

7 TD 7. Revision

Exercice 7.1: (*Nombre de permutations de n objets discernables.*) On doit asseoir en rang 4 américains, 3 français et 3 anglais. Les personnes de même nationalité doivent rester ensemble. Combien de dispositions peut-on imaginer ?

Exercice 7.2: (*Nombre de permutations de n objets parmi lesquels n_1 sont indiscernables entre eux, n_2 sont indiscernables entre eux, \dots , n_r objets sont indiscernables entre eux.*) Supposez maintenant que l'ordre dans le quel les 4 américains et les 3 anglais sont combiné dans leur respectives sous-groupes n'est pas important. Combien de dispositions peut-on imaginer ?

Exercice 7.3: (*Nombres d'arrangements et combinaisons de r objets parmi n .*) De combien de manières peut-on choisir r objets parmi n si l'ordre de tirage est significatif ? Et si l'ordre n'est pas significatif ?

Exercice 7.4: Combien d'anagrammes différents peut-on faire avec le mot *assassinat* ?

Exercice 7.5: Un groupe de 3 filles et 3 garçons vont au cinéma et s'asseoient en rang.

- Combien de rangs différents peuvent-ils former ?
- Même question si les garçons doivent rester ensemble et les filles aussi.
- Même question si seuls les garçons doivent rester ensemble.
- Même question si deux personnes de même sexe doivent jamais voisiner.

Exercice 7.6: Dans un groupe de 8 femmes et 6 hommes, on doit former un comité de 3 hommes et 3 femmes. Combien de comités différents peut-on former si :

- 2 des hommes refusent d'être ensemble dans le comité ?
- 2 des femmes refusent d'être ensemble dans le comité ?
- 1 homme et 1 femme refusent d'être ensemble dans le comité ?

Exercice 7.7: Huit nouveaux et nouvelles professeur.e.s vont être envoyé.e.s dans 4 écoles.

- De combien de façons peut-on répartir 8 professeur.e.s (indistinguables) dans les 4 écoles, en veillant à ce que toutes les écoles aient au moins un.e professeur.e ?
- Combien y a-t-il d'affectations possibles, c'est-à-dire, si on considère que les professeur.e.s sont désormais distinguables et que certaines écoles peuvent se retrouver sans professeur.e ?
- Qu'en est-il du nombre d'affectations si l'on impose que chaque école recevra exactement deux professeur.e.s ?

Exercice 7.8: Quelle est la probabilité de tirer au moins un 6 lorsqu'on jette un dé quatre fois ?

Indication : Calculer d'abord la probabilité de pas tirer un 6.

Exercice 7.9: On jette deux dés. Quelle est la probabilité que qu'au moins un d'entre eux montre 6, sachant que les deux résultats sont différents ?

Exercice 7.10: Deux dès sont jetés et les résultats sont enregistrés. Soit A l'événement "la somme des dés est impaire", par B l'événement "au moins l'un des dés montre 1" et par C l'événement "la somme des dés vaut 5". Décrire les événements suivants.

- $A \cap B$,
- $A \cup B$,
- $\overline{A \cap B}$,

Exercice 7.11: Une main de poker de 5 cartes est appelée *main pleine* si elle comprend 3 cartes de même valeur/rang et 2 autres cartes, aussi de même valeur/rang. Une main pleine comprend donc trois cartes d'une valeur (p.ex. 3 ♡, 3 ♠, 3 ♣) plus une paire (p.ex. $K \spadesuit$, $K \diamondsuit$). Quelle est la probabilité de se voir distribuer une main pleine ?

Exercice 7.12: On considère 3 cartes à jouer de même forme. Cependant, les deux faces de la première carte ont été colorées en noir, les deux faces de la deuxième carte en rouge, tandis que la troisième carte a une face noire et l'autre rouge. On mélange les trois cartes au fond d'un chapeau puis une carte tirée au hasard en est extraite et placée au sol. Si la face apparente est rouge, quelle est la probabilité que l'autre soit noire ?

Exercice 7.13: Une maladie affecte une personne sur 1000 dans une population donnée. Un examen permet de diagnostiquer cette maladie avec une fiabilité de 99% lorsque cette maladie est effectivement présente. En revanche, pour un individu sain, la probabilité de faux positif est de 0,1% (c'est-à-dire, dans 0,1% des cas, le test sera positif alors que la personne n'est pas malade). Si un test est positif, quelle est la probabilité que l'individu soit effectivement malade ? **Indication :** Considérer les événements M = "Être malade" et son complémentaire \bar{M} , ainsi que l'événement P = "test positif".

Exercice 7.14: Soit X une variable aléatoire dont la fonction de densité est donnée ci-dessous et dépend d'un paramètre $\lambda > 0$:

$$f(x) = \begin{cases} c\lambda e^{-\lambda x} & (0 \leq x < +\infty) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- (a) Quelle est la valeur de c ?
- (b) Est-elle une densité de probabilité ? Pourquoi ?
- (c) Quelle est la fonction de répartition de X ?

Exercice 7.15: Calculer $E[X]$ et $Var(x)$ pour une variable aléatoire continue X dont la fonction de distribution de probabilité est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 7.16: Soit X une variable aléatoire normale de paramètres $\mu = 3$ et $\sigma^2 = 9$. Calculer :

- (a) $P\{2 < X < 5\}$,
- (b) $P\{X > 0\}$,
- (c) $P\{|X - 3| > 6\}$.