De Luna Ocampo Yanina

Procesos estocásticos

Examen 2

1. Comenzando a las 6 am, carros, autobuses, y motocicletas llegan a la caseta de una autopista de acuerdo a procesos de Poisson independientes. Aproximadamente, cada 5 minutos llega un carro a la caseta, los autobuses llegan una vez cada 10 minutos, y las motocicletas llegan una cada 30 minutos.

a) Encuentre la probabilidad de que en los primeros 20 minutos, exactamente tres vehiculos; dos carros y una motocicleta, lleguen a la caseta.

C_t proceso para carros

A_t proceso para autobuses

M_t proceso para motocicletas

$$P(C_{20}=2,\ A_{20}=0,\ M_{20}=1) = P(C_{20}=2)P(A_{20}=0)P(M_{20}=1)$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{5}(20)}\left(\frac{1}{5}(20)\right)^2}{2!} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{10}(20)}\left(\frac{1}{10}(20)\right)^0}{0!} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{30}(20)}\left(\frac{1}{30}(20)\right)^1}{1!} = \frac{16}{3}e^{-\frac{20}{3}}$$

$$= 0.0067$$

b) En la caseta, la probabilidad de que un conductor tenga el cambio exacto es $1/4$, independientemente del vehículo. Halle la probabilidad de que ningún vehículo tenga el cambio exacto en los primeros 10 minutos.

Tenemos $\lambda = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30} = \frac{1}{3}$

El Proceso de Poisson de arribo de los vehículos se obtiene el proceso E_t de que el conductor tenga el cambio exacto con : $\lambda_E = p\lambda = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{12}$

Entonces tenemos:

$$P(E_{10}=0) = \frac{e^{-\frac{1}{12}(10)}\left(\frac{1}{12}(10)\right)^0}{0!} = e^{-\frac{5}{6}} = 0.4345$$

c) Encuentre la probabilidad de que la séptima motocicleta llegue antes de 45 minutos de la llegada de la tercer motocicleta.

$$P(S_7 - S_3 < 45) = P\left(\sum_{i=1}^{7} X_i - \sum_{i=1}^{3} X_i < 45\right)$$
$$= P\left(\sum_{i=4}^{7} X_i < 45\right)$$
$$= P(Z < 45) \; ; \; Z \sim \text{Gamma}\left(4, \tfrac{1}{30}\right)$$
$$= \int_0^{45} \frac{\left(\frac{1}{30}\right)^4 t^3 e^{-\frac{1}{30}t}}{3!}\, dt$$
$$= \frac{1}{4{,}860{,}000} \int_0^{45} t^3 e^{-\frac{1}{30}t}\, dt$$
$$= -\frac{1}{4{,}860{,}000}\left[30x^3 + 2{,}700x^2 + 162{,}000x + 4{,}860{,}000\right] e^{-\frac{x}{30}} \Bigg|_0^{45}$$
$$= 0.0656$$

2. Sea $\{N_t\}_{t\geq 0}$ un proceso de Poisson con parámetro λ y tiempos de arribo $S_1, S_2, \ldots$ Evalue la esperanza de la suma de los cuadrados de los tiempos de arribo al tiempo t,

$$E\left[\sum_{n=1}^{N_t} S_n^2\right]$$

Condicionando respecto a N_t

$$E\left[\sum_{n=1}^{N_t} S_n^2\right] = \sum_{k=1}^{+\infty} E\left(\sum_{n=1}^{N_t} S_n^2 \,\Big|\, N_t = k\right) P(N_t = k) \; ; \quad S_n \mid N_t = k \sim \mathcal{U}(n)$$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty} E\left(\sum_{n=1}^{k} \mathcal{U}(n)^2\right) P(N_t = k) \; ; \quad \sum_{n=1}^{k} \mathcal{U}(n)^2 = \sum_{n=1}^{k} \mathcal{U}(n)^2$$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{k} E(\mathcal{U}_n^2) P(N_t = k) \; ; \quad E(\mathcal{U}_n^2) = \int_0^t u^2 \frac{1}{t}\, du = \frac{u^3}{3t}\Bigg|_0^t = \frac{t^3}{3t} = \frac{t^2}{3}$$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{t^2}{3} \cdot \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$$
$$= \frac{t^2 e^{-\lambda t}}{3} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k (\lambda t)^k}{k!}$$
$$= \frac{t^2 e^{-\lambda t}}{3}\left[\frac{\lambda t}{e^{-\lambda t}}\right]$$
$$= \frac{\lambda t^3}{3}$$

3. Ofertas de trabajo para recien graduados llegan de acuerdo a un proceso de Poisson con media de dos por mes. Una oferta de trabajo es aceptable si el salario ofrecido es de al menos 35K dólares. Las ofertas de salario siguen una distribución exponencial con media de 25k dólares. Encuentre la probabilidad de que una oferta de trabajo aceptable sea recibida en los primeros tres meses.

$$p = P(X \geq 35 \cdot 10^3) = e^{-\frac{1}{25 \cdot 10^3} 35 \cdot 10^3} = 0.2465 \quad \text{donde} \quad X \sim Exp\left(\frac{1}{25 \times 10^3}\right)$$

Por lo que el Proceso se ramifica a otro subproceso con $\lambda p = 2(0.2465) = 0.493$

T - tiempo que tiene que pasar hasta una oferta de trabajo aceptable

Entonces:

$$P(T \leq 3) = 1 - e^{-\lambda p (3)} = 1 - e^{-0.493(3)} = 0.7721$$

4. Simule un proceso de Poisson espacial con $\lambda = 10$, sobre una caja de volumen 8 con vértices en los puntos $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Estime la media y la varianza del número de puntos en la bola centrada en el origen de radio 1.

Tenemos que, el valor exacto, está dado por:

$$\lambda |A| = 10 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1^3 \approx 41.89$$

```r
lambda <- 10
radio <- 1
volume <- 8
intentos = 10000
simlist <- numeric(intentos)

for(i in 1:intentos) {

  n_puntos <- rpois(1, lambda * volume)
  puntos_coor = matrix(runif(n_puntos*3, -1, 1), ncol = 3)
  g <- 0

  for(j in 1:n_puntos){
    r <- 0
    for (crdnd in puntos_coor[j,]) {
      r <- r + crdnd^2
    }
    r <- sqrt(r)
    if(r <= radio){
      g <- g + 1
    }

  }
```

```
  }

  simlist[i] <- g
}
```

```
cat("Para la bola de centrada en el origen de radio 1.\n")
cat("El promedio de puntos que contiene la esfera es: ", mean(simlist))
cat("\nLa varianza de puntos es: ", var(simlist))
```

```
Para la bola de centrada en el origen de radio 1.
El promedio de puntos que contiene la esfera es:  41.8625
La varianza de puntos es:  41.42094
```

5. Inversionistas adquieren $1k$ dólares en bonos en tiempos aleatorios de un proceso de Poisson con parámetro λ. Si la tasa de interés es r entonces el valor esperado total presente de una inversión adquirida al tiempo t es $1000e^{-rt}$. Simule el valor presente total de los bonos si la tasa de interes es 4 %, el parametro del proceso de Poisson es $\lambda = 50$, y $t = 10$.

Sabemos que:

$$\text{Valor presente} = \frac{1000\lambda\left(1 - e^{-rt}\right)}{r}$$

Entonces, tenemos que:

$$\frac{(1000)(50)\cdot\left(1 - e^{-(0.04)(10)}\right)}{0.04} \approx 412,100$$

```
intentos = 10000
simlist <- numeric(intentos)
lambda <- 50
precio <- 1000
r <- 0.04
t = 10
```

```
for (i in 1:intentos) {
  bonos <- rpois(1, lambda*t)
  ord_tm <- runif(bonos, 0, t)
  value <- 0

  for (j in ord_tm) {
    value <- value + 1000*exp(-r*j)
  }

  simlist[i] <- value
}
```

```
cat("El valor actual esperado es:", mean(simlist))
```

```
El valor actual esperado es: 412302.7
```