Année universitaire 2022/2023

Site : ☒ Luminy ☐ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☒ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet de : ☒ 1er semestre ☐ 2ème semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 2h
Examen de : L2 Nom du diplôme : Licence d'Informatique
Code du module : SIN3U07TA Libellé du module : Probabilités pour l'informatique
Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Consignes pour tous les exercices

— Décrivez les événements et variables aléatoires nécessaires à modéliser chaque problème.
— Justifiez toutes les réponses, détaillez les formules employées pour expliciter votre raisonnement.
— Les calculs du sujet ont été simplifiés pour pouvoir obtenir la plupart des résultat sans calculatrice.
— Laissez le résultat final sous la forme de fraction ou combinaison, il n'est pas nécessaire de le calculer.

Exercice 1. *(3 points)*
Combien de symboles différents peut-on obtenir dans chaque alphabet décrit ci-dessous ?

1. Chaque caractère de l'alphabet Braille, destiné aux aveugles, est formé de points obtenus en piquant la feuille de papier à travers au moins un des 6 trous d'une grille rectangulaire.
   ☞ (1 point) $2^6 - 1 = 31$ caractères (au moins 1 trou, zéro trous n'est pas possible)

2. Chaque caractère codé en Morse, utilisé pour transmettre des messages par télégraphe, est composé d'une séquence de 1 à 4 signaux courts (.) et longs (_).
   ☞ (1 point) $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$ caractères

3. Chaque caractère simple de l'alphabet coréen (hangul) est une séquence composée d'une voyelle et de 2 consonnes, choisies parmi 10 voyelles et 14 consonnes différentes, dans n'importe quel ordre. [1]
   ☞ (1 point) 2 cas de figure :
   Soit les deux consonnes sont différentes :
   $10 \times 14 \times 13 \times 3!$

   Soit les deux consonnes sont identiques :
   $10 \times 14 \times 1 \times \frac{3!}{2!}$ (on divise par 2! car une permutation des consonnes donne le même caractère)
   Au total, on aura $\boxed{11340}$ caractères.
   La question ne définissant pas si les consonnes sont différentes, on accepte la réponse $10 \times 14 \times 13 \times 3!$

Exercice 2. *(2 points)*
Un jeu de loterie est composé de deux grilles de numéros parmi lesquels choisit 6 nombres, dont :
— 5 numéros "ordinaires" dans une grille comportant les nombres de 1 à 49
— 1 "numéro chance" dans une grille comportant les nombres de 1 à 10.
Une expérience consiste à choisir 6 nombres comme décrit ci-dessus.

1. Quelle est la taille de l'ensemble fondamental de cette expérience ?
   ☞ (1 point) $\binom{49}{5} \times \binom{10}{1}$
   On choisit 5 nombres parmi 49 (l'ordre n'est pas important) puis on choisit 1 nombre parmi 10.

2. Quelle est la probabilité de choisir une combinaison contenant deux nombres identiques ?
   ☞ (1 point)
$$\frac{\binom{10}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{48}{4}}{\binom{49}{5} \times \binom{10}{1}}$$
   On commence par choisir le "numéro chance" parmi 10, puis on choisit ce même numéro dans la grille "ordinaire" (1 parmi 1), puis il reste 4 numéros à choisir parmi les 49 numéros ordinaires non choisis.

1. Version simplifiée pour cet exercice

Exercice 3. *(2 points)*

Une variable aléatoire continue X est définie par la fonction de densité ci-dessous :

$$f(x) = \begin{cases} 30(x^4 - 2x^3 + x^2) & x \in [0,1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Quelle est la valeur de l'espérance de $E[X]$ de cette variable aléatoire ?
   ☞ (1 point)

$$E[X] = \int_0^1 30(x^4 - 2x^3 + x^2)x\,dx = 30\left[\frac{x^6}{6} - \frac{2x^5}{5} + \frac{x^4}{4}\right]\Bigg|_0^1 = 30\left[\frac{1}{6} - \frac{2}{5} + \frac{1}{4}\right] = 30\left[\frac{10 - 24 + 15}{60}\right] = \boxed{\frac{1}{2}}$$

2. Quelle est la valeur de la variance $Var(X)$ de cette variable aléatoire ?
   ☞ (1 point)

$$E[X^2] = \int_0^1 30(x^4 - 2x^3 + x^2)x^2\,dx = 30\left[\frac{x^7}{7} - \frac{2x^6}{6} + \frac{x^5}{5}\right]\Bigg|_0^1 = 30\left[\frac{1}{7} - \frac{2}{6} + \frac{1}{5}\right] = 30\left[\frac{30 - 70 + 42}{7 \times 30}\right] = \boxed{\frac{2}{7}}$$

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{2}{7} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2}{7} - \frac{1}{4} = \frac{8-7}{28} = \boxed{\frac{1}{28}}$$

Exercice 4. *(3 points)*

Supposons que 20% des personnes sont gauchères (écrivent avec la main gauche). On choisit un échantillon de 3 personnes et on nomme G le nombre de personnes gauchères dans cet échantillon.

1. **Quelles** sont les valeurs possibles de la variable aléatoire G ? Est-elle discrète ou continue ? Quelle est le nom de sa loi de probabilité ?

   ☞ (1 point) $G(S) = \{0, 1, 2, 3\}$ – discrète – binomiale

2. Quelle est la probabilité d'avoir au moins une personne gauchère dans cet échantillon de 5 personnes ?

   ☞ (1 point) $1 - P\{X = 0\} = 1 - \binom{3}{0}(0,2)^0(8/10)^3 = 1 - (4/5)^3 = 1 - 64/125 = \boxed{61/125}$

3. Quel est le nombre espéré de personnes gauchères dans cet échantillon ?

   ☞ (1 point) $E[G] = np = 0,2 \times 3 = \boxed{0,6}$

Exercice 5. *(2 points)*

Pour être admis.e dans une grande université anglaise, chaque candidat.e doit passer un examen d'admission unique et, selon sa note, la personne sera admise à des parcours plus ou moins sélectifs. Les notes à cet examen d'admission suivent une loi normale de moyenne 550 et variance 900.

Note : exprimez vos réponses en utilisant la fonction de répartition $\Phi(a)$ de la normale centrée réduite.

1. Quelle est la probabilité d'être admis.e si le parcours visé requiert une note minimale de 610 points ?

   ☞ (1 point)

$$P\{X \geq 610\} = P\left\{Z \geq \frac{610 - 550}{30}\right\} = P\{Z \geq 2\} = 1 - P\{Z < 2\} = \boxed{1 - \Phi(2)}$$

2. Quelle est la probabilité d'avoir une note inférieure à 500 points à cet examen ?

   ☞ (1 point)

$$P\{X < 500\} = P\left\{Z < \frac{500 - 550}{30}\right\} = P\{Z < -5/3\} = \boxed{\Phi(-5/3)}$$

Exercice 6. *(2 points)*

Un véhicule peut avoir deux types de pannes : mécaniques ou électriques. La probabilité de panne mécanique est de 0,4. La probabilité de panne électrique est de 0,1 si aucune panne mécanique n'a eu lieu, et de 0,3 si le véhicule présente aussi une panne mécanique.

1. Quelle est la probabilité que le véhicule ait une panne électrique ?

   ☞ (1 point)

   $M \rightarrow$ Panne mécanique $\quad E \rightarrow$ Panne électrique

   $P(M) = 0,4 \quad P(\overline{M}) = 1 - 0,4 = 0,6 \quad P(E|\overline{M}) = 0,1 \quad P(E|M) = 0,3$

   $P(E) = P(E|\overline{M}) \times P(\overline{M}) + P(E|M) \times P(M) = 0,1 \times 0,6 + 0,3 \times 0,4 = 0,06 + 0,12 = \boxed{0,18}$

2. Quelle est la probabilité que le véhicule ait une panne mécanique si une panne électrique s'est produite ?

   ☞ (1 point)

$$P(M|E) = \frac{P(E|M) \times P(M)}{P(E)} = \boxed{\frac{0,12}{0,18} = \frac{2}{3}}$$

Exercice 7. *(2 points)*

X est une variable aléatoire continue de loi uniforme prenant des valeurs dans $[-c, +c]$ avec $c > 0$.

1. Déterminez la fonction de densité de probabilité $f(x)$ de la variable X.

   ☞ (1 point)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2c} & x \in [-c, +c] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Déterminez la valeur de c si on souhaite que la probabilité $P\{X > 1\} = 1/4$.
☞ (1 point)

$$\int_1^c \frac{1}{2c} = \frac{1}{4} \implies \left[\frac{x}{2c}\right]\Big|_1^c = \frac{1}{4} \implies 4(c-1) = 2c \implies \boxed{c = 2}$$

Exercice 8. *(2 points)*

Un jeu consiste à lancer deux dés non biaisés à six faces : un vert et un rouge. Si les deux dés affichent la même valeur, on gagne l'équivalent du carré de la face affichée en euros, sinon on perd la valeur affichée par le dé rouge. Par exemple, si les deux dés tombent sur 4, on gagne 16€, mais si le dé vert tombe sur 4 et le dé rouge tombe sur 6, on perd 6€. On note Y le montant gagné (positif) ou perdu (négatif) lors d'une partie de ce jeu.

1. Quelle est la loi de probabilité de Y, c'est-à-dire, la probabilité de chacune des valeurs possibles ?
☞ (1 point)
$P\{Y = 1\} = P\{Y = 4\} = P\{Y = 9\} = P\{Y = 16\} = P\{Y = 25\} = P\{Y = 36\} = 1/36$
$P\{Y = -1\} = P\{Y = -2\} = P\{Y = -3\} = P\{Y = -4\} = P\{Y = -5\} = P\{Y = -6\} = 5/36$

2. Si on joue à ce jeu plusieurs fois, combien peut-on espérer gagner ou perdre ? Autrement dit, quelle est la valeur espérée du gain Y ?
☞ (1 point)

$$E[Y] = \frac{1+4+9+16+25+36-5-10-15-20-25-30}{36} = \boxed{-\frac{14}{36} = -\frac{7}{18}}$$