dx$.

e) $\int_{0}^{0.35} \frac{2}{x^2-4} dx$.

f) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} e^{3x} \cos(2x) dx$.

g) $\int_{e}^{e+1} \frac{1}{x \log(x)} dx$.

h) $\int_{-0.5}^{0} x \log(x+1) dx$.

6. Aplique los métodos de integración compuesta del trapecio y de Simpson para las integrales señaladas con el valor de n determinado.

   a) $\int_{-3}^{3} \frac{2}{x-4} dx$ con $n = 10$.

   b) $\int_{1}^{10} x^2 \log(x) dx$ con $n = 20$.

   c) $\int_{-2}^{8} x^2 e^{-x} dx$ con $n = 30$.

   d) $\int_{-1}^{3} \frac{2x}{x^2-4} dx$ con $n = 26$.

   e) $\int_{0}^{\frac{7\pi}{4}} e^{3x} \cos(2x) dx$ con $n = 140$.

7. Aproxime las integrales anteriores por medio del método de integración gaussiana con $n = 2$ y $n = 3$ y compare contra los valores reales de estas mismas.

8. Empleé el método de integración gaussiana para integrales dobles en regiones no rectangulares para aproximarla las siguientes integrales dobles y compare contra el valor real.

   a) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\sin(x)}^{\cos(x)} (2y \sin(x) + \cos^2(x)) dy dx$ con $n = 3$ y $m = 3$.

   b) $\int_{0}^{1} \int_{x}^{2x} (x^2 + y^3) dy dx$ con $n = 2$ y $m = 2$.

   c) $\int_{1}^{e} \int_{1}^{x} \log(xy) dy dx$ con $n = 3$ y $m = 4$.

   Cabe señalar que n hace referencia al orden de la integración gaussiana sobre la variable x y m el orden de la integración gaussiana sobre la variable y.

9. Considere los siguientes problemas con valores iniciales:

   a) $y' = e^{t-y}$ en el intervalo $0 \leq t \leq 1$ con la condición inicial $y(0) = 1$.

   b) $y' = \frac{1+t}{1+y}$ en el intervalo $0 \leq t \leq 2$ con la condición inicial $y(1) = 2$.

   c) $y' = -y + t\sqrt{y}$ en el intervalo $2 \leq t \leq 3$ con la condición inicial $y(2) = 2$.

   d) $y' = \frac{\sin(2t) - 2ty}{t^2}$ en el intervalo $1 \leq t \leq 2$ con la condición inicial $y(1) = 2$.

   Las cuales tienen como soluciones reales las siguientes funciones:

   a) $y(t) = \log\left(e^t + e - 1\right)$.

   b) $y(t) = \sqrt{t^2 + 2t + 6} - 1$.

c) $y(t) = \left(t - 2 + \sqrt{2}e^{1-\frac{t}{2}}\right)$.

d) $y(t) = \frac{4+\cos(2)-\cos(2t)}{2t^2}$.

Dado los problemas de valores iniciales anteriores:

a) Aproxime la solución por medio del método de Euler con $h = 0.05$ para aproximar la solución.

b) Aproxime la solución por medio del método de Taylor de orden 2 con $h = 0.05$ para aproximar la solución.

c) Aproxime la solución por medio del método de Taylor de orden 4 con $h = 0.05$ para aproximar la solución.

d) Aproxime la solución por medio del método de Runge - Kutta de orden 2 con $h = 0.05$ para aproximar la solución.

e) Aproxime la solución por medio del método de Runge - Kutta de orden 4 con $h = 0.05$ para aproximar la solución.

f) Aproxime la solución por medio del método de Runge - Kutta - Fehlberg con los parámetros siguientes: $h_{min} = 0.001$, $h_{max} = 0.05$ y $Tol = 10^{-6}$.

Nota: Estos ejercicios te permitirán repasar los contenidos del curso observados.