Principio de invariancia

Podemos definir el principio de invariancia de Donsker como lo siguiente: cualquier secuencia de variables aleatorias independiente e idénticamente distribuida (i.i.d) $X_1, \ldots, X_n$ con media 0 y varianza 1, generalizando la construcción del movimiento Browniano a partir de una caminata aleatoria simétrica simple.

Sea $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Entonces, $\frac{S_{nt}}{\sqrt{n}}$ converge a B_t, mientras $n \to \infty$

La palabra invariancia es utilizada debido a que todas las caminatas aleatorias con incrementos que tienen media 0 y varianza 1, independientemente de la distribución, dan el mismo límite de movimiento browniano.

Sabiendo esto, una consecuencia del principio de invariancia y continuidad es que las funciones del proceso discreto $\frac{S_{nt}}{\sqrt{n}}$ convergen a la correspondiente función de movimiento Browniano, mientras $n \to \infty$. Si g es una función continua acotada, cuyo dominio es el conjunto de funciones continuas en [0, 1], entonces $g\left(\frac{S_{nt}}{\sqrt{n}}\right) \approx g(B_t)$ para n grande.

Ejemplo: Para un paseo aleatorio simétrico simple, considere el valor máximo de la caminata en los primeros n pasos.

Sea $g(f) = \max_{0\le t\le 1} f(t)$. Por el principio de invariancia,

$$\lim_{n\to\infty} g\left(\frac{S_{nt}}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \max_{0\le t\le 1} \frac{S_{nt}}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \max_{0\le k\le n} \frac{S_k}{\sqrt{n}} = g(B_t) = \max_{0\le t\le 1} B_t$$

Obtenemos: $\max_{0\le k\le n} S_k \approx \sqrt{n} \max_{0\le t\le 1} B_t$ para n muy grande.

Considere la función de densidad $f_M(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2/2}, \; para \; x > 0$ para la variable aleatoria

$M = \max_{0\le t\le 1} B_t$.

Cuya media está dada por $E(M) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx 0.80$ y su desviación estándar $SD(M) = \sqrt{\frac{\pi-2}{\pi}} \approx 0.60$

Con estos resultados, observamos que en los primeros n pasos de la caminata aleatoria simétricasimple, el valor máximo es de aproximadamente $(0.80)\sqrt{n}$ más o menos $(0.60)\sqrt{n}$.

En n = 10,000 pasos la probabilidad de que se alcance un valor mayor a 200 es:

$$P\left(\max_{0\le k\le n} S_k > 200\right) = P\left(\max_{0\le k\le n} \frac{S_k}{100} > 2\right) = P\left(\max_{0\le k\le n} \frac{S_k}{\sqrt{n}} > 2\right) \approx P(M > 2) = \int_2^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2/2}\, dx$$

$$= 0.0455$$