Maths

2) Supposons que $P(n)$ soit vraie et montrons ~~que~~ $P(n+1)$

On cherche $P(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

..

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1+4+9 \dots + n^2$

Montrons $p(1)$

$1^2 = 1 \qquad \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$ ami

Supposons $p(n)$ ~~vraie~~ et montrons $p(n+1)$

On cherche à montrer que :

$1+4+9 \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad n^2 ~~+2n+1~~$

$= \frac{(n^2+n)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{2n^3 + n^2 + 2n^2 + n + \dots}{6} \quad (n+1)^2$

$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$

$f \circ h(n, \dots, n) = \sum_{i=1}^{n} n^2 = n^3$

1.4) $f \circ h^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R}^n, (f \circ h)(x) = 0\} = \{0, \dots, 0\} \in \mathbb{R}^n$

1.5) $f \circ g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots y_n) \longmapsto f \circ g(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$\boxed{n = 2}$

$f \circ g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x, y) \mapsto x_1 y_1 + x_2 y_2$

$= \langle x, y \rangle$

Pour n qcq (quelconque

$f \circ g(\{0\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n, \ x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = 0\}$

Exercice n°2

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \qquad (i)$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

2.1) $y = (0, \dots, 0)$

donc l'inegalite (i) est vraie : $0 \leq 0$

2.2) $y \neq (0, \dots, 0)$

1. c'est un polynome du second degré

$$P(\lambda) = \sum_{k=1} (x_k + \lambda y_k)^2$$

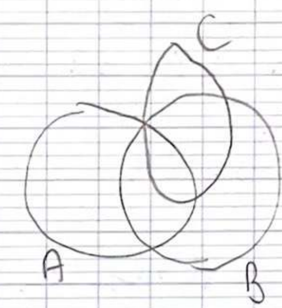
$$= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2 x_k \lambda y_k + y_k^2 \lambda^2$$

Maths

Exercice 1.2.10. Soient A, B, C trois ensembles tels que $A \cup C \subset A \cup B$ et ~~A~~ $A \cap C \subset A \cap B$

Traduction : l'ensemble des éléments de A et C sont compris dans l'ensemble des éléments de A et B

Si $A \cup C \subset A \cup B$ alors $C \subset A \cup B$



Si $A \cap C \subset A \cap B$ alors tout ce que C a dans A, B l'a aussi or C est forcément dans A ou B donc $C \subset B$

Correction :
$A \cup C \subset A \cup B$ et $A \cap C \subset A \cap B$

Soit $x \in C \Rightarrow x \in (A \cup C) \Rightarrow x \in (A \cup B)$
Si $x \notin A$: alors alors $x \in B$
Si $x \in A$: On a $A \cap C \subset A \cap B$
$\Rightarrow x \in (A \cap C)$ donc $x \in (A \cap B)$
Donc $x \in A$ et $x \in B$
Dans ces deux cas $x \in C$, $x \in B$
donc $C \subset B$

Exercice 1.3.4

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$ 2. $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) < 0$

3. Vrai pour toutes fonctions dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
4. Soit toujours + soit toujours −

Exercice 1.3.6

1. $X = A$, $Y = E$ $\quad A \subset E$

$U_A(A) = A \cap A = A$

$U_A(E) = A \cap E = A$

2. Si U_A est surjective

$Y = E$

Si U_A est surjective alors

$\exists X \in \mathcal{P}(E)$ tant que $U_A(x) = E$

$U_A(X) = A \cap X = E$

Si $A \neq E$ c'est impossible

Supposons $A = E$ alors U_A est surjective

$U_A(X) = X \cap E = X$

$X \in \mathcal{P}(E)$

Exercice 1.3.8

2) ~~f^{-1} ... $\log$ ...~~

$f(x) = e^{2x+1} = y$ $\quad$ y est fixé

$\Leftrightarrow \ln(e^{2x+1}) = 2x+1 = \ln(y)$

e est bijective

$\Leftrightarrow x = \frac{\ln(y)-1}{2}$

$f^{-1}(\{y\}) = \left\{\frac{\ln(y)-1}{2}\right\}$

1.) $f^{-1}(\{1, e\}) = \{-\frac{1}{2}, 0\}$

Maths

Exercice 1.4.1

1.

$$\bar{x} = (1/n) \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\bar{x} = \frac{1}{5}(-1 + 0 + 1 + 2 + 3)$$

$$= \frac{1}{5}(5)$$

$$= 1$$

$$\bar{y} = \frac{1}{5}(1 + 0 + 1 + 4 + 9)$$

$$= \frac{15}{5} = 3$$

2. $\cancel{SPE(x, y) = (-1-1 + 0-0 + 1-1 + 2-1 + 3-1)(1-3 + 0-3 + 1-3\ 4-3\ 9-3)}$

$$\cancel{= (-2 - 1 + 1 + 2)(-2 - 3 - 2 + 1 + 6)}$$

$$\cancel{= 0} \qquad = 20$$

3.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} = -1 \times 1 \quad \dots \quad = 20$$

$$SPE(x, y) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i - x_i \bar{y} - \bar{x} y_i + \bar{x}\bar{y})$$

$$\cancel{= \sum x_i y_i n \bar{y} - x_i - \bar{x} y}$$

$$\cancel{= n \bar{x}\bar{y} \sum_{i=1}^{} (x_i y_i}$$

S

$$SPE(x,y) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})$$

$$= n\bar{x} \sum x_i \; n\bar{y} \sum y_i$$

$$SPE(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - x_i \bar{y} - y_i \bar{x} + \bar{x}\bar{y}$$

$$SPE(x,y) = \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i - x_i \bar{y} - \bar{x} y_i + \bar{x}\bar{y})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y} - \sum_{i=1}^{n} \bar{x} y_i + \sum_{i=1}^{n} \bar{x}\bar{y}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}$$

Correction :

1. $SPE(x,y) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i - \bar{x} y_i - \bar{y} x_i + \bar{x}\bar{y}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x} \sum_{i=1}^{n} y_i - \bar{y} \sum_{i=1}^{n} x_i + n\bar{x}\bar{y}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} - n\bar{y}\bar{x} + n\bar{x}\bar{y}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}$$

2. $SCE(x) = SPE(x,x) = \sum_{i=1}^{n} x_i x_i - n\bar{x}\bar{x}$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2$$

Maths

$\lceil \neq \lceil \neq \rceil$

$\lfloor \neq \rfloor$

Exercice 1.4.4

$\{0\} = \bigcap_{h \in \mathbb{R}_*^+} J_h$

1) $\forall h \in \mathbb{R}_+^* \quad 0 \in J_h \Rightarrow 0 \in \bigcap_{h \in \mathbb{R}_+^*} J_h$

$\Rightarrow \{0\} \subset \bigcap_{h \in \mathbb{R}_*^+} J_h$

2) $\forall x \neq 0, \ x \notin \bigcap_{h \in \mathbb{R}_*^+} J_h$

prenons $x > 0$ alors $h = x/2$ et $x \notin]-h, h[$

$\bigcap_{h \in \mathbb{R}_+^*} J_h \subset \{0\}$

$\forall x > 0, \exists h \left(= \frac{x}{2}\right)$
tq $x \notin J_h$
$\Rightarrow x \notin \bigcap_{h \in \mathbb{R}_+^*} J_h$

Exercice 1.5.1

$x R y \iff x^3 - y^3 = 3(x-y)$

$\forall x \in \mathbb{R}, \ x R x \iff x^3 - x^3 = 3(x-x)$
$\iff 0 = 0$

R est réflexif

on cherche $x R y \Rightarrow y R x$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $x R y \iff x^3 - y^3 = 3(x-y)$

$y R x \iff y^3 - x^3 = 3(y-x)$
$\iff x$

Transitivité :

On cherche $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$(x R y \text{ et } y R z) \Rightarrow x R z$

On a $x^3 - y^3 = 3(x-y)$ et $y^3 - z^3 = 3(y-z)$

$\overset{?}{\Rightarrow} x^3 - z^3 = 3(x-z)$

or $\left(x^3 - y^3 = 3(x-y)\right) + \left(y^3 - z^3\right) = 3(y-z)$

$\Rightarrow x^3 - z^3 = 3(x-z)$

$[x] = \{ y \in \mathbb{R},\ x R y \}$

x est fixé dans $\mathbb{R}$

$= \{ y \in \mathbb{R},\ x^3 - y^3 = 3(x-y) \}$

$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$

x est fixé, on cherche y tq

$(x-y)(x^2 + xy + y^2) = 3(x-y)$

$\Leftrightarrow \cancel{(x-y)(x^2 + xy + y^2) - 3x + 3y = 0}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + xy + y^2 - 3 = 0 \\ x - y = 0 \Leftrightarrow x = y \end{cases}$

et $y^2 + xy + x^2 - 3 = 0$

$\Delta = x^2 - 4(x^2 - 3) = \underbrace{-3x^2 + 12}_{x^2 < 4} > 0$

donc $-2 < x < 2$ donc $x \in]-2;2[$

$y_1 = \dfrac{-x - \sqrt{-3x^2 + 12}}{2}$ $y_2 = \dfrac{-x + \sqrt{-3x^2 + 12}}{2}$

Si $x \in]-2;2[$, $[x] = \{ y_1, y_2, x \}$

Maths

$* \ \Delta > 0 \iff |x| = 2 \quad y = -\frac{x}{2}$

$\Rightarrow [x] = \{-\frac{x}{2}, x\}$

$* \ \Delta < 0 \Rightarrow [x] = \{x\}$

$x \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$

Chap 2 Analyse

I Propriétés de $\mathbb{R}$

Propriétés des nombres réels

1) $\forall x \in \mathbb{R}^*, \ x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$

2) $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^*_+)^2 \ x < y \Rightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$

3) $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^*_+)^2, \ \forall n \in \mathbb{N}^* \ x \leq y \Rightarrow x^n \leq y^n$

4) $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ x \leq y \Rightarrow \lambda x \leq \lambda y$

5) $\forall \lambda \in \mathbb{R}_-, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ x \leq y \Rightarrow \lambda x \geq \lambda y$

6) ~~$\forall n > 0 \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$~~

$\forall n > 0, \ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\left|\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$n = 2 \quad |x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$

7) $\forall n \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ on note $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$

$= \sqrt{\sum_{i=1} x_i^2}$

$n = 1 \quad \|x\| = \sqrt{x^2} = |x|$

(i) $\|x\| \geq \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ et $\|x\| = 0 \iff x = (0, \ldots, 0)$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n \ \|\lambda x\| = |\lambda| \ \|x\|$

(iii) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

inégalité triangulaire

On appelle suite de réels et on note $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(x_n)_n$ ou (x_n) toute application de $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$n \mapsto f(n) = x_n$

Remarque : Si (x_n) n'est pas définie qu'à partir d'un certain rang n_0, on écrira $(x_n)_{n\geq n_0} = (x_n)_{n=n_0 \dots +\infty}$

Exemples 1) $x_n = \frac{1}{n}$ $(x_n)_{n\geq 1}$

$x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{3}$ ...

2) $x_{n+1} = 1 + 2x_n \ \forall n \geq 0$

$x_0 = 1$

$x_0 = +1$, $x_1 = 1+2(+1) = 3$, $x_2 = (1+2\times 3) = 7$ ...

3) $x_n = (-1)^n$ $n \geq 0$

$x_1 = (-1)$, $x_2 = (+1)$, $x_3 = (-1)$ ... $x_{2p} = (+1)$ $x_{2p+1} = (-1)$

Def : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On dira que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ quand n tend vers $+\infty$ SSI :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N, n > N, |x_n - l| < \varepsilon$

$|x_n - l| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x_n - l < \varepsilon$

$\iff l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon$

$l = \lim_{n\to+\infty} (x_n)_n$

$x_n = \frac{5}{n}$ $n \geq 1$

$l = 0$

$\forall \varepsilon > 0; \underline{\exists N \in \mathbb{N}};$ $n > N, 0 - \varepsilon < \frac{5}{n} < 0 + \varepsilon$

~~$\frac{n}{5} > \varepsilon \iff n > 5\varepsilon$~~

Maths - Cours

$\frac{n}{5} > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > 5/\varepsilon$

Posons $N > 5/\varepsilon$

alors $\forall n > N > \frac{5}{\varepsilon}$, $-\varepsilon < \frac{5}{n} < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow |x_n - l| < \varepsilon$

$\iff \begin{cases} (x_n)_n \to l \\ n \to +\infty \end{cases}$

$\left(\begin{matrix}(x_n)_n \text{ ne tend pas vers } l \\ n \to +\infty\end{matrix}\right) \iff \begin{cases} \exists \varepsilon > 0 ; \forall N \in \mathbb{N} ; \exists n_0 > N \\ |x_n - l| \geq \varepsilon \end{cases}$

* **exemple** $x_n = (-1)^n$

Supposons que $(x_n)_n \to l$ $\quad n \to +\infty$

donc $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n > N$ $|x_n - l| < \varepsilon$

$\left(\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N \begin{cases} |1 - l| < \varepsilon \\ \text{et } |1 + l| < \varepsilon \end{cases}\right)$

$\Rightarrow \left(\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N \begin{cases} -\varepsilon < 1 - l < \varepsilon \\ -\varepsilon < 1 + l < \varepsilon \end{cases}\right)$

$\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N \begin{cases} 1 - \varepsilon < l < 1 + \varepsilon \\ -1 - \varepsilon < l < -1 + \varepsilon \end{cases}$

prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\quad 1/2 < l < 3/2$ $\quad$ IMPOSSIBLE!

$-3/2 < l < -\frac{1}{2}$

Def $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante)

toute suite vérifiant

$\forall n \in \mathbb{N} ; x_n \leq x_{n+1}$ (resp. $x_n \geqslant x_{n+1}$)

<u>Rappel</u> : $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée (resp. minorée)
SSI $\exists M$ tq $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \leq M$
(resp. $\exists m$ tq $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq x_n$)

~~Supposons que (x_n)~~

Théorème : Toute suite croissante et majorée est convergente
- Toute suite décroissante et minorée est convergente

ex : $x_n = \frac{5}{n}$ $n \geqslant 1$ $x_{n+1} = \frac{5}{n+1} < \frac{5}{n} = x_n$

$-1 \leq x_n \forall n$

Déf : $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \to +\infty$ SSI
$\forall M \in \mathbb{R} ; \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N$ $x_n > M$

- $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \to -\infty$ ssi
$\forall m \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N$ $x_n < m$

II Les Séries :

<u>**Def**</u> : Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments dans $\mathbb{R}$, on note $S_n \sum_{k=0}^{n} U_k = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

On dit que la série de terme général U_n est convergente SSI $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite quand $n \to +\infty$
On note $\sum_{k=0}^{+\infty} U_k$ cette limite (si elle existe)

Maths

Exemple : $U_n = U_0 k^n$ $\quad$ U_0 fixé dans $\mathbb{R}$. $k \neq 0$

$U_0 = 2$ $\quad$ $U_1 = 2k$

$U_2 = 2k^2$

$\vdots$

$$S_n = U_0 + U_0 k + \dots + U_0 k^n$$
$$= U_0 (1 + k + \dots + k^n)$$
$$= U_0 \frac{(1 - k^{n+1})}{1-k} \quad \text{si } k \neq 1$$

$$S_n = U_0 (1 + k + \dots + k^n)$$
$$k S_n = U_0 (k + \dots + k^n + k^{n+1})$$
$$(1-k) S_n = U_0 - U_0 k^{n+1}$$

Si $k \neq 1$ alors $S_n = U_0 \frac{(1 - k^{n+1})}{1-k}$

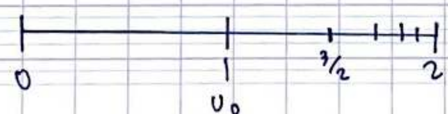
• Si $|k| < 1$

$$k^{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $S_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} U_0 \frac{1}{1-k}$

$$S_n = U_0 + U_0 k + \dots + U_0 k^n$$
$$= U_0 (1 + k + \dots + k^n)$$
$$= \frac{U_0 (1 - k^{n+1})}{1-k} \quad \text{si } k \neq 1$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} U_0 k^n = U_0 \frac{1}{1-k} \qquad U_0 = 1 \quad k = 0{,}5$$



- Si $k = 1$

$$S_n = v_0 \left(\underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{(n+1) \text{ fois}}\right) = (n+1) v_0 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad (v_0 > 0)$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} v_n = +\infty$$

- Si $k = -1$ Si $n = 2p$ $S_n = \dfrac{v_0\left(1 - (-1)^{2p+1}\right)}{1-(-1)}$

$$= v_0 \frac{2}{2} = v_0$$

Si $n = 2p+1$ $S_n = \dfrac{v_0\left(1 - (-1)^{2p+2}\right)}{2} = 0$

- Si $k > 1$
alors $\sum_{k=0}^{+\infty} v_n = +\infty$

- Si $k < -1$ (S_n), n'a pas de limite.

Exemple :

$P(\text{pile}) = P(\text{face}) = \frac{1}{2}$

$\Omega = \{1, 2, 3, 4 \dots\} = \mathbb{N}^*$

$p(1) = \frac{1}{2}$; $P(2) = \frac{1}{4}$ $P(3) = \frac{1}{8}$ $P(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$P(\text{pile}) = p$ $P(\text{face}) = q = 1 - p$

$P(1) = p$; $P(2) = q \times p$; $P(3) = q^2 \times p$; $P(n) = q^{n-1} p$

Maths

$u_n = u_0 k^n \qquad u_n = \frac{p}{q} \times q^n = pq^{n-1} = P(n)$

$u_0 = p/q \qquad q \in]0;1[$

$k = q$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{u_0}{1-k} = \frac{u_0}{1-q} = u_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} P(n)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} P(n) = \frac{p/q}{p} - \frac{p}{q} = \frac{1-p}{q} = \frac{1-p}{q} = \frac{q}{q} = 1$$

Exemple :

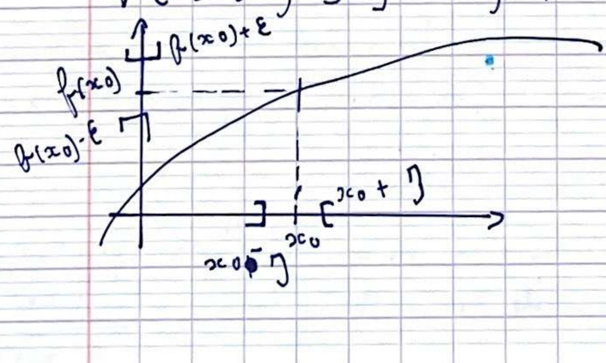
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$
- $\cos(\omega) = 1 - \frac{\omega^2}{2} + \frac{\omega^4}{4!} - \frac{\omega^6}{6!} + \dots$

$$S_n = u_0 \frac{(1-k^{n+1})}{1-k}$$

III Fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Def : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f est continue en $x_0 \in \mathbb{R}$ SSI

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$



η = êta

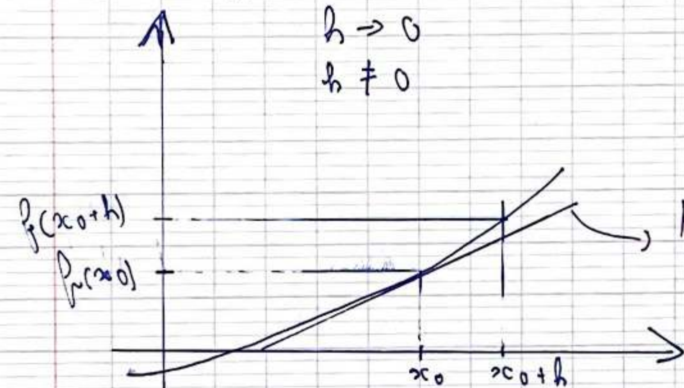
$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \iff -\varepsilon < f(x) - f(x_0) < \varepsilon$$
$$\iff f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

$$|x - x_0| < \eta \iff x_0 - \eta < x < x_0 + \eta$$

Déf : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en x_0 SSI

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \to l = f'(x_0)$$

$h \to 0$
$h \neq 0$



$$\tan \alpha = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Propriétés :

1) Si f et g sont dérivable en x_0 alors $f+g$ l'est aussi et on a $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

2) Si f est dérivable en x_0 et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors λf est dérivable en x_0 et $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$

3) Si f et g sont dérivable en x_0 alors $f g$ est dérivable en x_0 et $(f g)'(x_0) = f'(x_0) \times g + f(x_0) \times g'(x_0)$

4) Si f est dérivable en x_0 et $f(x_0) \neq 0$ alors $g = \frac{1}{f}$ est dérivable en x_0 et $g'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}$

Maths

5) Si f et g sont dérivables en x_0 et $g(x_0) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) =$

$$= \frac{f'(x_0) \times g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

6) $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0) \times f'(x_0))$$

Exemple : x_0 est fixé

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x) = c$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0 \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \quad f(x)$$

$f'(x_0) = 0 \ \forall x_0 \in \mathbb{R}$

2) $f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{x_0 + h - x_0}{h} = 1 \xrightarrow[h \to 0]{} 1$$

$f'(x_0) = 1 ; \forall x_0$

3) $f(x) = ax + b$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(a(x_0+h)+b)-(ax_0+b)}{h} = a$$

4) $f(x) = x^2$ $\quad \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h}$

$$= \frac{x_0^2+2hx_0+h^2-x_0^2}{h} = 2+h$$

$f(x) = x \ \forall x$ $\quad (f \times g)(x) = x^2$

$g(x) = x \ \forall x$

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0) \times g(x_0) + f(x_0) \times g'(x_0)$$

$$= 1 x_0 + x_0 \times 1 = 2x_0$$

Montrons par récurrence que la dérivée en x_0 de $f(x) = x^n$ est $n(x_0)^{n-1}$. $\quad n \in \mathbb{N}^*$

- $P(n)$ est vraie pour $n=1$ et $n=2$
- Supposons la vraie pour n

$$f(x) = x^{n+1} = x \times x^n = g(x) + h(x) = (gh)(x)$$

$g(x) = x \quad h(x) = x^n$

$$f'(x_0) = g'(x_0) \times h(x_0) + g(x_0) \times h'(x_0)$$

$$= 1 \times x_0^n + x_0 \times \underbrace{(n x_0^{n-1})}_{\text{hypothèse de réc}} = (n+1) x_0^n$$

$(P(n+1))$

Maths :

$f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x_0 \neq 0$ $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$

$f(x) = e^{x}$ $f'(x_0) = e^{x_0}$

$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ α fixée

$x \longmapsto x^{\alpha} = e^{\alpha \ln(x)}$

$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$ | $\ln'(x_0) = \frac{1}{x_0}$

$x^n = e^{n \ln(x)}$
$= e^{\ln(x) + n}$
$= \left(e^{\ln(x)}\right)^n$

$x \xmapsto{g_1} \alpha \ln(x) \xmapsto{g_2} e^{\alpha \ln x}$ $g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$y \mapsto e^{y} = g(y)$

$f = g_2 \circ g_1$ $f'(x_0) = g_2'(g_1(x_0)) \times g_1'(x_0) = e^{\alpha \ln(x_0)} \times$

$\frac{\alpha}{x_0} = x_0^{\alpha} \times \frac{\alpha}{x_0} = \alpha x_0^{\alpha - 1}$

$g_1'(x_0) = \frac{\alpha}{x_0}$ $g_2'(y_0) = e^{y_0}$

$x > 0$

$g(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ $g'(x_0) = \frac{1}{2} x_0^{1/2 - 1} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$

$f(x) = e^{x}$ $f'(x_0) = e^{x_0}$

$(\sin)'(x_0) = \cos(x_0)$

$(\cos)'(x_0) = -\sin(x_0)$

À Prouver

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ ... $(\tan)'(x_0) = \frac{1}{\cos^2(x_0)}$

Démonstration : $(\tan(x))' = \dfrac{(\sin(x))'\cos(x) - \sin(x)(\cos(x))'}{(\cos(x))^2}$

$= \dfrac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{(\cos(x))^2} = \dfrac{(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2}{(\cos(x))^2}$

$= \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

sh = sinus hyperbolique
ch, cosinus hyperbolique
th = tangente hyper.

Ex : $sh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\qquad$ $ch\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$th : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{sh\,x}{ch\,x}$

$sh'(x) = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \left(\dfrac{u}{2}\right)' = \dfrac{1}{2}u'$

~~$x \mapsto f \to$~~ $\quad x \xrightarrow{f} -x \xrightarrow{g} e^{-x}$

$(g \circ f)'(x) = (-1) \times e^{-x}$ car $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$

donc $sh'(x) = \dfrac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = ch(x)$

$ch'(x) = \dfrac{e^x + (-e^{-x})}{2} = sh(x)$

$th'(x) = \dfrac{ch(x)\,ch(x) - sh(x)\,sh(x)}{ch^2(x)}$

$= \dfrac{1}{4}\left[(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2\right] = \dfrac{1}{4}\left[(e^x)^2 + (e^{-x})^2 + 2e^x e^{-x}\right.$

$\left. - (e^x)^2 - 2e^{x-x} + e(e^{-x})^2\right] = \dfrac{4e^0}{4} = 1$

Maths

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto h(x) = \ln(x^2+1)$

$$\boxed{(x^n)' = n x^{n-1}}$$

$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2+1 \mapsto \ln(x^2+1)$

$g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$
$y \mapsto g(y) = \ln(y)$

$h = g \circ f$

$h' = g'(f(x)) \times f'(x) = g'(x^2+1) \times 2x$
$= \ln'(x^2+1) \times 2x$
$= \frac{1}{x^2+1} \times 2x = \frac{2x}{x^2+1}$

$h : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$

$\mathbb{R}^* \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x} \longrightarrow \sin(\frac{1}{x})$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$y \mapsto g(y) = \sin(y)$
$g'(y) = \cos(y)$

donc $h'(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x^4+1}$

$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_+ \xrightarrow{g} \mathbb{R}$
$x \to x^4+1 \longrightarrow \sqrt{x^4+1}$

$h'(x) = 4x^3 \times g'(x^4+1) = 4x^3 \times \frac{1}{2\sqrt{x^4+1}} = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+1}}$

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto e^{\sin(x^3+2x)}$

$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g_1} \mathbb{R} \xrightarrow{g_2} \mathbb{R}$
$x \mapsto x^3+2x \mapsto \sin(x^3+2x) \mapsto e^{\sin(x^3+2x)}$

$h(x) = g_2 \circ g_1 \circ f(x) = g_2(g_1(f(x))) = g_2 \circ (g_1 \circ f)\, x$
$= g_2 \circ f_2(x)$

$h'(x) = g_2'(f_2(x)) \times f_2'(x)$

$(g_1 \circ f_1)(x))' = f_2(x)$

$f'_2(x) = g'_1(f_1(x)) \times f'_1(x)$

$= \cos(x^3 + 2x) \times (3x^2 + 2)$

$h'(x) = g'_2(f_2(x)) \times f'_2(x) = e^{\sin(x^3+2x)} \times \cos(x^3+2x)(3x^2+2)$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable $\forall x \in \mathbb{R}$

$g = f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto f'(x)$
$g'(x) = f''(x)$

ex : $f(x) = x^2$ $f'(x) = 2x$ $f''(x) = 2$ $f'''(x) = 0$

on note aussi $f'''(x) = f^{(3)}(x)$

Ex : $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$

$g'(x) = f''(x) = -(-2)x^{-2-1} = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$

$f^{(3)}(x) = 2(-3)x^{-4} = \frac{-6}{x^4}$

Démontrons par récurrence que $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

$P(1)$ est vraie $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

- On suppose $p(n)$, montrons $p(n+1)$

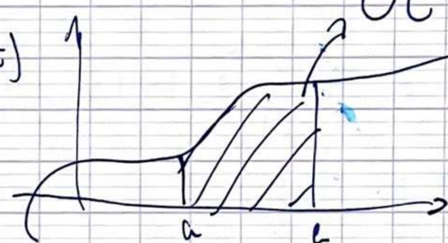
$$g = f^{(n)} : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto g(x) = f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \, n!}{x^{n+1}}$$
$$= (-1)^n \, n! \times x^{-(n+1)}$$

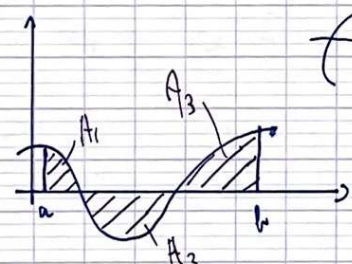
$$g'(x) = (-1)^n \, n! \, (-(n+1)) \, x^{-(n+2)}$$
$$= (-1)^{n+1} \, n! \, (n+1) \, x^{-(n+2)}$$
$$= \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{x^{(n+2)}} = f^{(n+1)}(x) \qquad p(n+1)$$

IV Intégrale de Reimann

Objectif : $f(t)$

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(t)\, dt$$





$$\int_a^b f(t)\, dt = A_1 - A_2 - A_3$$

Propriétés :

1) $\int_a^b (f(t) + g(t))\, dt = \int_a^b f(t)\, dt + \int_a^b g(t)\, dt$

2) $\int_a^b \lambda f(t)\, dt \quad \lambda \int_a^b f(t)\, dt$

3) Si $c \in [a, b]$

alors $\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^c f(t)\, dt + \int_c^b f(t)\, dt$

4) Si $b < a$ $\quad \int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt$

5) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et $a \in \mathbb{R}$ fixé

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

est dérivable $\forall x$ et $F'(x) = f(x)$.

6) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et si

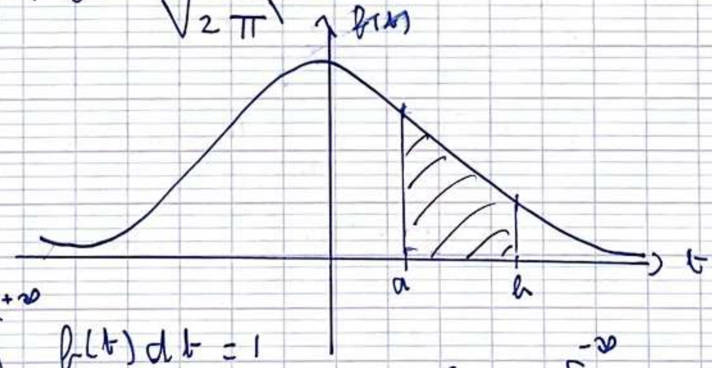
$G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une primitive de f
$(\forall x \in \mathbb{R} \quad G'(x) = f(x))$

alors $\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b$

ex : $f(x) = x \qquad G(x) = \frac{1}{2}x^2$

$\int_1^2 f(t)\,dt = [G(x)]_1^2 = \left(\frac{1}{2}2^2 - \frac{1}{2}\times 1\right) = 3/2$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$$



$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$

$G(x) = \int_{+\infty}^{-\infty} f(t)\,dt$

Maths

$f(x)$	I	$f'(x)$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$x^n \quad n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x^n} \quad n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}^+_*$	$1/x$
$x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\ln(\lvert u(x) \rvert)$	$\{x \text{ tq } u(x) \neq 0\}$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$

1) $\int_a^b \sin(2t+4)\, dt$

$= \int_a^b \frac{1}{2}\, 2 \sin(2t+4)\, dt$

$= \frac{1}{2} \int_a^b 2 \sin(2t+4)\, dt$

$= \frac{1}{2} \int_a^b u' \sin(u)\, dt$ avec $u = 2t+4$, $u' = 2$

$= \frac{1}{2} \left[-\cos(2t+4)\right]_a^b dt$

2) $\int_a^b \frac{5}{\sqrt{t}} + \frac{4}{t} + \frac{2}{t^2}\, dt$

$= \int_a^b \frac{5}{\sqrt{t}}\, dt + \int_a^b \frac{4}{t}\, dt + \int_a^b \frac{2}{t^2}\, dt$

$= 10 \int_a^b \frac{1}{2\sqrt{t}}\, dt + 4\left[\ln(\lvert t \rvert)\right]_a^b + -2 \int_a^b -\frac{1}{t^2}\, dt$

$= 10 [\sqrt{t}]_a^b + 4 [\ln(|t|)]_b^a - 2 \left[\frac{1}{t}\right]_a^b$

3) $\int_a^b \frac{6t^2}{2t^3+4} dt = \int_a^b \frac{u'}{u} dt$ avec $u = 2t^3+4$, $u' = 6t^2$

or $\int_a^b \frac{u'}{u} dt = [\ln(|u|)]_a^b dt$ donc $\int_a^b \frac{6t^2}{2t^3+4} dt = [\ln(|2t^3+4|)]_a^b dt$

Exercice 1.5.1 (Page 76 du poly)
Sur $\mathbb{R}$

$x R y \iff x^3 - y^3 = 3(x-y)$

$[x] = \{ y \in \mathbb{R}$ tq $x R y$

x fixé

$(x^3 - y^3) = (x-y)(x^2 + xy + y^2) = 3(x-y)$

1) $y = x$
2) $x^2 + xy + y^2 = 3 \Rightarrow y^2 + xy + (x^2 - 3) = 0$

$f : E \to F$ $\quad A \subset E \quad B \subset E$
Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

$y \in f(A \cap B)$ donc $\exists x \in A \cap B$ tq $f(x) = y$

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists x \in A \ f(x) = y \\ \exists x \in B \ f(x) = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \in f(A) \\ \text{et} \\ y \in f(B) \end{cases}$$

Maths.

Soit $x_1 \in \mathbb{R}$ et soit $x_2 \in \mathbb{R}$

On pose $S = x_1 + x_2$ et $P = x_1 x_2$

1) Montrer que x_1 et x_2 sont solution de $x^2 - Sx + P = 0$

2) Calculer le discriminant de l'éq. précédente

3) En déduire que $4P \leq S^2$

4) On prend $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$, Montrer que $x_1 + x_2 \leq 2 \Rightarrow x_1 x_2 \leq 1$

5) $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $x_1 > 0, \dots, x_n > 0$ Montrer par récurrence que $x_1 + \dots + x_n \leq n \Rightarrow x_1 \dots x_n \leq 1$

1) $x^2 - Sx + P = 0$

$x^2 - Sx + P = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2$

$= x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2$

Je pose $x = x_1$ $= x_1^2 - x_1^2 - x_2 x_1 + x_1 x_2$

$= 0$ x_1 est bien solution de l'éq. l'équation.

Je pose $x = x_2$ $x^2 - Sx + P = x_2^2 - x_1 x_2 - x_2^2 + x_1 x_2$

$= 0$ x_2 est bien solution de l'éq.

2) $x^2 - Sx + P$

$\Delta = S^2 - 4P$

optionnel
$$\begin{cases} = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 \\ = x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 - 4x_1 x_2 \\ = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 \end{cases}$$

3) Comme l'éq. a des racines $\Delta \geq 0$ donc $S^2 - 4P \geq 0$

donc $S^2 \geq 4P$

donc $4P \leq S^2$

4) on a $x_1 + x_2 \leq 2$ et $x_1 > 0$ $x_2 > 0$

donc $0 < x_1 + x_2 \leq 2$

$\Rightarrow 0 < \frac{x_1 + x_2}{2} \leq 1 \Leftrightarrow 0 < \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 \leq 1$

or je sais que $S^2 \geqslant 4P$

donc $(x_1 + x_2)^2 \geqslant 4 x_1 x_2$

donc $\frac{(x_1 + x_2)^2}{2} \geqslant 2 x_1 x_2$

Donc $1 \geqslant \frac{(x_1+x_2)^2}{2} \geqslant 2 x_1 x_2$

Donc $1 \geqslant 2 x_1 x_2$ Voilou...

5) $4 x_1 x_2 \leqslant (x_1 + x_2)^2$

$\iff x_1 x_2 \leqslant \frac{1}{4} (x_1 \; x_2)^2$

$n \geqslant 2$

$P(n)$ $\left. \begin{array}{l} x_1 > 0, \ldots, x_n > 0 \\ \sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant n \end{array} \right\} \Rightarrow \prod_{k=1}^{n} x_k \leqslant 1$

1) $P(2)$ est vraie

2) Supposons $P(n)$

et soit $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ tq $x_1 > 0, \ldots, x_{n+1} > 0$

$\sum_{k=1}^{n+1} x_k \leqslant n+1$

~~$\exists k_0 \in \{1, \ldots, n+1\}$ tq $x_{k_0} \leqslant 1$~~

~~$\sum_{k=1}^{k_0 - 1} x_k + x_{k_0} + \sum$~~

- Si $\left. \begin{array}{l} \forall k \;\; x_k \leqslant 1 \\ \sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant n \end{array} \right] \Rightarrow \prod_{k=1}^{n} x_k \leqslant 1$

$\Rightarrow \prod_{k=1}^{n+1} x_k \leqslant 1$

- Si $\exists k_0 \;\; x_{k_0} > 1$