UNIVERSIDAD SAN IGNACIO DE LOYOLA

CÁLCULO DE UNA VARIABLE

INTEGRAL INDEFINIDA

CONTENIDOS

- INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS
- MÉTODO DE SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

LOGROS ESPERADOS

- ✓ Resuelve problemas de contexto intra y extra matemático usando método de integración por partes y sustitución trigonométrica.
- ✓ Resuelve problemas de contexto intra y extra matemático aplicando integrales trigonométricas.
- ✓ Resuelve problemas de contexto intra y extra matemático usando método de sustitución trigonométrica.

SABERES PREVIOS

Antes de iniciar el estudio, es recomendable tener bien asentados los conceptos básicos asociados a:

- ✓ Modelamiento de funciones.
- ✓ Identidades trigonométricas.
- ✓ Antiderivadas.
- ✓ Reglas de básicas de integración.

SABERES PREVIOS

Resuelva los siguientes ejercicios en su cuaderno, luego compare las soluciones con sus compañeros.

1. ¿La primitiva de una función es única? Justifique

   ¿Qué relación habrá entre dos primitivas distintas, si las hubiera, de la misma función?

2. Calcule la integral indefinida de la función constante definida por $f(x) = 0$.

3. Calcule:

   a. $\int (x^3+2x^2-6)dx$ b. $\int (sen\, x - x^{-3})dx$

   c. $\int \sqrt[3]{x+1}\, dx$ d. $\int e^{-3x+1}\, dx$

REFLEXIONE

Si se quiere calcular la integral indefinida $\int (x+2)dx$

¿ Qué método de integración usaría? Resuelva la integral.

Ahora, si al integrando le multiplicamos por el factor $\sqrt{x^2-2x+5}$ se tiene la integral: $\int (x+2)\sqrt{x^2-2x+5}dx$

- ¿Será suficiente usar el método de cambio de variable para calcular dicha integral?
- ¿Existirá algún otro método de integración que permita calcular la integral?

INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS

INTEGRALES DE LA FORMA $\int \mathbf{sen}^{m}(u)\mathbf{cos}^{n}(u)du$

Caso 1

Si $\boldsymbol{m}$ es un entero positivo impar y $\boldsymbol{n}$ cualquier número real, se factoriza dentro del integrando $\mathbf{sen}\boldsymbol{udu}$ y $\mathbf{sen}^{\boldsymbol{m-1}}(\boldsymbol{u})$ se transforma en términos de $\mathbf{cos}\boldsymbol{u}$.

EJEMPLO 1

Calcule la siguiente integral

$$\int sen^3 x(\sqrt[3]{\cos x})^4 dx$$

Resolución:

INTEGRALES DE LA FORMA $\int \mathbf{sen}^{m}(u)\mathbf{cos}^{n}(u)du$

Caso 2

Si $\boldsymbol{n}$ es un entero positivo impar y $\boldsymbol{m}$ cualquier número real, se factoriza dentro del integrando $\mathbf{cos}\boldsymbol{udu}$ y $\mathbf{cos}^{\boldsymbol{n-1}}(\boldsymbol{u})$ se transforma en términos de $\mathbf{sen}\boldsymbol{u}$.

EJEMPLO 2

Calcule la siguiente integral

$$\int sen^{3/5}(3x)\cos^5(3x)dx$$

Resolución:

INTEGRALES DE LA FORMA $\int \mathbf{sen}^{m}(u)\mathbf{cos}^{n}(u)du$

Caso 3

Si $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$ son enteros positivos pares, se usan las identidades:

$$\mathbf{sen}^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2} \quad \mathbf{y} \quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$$

EJEMPLO 3

Calcule la siguiente integral

$$\int sen^2 x cos^2 x dx$$

Resolución:

INTEGRALES DE LA FORMA $\int \tan^m(u)\sec^n(u)du$ y $\int \cot^m(u)\csc^n(u)du$

Caso 1

Si $\boldsymbol{m}$ es un entero positivo impar y $\boldsymbol{n}$ cualquier número real, se factoriza dentro del integrando $\mathbf{sec}\,u\,\mathbf{tan}\,u\,du$ (o $\mathbf{csc}\,u\,\mathbf{cot}\,u\,du$) y las tangentes (cotangentes) restantes se transforman a secantes (o cosecantes)

Caso 2

Si $\boldsymbol{n}$ es un entero positivo par y $\boldsymbol{m}$ cualquier número real, se factoriza dentro del integrando $\mathbf{sec}^2 u\,du$ (o $\mathbf{csc}^2 u\,du$) y las secantes (o cosecantes) restantes se transforman en tangentes (o cotangentes)

Identidades a usar

$$1 + tan^2\alpha = sec^2\alpha \qquad 1 + cot^2\alpha = csc^2\alpha$$

EJEMPLO 4

Calcule la siguientes integrales

a) $\int tan^2(x)sec^4(x)dx$

b) $\int tan^3(x)sec^3(x)dx$

Resolución:

EJEMPLO 5

Calcule la siguiente integral:

$$I = \int \frac{tan^3 x}{(secx)^{\frac{4}{3}}}\, dx$$

Resolución:

Paso 1. Primero la expresión dada a integrar se descompone convenientemente.

$$\mathrm{I} = \int (tan^3 x)(secx)^{-\frac{4}{3}} dx = \int (tan^2 x)(secx)^{-\frac{7}{3}}. secx. tanxdx$$

Paso 3. $\mathrm{I} = \int (sec^2 x - 1)(secx)^{-\frac{7}{3}} d(secx)$

Paso 4. $\mathrm{I} = \int (secx)^{-\frac{1}{3}} d(secx) - \int (secx)^{-\frac{7}{3}} d(secx) + C$

Paso 5. Finanalmente $\mathrm{I} = \frac{3}{2}(secx)^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{4}(secx)^{-\frac{4}{3}} + C$

EJEMPLO 6

Determine la integral $$I = \int sec^4(ax)\sqrt{tan(ax)}dx$$

Resolución:

Paso 1. Primero la expresión dada a integrar se descompone convenientemente.

$$\mathrm{I} = \int sec^2(ax)\sqrt{tan(ax)}sec^2(ax)dx$$

Paso 2. Tomando $u = \sqrt{tan(ax)} \quad \rightarrow u^2 = tan(ax)$

$$2udu = asec^2(ax)dx$$

Paso 3. $I = \frac{1}{a}\int(u^4+1)(2u^2)du = \frac{1}{a}\int(2u^6 + 2u^2)\,du = \frac{2}{a}\left(\frac{u^7}{7} + \frac{u^3}{3}\right) + c$

Paso 4. Finalmente $I = \frac{2}{a}\left(\frac{\sqrt{tan(ax)}^7}{7} + \frac{\sqrt{\tan(ax)}^3}{3}\right) + C.$

INTEGRALES DE PRODUCTOS SENO-COSENO CON DIFERENTES ÁNGULOS

Identidades a usar:

$$\operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx) = \frac{1}{2}\left[\cos\big((m-n)x\big) - \cos\big((m+n)x\big)\right]$$

$$\operatorname{sen}(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}\big((m-n)x\big) + \operatorname{sen}\big((m+n)x\big)\right]$$

$$\cos(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left[\cos\big((m-n)x\big) + \cos\big((m+n)x\big)\right]$$

EJEMPLO 7

Determine las siguientes integrales

$$a) \int \cos(4x)\cos(9x)\,dx$$

$$b) \int \cos(6-2x)\,\mathrm{sen}(4x)\;dx$$

Resolución:

EJEMPLO 8

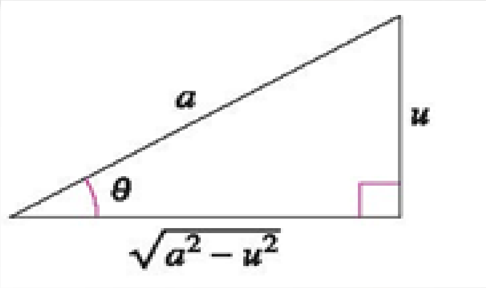
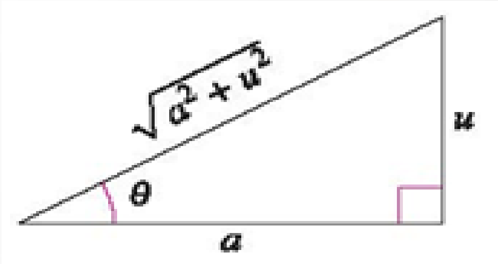
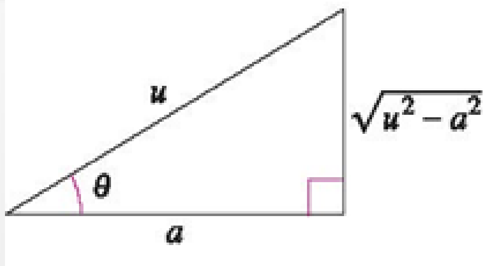
Determine la integral

$$I = \int sen(3x)sen(7x)\cos(4x)dx$$

Resolución:

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

CAMBIOS TRIGONOMÉTRICOS

Radical que contiene la función integrando	Sustitución o cambio de variable	Triángulo rectángulo a usar
$\sqrt{a^2 - u^2}\,, a > 0$	$u = a\mathrm{sen}\theta$ $du = a\cos\theta\, d\theta$	
$\sqrt{a^2 + u^2}\,, a > 0$	$u = a\tan\theta$ $du = a\sec^2\theta d\theta$	
$\sqrt{u^2 - a^2}\,, a > 0$	$u = a\sec\theta$ $du = a\sec\theta\tan\theta d\theta$	

EJEMPLO 9

Determine las siguientes integrales

$a) \int \frac{1}{\sqrt{x^2+25}}dx$ $b) \int \frac{1}{\sqrt{x^2-36}}dx$ c) $\int \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}dx$

Resolución:

EJEMPLO 10

Calcule la siguiente integral

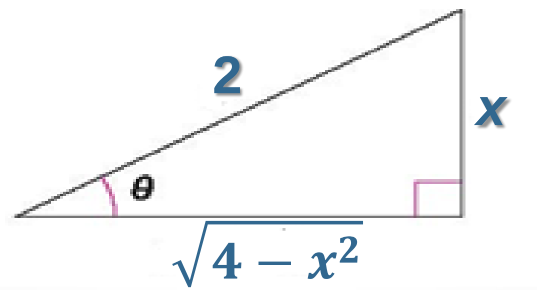
$$I = \int \frac{x^2}{(4-x^2)^{5/2}}\,dx$$

Resolución:

Paso 1: $I = \int \frac{x^2}{(\sqrt{4-x^2})^5}\,dx$

$x = 2sen\theta$

$dx = 2cos\theta d\theta$



Paso 2. Luego reemplazando

$$I = \int \frac{(4sen^2\theta)2.cos\theta d\theta}{(\sqrt{4-4sen^2\theta})^5} = \frac{1}{4}\int \frac{sen^2\theta.cos\theta d\theta}{cos^5\theta}$$

Paso 3. Luego $I = \frac{1}{4}\int \frac{sen^2\theta}{cos^4\theta}d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{sen^2\theta}{cos^2\theta}\left(\frac{1}{cos^2\theta}\right)d\theta$

Paso 4. $I = \frac{1}{4}\int \tan^2\theta \, . \, sec^2\theta \, d\theta = \frac{1}{4}\int (tan\theta)^2 \, d(tan\theta)$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{tan^3\theta}{3}\right) + C = \frac{tan^3\theta}{12} + C$$

Paso 5. Finalmente se regresa a la variable original x, donde

se tiene:

$$I = \frac{1}{12}\left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^3 + C$$

EJEMPLO 11

Calcule las siguientes integrales

a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{25-4x^2}}$, $\quad x\epsilon \left]-\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right[$

b) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-a^2}}$, $\quad a > 0$

c) $\int \frac{x+2}{(-x^2+2x+3)^{\frac{3}{2}}}dx$

d) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-4e^{2x}}}dx$

Resolución:

CONCLUSIONES

01

En las integrales cuyo integrando involucran funciones trigonométricas se debe tener presente las distintas identidades trigonométricas.

02

Si el integrando contiene alguno de los siguientes radicales $\sqrt{\boldsymbol{a^2-u^2}}$, $\sqrt{\boldsymbol{a^2+u^2}}$ o $\sqrt{\boldsymbol{u^2-a^2}}$ $(\boldsymbol{para\ a>0})$ use el cambio trigonométrico $\boldsymbol{u=a\mathrm{sen}\theta}$, $\boldsymbol{u=a\tan\theta}$ o $\boldsymbol{u=a\sec\theta}$, respectivamente.

.

.

REFERENCIAS

[1] Larson, R. y Edward, B. (2011) Cálculo. 9ª ed. México, D.F.: McGraw-Hill.

[2] Stewart, J. (2010) Cálculo de una variable conceptos y contextos. 4ª ed. México. Cengage

[3] Larson, R. y Edward, B. (2010) Cálculo 2: de varias variables. 9ª ed. México: McGraw-Hill

[4] Thomas, G. B. (2006) Cálculo una variable. 11ª ed. México: Pearson

[5] Kong, Maynard (2004). Cálculo diferencial. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.


Gracias


Gracias