Examen 1er parcial
Series de Tiempo

Alumnos:

- **De Luna Ocampo Yanina**
- **García Rodríguez Diana Itzel**
- **Medina Barreras Daniel Iván**
- **Ramírez Méndez Kevin**
- **Sainz Takata Juan Pablo Minoru**
- **Vázquez Portugués José Antonio**

Pregunta 1
Dado el modelo de caminata aleatoria con drift

$$x_t = \delta + x_{t-1} + w_t$$

Donde $w_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ y X_0 la condición inicial, es decir, una constante fija.

1. Escriba el valor de x_t en términos de x_0
2. Reescriba la generalización del punto anterior en forma de la ecuación general de la recta *Ax* + *By* + *C* = 0 e indique de manera explícita los valores de *A*, *B* y *C*.

R:
1
Partimos de que tenemos esto:
$x_t = \delta + x_{t-1} + w_t$, $w_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Por lo que usamos sustitución para atrás

$$\begin{aligned} x_t &= \delta + x_{t-1} + w_t \\ &= \delta + \delta + x_{t-2} + w_{t-1} + w_t \\ &= \delta + \delta + \delta + x_{t-3} + w_{t-2} + w_{t-1} + w_t \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$x_t = \delta t + x_0 + \sum_{i=0}^{t-1} w_{t-i}$$

R:

2

$$x_t = \delta t + x_0 + \sum_{i=0}^{t-1} w_{t-i}$$

$$0 = \delta t + x_0 + \sum_{i=0}^{t-1} w_{t-i} - x_t$$

$$A = -1, B = \delta, C = x_0 + \sum_{i=0}^{t-1} w_{t-i}$$

Pregunta 2

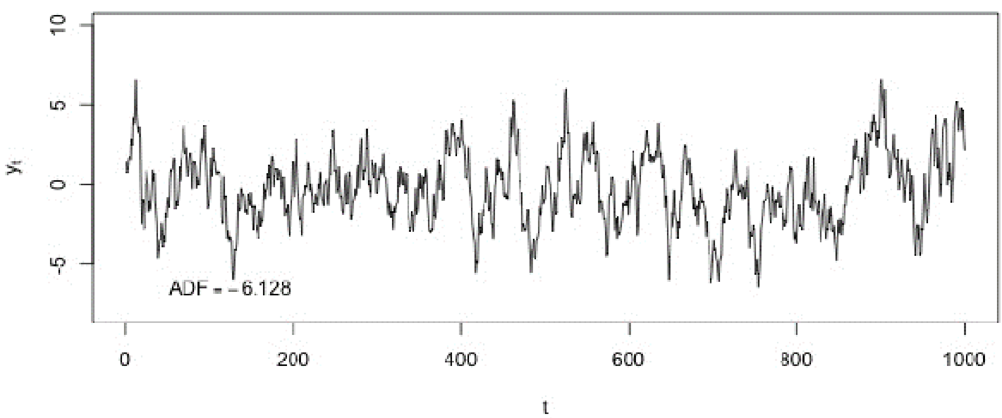
De manera general podemos expresar una serie de tiempo en términos de su distribución de probabilidad conjunta

$$F(c_1, c_2, \cdots, c_n) = \Pr\,(x_1 \leq c_1, x_2 \leq c_2, \cdots x_n \leq c_n)$$

Donde las distribuciones marginales pueden expresarse como

$$F_t(c) = \Pr\,(x_t \leq c)$$

Realice una gráfica de una serie de tiempo cualquiera e indique en ella en dónde se pueden observar estas definiciones.



Ponemos como ejemplo el ruido blanco

Sabemos que el ruido blanco esta dodo por $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Esta grafica la podemos entender como una colección de variables aleatorias en un tiempo t

Cada uno de esos puntos los definimos como x_t t siendo un punto en el tiempo, y xt como el valor que toma una variable en un tiempo dado

Pregunta 3

Demuestre que la función, definida por: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right)$ es una distribución de probabilidad.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Entonces

$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(x-\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)2} \qquad \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(x-\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} dx$

Tenemos:

$w = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma} \qquad dw = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} dx \quad => \quad \sqrt{2}\sigma dw = dx$

Observamos que se hace 1 σ y en la segunda se hace 1 ambas, $\sqrt{2}$ y $\sqrt{\pi}$ por lo que resulta el 1 que esperamos.

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2} \sqrt{2}\sigma \, dw = \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2} dw = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = 1$$

Obteniendo como resultado final:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$

Pregunta 4

A partir de la definición de la distribución gaussiana, X tiene una función de densidad de probabilidad:

$$fx\,(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{(x-\mu)^\wedge 2}{2\sigma^2})$$

De la definición del valor esperado de una variable aleatoria continua:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, fX\,(x) dx$$

Así que:

$$E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x\, exp(-\frac{(x-\mu)^\wedge 2}{2\sigma^2}) dx$$

$$= \frac{\sqrt{2\sigma}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2\sigma t} + \mu) exp(-t^2) dt \qquad sustituyendo\ t\ = \frac{x-\mu}{\sqrt{2\sigma}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{2\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} t\, exp(-t^2)dt \;+\; \mu\int_{-\infty}^{\infty} exp(-t^2)\, dt\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{2\sigma}\left[-\frac{1}{2}exp(-t^2)\right]_{-\infty}^{\infty} + \mu\sqrt{\pi}\right)\ (Integral\ Gaussiana)$$

$$= \frac{\mu\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}}\ \ EXP\ tiende\ a\ 0\ e\ infinito$$

$$= \mu$$

Pregunta 5

Calcule el valor esperado de la variable aleatoria dada Y_t definida por $Y_t = \cos(X_t)$. Si la distribución de probabilidad de X_t es $\frac{|sen(x)|}{4}$ y

1. $X_t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

   Solución

   Lo primero que hacemos es obtener la integral para ver si es una distribución de probabilidad para saber si puedo sacar el valor esperado.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|sen(x)|}{4}dx$$

   Como dentro de la gráfica del seno, $\frac{\pi}{2}$ queda dentro de la parte positiva, podemos quitarlo de forma inmediata por lo que queda:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sen(x)}{4}dx$$

   Obtenemos:

$= -\frac{\cos(x)}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{0-(-\cos(0))}{4}$ = ¼

Como obtenemos $\frac{1}{4}$ como respuesta y el esperado es 1, entonces no es considerada distribución de probabilidad, por consiguiente, no podemos obtener el valor esperado.

2. $X_t \in [0, \pi]$

   Solución
   Lo primero que hacemos es obtener la integral para ver si es una distribución de probabilidad para saber si puedo sacar el valor esperado.

$$\int_0^{\pi} \frac{|sen(x)|}{4} dx$$

   Como dentro de la gráfica del seno, π queda dentro de la parte positiva, podemos quitarlo de forma inmediata por lo que queda:

$$\int_0^{\pi} \frac{sen(x)}{4} dx$$

   Obtenemos:

$$= -\frac{\cos(x)}{4} |_0^{\pi}$$

$$= \frac{1-(-1)}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Como obtenemos $\frac{1}{2}$ como respuesta y el esperado es 1, entonces no es considerada distribución de probabilidad, por consiguiente, no podemos obtener el valor esperado.

3. $X_t \in [0, 2\pi]$
   Solución
   Lo primero que hacemos es obtener la integral para ver si es una distribución de probabilidad para saber si puedo sacar el valor esperado.

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{|sen(x)|}{4} dx$$

Como dentro de la gráfica del seno, 2π no queda dentro de la parte positiva, así que no podemos quitarlo de forma inmediata como las anteriores, por lo que queda:

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{sen(x)}{4} dx + \int_{0}^{2\pi} -\frac{sen(x)}{4} dx$$

Obtenemos:

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Como obtenemos 1 como respuesta y el esperado es 1, entonces es considerada distribución de probabilidad, por consiguiente, podemos obtener el valor esperado y lo obtenemos de la siguiente manera:

$$\mu_{yt} = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \cos\left(\frac{|sen(x_t)|}{4}\right) dx$$

Obteniendo como resultado:

$$= \frac{6.18539}{2\pi} = 0.984435$$

Pregunta 6

Calcule la auto covarianza γ(s, t) del modelo de medias móviles dado por $x_t = \frac{1}{3}(w_{t-2} + w_{t-1} + w_t)$ donde $w_t \sim N(0, \sigma_w^2)$.

Cuando s = t, tenemos:

$$\gamma_v(t,t) = \frac{1}{9} cov\{(w_{t-1} + w_t + w_{t+1}), (w_{t-1} + w_t + w_{t+1})\}$$
$$= \frac{1}{9}[cov(w_{t-1}, w_{t-1}) + cov(w_t, w_t) + cov(w_{t+1}, w_{t+1})]$$
$$= \frac{3}{9}\sigma_w^2$$

Cuando s = t + 1

$$\gamma_v(t+1,t) = \frac{1}{9}cov\{(w_t + w_{t+1} + w_{t+2}),(w_{t-1} + w_t + w_{t+1})\}$$
$$= \frac{1}{9}[cov(w_t, w_t) + cov(w_{t+1}, w_{t+1})]$$
$$= \frac{2}{9}\sigma_w^2$$

Pregunta 7

Calcule la auto covarianza γ(s, t) del modelo de la caminata aleatoria con drift dada por

$$x_t = \delta t + \sum_{k=1}^{t} w_t$$

Donde $w_t \sim N(0, \sigma_w^2)$

$$\gamma(s,t) = \mathrm{cov}(x_s, x_t) = \mathrm{cov}\left(\delta s + \sum_{j=1}^{s} w_j, \delta t + \sum_{k=1}^{t} w_t\right)$$

$$= E\left[\left(\delta s + \sum_{j=1}^{s} w_j - \delta s\right)\left(\delta t + \sum_{k=1}^{t} w_k - \delta t\right)\right] = E\left[\sum_{j=1}^{s} w_j \sum_{k=1}^{t} w_k\right]$$

Suponiendo $s < t$

$$= E\left[\sum_{j=1}^{s} w_j \left(\sum_{j=1}^{s} w_j + \sum_{k=s}^{t} w_k\right)\right]$$
$$= E\left[\sum_{j=1}^{s} w_j^2 + \sum_{j=1}^{s} w_j \sum_{k=s}^{t} w_k\right]$$
$$= s\sigma_w^2 + 0 = s\sigma_w^2$$

Pregunta 8

Calcule la autocovarianza γ(s,t) del modelo de medias móviles dado por xt=Acos(2πωt+ϕ) +mt donde mt∼N(0,σ2w).

Primero calcularemos la media de x_t

E[Acos(2πωt+ϕ) +mt] = E[Acos(2πωt+ϕ)] + E[mt]

Ya que el valor esperado de un coseno con todas sus variables definidas es el mismo coseno podemos

$E[A\cos(2\pi\omega t+\phi)] + E[mt] = A\cos(2\pi\omega t+\phi) + E[mt] = A\cos(2\pi\omega t+\phi)$

Ahora calculando la covarianza como sabemos que el valor esperado de x_t es la parte del coseno sin el ruido.

$\gamma(s,t) = E[(x_s - \mu_s)(x_t - \mu_t)] = E[(A\cos(2\pi\omega s+\phi) + m_s - \mu_s)(A\cos(2\pi\omega t+\phi) + m_t - \mu_t)]$

$= E[(A\cos(2\pi\omega s+\phi) + m_s - A\cos(2\pi\omega s+\phi))\ (A\cos(2\pi\omega t+\phi) + m_t - A\cos(2\pi\omega t+\phi))]$

$= E[m_s m_t] = 0$

Pregunta 9

Demuestre que la correlación cruzada dada por $\rho xy(s,t) = \frac{\gamma xy(s,t)}{\sqrt{\gamma x(s,s)\gamma y(t,t)}}$ está acotada por $-1 \leq \rho xy(s,t) \leq 1$.

Ya que $|\gamma xy(s,t)|^2 \leq \gamma x(s,s)\gamma y(t,t)]$, consecuentemente pasa

$$\sqrt{|\gamma_{xy}(s,t)|^2} \leq \sqrt{\gamma_x(s,s)\gamma_y(t,t)}$$

Por lo que, obtenemos

$$\frac{\gamma xy(s,t)}{\sqrt{\gamma x(s,s)\gamma y(t,t)}} \leq \frac{\gamma xy(s,t)}{\sqrt{\gamma xy(s,t)^2}}$$

$$\frac{\gamma xy(s,t)}{\sqrt{\gamma x(s,s)\gamma y(t,t)}} \leq \frac{\gamma xy(s,t)}{|\gamma xy(s,t)|}$$

$$|x| = x \ si\ x > 0\ y - x\ si\ x \leq 0$$

Llegamos a la desigualdad

$$\frac{\gamma xy(s,t)}{-\gamma xy(s,t)} \leq \frac{\gamma xy(s,t)}{\sqrt{\gamma x(s,s)\gamma y(t,t)}} \leq \frac{\gamma xy(s,t)}{\gamma xy(s,t)}$$

Y concluimos

$-1 \leq \rho xy(s,t) \leq 1$

Pregunta 10

Dado el modelo $x_t=\frac{1}{2}(w_{t-1}+w_t)$. Compruebe si cumple las tres propiedades necesarias para ser considerado estacionario (en sentido amplio), es decir, compruebe si cumple:

1.La media (el valor esperado) es una constante que no depende del tiempo.

Como $Wt \sim N(0, \sigma^2_w)$, entonces

$x_t=\frac{1}{2}(w_{t-1}+w_t)$

$E[X_t] = \frac{1}{2}E[w_{t-1} + w_t] = \frac{1}{2}(E[w_t] + E[w_{t-1}]) = 0$

Media constante y no dependiente del tiempo

2.La función de autocovarianza $\gamma(s,t)$ dependerá en s y t únicamente por su diferencia $|s-t|$.

Sea $|s-t| = h$

$\gamma(s,t) = cov(X_s, X_t) = E[(x_s - \mu_s)(x_t - \mu_t)] = E[(x_h - \mu_h)(x_0 - \mu_0)]$

$E[(\frac{1}{2}(w_{s-1}+w_s) - \mu_s)(\frac{1}{2}(w_{t-1}+w_t) - \mu_t)]$

Como mencionamos antes la media de el modelo es 0 ya que es un promedio entre dos valores de ruido blanco cuales ambos tienen media 0, por lo tanto, ambas medias en t y s son 0.

$E[(\frac{1}{2}(w_{t-1}+w_t))(\frac{1}{2}(w_{t-1}+w_t))] = E[\frac{1}{4}(w_s w_t + w_s w_{t-1} + w_{s-1} w_t + w_{s-1} w_{t-1})] =$

$\frac{1}{4}(E[w_s w_t] + E[w_s w_{t-1}] + E[w_{s-1} w_t] + E[w_{s-1} w_{t-1}])$

Ahora veamos el caso $h = 1$

$\frac{1}{4}(E[w_s w_{s-1}] + E[w_s w_{s-2}] + E[w_{s-1} w_{s-1}] + E[w_{s-1} w_{s-2}])$

De esto 3 valores se hacen 0 y queda

$\frac{1}{4}E[w_{s-1}^2] = \frac{\sigma^2}{4}$

Con el caso $h = 0$

$\frac{1}{4}(E[w_s w_s] + E[w_s w_{s-1}] + E[w_{s-1} w_s] + E[w_{s-1} w_{s-1}]) = \frac{1}{4}(E[w_{s-1}^2] + E[w_s^2]) = \frac{\sigma^2}{2}$

Y en el caso $h > 1$ tenemos, digamos 2

$\frac{1}{4}(E[w_s w_{s-2}] + E[w_s w_{s-3}] + E[w_{s-1} w_{s-2}] + E[w_{s-1} w_{s-3}]) = 0$

Por lo tanto, la autocovarianza solo depende de s y t únicamente por su diferencia y nos da

$\gamma(s,t) = \frac{\sigma^2}{4}$ cuando $|s-t| = 1$, $\gamma(s,t) = \frac{\sigma^2}{2}$ cuando $s=t$ y $\gamma(s,t) = 0$ cuando $|s-t| > 1$

Entonces la función de autocovarianza no depende del tiempo.

3. La varianza debe ser finita para todo tiempo t.

$Var(x_t) = E[(x_t - \mu)^2] = E[(\frac{1}{2}(w_{t-1} + w_t) - 0)^2] = E[\frac{1}{4}{w_{t-1}}^2 + \frac{1}{4}{w_t}^2 + \text{prod. cruzados}] = \frac{\sigma^2}{4} + \frac{\sigma^2}{4} = \frac{\sigma^2}{2}$

Por ende, es finita

En caso de cumplirlas, calcule su función de autocorrelación y grafíquela.

$\rho(h) = \frac{\gamma(\mathrm{h})}{\gamma(0)} = \frac{\gamma(\mathrm{h})}{\sigma^2}$

Sea h = 0, entonces tenemos

$$\frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

Sea h = 1, entonces tenemos

$$\frac{\frac{\sigma^2}{4}}{\sigma^2} = \frac{1}{4}$$

Sea h > 1, entonces tenemos

$$\frac{0}{\sigma^2} = 0$$