

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/304658527>

# Etude dynamique tridimensionnelle du saut à la perche. Caractérisation et modélisation d'une perche de saut.

Thesis · October 1999

DOI: 10.13140/RG.2.1.1791.6409

CITATIONS

6

READS

8,927

1 author:



Julien Morlier

University of Bordeaux

52 PUBLICATIONS 389 CITATIONS

SEE PROFILE

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



Kinematics in swimming [View project](#)



CRISP - ComputeR vision for Sport Performance [View project](#)

# THESE

PRESENTEE A

**L'UNIVERSITE BORDEAUX I**

ECOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGENIEUR

**Par Julien MORLIER**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

**DOCTEUR**

SPECIALITE : Mécanique

---

**Etude dynamique tridimensionnelle du saut à la perche.  
Caractérisation et modélisation d'une perche de saut.**

---

Soutenue le : 20 Octobre 1999

Après avis de MM. : M. DUREY A., Professeur, Université de MARSEILLE      Rapporteurs  
M. SWIDER P., Professeur, Université de TOULOUSE III

Devant la commission d'examen formée de :

M. LANDJERIT B., Professeur, Université de LILLE 2	Président
M. DUREY A., Professeur, Université d'AIX-MARSEILLE 2	Rapporteur
M. SWIDER P., Professeur, Université de TOULOUSE III	Rapporteur
M. CID M., Professeur, Université de BORDEAUX II	Examineurs
M. GERARD A., Professeur, Université BORDEAUX I	
M. MARIOT J. P., Professeur, Université du MAINE-LE MANS	

**Résumé :**

L'amélioration de la performance au saut à la perche nécessite 2 approches complémentaires. Dans un premier temps, il convient de déterminer expérimentalement les paramètres mécaniques qui régissent le mouvement. Cette étude met en œuvre des moyens sophistiqués dans les domaines de la mesure d'effort par jauges d'extensométrie et de déplacements 3D à l'aide de caméras vidéos. Par la suite, une simulation du comportement dynamique de la perche est indispensable afin d'adapter le matériel à la dynamique du perchiste. Néanmoins, elle exige une caractérisation locale de la structure qui permettra de concevoir un modèle précis. L'utilisation d'un code de calcul par éléments finis en dynamique permet de proposer plusieurs types de modélisation. L'ensemble de l'étude ouvre des perspectives quant à l'optimisation du geste et l'amélioration du matériel.

**Mots clés :**

Saut à la perche - dynamique - torseur - dynamomètre - DLT - optimisation - simulation - éléments finis.

**Abstract :**

The improvement of the performance in pole vaulting implicates two approaches. First, we need to determine with experimentation the mechanical parameters involved in the movement of the athlete. This experimental study is realized by using dynamometers and 3D video analysis. Then, a simulation of the dynamic behavior of the pole is necessary in order to adjust the pole to the athlete. However, a local determination of the mechanical parameters of the pole is required to characterize its structure. The finite element code MECANO has been used to carry out different kind of simulations. The results obtained are useful for the improvement of the athlete's movement and the development of the pole.

**Keywords :**

Pole vault - dynamics - system of actions - dynamometer - DLT - optimization - simulation - finite elements.

# SOMMAIRE

---

<b>Introduction.....</b>	<b>1</b>
--------------------------	----------

## **Chapitre 1 - Etat de l'art**

1.1 Introduction.....	5
1.2 Revue bibliographique.....	7
1.2.1 Etudes expérimentales.....	7
1.2.2 Les principaux modèles numériques.....	11
1.3 Directions de la recherche.....	17

## **Chapitre 2 - Techniques expérimentales**

2.1 Introduction.....	21
2.2 Principe de l'analyse vidéo tridimensionnelle.....	21
2.2.1 Introduction.....	21
2.2.2 Méthode de la DLT.....	22
2.3 Principe de l'analyse dynamométrique.....	32
2.3.1 Introduction.....	32
2.3.2 Dynamomètres à six composantes.....	35
2.3.3 Conditionnement et acquisition des signaux.....	41
2.3.4 Etalonnage des dynamomètres.....	43
2.3.5 Exactitude des mesures.....	46
2.4 Système d'analyse expérimental 3D du saut à la perche.....	47
2.4.1 Contraintes en milieu sportif.....	47
2.4.2 Protocole expérimental.....	48
2.5 Conclusions.....	55

## **Chapitre 3 - Modélisation et méthodes de calcul**

3.1 Modélisation du perchiste.....	59
3.1.1 Modèle multicorps.....	59
3.1.2 Tables anthropométriques.....	60

3.2	Traitement du signal.....	63
3.2.1	Recalage des trajectoires.....	63
3.2.2	Calcul des dérivées.....	67
3.3	Modèle de calcul dynamique.....	77
3.3.1	Torseur cinétique de l'athlète en son centre de gravité.....	77
3.3.2	Torseur dynamique et énergie cinétique.....	82
3.3.3	Validation du modèle et des techniques de calcul.....	83
3.3.4	Détermination du torseur d'action du perchiste sur la perche.....	87
3.4	Conclusions.....	92

## **Chapitre 4 - Analyse des résultats**

4.1	Introduction et méthodologie.....	95
4.2	Résultats dynamométriques.....	96
4.2.1	Méthode de l'axe central.....	96
4.2.2	Résultats et commentaires.....	101
4.3	Cinématique et cinétique du perchiste.....	111
4.3.1	Cinématique du geste.....	111
4.3.2	Moment cinétique du perchiste en son centre de gravité.....	113
4.3.3	Energie cinétique du perchiste.....	116
4.4	Torseur d'action exercé par le perchiste sur la perche.....	118
4.4.1	Revue bibliographique.....	118
4.4.2	Résultats expérimentaux.....	119
4.4.3	Etude comparative.....	124
4.5	Influence de la perche sur les efforts développés.....	130
4.5.1	Etude comparative.....	131
4.6	Amélioration du geste.....	137
4.6.1	Principe de la dynamique segmentaire.....	137
4.6.2	Application au saut à la perche.....	138
4.7	Conclusions et perspectives.....	140

## **Chapitre 5 - Caractérisation de la structure perche**

5.1	Introduction et principe du recalage.....	143
5.2	Recalage statique.....	144

5.2.1	Modélisation de la structure perche.....	144
5.2.2	Essais expérimentaux.....	145
5.2.3	Méthode numérique de recalage.....	149
5.2.4	Validation et sensibilité de la méthode.....	161
5.2.5	Résultats, conclusions et perspectives.....	168
5.3	Recalage dynamique.....	170
5.3.1	Essais expérimentaux.....	170
5.3.2	Méthode numérique de recalage.....	173
5.3.3	Validation de la méthode de recalage dynamique.....	177
5.3.4	Limites de la méthode en dynamique.....	178
5.3.5	Conclusions et perspectives.....	178
5.4	Analyse de la structure par essai de perte au feu.....	180
5.4.1	Mesures effectuées.....	180
5.4.2	Synthèse et conclusion.....	190
5.5	Conclusion.....	192

## **Chapitre 6 - Simulation numérique du comportement de la perche**

6.1	Introduction.....	195
6.2	Modèles numériques de la bibliographie.....	196
6.2.1	Simulation statique.....	196
6.2.2	Simulation dynamique.....	203
6.3	Modélisation dynamique du comportement d'une perche de saut.....	207
6.3.1	Modèle éléments finis 2D.....	207
6.3.2	Modèle en effort imposé.....	210
6.3.3	Modèle en déplacement imposé.....	211
6.4	Conclusions et perspectives.....	219

<b>Conclusion.....</b>	<b>221</b>
------------------------	------------

<b>Bibliographie.....</b>	<b>225</b>
---------------------------	------------

# INTRODUCTION

---

L'amélioration d'un geste sportif nécessite une double approche :

- Dans un premier temps, il convient de réaliser une analyse mécanique du mouvement qui permettra de rendre compte de l'ensemble des paramètres mécaniques (torseurs cinématique, cinétique et dynamique) des sous ensembles constitutifs du corps humain afin d'en améliorer le geste ;
- Dans une seconde phase, il est nécessaire d'adapter (le cas échéant) le matériel utilisé par rapport à la technique de l'athlète et donc aux efforts mis en jeu au cours du mouvement ; une caractérisation puis une modélisation de la structure employée par le sportif est alors indispensable afin de simuler l'activité sportive.

Une telle démarche met en relation étroite l'étude expérimentale et la simulation numérique du geste athlétique. Néanmoins, seule une simulation numérique valide permet de concevoir une technique optimale ou alors d'adapter individuellement le matériel au sportif.

Au cours du *chapitre 1*, une brève revue bibliographique des principales études mécaniques sur le saut à la perche sera réalisée et permettra ainsi d'introduire les directions de la présente recherche.

Le *chapitre 2* du mémoire s'attachera à détailler l'ensemble des techniques de mesure utilisées et à montrer les limites de ces outils. Les techniques de mesure ou d'analyse d'un geste sportif reposent sur deux approches différentes mais complémentaires. En effet, il convient dans toute étude dynamique de rendre compte à la fois de la cinématique du mouvement mais aussi d'évaluer les torseurs d'action exercée par le sportif au niveau de ses différents appuis avec le sol ou avec son matériel. L'utilisation de dynamomètres à six composantes permet la mesure des efforts développés par le sportif. De plus, les éléments de réduction des torseurs sont ramenés au point d'application de l'effort (méthode de l'axe central) afin de pouvoir comparer l'ensemble des mesures effectuées sur les moments. La cinématique 3D du sportif est reproduite grâce à des mesures cinématographiques :

le mouvement du sportif est alors filmé par plusieurs caméras dont les images successives permettent de reconstruire les trajectoires 3D des articulations constitutives du corps humain.

Cette technique repose sur l'utilisation de l'algorithme DLT (Direct Linear Transformation) qui permet de transformer les coordonnées 2D d'un point repéré dans le plan des caméras en coordonnées 3D dans un repère de référence.

Les modèles et les techniques de calculs employées pour caractériser la dynamique du perchiste seront présentés dans le *chapitre 3*. En effet, le corps humain est modélisé par un ensemble de segments rigides liés entre eux par des liaisons mécaniques : on parle alors de systèmes polyarticulés ou de modèles multicorps. Des tables anthropométriques permettent également d'attribuer aux segments rigides des caractéristiques d'inertie réalistes. Cette modélisation couplée aux mesures cinématographiques autorise le calcul des différents torseurs mécaniques des sous systèmes (segments corporels) puis du solide (athlète).

Les résultats issus des mesures expérimentales réalisées sur des sauts réels seront présentés puis analysés au *chapitre 4*. L'application des lois de la dynamique des solides indéformables permet, en effet, de déterminer les torseurs d'actions mis en jeu au cours du mouvement. De plus, la recherche du geste optimal peut être approchée en exploitant les mesures réalisées. En conclusion, l'étude expérimentale du geste sportif est indispensable : elle permet de déterminer les efforts développés lors du mouvement et fournit les données d'entrée du modèle numérique.

Le *chapitre 5* sera consacré à la caractérisation puis la modélisation des perches de saut. La simulation numérique du geste ou du comportement du matériel utilisé est nécessaire pour optimiser la performance. Néanmoins, il convient dans un premier temps de modéliser et donc de caractériser les éléments du modèle. Pour le saut à la perche, l'engin joue un rôle très important dans la performance réalisée. Il est donc indispensable de caractériser dynamiquement la structure. Pour ce faire, une méthode de recalage a été développée afin de déterminer localement les caractéristiques statiques (raideur) et dynamiques (masse et amortissement) d'une perche de saut.

La dernière étape du travail, *chapitre 6*, consistera en une simulation du comportement dynamique d'une perche de saut. Ainsi, le code de calcul éléments finis dynamique (MECANO) a permis de réaliser plusieurs simulations du comportement mécanique de la perche. L'exploitation des résultats de ces modèles permettra d'atteindre l'objectif initial : adapter la structure perche aux caractéristiques dynamiques du geste athlétique.



# CHAPITRE 1. ETAT DE L'ART

---

1.1	Introduction.....	5
1.2	Revue bibliographique .....	7
1.2.1	Etudes expérimentales .....	7
1.2.1.1	Kinematic and kinetic factors involved in pole vaulting, BARLOW [Bar73] .....	7
1.2.1.2	Computerized analysis of the pole vault utilizing biomechanics cinematography and direct force measurements, GROS [Gro82] .....	9
1.2.1.3	Analyse cinématique et dynamique du saut à la perche. Recherche d'un critère de performance, VASLIN [Vas93] .....	10
1.2.2	Les principaux modèles numériques.....	11
1.2.2.1	Computer modeling of pole vault, WALKER , KIRMSEY [Wal73].....	12
1.2.2.2	Dynamics of pole vault, HUBBARD [Hub80] .....	13
1.2.2.3	The inverse dynamics problem in pole vaulting, MC GINNIS [McG83] .....	14
1.2.2.4	A 3D simulation method to predict movements in pole vaulting, NICKLASS [Nic87].....	15
1.2.2.5	Modélisation du saut à la perche, DUREY. [Dur89] .....	16
1.3	Directions de la recherche .....	17



## 1.1 Introduction

L'évolution du matériel et d'une technique adaptée ont permis aux sauteurs à la perche d'atteindre de véritables sommets. En effet, BUBKA S. fut le premier athlète à franchir une barre située à six mètres du sol. Cependant, avant d'arriver à de telles altitudes, le saut à la perche a subi une longue évolution jusqu'à l'apparition des perches en matériaux composites au début des années 60. Le bois (1840-1900) fut le premier matériau utilisé pour la réalisation de perches avant d'être remplacé par le bambou (1900-1940) qui le fut lui-même par l'acier (1940-1960). Durant cette période, le record du monde progressa linéairement de 3 mètres à plus de 5 mètres. Avec l'apparition de la fibre de verre, la technique de saut se modifia de manière conséquente, permettant ainsi un gain de performance accru. En quelques années, les records du monde se succédèrent jusqu'à l'avènement de Sergei BUBKA en 1984. En plus de collectionner les médailles et de remporter tous les titres de champion du monde, il fit progresser le record du monde de 5,85 mètres à 6,14 mètres.

La révolution du saut à la perche est donc intervenue avec l'apparition des perches en matériaux composites autorisant des déformations beaucoup plus importantes. Le mouvement du perchiste s'est peu à peu adapté à un tel matériau, l'athlète devant, dans un premier temps, emmagasiner le maximum d'énergie dans la structure avant de bénéficier du retour de la perche pour se faire projeter avec une vitesse maximale au-dessus de la barre. La technique de saut présente différentes phases (figure 1-1), énoncées dans l'ordre chronologique suivant :

- La course d'élan [1] : c'est la phase préparatoire du saut qui conditionne la vitesse horizontale de décollage qui doit être aussi grande que possible ;
- Le planter [2] : c'est l'action qu'effectue le perchiste lorsqu'il place sa perche dans le fond du butoir (piquer) puis qu'il la positionne le plus haut possible au moment de l'impulsion (soulever) ;
- L'impulsion [3] : elle correspond à l'action exercée par l'athlète sur le sol lors de son dernier appui avant le décollage, la perche est alors en contact avec le fond du butoir ;

- Le balancer et le grouper [4] : c'est la phase la plus dynamique du saut, le perchiste utilise ses segments inférieurs qui réalisent un mouvement de rotation autour des hanches, puis l'ensemble autour des épaules afin de transmettre les efforts à la perche par l'intermédiaire des bras ;
- Le renversement et l'extension [5] : ils tendent à placer le corps dans une position favorable pour bénéficier du retour de la perche ;
- Le retournement [6] : il consiste à effectuer une rotation de 180° autour de l'axe longitudinal du corps afin de se retrouver face à la barre ;
- La poussée finale [7] : le perchiste réalise avant de lâcher la perche une dernière poussée verticale qui peut lui permettre d'augmenter sa vitesse ;
- Le franchissement [8] : c'est l'étape finale du saut, le perchiste profite de sa vitesse et de son moment cinétique pour s'enrouler autour de la barre.

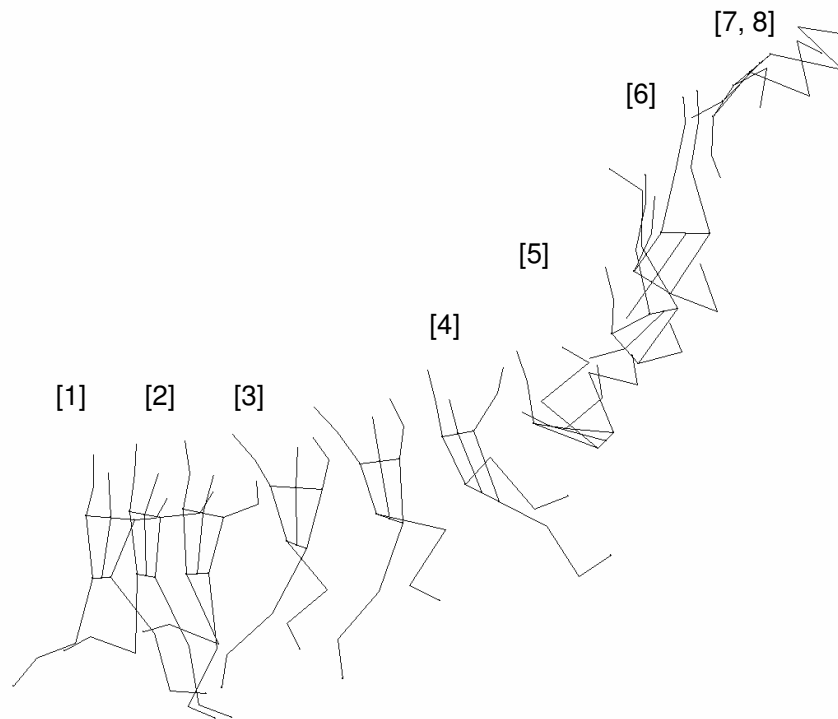


Figure 1-1 : Différentes phases d'un saut à la perche

En définitive, le mouvement peut se décomposer en trois grandes phases. La course d'élan va influencer les conditions initiales (position et vitesse) du saut. La seconde phase jusqu'à la flexion maximale de la perche (qui correspond généralement à la fin du grouper du perchiste) est celle où le perchiste cherche à générer les efforts les plus importants possibles sur la structure afin d'en maximiser l'énergie de déformation. Cette étape nécessite une grande dynamique du bas du corps et un éloignement du centre de gravité par rapport au point d'application des efforts sur la perche afin d'augmenter la force développée sur la perche suivant l'axe vertical et le moment suivant l'axe transverse. Durant la dernière partie du saut, le perchiste profite de l'énergie stockée dans la perche pour se faire projeter au-dessus de la barre. Au moment du lâcher de la perche, il doit donc posséder une vitesse maximale et un moment cinétique important pour pouvoir enrouler la barre.

L'analyse dynamique du geste est donc essentielle dans l'étude du saut à la perche, l'objectif étant de déterminer le mouvement engendrant les efforts optimaux et de trouver une perche ayant un rendement maximal. De nombreuses études mécaniques ont été réalisées mais avec souvent des ambitions différentes. Le paragraphe 1.2 présente une revue des principales études mécaniques du saut à la perche.

## 1.2 Revue bibliographique

*Les recherches menées sur le saut à la perche l'ont été en général par des scientifiques Nord Américains. On peut distinguer les études expérimentales recherchant souvent des critères de performance et les simulations numériques permettant de quantifier l'importance de certains paramètres sur la performance réalisée.*

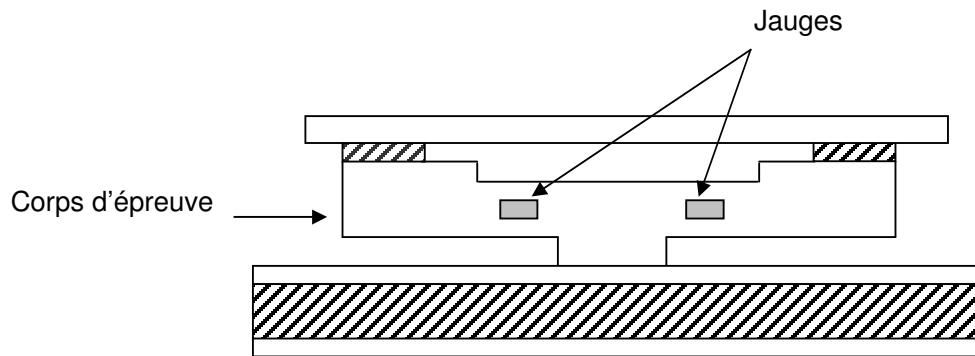
### 1.2.1 Etudes expérimentales

#### 1.2.1.1 *Kinematic and kinetic factors involved in pole vaulting, BARLOW [Bar73]*

Cette thèse réalisée à l'Université d'Indiana fut le premier travail de recherche sur le saut à la perche. Il s'agit d'une étude essentiellement expérimentale dont l'ambition était la mesure des paramètres cinématiques et cinétiques du saut à la perche. L'auteur mit au point un dispositif d'analyse 2D du saut comprenant :

- Deux caméras cinématographiques qui permettaient d'étudier les mouvements du perchiste dans son plan sagittal, le modèle mécanique du sauteur étant constitué de 14 segments rigides ;

- Deux plates - formes de force (figure 1-2) qui permettaient la mesure suivant les axes verticaux et longitudinaux, de la force développée lors du dernier appui de l'athlète avant le décollage ainsi que celle exercée par le système perche – perchiste dans le butoir.



*Figure 1-2 : Capteur de force utilisé par BARLOW*

L'auteur put ainsi calculer les paramètres mécaniques suivants :

- La trajectoire et la vitesse du centre de gravité du perchiste ;
- La durée des différentes phases du saut ;
- L'angle du vecteur vitesse du centre de gravité du perchiste au moment du décollage ;
- La hauteur maximale atteinte par le centre de masse ;
- La durée et le pic des forces appliquées ;
- L'impulsion des forces.

A partir des résultats obtenus sur 11 athlètes différents, l'auteur réalisa une analyse longitudinale des sauts étudiés. Il obtint les conclusions suivantes :

- Lors du décollage, la composante verticale de l'impulsion de l'appui du perchiste sur la piste est aussi importante que la vitesse horizontale du sauteur ;
- La vitesse verticale de décollage joue un rôle non négligeable avec l'utilisation de perche en fibre de verre ;
- Les meilleurs sauteurs initient rapidement le planter de la perche et positionnent leur centre de masse en avant de celle-ci lors du décollage.

### 1.2.1.2 Computerized analysis of the pole vault utilizing biomechanics cinematography and direct force measurements, GROS [Gro82]

Il s'agit de la seconde thèse effectuée aux Etats Unis sur le saut à la perche dont l'ambition fut de quantifier expérimentalement la cinématique et la cinétique du mouvement (moment cinétique et énergie cinétique du perchiste) ainsi que la dynamique des efforts développés par la perche dans le butoir. La modélisation du perchiste est identique à celle mise en place par BARLOW [Bar73]. Deux caméras cinématographiques, filmant à 100 images par secondes furent utilisées. La première, placée à 40 mètres perpendiculairement à la piste d'élan, permet d'analyser le geste dans le plan du saut alors que la seconde fut employée pour déterminer les valeurs des forces s'affichant sur un oscilloscope. Les forces de réaction du butoir sur la perche furent mesurées par un capteur de force bidirectionnel placé au fond du butoir (figure 1-3).

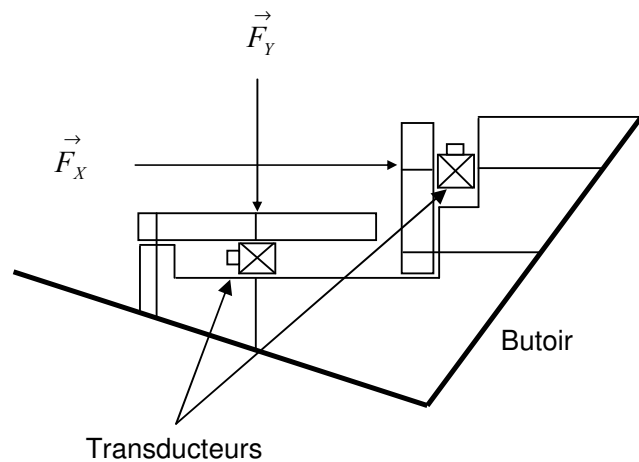


Figure 1-3 : Capteur de force utilisé par GROS

La principale originalité de la recherche fut le calcul du moment cinétique du sauteur en son centre de gravité dans la direction perpendiculaire au plan du mouvement et la détermination de l'énergie cinétique du perchiste. L'auteur compara aussi les variations de quantité de mouvement du perchiste calculées à partir des données cinématographiques et de celles provenant du capteur de force.

### 1.2.1.3 Analyse cinématique et dynamique du saut à la perche. Recherche d'un critère de performance, VASLIN [Vas93]

La thèse de P. VASLIN fut réalisée à l'Université de Bordeaux II en collaboration avec le Laboratoire de Mécanique Physique, UMR CNRS 5469, de l'Université Bordeaux I. Elle a servi de référence à la présente étude. Le dispositif expérimental utilisé comprenait trois caméras vidéos (25 Hertz) et un dynamomètre six composantes placé sous le butoir (figure 1-4). Les caméras 1 et 2 permirent de reconstruire le mouvement 3D du perchiste alors que la troisième caméra, dirigée vers le butoir, détermina les différents déplacements de la perche dans ce dernier. Le capteur, réalisé initialement pour mesurer des efforts de coupe en usinage (Brevet 93-08370 CNRS-LMP), est un dynamomètre de première génération mais son utilisation s'avéra tout de même satisfaisante pour ce type d'application. En outre, le modèle mécanique du perchiste était constitué de 7 segments rigides et les mouvements de la perche furent analysées en disposant 10 marqueurs sur celle-ci.

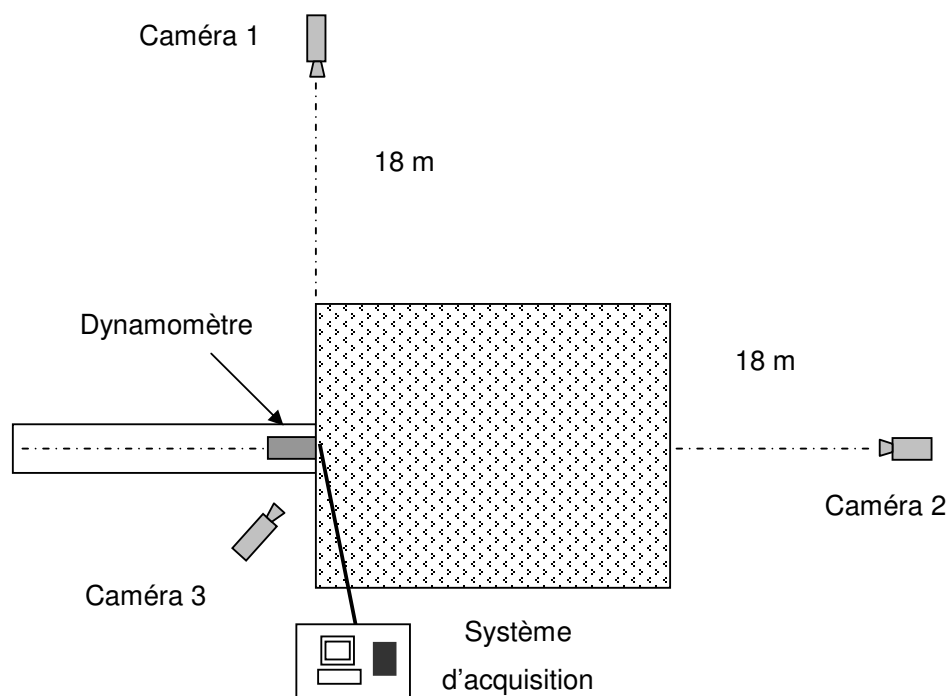


Figure 1-4 : Dispositif expérimental utilisé par VASLIN

L'analyse cinématique 3D du geste, couplée à la mesure des efforts exercés en bout de perche par le butoir, permirent l'étude de plusieurs types de saut (balancier, groupé et complet). Ces différents sauts correspondent aux phases successives d'apprentissage du saut à la perche.



L'auteur réalisa une analyse de cinq sauts au travers de plusieurs paramètres mécaniques :

- Des paramètres cinématiques (longueur de levier, position et vitesse du centre de gravité au décollage, angle du vecteur vitesse au décollage, angle de la corde de la perche au décollage, flexion maximale de la perche, position et vitesse du centre de gravité au moment du lâcher, hauteur atteinte par le centre de gravité et abscisse correspondante) ;
- L'énergie cinétique du sauteur ;
- Les efforts développés par le système perche – perchiste dans le butoir ;
- La variation de quantité de mouvement du perchiste.

En conclusion, les études expérimentales du saut à la perche ne sont pas très nombreuses, cependant, elles sont indispensables et permettent de mesurer les grandeurs mécaniques qui serviront de données dans les simulations numériques. C'est pour cette raison que les modèles numériques, présentés dans le paragraphe suivant, ont tous été précédés d'une analyse cinématique (2D ou 3D) du geste.

### **1.2.2 Les principaux modèles numériques**

Les progrès réalisés par l'informatique au cours des trente dernières années ont permis aux simulations numériques du saut à la perche d'intégrer des modèles de plus en plus complexes. La modélisation de l'athlète et de la perche permettent deux types de simulations :

- La simulation des mouvements du perchiste avec les efforts articulaires comme paramètres d'entrée ;
- La simulation des efforts articulaires du perchiste, les variables d'entrée sont alors les trajectoires des segments composant le modèle de l'athlète.

La plupart des simulations sont bidimensionnelles et les modèles utilisés pour la perche ne prennent pas en compte la dynamique.

Le paragraphe suivant propose d'exposer de manière concise les principaux modèles de la littérature. Une revue plus détaillée des modélisations utilisées pour la perche est présentée au chapitre 6.

### 1.2.2.1 Computer modeling of pole vault, WALKER, KIRMSEER [Wal73]

WALKER et KIRMSEER utilisèrent un modèle de double pendule pour effectuer une simulation 2D du saut à la perche (figure 1-5) :

- Le perchiste est modélisé par un solide de masse  $m$  et d'inertie variable  $I(t)$ . Le centre de gravité du solide est repéré dans le plan du mouvement par les coordonnées  $(x, y)$  et est positionné à une distance variable  $r(t)$  du bout de la perche ;
- Un modèle de poutre élastique en grand déplacement (EULER), ne prenant pas en compte les moments, fut utilisé pour la perche. Celle-ci est reliée au perchiste et au butoir par deux liaisons pivots et possède une rigidité  $\Gamma$  constante dans toute sa longueur  $L$ . Enfin, sa masse et son inertie sont négligées (modèle statique).

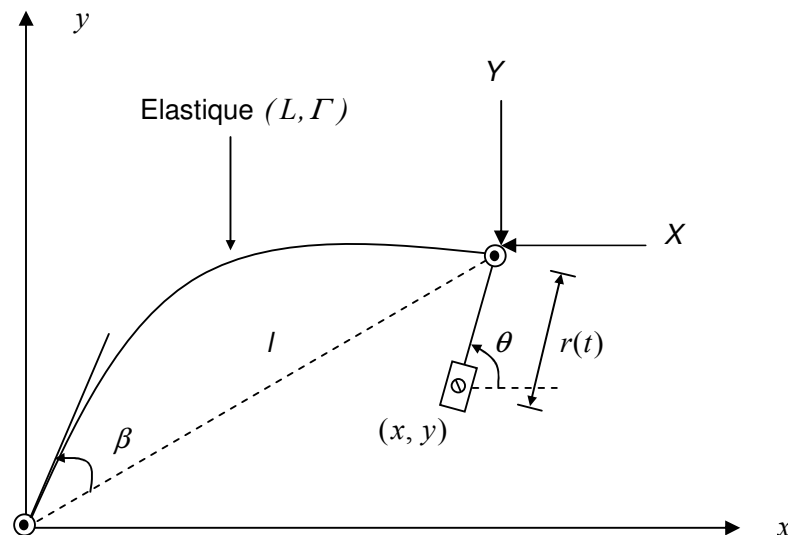


Figure 1-5 : Modèle physique de WALKER et KIRMSEER

Les équations de la mécanique et des relations géométriques conduisent à un système d'équations différentielles, intégrées par une méthode numérique de RUNGE – KUTTA d'ordre 4 avec un incrément de temps de 0.05 secondes. En effet, pour chaque itération, la position du centre de gravité permet le calcul de la longueur de la corde de la perche  $l$  grâce à une relation géométrique simple. En outre,  $l$  est reliée à la force appliquée sur la perche par des intégrales elliptiques du premier et du second ordre. La connaissance du centre de gravité permet donc de déterminer les composantes  $(X, Y)$  de la force exercée sur la perche.

Le principe fondamental de la dynamique relie enfin les inconnues  $(x, y, \theta)$  et leurs dérivées aux composantes  $(X, Y)$  de la force appliquée sur la perche. L'intégration de ces équations différentielles conduit, pour chaque itération, à de nouvelles positions  $(x, y, \theta)$ . En supposant, enfin, que la force reste constante sur chaque intervalle de temps, on peut réitérer le processus jusqu'au lâcher de la perche et donc simuler les trajectoires du centre de gravité du perchiste.

Les paramètres d'entrée de la simulation sont donc :

- La position et la vitesse du centre de gravité du perchiste  $(x, y)$  et  $(\dot{x}, \dot{y})$  ;
- L'angle  $\theta$  et la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  ;
- L'inertie  $I(t)$  et la position du centre de gravité par rapport à la perche  $r(t)$  ;
- La masse  $m$  du perchiste ;
- La rigidité  $\Gamma$  et la longueur  $L$  de la perche.

La modélisation est complète : perche et perchiste, et simple à mettre en œuvre. Cependant, le modèle mécanique ne prend pas en compte les phénomènes dynamiques.

#### 1.2.2.2 Dynamics of pole vault, HUBBARD [Hub80]

Le modèle 2D du saut à la perche réalisé par HUBBARD en 1980, améliora sensiblement celui de WALKER et KIRMSER.

Le perchiste fut modélisé par 3 solides indéformables articulés les uns aux autres par des liaisons pivot (figure 1-6).

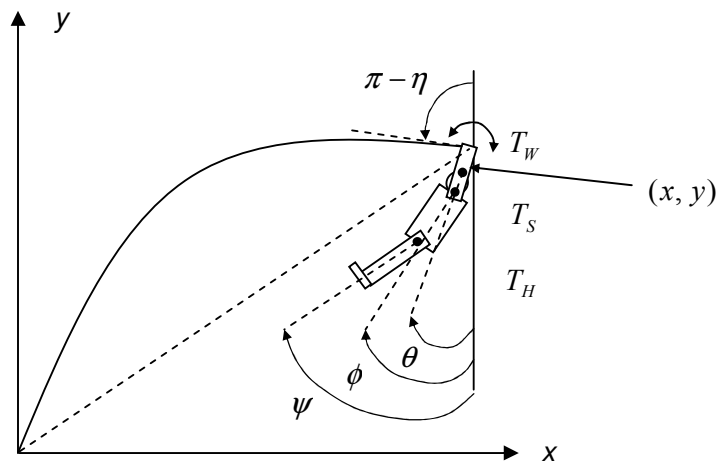


Figure 1-6 : Modèle du saut à la perche, HUBBARD

Le premier solide représente les deux cuisses, les deux jambes et les deux pieds de l'athlète, le second modélise le tronc et la tête, enfin les bras, avant bras et mains pour le troisième. Les mains du perchiste sont liées à la perche par une liaison pivot et  $(x, y)$  représentent les coordonnées du centre de gravité du solide avant - bras et mains.

Le modèle de la perche est identique au modèle de WALKER et KIRMSER mais prend en compte les moments appliqués en son extrémité.

Les actions musculaires sont modélisées par des couples appliqués au niveau des trois articulations :  $T_H$  pour les hanches,  $T_S$  pour les épaules et  $T_W$  pour les poignets. L'évolution temporelle de ces couples «moteurs », ainsi que les conditions initiales sont les données d'entrée de la simulation.

HUBBARD a regroupé sous forme matricielle les équations de mouvement issues du principe fondamental de la dynamique et des déformations élastiques de la perche :

$$A(\bar{x}) \dot{\bar{x}} = D(\bar{x}) \bar{x} + G(\bar{x}) \bar{u} + \bar{h}(\bar{x}) \quad \text{où} \quad \begin{cases} \bar{x} = \left( x, y, \theta, \phi, \psi, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}, T_W, T_S, T_H \right)^T \\ u = \left( T_W, T_S, T_H \right)^T \end{cases} \quad (1-1)$$

Les équations différentielles furent alors intégrées à l'aide d'une méthode de HAMMING du quatrième ordre pour déterminer l'évolution de  $(x, y, \theta, \phi, \psi)$  au cours du saut.

#### 1.2.2.3 *The inverse dynamics problem in pole vaulting, Mc GINNIS [McG83]*

Contrairement aux deux précédents modèles, celui-ci permet le calcul des efforts aux niveaux des différentes articulations du perchiste. Le modèle 2D du perchiste fut constitué de 9 solides rigides (jambes, cuisses, tronc, avant – bras et bras) dont les propriétés mécaniques (masse, position du centre de masse et matrice d'inertie) proviennent des tables anthropométriques de DEMPSTER [Win79].

L'étude du saut s'effectua depuis le décollage jusqu'au lâcher de la perche et consista en la détermination des efforts de liaisons au niveau des articulations. Pour ce faire, le principe fondamental de la dynamique fut appliqué sur chaque solide depuis les segments inférieurs jusqu'aux membres supérieurs. Cependant, le calcul des efforts articulaires au niveau des épaules se révéla impossible, en raison de l'hyperstaticité tronc. Pour lever cette indétermination, l'auteur proposa un modèle équivalent à 7 segments (figure 1-7).

La force de réaction s'exerçant sur l'extrémité de l'avant – bras gauche fut remplacé par une force et un moment s'exerçant sur la main droite. De même, l'effort articulaire sur l'épaule droite représenta une combinaison de l'effort appliqué sur l'épaule gauche et celui exercé sur l'épaule droite.

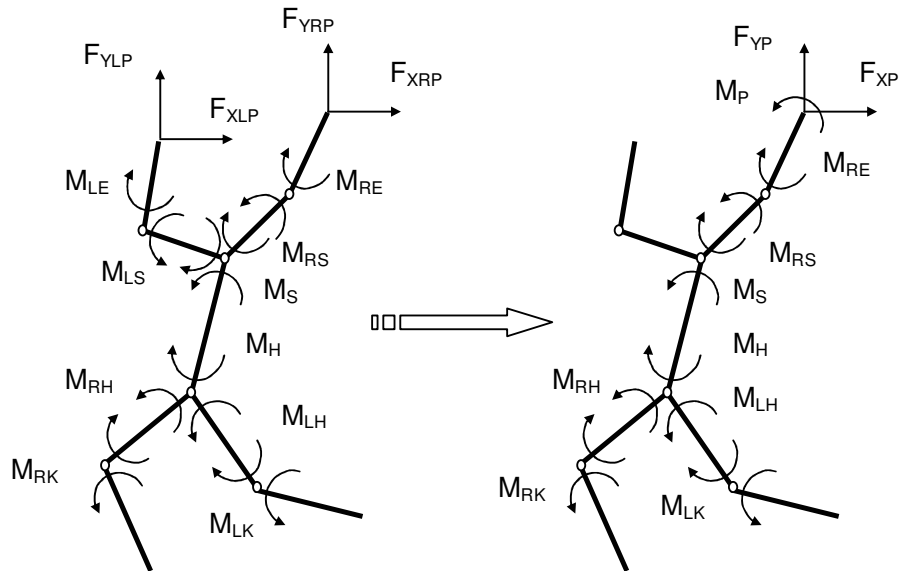


Figure 1-7 : Modèle équivalent de MC GINNIS

Une analyse cinématographique 2D fut réalisée afin de déterminer les trajectoires des centres de gravité des différents segments constituant le modèle du perchiste. Enfin, des splines cubiques permirent de calculer les vitesses et accélérations linéaires et angulaires de ces centres de masse.

Les efforts articulaires calculés furent ensuite utilisés pour simuler des sauts grâce au code de calcul éléments finis ABAQUS.

#### 1.2.2.4 A 3D simulation method to predict movements in pole vaulting, NICKLASS [Nic87]

Il s'agit de la première simulation 3D du saut à la perche qui repose sur une approche assez originale. Le modèle de la perche, présenté en détail au chapitre 6, prit en compte l'hypothèse des grands déplacements et les positions relatives des mains sur l'engin mais ne considéra pas la dynamique des structures déformables : leur masse et leur inertie furent donc négligées.

Le modèle multicorps du perchiste fut constitué de 11 solides rigides : tête, tronc, avant – bras, bras, cuisses et jambes. Les paramètres d'inertie des segments sont issus de tables anthropométriques.

La simulation du mouvement du perchiste s'effectua en trois dimensions depuis le décollage de l'athlète jusqu'au lâcher de la perche. Le modèle numérique repose sur les travaux de DAPENA, sur la simulation des mouvements en chute libre où le moment cinétique du sportif en son centre de gravité reste constant [Dap81]. Pour le saut à la perche, l'athlète possède un moment cinétique et une quantité de mouvement au moment du décollage qui seront les conditions initiales de la simulation. Cependant, les forces exercées par le perchiste sur la perche et la gravité entraînent des variations de ces deux quantités. De plus, la connaissance des positions précédentes des différents segments les uns par rapport aux autres permettent, pour une variation de moment cinétique et de quantité de mouvement donnée, de reconstruire de nouvelles positions des segments corporels. Le modèle de la perche permet enfin pour une position donnée des mains de calculer les efforts développés sur celle-ci. En itérant ce processus, il fut donc possible de simuler les mouvements du perchiste pour des conditions initiales données.

Une analyse cinématographique 3D permet de déterminer les paramètres initiaux de la simulation.

#### 1.2.2.5 Modélisation du saut à la perche, DUREY. [Dur89]

La modélisation du saut à la perche fut effectuée dans le cadre d'une étude menée avec l'entraîneur français Maurice HOUVION. Le modèle reprend les bases établies par HUBBARD en 1980.

Le perchiste est donc modélisé par trois segments rigides auxquels des amortissements fluides ont été rajoutés au niveau de chacune des articulations. Les paramètres d'inertie des solides sont issus des tables de WINTER.

Le modèle de la perche, emprunté à GRINER [Gri84], permet de déterminer une solution analytique du comportement de la perche en terme d'intégrales elliptiques et prend en compte l'application d'un moment fléchissant en bout de perche.

La mise en œuvre des équations conduit à un système d'équations différentielles résolu par intégration numérique en utilisant une méthode du quatrième ordre de RUNGE – KUTTA.

Une analyse cinématographique 3D réalisée avec les meilleurs perchistes français permet de déterminer les données d'entrée de la simulation et fournit à l'entraîneur des renseignements importants sur les différentes phases du saut.

### 1.3 Directions de la recherche

Les performances au saut à la perche sont intimement liées au mouvement du perchiste et à la perche sur laquelle il est en appui. Afin d'améliorer ces performances, il convient de déterminer le mouvement qui générera les efforts les mieux adaptés à une structure donnée, ou alors de concevoir une structure adaptée aux efforts développés par le perchiste.

Afin de caractériser le geste d'un sportif, il est donc nécessaire de calculer les efforts mis en jeu au cours du mouvement. Une analyse vidéo 3D couplée à une étude dynamométrique permet de résoudre un tel problème. L'approche dynamique du geste sportif permet de déterminer les efforts développés par le perchiste sur la perche et permet également de proposer un modèle qualitatif visant à une amélioration de la gestuelle du sportif. Il est aussi intéressant de quantifier l'influence de la perche sur les efforts exercés par le perchiste.

Aucun auteur n'a cherché à déterminer les efforts d'action 3D exercé par le perchiste sur la perche. Seul MC GINNIS [McG83] calcula les efforts 2D développés au niveau de la main supérieure, pour ce faire, il utilisa une technique de calcul itérative sur chacun des segments corporels composant son modèle. Il se heurta alors à l'hyperstaticité du tronc et pour lever l'indétermination, concentra les efforts sur un segment supérieur unique. Une approche plus globale du mouvement en étudiant deux solides : le perchiste, constitué d'un ensemble de corps rigides articulés les uns aux autres par des liaisons mécaniques et la perche, solide fortement déformable, permettrait de calculer les composantes du torseur recherché. De plus en combinant les efforts exercés par le sol lors du dernier appui du perchiste avant le décollage et l'analyse vidéo, il sera alors possible de quantifier les efforts développés par le perchiste sur la perche à partir du contact de la perche dans le butoir.

Cependant, la structure mécanique influence grandement les performances du perchiste. En outre, les auteurs ont pour la plupart utilisé une poutre de TIMOSHENKO pour modéliser la perche. Seul MC GINNIS [McG84] et LUNDBERG [Eke95] eurent une approche dynamique du problème en le modélisant dans ABAQUS. Notre démarche afin de simuler le comportement de la perche sous des sollicitations dynamiques, a été de caractériser mécaniquement sa structure afin de se rapprocher le plus possible de la réalité.

En effet, aucune recherche n'a été menée pour déterminer les caractéristiques mécaniques non homogènes de la perche sur sa longueur. La détermination de celles-ci peut s'effectuer grâce à des méthodes de recalage combinant des essais expérimentaux avec des résultats numériques obtenus par éléments finis.

Enfin, une simulation numérique des déformations de la structure sous des sollicitations dynamiques avec le code de calcul MECANO peut permettre d'optimiser le rendement de la perche pour un effort donné, en s'intéressant à la répartition des énergies cinétique  $T$  et potentielle  $U$ , le long de la perche.



## CHAPITRE 2. TECHNIQUES EXPERIMENTALES

---

2.1	Introduction.....	21
2.2	Principe de l'analyse vidéo tridimensionnelle .....	21
2.2.1	Introduction.....	21
2.2.2	Méthode de la DLT .....	22
2.2.2.1	Principe de reconstruction 3D.....	22
2.2.2.2	Résolution de systèmes linéaires surdimensionnés au sens des moindres carrés.....	29
2.2.2.3	Etalonnage et exactitude des mesures .....	31
2.3	Principe de l'analyse dynamométrique.....	32
2.3.1	Introduction.....	32
2.3.2	Dynamomètres à six composantes .....	35
2.3.2.1	Principe de fonctionnement .....	35
2.3.2.2	Limites du dynamomètre pour la mesure des efforts dynamiques.....	40
2.3.3	Conditionnement et acquisition des signaux .....	41
2.3.4	Etalonnage des dynamomètres .....	43
2.3.5	Exactitude des mesures.....	46
2.4	Système d'analyse expérimental 3D du saut à la perche .....	47
2.4.1	Contraintes en milieu sportif .....	47
2.4.2	Protocole expérimental .....	48
2.4.2.1	Dispositif d'analyse vidéo 3D .....	48
2.4.2.2	Dispositif d'analyse dynamométrique 3D .....	51
2.5	Conclusions .....	55



## 2.1 Introduction

L'analyse mécanique du geste sportif par une approche « corps rigides » nécessite la connaissance des paramètres mécaniques qui régissent son mouvement : torseur dynamique  $[D]$  des solides composant le modèle mécanique et torseur des efforts extérieurs appliqués aux différents solides. Pour ce faire, deux outils d'analyse sont utilisés : l'analyse vidéo tridimensionnelle (3D) permet de reconstruire les mouvements 3D des différents segments corporels et donc d'en déterminer la dynamique alors que les capteurs de force ou dynamomètres fournissent les efforts développés par le sportif lors de ses appuis avec le sol ou les solides sur lesquels il est en contact. La connaissance de ces deux entités est essentielle dans toute approche dynamique du geste sportif, elle permet, en outre, en les combinant, de déterminer les efforts entre les différents solides qui composent le modèle mécanique. Cet aspect expérimental de l'analyse du geste sportif met en œuvre des outils et des techniques modernes dans les domaines de la vidéo, des capteurs de forces, de l'électronique et du traitement du signal. Il est de plus indispensable afin de comprendre le mouvement et d'analyser les efforts mis en jeu avant d'en réaliser un modèle.

Les contraintes dans l'analyse du mouvement sportif sont plus grandes que dans les manipulations en laboratoire, en effet, le système d'analyse ne doit en rien perturber les performances de l'athlète. De plus, l'espace d'analyse est souvent situé en extérieur avec toutes les contraintes qui en découlent : problèmes d'intempéries, de lumières, de températures, de vent, ...

Il est aussi nécessaire de concevoir des instruments de mesure adaptés au travail de terrain répondant donc aux contraintes de légèreté, de mobilité et d'autonomie de fonctionnement.

## 2.2 Principe de l'analyse vidéo tridimensionnelle

*L'analyse vidéo 3D est un moyen peu coûteux et relativement précis qui permet de s'intéresser à la dynamique du geste sportif et ainsi d'en comprendre son fonctionnement.*

### 2.2.1 Introduction

Les techniques de mesure 3D à partir d'images photo ou d'images issues de caméras cinématographiques, appelées stéréo-photogrammétrie, nécessitent pendant longtemps la connaissance des paramètres internes des caméras.

L'utilisation de caméras métriques (dont on connaît précisément les paramètres optiques), très chères, étaient alors indispensables mais peu adaptées aux expérimentations en milieu sportif.

En 1971, ABDEL-AZIZ et KARARA [Abd71] développèrent une méthode qui permit d'appliquer les techniques de la stéréo-photogrammétrie à des caméras classiques (dont on ne connaît pas les paramètres internes). Cette méthode, appelé Direct Linear Transformation (DLT), fut mise au point pour tout type de caméra. Parallèlement, VAN GHELUWE [VGh78] élaborait une technique similaire de reconstruction 3D, basé sur un étalonnage linéaire du volume filmé.

La DLT fut ensuite utilisée pour déterminer des trajectoires 3D de points à partir de films ou de vidéos. En effet une vidéo ou un film n'est qu'une succession d'images (24 images/s pour le format cinématographique, 25 images/s pour le format vidéo européen et 30 images/s pour le format asiatique et américain), la reconstruction 3D est alors appliquée sur chaque image ce qui permet ainsi de déterminer les trajectoires 3D des points filmés.

Les travaux de SHAPIRO [Sha78] démontrèrent la validité de la méthode pour des mouvements dynamiques, en filmant la chute libre d'une balle de golf et en comparant l'accélération de cette dernière avec celle de la pesanteur. L'écart entre l'accélération mesurée de la pesanteur et celle théorique fut inférieur à 5 %.

L'algorithme de reconstruction de la DLT permet à partir des prises de vue d'un même point, réalisées à l'aide d'au moins deux caméras, de reconstruire les coordonnées 3D de ce point. Cet algorithme met en évidence la relation linéaire qui existe entre les coordonnées d'un point sur le plan de l'image numérisée et les coordonnées 3D calculées dans un repère de contrôle. Le dispositif vidéo permettant la numérisation puis l'analyse des images successives est détaillé au paragraphe 2.4.

## **2.2.2 Méthode de la DLT**

### *2.2.2.1 Principe de reconstruction 3D*

Cette partie traitant de la mise en équation du principe de la DLT, est inspiré des travaux de ABDEL-AZIZ et KARARA [Abd71] .

Une caméra vidéo peut se représenter simplement par une boîte munie sur sa face avant d'une petite ouverture (lentille de l'objectif). La lumière, provenant d'un objet situé dans le champ de la caméra, passe par cette ouverture et produit une image inversée dans le fond de la boîte où se trouve le film (plan du film). En suivant le procédé inverse, les images du film peuvent être inversées, élargies puis projetées sur un écran.

En l'absence de distorsions, les images projetées coïncident avec les points d'intersection de la lumière et du plan de projection idéal ( $\Pi$ ), parallèle avec le plan du film et situé à une certaine distance de l'objectif. On définit alors l'axe optique comme l'axe perpendiculaire au plan du film et passant au centre de l'objectif et le point principal  $P_0$  comme l'intersection de cet axe avec le plan du film (figure 2-1).

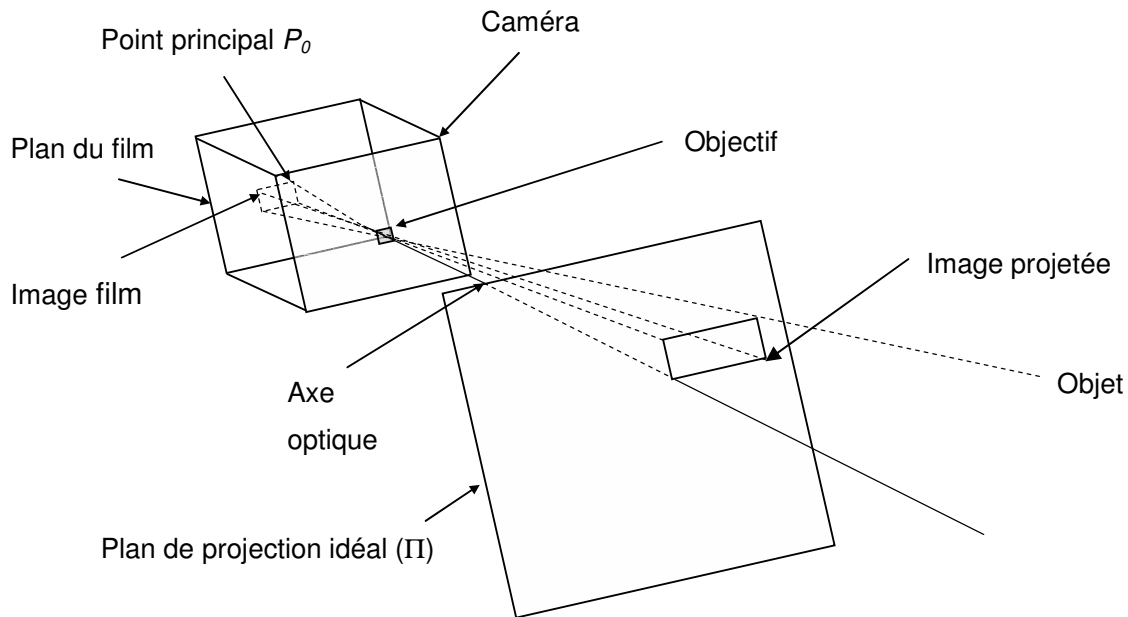


Figure 2-1 : Modèle simplifié d'une caméra

L'objectif de la DLT est d'exprimer les coordonnées  $(U, V)$  dans le plan de digitalisation d'un point d'un objet placé dans le champ d'une caméra par rapport à ses coordonnées 3D dans un repère attaché à une mire de contrôle et cela pour un réglage donné de la caméra (mise au point, profondeur de champ, obturation, ...). En outre, la prise de vue d'un même point d'un objet de l'espace par au moins deux caméras positionnées différemment permet de reconstruire les coordonnées 3D de ce point dans le repère attaché à l'objet de calibration. Le principe de la DLT est basé sur des relations géométriques provenant du modèle simplifié de la caméra énoncé précédemment, l'algorithme de reconstruction prend en compte uniquement les distorsions linéaires suivant les deux axes du plan de digitalisation de l'image et repose sur un étalonnage linéaire du volume filmé.

Dans un premier temps, il convient de définir les différents repères (figure 2-2) :

- Un repère  $\{R_0\}$  attaché à la lentille de l'objectif de la caméra défini par  $(N, \vec{n}_a, \vec{n}_b, \vec{n}_c)$  où  $N$  est le centre de l'objectif et  $\vec{n}_c$  est colinéaire avec l'axe optique ;
- Un repère  $\{R_1\}$  attaché au plan de projection  $(\Pi)$  ayant pour origine un point stationnaire de l'image appelé point de calage  $B$  et pour vecteurs unitaires  $\vec{n}_u$  et  $\vec{n}_v$  colinéaires à  $\vec{n}_a$  et  $\vec{n}_b$  ;
- Un repère  $\{R\}$   $(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  attaché à un objet de contrôle appelé mire de calibration dans lequel seront exprimés les coordonnées 3D du point considéré.

On définit aussi les points et vecteurs importants (figure 2-2) :

- Le point  $I$ , projection d'un point  $O$  de l'objet filmé sur le plan  $(\Pi)$ , de coordonnées  $(u, v)$  dans  $\{R_1\}$  ;
- Le point  $P$ , projection sur le plan  $(\Pi)$  du point principal  $P_0$ , de coordonnées  $(u_0, v_0)$  dans  $\{R_1\}$  ;
- Le vecteur  $\vec{T} = \vec{NI}$  définit la position du point  $I$  dans  $\{R_0\}$  ;
- Le vecteur  $\vec{S} = \vec{NP}$  définit la position du point  $P$  dans  $\{R_0\}$  ;
- Le vecteur  $\vec{Q} = \vec{NO}$  définit la position du point  $O$  dans  $\{R_0\}$  ;
- Le vecteur  $\vec{R} = \vec{AN}$  définit la position du point  $N$  dans  $\{R\}$ , de coordonnées  $(x_N, y_N, z_N)$  ;
- Le vecteur  $\vec{P} = \vec{AO}$  définit la position du point  $O$  dans  $\{R\}$ , de coordonnées  $(x, y, z)$ .



Soit  $(\Theta)$  la matrice de passage de  $\{R_0\}$  vers  $\{R\}$ , on a donc :

$$\begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & \theta_{13} \\ \theta_{21} & \theta_{22} & \theta_{23} \\ \theta_{31} & \theta_{32} & \theta_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{n}_a \\ \vec{n}_b \\ \vec{n}_c \end{pmatrix} \quad (2-3)$$

$$\begin{aligned} \vec{Q} &= [(x - x_N) \theta_{11} + (y - y_N) \theta_{21} + (z - z_N) \theta_{31}] \vec{n}_a + \\ \text{d'où} \quad & [(x - x_N) \theta_{12} + (y - y_N) \theta_{22} + (z - z_N) \theta_{32}] \vec{n}_b + \\ & [(x - x_N) \theta_{13} + (y - y_N) \theta_{23} + (z - z_N) \theta_{33}] \vec{n}_c \end{aligned} \quad (2-4)$$

Les équations 2-2 et 2-4 permettent d'écrire les égalités entre les composantes du vecteur  $\vec{Q}$ , il vient donc :

$$\begin{cases} k(u - u_0) = (x - x_N) \theta_{11} + (y - y_N) \theta_{21} + (z - z_N) \theta_{31} \\ k(v - v_0) = (x - x_N) \theta_{12} + (y - y_N) \theta_{22} + (z - z_N) \theta_{32} \\ -k \left\| \vec{S} \right\| = (x - x_N) \theta_{13} + (y - y_N) \theta_{23} + (z - z_N) \theta_{33} \end{cases} \quad (2-5)$$

On peut alors isoler  $u$ ,  $v$  et  $k$  dans les équations 2-5 pour obtenir les égalités suivantes :

$$\begin{cases} u = \frac{\theta_{11} x + \theta_{21} y + \theta_{31} z + (ku_0 - x_N \theta_{11} - y_N \theta_{21} - z_N \theta_{31})}{k} \\ v = \frac{\theta_{12} x + \theta_{22} y + \theta_{32} z + (kv_0 - x_N \theta_{12} - y_N \theta_{22} - z_N \theta_{32})}{k} \\ k = -\frac{\theta_{13}}{\left\| \vec{S} \right\|} x - \frac{\theta_{23}}{\left\| \vec{S} \right\|} y - \frac{\theta_{33}}{\left\| \vec{S} \right\|} z + \left( \frac{x_N \theta_{13}}{\left\| \vec{S} \right\|} + \frac{y_N \theta_{23}}{\left\| \vec{S} \right\|} + \frac{z_N \theta_{33}}{\left\| \vec{S} \right\|} \right) \end{cases} \quad (2-6)$$

En substituant la valeur de  $k$  dans l'égalité contenant  $u$  et regroupant les constantes, on peut alors écrire pour  $u$  :



$$u = \frac{\left( \theta_{11} - \frac{\theta_{13} u_0}{\|\vec{S}\|} \right) x + \left( \theta_{21} - \frac{\theta_{23} u_0}{\|\vec{S}\|} \right) y + \left( \theta_{31} - \frac{\theta_{33} u_0}{\|\vec{S}\|} \right) z + e}{-\frac{\theta_{13}}{\|\vec{S}\|} x - \frac{\theta_{23}}{\|\vec{S}\|} y - \frac{\theta_{33}}{\|\vec{S}\|} z + d} \quad (2-7)$$

$$\text{avec } e = \left( \frac{\theta_{13} u_0 x_N}{\|\vec{S}\|} + \frac{\theta_{23} u_0 y_N}{\|\vec{S}\|} + \frac{\theta_{33} u_0 z_N}{\|\vec{S}\|} - x_N \theta_{11} - y_N \theta_{21} - z_N \theta_{31} \right) \quad (2-8)$$

$$\text{et } d = \left( \frac{x_N \theta_{13}}{\|\vec{S}\|} + \frac{y_N \theta_{23}}{\|\vec{S}\|} + \frac{z_N \theta_{33}}{\|\vec{S}\|} \right) \quad (2-9)$$

En divisant par  $d$  le numérateur et le dénominateur de l'équation 2-7 puis en regroupant les termes constants, on peut écrire :

$$u = \frac{a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4}{E x + F y + G z + 1} \quad \text{et} \quad v = \frac{b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4}{E x + F y + G z + 1} \quad (2-10)$$

$(u, v)$  représentent les coordonnées du point I dans le plan de projection idéal, or dans la réalité, c'est à dire sur l'image numérisée que l'on analyse, plusieurs sources de déformation apparaissent. Afin de prendre en compte les distorsions dans les directions de  $u$  et  $v$ , on introduit deux facteurs de correction  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .  $U$  et  $V$  sont alors les coordonnées réelles mesurées pour un point I sur l'image numérisée avec :

$$\begin{cases} U = \lambda_1 u \\ V = \lambda_2 v \end{cases} \quad \text{avec } \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad (2-11)$$

On en déduit alors de manière évidente  $(U, V)$  en fonction de  $(x, y, z)$  :

$$\begin{cases} U = \frac{A x + B y + C z + D}{E x + F y + G z + 1} \\ V = \frac{H x + J y + K z + L}{E x + F y + G z + 1} \end{cases} \quad (2-12)$$

Les valeurs  $(A, B, C, D, E, F, G, H, J, K, L)$  sont constantes pour un réglage donné de la caméra et sont des combinaisons des paramètres internes de la caméra  $(\lambda_1, \lambda_2, u_0, v_0, \left\| \vec{S} \right\|)$  et des paramètres externes  $(x_N, y_N, z_N, \theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{21}, \theta_{22}, \theta_{23}, \theta_{31}, \theta_{32}, \theta_{33})$ .

Afin de déterminer ces 11 valeurs, il faut filmer au moins 5 points et  $\frac{1}{2}$  d'un objet de contrôle dont on connaît les coordonnées  $(x_i, y_i, z_i)$  dans  $\{R\}$  puis numériser cette image afin de mesurer pour chaque point les coordonnées  $(U_i, V_i)$  correspondantes, ce qui conduira à 11 équations et 11 inconnues. Evidemment, en surdimensionnant le système, c'est à dire en plaçant un plus grand nombre de points de contrôle, nous allons homogénéiser les valeurs des constantes de la DLT dans le volume définit par ces points. Pour 20 points de calibration par exemple, nous obtenons 40 équations du type :

$$\begin{aligned} A x_i + B y_i + C z_i + D - E U_i x_i - F U_i y_i - G U_i z_i &= U_i \text{ pour } U \\ H x_i + J y_i + K z_i + L - E V_i x_i - F V_i y_i - G V_i z_i &= V_i \text{ pour } V \end{aligned} \quad (2-13)$$

Pour déterminer les 11 constantes de la DLT, il faut résoudre le système surdimensionné suivant :

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 & -U_1 x_1 & -U_1 y_1 & -U_1 z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 & -U_2 x_2 & -U_2 y_2 & -U_2 z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{20} & y_{20} & z_{20} & 1 & -U_{20} x_{20} & -U_{20} y_{20} & -U_{20} z_{20} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -V_1 x_1 & -V_1 y_1 & -V_1 z_1 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -V_2 x_2 & -V_2 y_2 & -V_2 z_2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -Vx & -Vy & -Vz & x_{20} & y_{20} & z_{20} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \\ J \\ K \\ L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{20} \\ V_1 \\ V_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_{20} \end{pmatrix} \quad (2-14)$$

La résolution d'un tel système s'effectue par « la méthode des moindres carrées » expliquée au paragraphe suivant et conduit ainsi à la détermination des 11 constantes de la DLT.

Afin de reconstruire les coordonnées 3D d'un point de l'espace, il faut filmer ce dernier avec au moins deux caméras que l'on a, au préalable, calibrées, c'est à dire déterminer pour chacune d'entre elles les constantes de la DLT. On obtient alors le système matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} (A_1 - E_1 U) & (B_1 - F_1 U) & (C_1 - G_1 U) \\ (H_1 - E_1 V) & (J_1 - F_1 V) & (K_1 - G_1 V) \\ (A_2 - E_2 U') & (B_2 - F_2 U') & (C_2 - G_2 U') \\ (H_2 - E_2 V') & (J_2 - F_2 V') & (K_2 - G_2 V') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U - D_1 \\ V - L_1 \\ U' - D_2 \\ V' - L_2 \end{pmatrix} \quad (2-15)$$

- $(U, V)$  sont les coordonnées dans le plan de numérisation de la caméra 1 du point filmé ;
- $(U', V')$  les coordonnées de ce même point dans le plan de numérisation de la caméra 2 ;
- $(A_1, B_1, \dots, L_1)$  les constantes de la DLT de la caméra 1 ;
- $(A_2, B_2, \dots, L_2)$  les constantes de la DLT de la caméra 2 ;
- $(x, y, z)$  les coordonnées 3D du point filmé.

La résolution de ce système surdimensionné au sens des moindres carrés conduit à la détermination des coordonnées 3D du point filmé. Cette méthode est utilisée sur chaque trame du film afin de reconstruire les trajectoires 3D des articulations du corps humain.

### 2.2.2.2 Résolution de systèmes linéaires surdimensionnés au sens des moindres carrés

Le problème est de déterminer un vecteur  $x \in \mathbf{R}^n$  tel que :

$$A x = b \quad (2-16)$$

où la matrice  $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$  et le vecteur  $b \in \mathbf{R}^m$  avec  $m \geq n$ . Ainsi, il y a plus d'équations que d'inconnues : le système est surdimensionné et ne possède donc pas de solution unique.

On définit alors le vecteur résidu  $r$  de la manière suivante :

$$r = b - A x \quad (2-17)$$

Il s'agit maintenant de trouver une solution  $x$  qui minimise la « taille » du vecteur résidu. Une mesure appropriée de la « taille » de  $r$  est la somme des carrés de ses composantes soit le carré de la norme euclidienne de  $r$  :

$$\|r\|_2^2 = r^T r = \sum_{i=1}^m r_i^2 \quad (2-18)$$

Un tel vecteur solution  $x$  est appelé solution des moindres carrés du système surdimensionné ou solution au sens des moindres carrés.

Il faut désormais trouver  $x$  tel que :

$$x = \min \{r^T r : y \in \mathbf{R}^n\} = \min \{(b - Ay)^T (b - Ay) : y \in \mathbf{R}^n\} \quad (2-19)$$

or le minimum est atteint lorsque le gradient de  $(b - Ay)^T (b - Ay)$  est nul, soit :

$$\nabla \{(b - Ay)^T (b - Ay)\} = 0 \Leftrightarrow -2A^T (b - Ay) = 0 \quad (2-20)$$

L'équation 2-20 peut s'écrire en développant :

$$(A^T A) y = A^T b \quad (2-21)$$

Cette équation est appelée équation normale associée au problème des moindres carrés et l'unique solution de cette équation est aussi solution du système surdimensionné au sens des moindres carrés.

Le vecteur solution  $x$  de notre problème initial est alors solution du système carré  $(n \times n)$  :

$$(A^T A) x = A^T b \quad (2-22)$$

Les résolutions de systèmes surdimensionnés sont utilisées dans de nombreuses procédures d'étalonnage pour lesquelles on obtient beaucoup plus d'équations que d'inconnus afin d'homogénéiser les coefficients d'étalonnage et de minimiser les erreurs dues aux mesures expérimentales. Ce procédé ne fonctionne évidemment que pour des étalonnages linéaires, il a été utilisé aussi bien pour déterminer les constantes de la DLT que pour calculer les coefficients de la matrice d'étalonnage des dynamomètres.

### 2.2.2.3 Etalonnage et exactitude des mesures

L'étalonnage vidéo consiste à évaluer les 11 constantes de la DLT pour chaque caméra utilisée lors des manipulations expérimentales. Pour ce faire, il faut disposer d'un objet de contrôle ou de calibration dont on connaît précisément les coordonnées 3D de plusieurs points dans un repère défini comme repère de contrôle. Il est nécessaire, dans un souci de précision et de qualité des mesures, de placer les points de contrôle de façon homogène dans l'espace d'évolution de l'athlète. En effet, il est évident que la reconstruction 3D des coordonnées ne sera correcte que dans le volume étalonné (qui est défini par les points de contrôle), en dehors de celui-ci les erreurs iront en augmentant avec l'éloignement du volume calibré du fait de la linéarité de la calibration.

L'objet de contrôle utilisé pour les expériences s'apparente à un trièdre comprenant 18 points de calibration. En effet des tests effectués sur le nombre de points de calibration ont montré qu'au-delà d'une trentaine de points de contrôle, l'exactitude des mesures n'est plus améliorée.

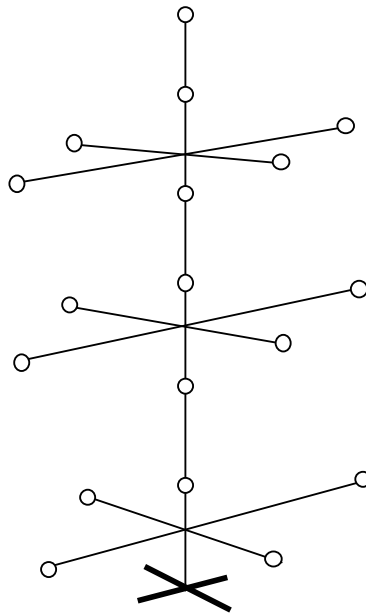


Figure 2-3 : Objet d'étalonnage utilisé pour déterminer les constantes de la DLT

Les contraintes dans l'analyse vidéo 3D du geste sportif sont nombreuses et difficiles à gérer :

- La taille de l'espace d'évolution du perchiste ;
- Le masquage d'articulations corporelles (cibles) par d'autres segments sur certaines images ;
- La vitesse du mouvement ;
- Les contraintes des travaux en extérieur influencent la qualité du film (éclairage non contrôlé, objets extérieurs perturbants, reflets, ...).

L'ensemble de ces contraintes influence l'exactitude des mesures qui dépendent cependant essentiellement de la taille du volume filmé, de la définition des caméras utilisées et de l'étalonnage réalisé. Une étude plus précise sur les solutions trouvées pour améliorer l'exactitude des mesures vidéo 3D pour le saut à la perche est présentée dans le paragraphe 2.4 qui traite du protocole expérimental mise en place pour l'analyse mécanique du mouvement.

## 2.3 Principe de l'analyse dynamométrique

*La détermination des efforts exercés par un sportif lors de ses appuis sur les solides avec lesquels il est en contact, est indispensable dans tout approche dynamique du mouvement. Les dynamomètres permettent la mesure de la variation de ces efforts au cours du temps. Leur réalisation met en œuvre des moyens techniques sophistiqués dans les domaines de l'extensométrie et de l'électronique.*

### 2.3.1 Introduction

La mesure des efforts repose sur le principe de l'extensométrie qui représente l'ensemble des techniques permettant la mesure des contraintes.

Pour un solide homogène, isotrope et soumis à des petites déformations élastiques (Théorie de l'élasticité linéaire), il existe une relation linéaire entre le tenseur des contraintes et celui des déformations. En outre le tenseur des contraintes est symétrique, il est donc déterminé entièrement par la connaissance de six de ces neuf composantes que l'on représente vectoriellement par :  $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz})$ . De même, le tenseur des déformations peut se représenter par :  $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz})$ . La relation liant les deux

tenseurs peut donc s'exprimer sous la forme matricielle suivante :  $\overline{\sigma} = H \overline{\varepsilon}$  où  $H$  est la matrice (6x6) de HOOKE [Cra97]. La relation inverse s'appelle la relation de compliance et s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} \quad (2-23)$$

Le coefficient  $E$  est appelé module d'Young ou module d'élasticité et  $\nu$  coefficient de Poisson. Ces deux coefficients sont représentatifs du matériau considéré. En définitive, pour un matériau utilisé dans les hypothèses de l'élasticité linéaire, la connaissance des déformations permet de calculer l'état de contrainte. Ce principe est appliqué en extensométrie pour déterminer les contraintes.

Cependant, il existe deux types de contraintes. En effet, en un point d'un solide, les contraintes résultent de la superposition des contraintes résiduelles (existant en l'absence de toute sollicitation extérieure et caractérisant les formes et les dimensions du solide) et des contraintes engendrées par les sollicitations extérieures. La mesure des contraintes résiduelles est délicate et compliquée (diffraction des rayons X). Pour que l'on puisse déterminer les contraintes liées aux sollicitations extérieures, il faut que l'intensité des sollicitations varie afin d'éliminer par différence les contraintes résiduelles. Ainsi la mesure des déformations pour des variations de sollicitations extérieures permet de déterminer les contraintes générées par ces sollicitations.

L'utilisation de jauges extensométriques permet la mesure des déformations sur la surface du solide considérée. Une jauge à éléments résistifs est constituée d'un fil, généralement en constantan, d'un diamètre de 0,03 à 0,05 mm, collé en spires rapprochées sur un support mince (résine synthétique) et terminé par des connexions électriques permettant le câblage des ponts. Collé sur une surface, le fil constituant la jauge (trame) subit les mêmes déformations que celle-ci. On montre que la variation de résistance du fil est

proportionnelle à la déformation :  $\frac{\Delta R}{R} = K \frac{\Delta l}{l}$  où  $K$  est une constante qui dépend des

matériaux constituant la trame de la jauge ( $K=2$  pour le constantan). Afin de mesurer ces variations de résistance, on réalise des montages électriques appelés ponts de Wheastone.

Dans les ponts de Wheastone, 4 résistances sont branchées suivant le schéma de la figure 2-4.

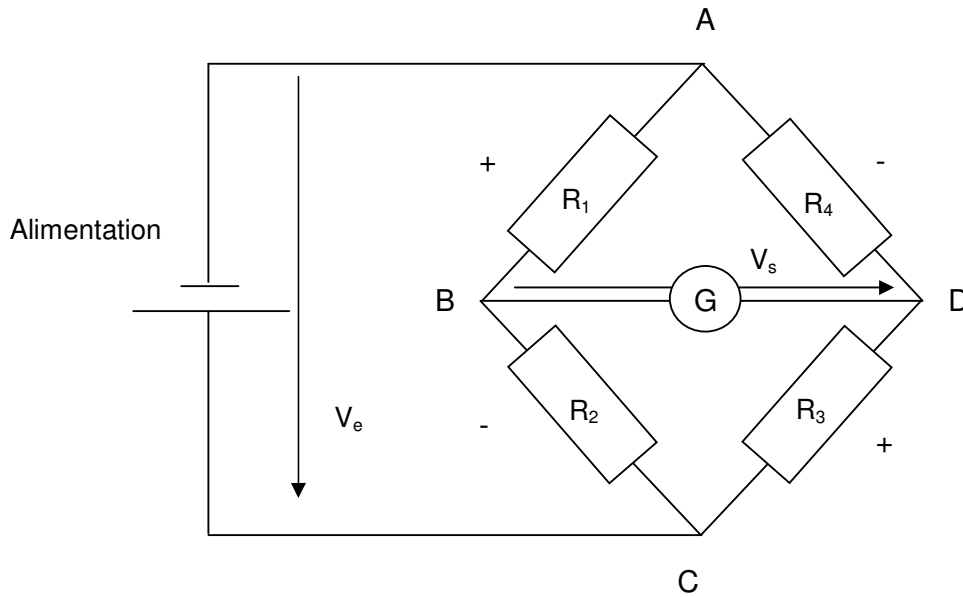


Figure 2-4 : Pont de Wheastone

Un galvanomètre G, de résistance interne supposée très grande afin de ne pas perturber les mesures, permet de déterminer la tension  $V_s$  entre les points B et D. En écrivant la loi

d'Ohm sur chaque branche du pont, on montre que :  $V_s = V_e \frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}$ .

Lorsque le pont est équilibré, aucun courant ne traverse le galvanomètre donc :

$$R_1 R_3 = R_2 R_4 \quad (2-24)$$

Pour des faibles variations des résistances, l'équilibre du pont est détruit, la tension de sortie  $V_s$  est pratiquement proportionnelle aux variations relatives de résistance  $\Delta R / R$  de chacune des jauges.



En négligeant les termes d'ordre supérieur, la tension de sortie vaut :

$$V_s = \frac{V_e}{4} \left( \frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4} \right) \quad (2-25)$$

On remarque aussi que les variations de  $R_1$  et  $R_3$  agissent dans le même sens pour l'équilibre du pont alors que  $R_2$  et  $R_4$  agissent en sens contraire. On obtient ainsi la règle des signes suivante : deux résistances opposées agissent dans le même sens, deux résistances adjacentes en sens contraire.

Un capteur est donc formé d'un pont de Wheastone dont une (quart de pont), deux (demi-pont) ou quatre (pont complet) des résistances sont des jauges collées sur le corps d'épreuve. D'après la règle des signes, il est possible d'ajouter ou de retrancher les effets séparés des jauges et d'éliminer ainsi des phénomènes parasites au profit de la grandeur recherchée. De plus, l'ordre de grandeur des variations de résistance est faible, on peut, en effet, détecter une variation relative de résistance allant de  $10^{-4}$  jusqu'à  $10^{-6}$  donc mesurer des micro-déformations.

### 2.3.2 Dynamomètres à six composantes

Le dynamomètre à six composantes, utilisé dans l'étude du saut à la perche, est un capteur d'effort, mesurant un torseur d'action. Il a été développé au sein du Laboratoire de Mécanique Physique, UMR CNRS 5469, Université Bordeaux I, par Le Professeur Agrégé, COUETARD Y., sa réalisation a fait l'objet d'un brevet national (93-08370 CNRS-LMP).

#### 2.3.2.1 Principe de fonctionnement

Tout capteur à jauges électriques est constitué de plusieurs parties :

- Un corps d'épreuve : c'est le solide qui réagit sous l'action d'un effort extérieur avec lequel il est en contact direct ou par l'intermédiaire d'une liaison. Cet élément est fabriqué dans un matériau qui doit être utilisé dans son domaine élastique linéaire afin d'avoir une relation linéaire entre la déformation mesurée et l'effort appliqué ;
- Un détecteur : c'est l'élément sensible du capteur, il s'agit en général d'un pont de Wheastone implanté sur le corps d'épreuve pour les capteurs à jauges électriques ;

- Un boîtier : c'est la partie rigide du capteur qui assure la protection du détecteur et permet la fixation du capteur.

Le dynamomètre à six composantes est constitué de deux plaques reliées entre elles par trois bras disposés à 120 degrés. La plaque inférieure assure la fixation du dynamomètre sur son lieu d'implantation. La partie supérieure est libre et reçoit les efforts extérieurs exercés sur sa surface. La liaison entre ces deux parties constitutives du dynamomètre est assurée par les trois détecteurs ou capteurs. Ces capteurs sont formés d'un bras (corps d'épreuve) et de deux portes bras qui lient ce dernier avec les deux plaques du dynamomètre. Pour simplifier, le bras est assimilable à une poutre dont la partie inférieure est encastrée avec la plaque inférieure par l'intermédiaire du porte bras inférieur. La partie supérieure du capteur munie d'une liaison rotule vient coulisser dans le porte bras supérieur, lui-même fixé à la plaque supérieure du dynamomètre. Ainsi la partie supérieure du bras, sur laquelle seront montés les ponts de Wheastone, est reliée à la plaque libre par une liaison linéique annulaire qui ne transmet que deux forces dans les deux axes perpendiculaires à l'axe du bras. Ces liaisons assurent l'isostaticité de la plaque supérieure, partie libre du dynamomètre.

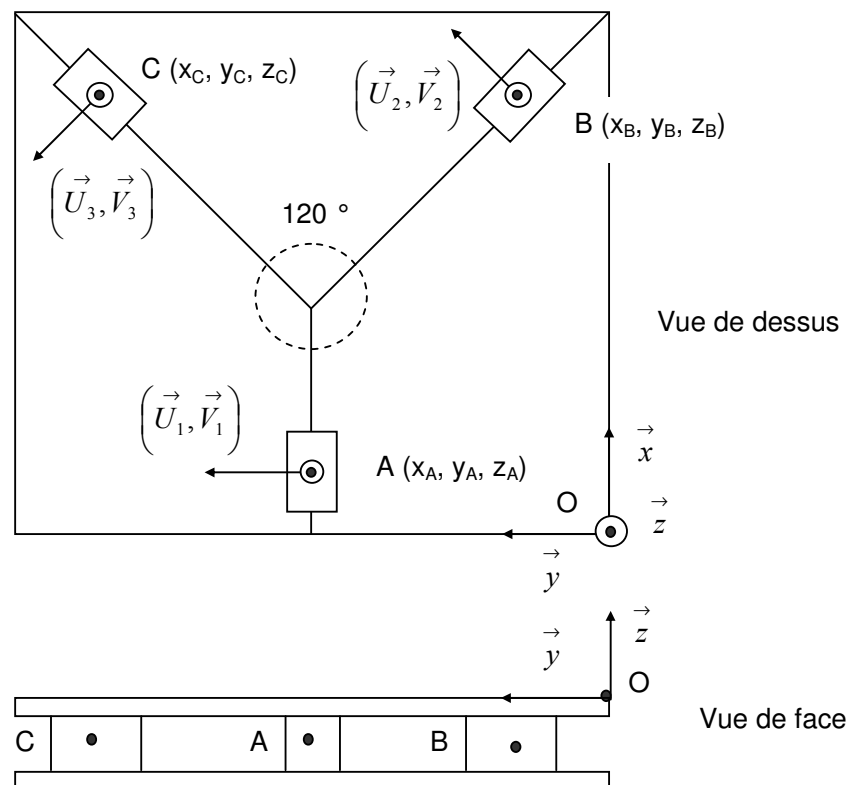


Figure 2-5 : Vue d'ensemble du dynamomètre

Lorsqu'un effort est appliqué sur la partie libre du dynamomètre, les trois bras transmettent chacun deux forces suivant les axes  $\left(\vec{U}_i, \vec{V}_i\right)_{i=(1,2,3)}$  définis sur la figure 2-5 en raison des liaisons linéiques annulaires. Le principe de fonctionnement du dynamomètre repose sur l'équilibre statique de la plaque supérieure, noté (S), sur la quelle 4 torseurs d'action sont appliqués (le poids de la plaque, contrainte résiduelle, n'est pas pris en compte car il est éliminé lors du tarage initial) :

- Torseur de l'effort extérieur appliqué en un point  $P$  de (S) (inconnue du

$$\text{problème}) : [\tau]_P = \begin{cases} \vec{F} \\ \vec{M}(P) \end{cases}$$

- Torseur d'action du bras 1 sur (S) au point  $A$  :  $[\tau_1]_A = \begin{cases} F_{11} \vec{U}_1 + F_{12} \vec{V}_1 \\ \vec{0} \end{cases}$

- Torseur d'action du bras 2 sur (S) au point  $B$  :  $[\tau_2]_B = \begin{cases} F_{21} \vec{U}_2 + F_{22} \vec{V}_2 \\ \vec{0} \end{cases}$

- Torseur d'action du bras 3 sur (S) au point  $C$  :  $[\tau_3]_C = \begin{cases} F_{31} \vec{U}_3 + F_{32} \vec{V}_3 \\ \vec{0} \end{cases}$

On peut alors écrire, en ne tenant pas compte des effets dynamiques, l'équilibre statique de la plaque supérieure au point  $O$  :

$$[\tau]_O + [\tau_1]_O + [\tau_2]_O + [\tau_3]_O = [0] \quad \text{d'où} \quad [\tau]_O = -[\tau_1]_O - [\tau_2]_O - [\tau_3]_O \quad (2-26)$$

On peut alors écrire après transport des moments en  $O$ , puis projection sur  $\left(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\right)$ , la relation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x(O) \\ M_y(O) \\ M_z(O) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -z_A & 0 & -z_B/2 & y_B & -z_C/2 & y_C \\ 0 & -x_A & \sqrt{3}/2 z_B & -x_B & -\sqrt{3}/2 z_C & -x_C \\ x_A & 0 & (x_B - \sqrt{3}y_B)/2 & 0 & (x_C + \sqrt{3}y_C)/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -F_{11} \\ -F_{12} \\ -F_{21} \\ -F_{22} \\ -F_{31} \\ -F_{32} \end{pmatrix} \quad (2-27)$$

La matrice (6x6) est appelée matrice géométrique du dynamomètre et notée  $(M)$ . Afin de déterminer de façon unique le torseur d'effort appliqué sur le dynamomètre, il convient de mesurer les forces appliquées sur ses trois bras. Pour ce faire, on réalise des capteurs de flexion suivant les deux directions  $\left(\vec{U}_i, \vec{V}_i\right)_{i=(1,2,3)}$  pour chacun des bras.

Ces capteurs vont permettre la mesure des forces représentées par le vecteur  $(-F_{11}, -F_{12}, -F_{21}, -F_{22}, -F_{31}, -F_{32})$  où  $F_{i1}$  est la norme de la force appliquée sur le capteur  $i$  dans la direction  $\vec{U}_i$  et  $F_{i2}$  celle dans la direction  $\vec{V}_i$ . La réalisation de 6 ponts de flexion (2 par bras) est nécessaire pour déterminer les 6 forces exercées.

La réalisation d'un pont de flexion passe par un dimensionnement préalable des bras, il faut en effet calculer les sections optimales pour obtenir une sensibilité correcte des capteurs. En effet, des déformations trop faibles nuisent à la sensibilité alors que des déformations trop importantes peuvent saturer le pont. Un capteur de flexion monté en pont complet comprend quatre jauges, situées de part et d'autre de l'axe de flexion de la ligne neutre de la poutre. On trouve sur un même coté une jauge placée dans l'axe longitudinal mesurant la déformation longitudinale  $\varepsilon$  alors qu'une jauge transverse mesure l'effet de Poisson  $-\nu\varepsilon$ . Symétriquement, on place deux jauges de façon identique, la jauge longitudinale mesure alors  $-\varepsilon$  et celle transverse  $\nu\varepsilon$ . Le câblage en pont complet, en disposant sur les branches adjacentes les jauges subissant l'effet de Poisson permet d'obtenir un rapport de tension proportionnel à la déformation longitudinale  $\varepsilon$ , donc à la force appliquée.

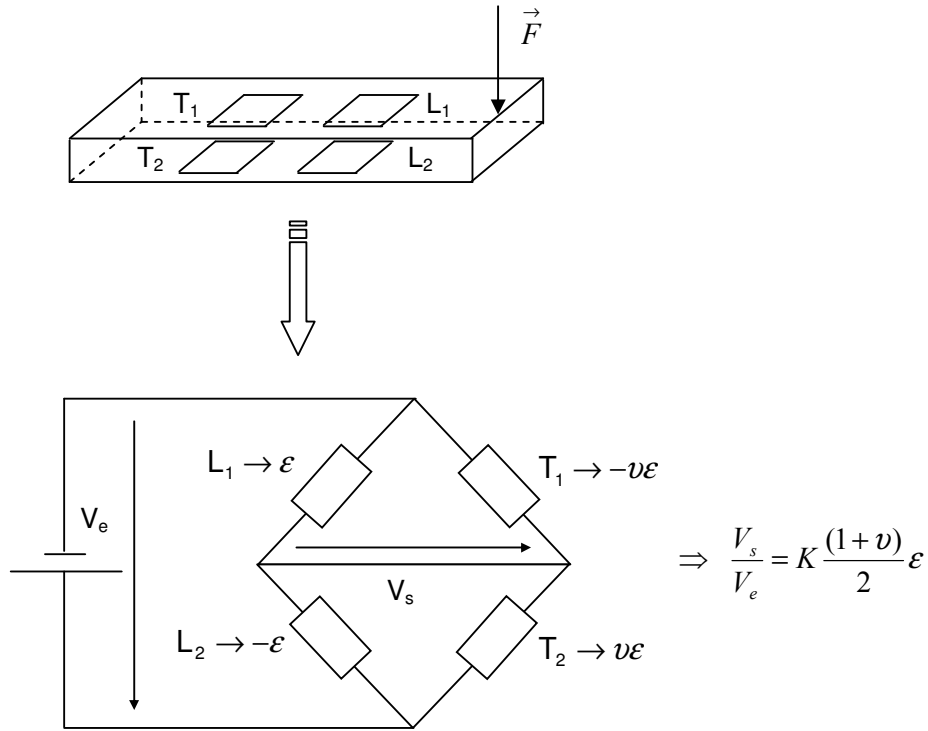


Figure 2-6 : Pont de flexion

En définitive, chaque composante  $F_{ij}$  est proportionnelle à la tension de sortie du pont de flexion considéré, on peut alors écrire  $(F) = (K) (V)$ , soit :

$$\begin{pmatrix} -F_{11} \\ -F_{12} \\ -F_{21} \\ -F_{22} \\ -F_{31} \\ -F_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{12} \\ V_{21} \\ V_{22} \\ V_{31} \\ V_{32} \end{pmatrix} \quad (2-28)$$

La matrice  $(K)$  est appelée matrice de sensibilité, ces coefficients sont exprimés en  $(N/mv)$ .

En conclusion le torseur d'effort exercé sur le dynamomètre au point O s'écrit :

$$[\tau]_O = (M) (K) (V) \quad (2-29)$$

On définit alors la matrice (6x6) d'étalonnage ( $E$ ) comme la matrice produit de ( $M$ ) par ( $K$ ), on a donc :  $[\tau]_o = (E)(V)$ . Cette matrice, caractéristique de la géométrie du dynamomètre ainsi que des sensibilités des 6 capteurs de flexion, sera déterminée grâce à un étalonnage statique présenté au paragraphe 2.3.4.

### 2.3.2.2 Limites du dynamomètre pour la mesure des efforts dynamiques

La mesure d'efforts dynamiques est plus délicate à effectuer que celle d'efforts statiques. En effet, les résultats du dynamomètre soumis à des sollicitations dynamiques ne dépendent pas uniquement de ces efforts mais aussi des caractéristiques mécaniques de la partie libre (masse, rigidité et amortissement) et de la souplesse des 3 bras sur lesquels elle repose.

En régime statique l'équilibre du dynamomètre soumis à une force  $\vec{F}$  peut s'écrire de manière simplifiée :  $F = k x$  où  $k$  est la rigidité du dynamomètre et  $x$  son déplacement.

En régime dynamique, la masse équivalente  $m$  et l'amortissement  $c$  du dynamomètre interviennent dans l'équation d'équilibre dynamique, on a alors :

$$F = m \ddot{x} + c \dot{x} + k x \quad (2-30)$$

Afin de limiter au maximum les effets dynamiques de la partie libre du dynamomètre et ainsi transmettre au mieux les efforts appliqués, on a intérêt à utiliser un matériau peu ou pas amorti et possédant un rapport  $k/m$  le plus grand possible. Il faut donc rechercher une rigidité maximale pour une masse faible. Certains matériaux composites sont très bien adaptés, car leurs caractéristiques mécaniques répondent aux contraintes de notre problème. En outre, plus le rapport  $k/m$  sera grand, plus la bande passante du dynamomètre sera importante.

Les capteurs piézoélectriques ne posent pas ce genre de difficulté, en effet ils gardent une très grande sensibilité pour une rigidité importante et sont donc mieux adaptés aux mesures d'efforts dynamiques.

Pour des capteurs à jauges électriques, il convient aussi de ne pas augmenter de manière inconsidérée leur rigidité, car cela nuirait à leur sensibilité.

### 2.3.3 Conditionnement et acquisition des signaux

Les ponts de Wheastone sont les éléments essentiels des capteurs, ils fournissent une tension de sortie de quelques millivolts proportionnelle à l'effort appliqué. Afin d'utiliser ces ponts, il faut les alimenter et amplifier la tension de sortie afin de pouvoir en faire l'acquisition. C'est le rôle de l'électronique de conditionnement ou conditionneur.

Les conditionneurs sont indispensables et sont généralement constitués de deux parties distinctes :

- Une partie alimentation, qui comme son nom l'indique, sert à alimenter les ponts, généralement, elle génère une tension d'alimentation très stable de 5 ou 10 Volts, suivant les valeurs des résistances qui constituent le pont du capteur ;
- Une partie mise en forme du signal permet d'amplifier les signaux issus des ponts afin d'obtenir des tensions en sortie des conditionneurs de l'ordre du Volt qui pourront ensuite être envoyées sur une carte d'acquisition Analogique Numérique.

En général, on trouve deux types de conditionneurs :

- Unipolaire qui génère une tension de sortie comprise entre  $[0, 10V]$  ;
- Bipolaire dont la tension de sortie est comprise entre  $[-5, 5V]$ .

L'électronique de conditionnement constitue le premier maillon de la chaîne d'acquisition des signaux provenant des capteurs du dynamomètre. L'enregistrement des signaux est ensuite assuré par une carte de conversion Analogique Numérique placée dans un PC qui va stocker, à une fréquence donnée, l'ensemble des signaux provenant des conditionneurs (six tensions issues des six ponts de flexion dans le cas du dynamomètre six composantes). La conversion des tensions se fait généralement en 12 bits (soit  $2^{12} = 4096$  échelons) alors que la plage d'acquisition en tension est de 10 Volts (  $[-5, 5V]$  pour du bipolaire et  $[0, 10V]$  pour de l'unipolaire).

Enfin, un logiciel gère l'acquisition des données via la carte de conversion et permet par l'intermédiaire de la matrice d'étalonnage (équation 2-27) de calculer l'effort exercé sur le dynamomètre. La fréquence d'enregistrement dépend à la fois des capacités de la carte de numérisation mais aussi du langage de programmation du logiciel. Pour notre dispositif, la fréquence d'acquisition est comprise entre quelques Hz pour une acquisition lente et 3 kHz pour une acquisition rapide.

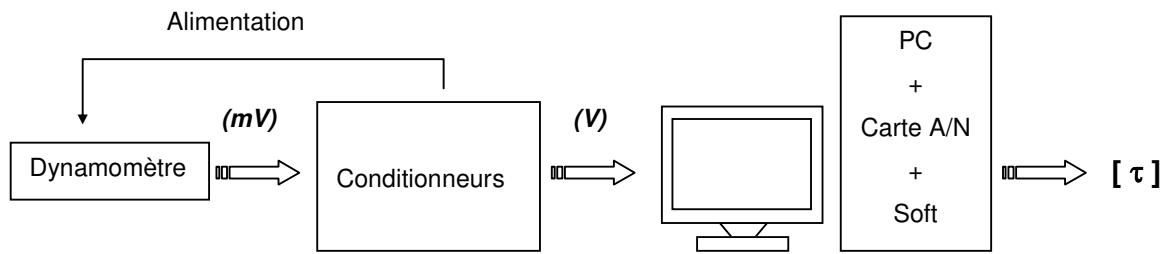


Figure 2-7 : Chaîne d'acquisition dynamique classique

Les chaînes d'acquisition classiques des efforts nécessitent un matériel lourd peu adapté aux manipulations de terrain. Dans le cadre des recherches sur le saut à la perche, nous avons mis au point un système d'acquisition moins encombrant et autonome. Les progrès de l'électronique et de l'informatique ont permis de stocker les données sur d'autres types de supports que celui des disques durs des ordinateurs. Des enregistreurs sur carte PCMCIA, comprenant le conditionnement des signaux et l'acquisition des données, ont été développés par la société MAZET Electronique. Cet enregistreur, codant en 12 bits, permet à la fois de conditionner les ponts de flexion (alimentation en 5 Volts et gain de 400) et d'enregistrer les tensions sur un support PCMCIA. Ce système, peu encombrant, léger et autonome, permet l'acquisition des 12 signaux issus des deux dynamomètres à une fréquence de 200 Hz. La reconstruction des deux torseurs d'effort à l'aide des deux matrices d'étalonnage est effectué par un logiciel, développé au laboratoire. En outre, un flash photo peut être placé en parallèle du système de déclenchement de l'enregistrement, permettant la synchronisation des données vidéos et dynamométriques.



Photo 2-1 : Enregistreur sur carte PCMCIA



L'ensemble du dispositif dynamométrique permet de disposer d'un outil de mesure précis, en temps réel, relativement léger et donc transportable et enfin autonome.

### 2.3.4 Etalonnage des dynamomètres

L'étalonnage des capteurs est une procédure délicate qui va permettre au capteur de quantifier la sollicitation qui lui est appliquée. Il dépend, en outre, du domaine d'utilisation du capteur qui détermine le conditionnement du signal (alimentation et gain). En effet on étalonnera différemment un capteur destiné à mesurer 1000 Newtons que 5000 Newtons.

La procédure d'étalonnage qui consiste à déterminer la matrice d'étalonnage (définie au paragraphe 2.3.2.1) se déroule en deux étapes :

- On détermine la matrice de sensibilité du dynamomètre localement, en étalonnant chaque pont de flexion et on calcule la matrice géométrique théorique du dynamomètre à partir des données issues de dessins techniques, ce qui donne un ordre de grandeur des coefficients de sa matrice d'étalonnage;
- On calcule les coefficients réels de la matrice d'étalonnage (produit de la matrice géométrique par la matrice de sensibilité) en réalisant des mesures expérimentales qui amènent à résoudre un système surdimensionné dont les inconnues sont les coefficients de la matrice d'étalonnage.

Avant de procéder à ces manipulations, il convient donc de définir la plage d'utilisation des dynamomètres. En outre, la connaissance approximative des sensibilités des capteurs est aussi nécessaire pour spécifier le gain utilisé. Une alimentation de 5V pour un gain de 400 ont été employés pour la plage d'utilisation suivante des capteurs : [-5000, 5000 N].

L'étalonnage de chaque capteur de flexion est une étape indispensable, elle permet de valider le bon fonctionnement des ponts (état des jauges, câblage, hypothèses d'élasticité linéaire) et fournit une première valeur de la matrice de sensibilité.

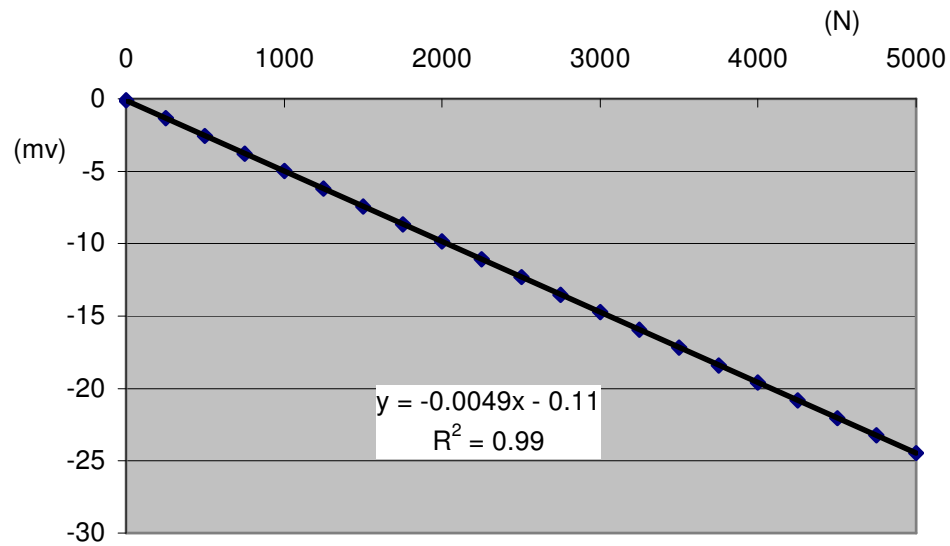


Figure 2-8 : Courbe d'étalonnage d'un pont de flexion

Le calcul de la matrice géométrique théorique, exposé au paragraphe 2.3.2.1, est réalisé à partir des dimensions du dynamomètre. Ce calcul, purement théorique, ne tient pas comptes des tolérances du dimensionnement des pièces du dynamomètre, ni de l'alignement imparfait des capteurs de flexion.

Le produit de ces deux matrices permet d'obtenir une matrice d'étalonnage idéale qui servira à valider les résultats obtenus pour la matrice réelle.

Afin de prendre en compte les incertitudes sur les dimensions et sur l'alignement des axes des ponts, on réalise un étalonnage statique expérimental du dynamomètre. Celui-ci consiste à appliquer, en un point connu  $M_i$  de la partie libre du dynamomètre, une force unidirectionnelle suivant l'un des trois axes du capteur. La norme de la force est déterminée par un capteur de pression industriel (étalonnage précis) alors que les coordonnées du point d'application  $M_i$  sont mesurées expérimentalement, ainsi on détermine le torseur de cet effort au point O. De plus, les six tensions ( $V$ ) issues des six ponts de flexion du dynamomètre sont enregistrées en ( $mV$ ) sur une carte d'acquisition.

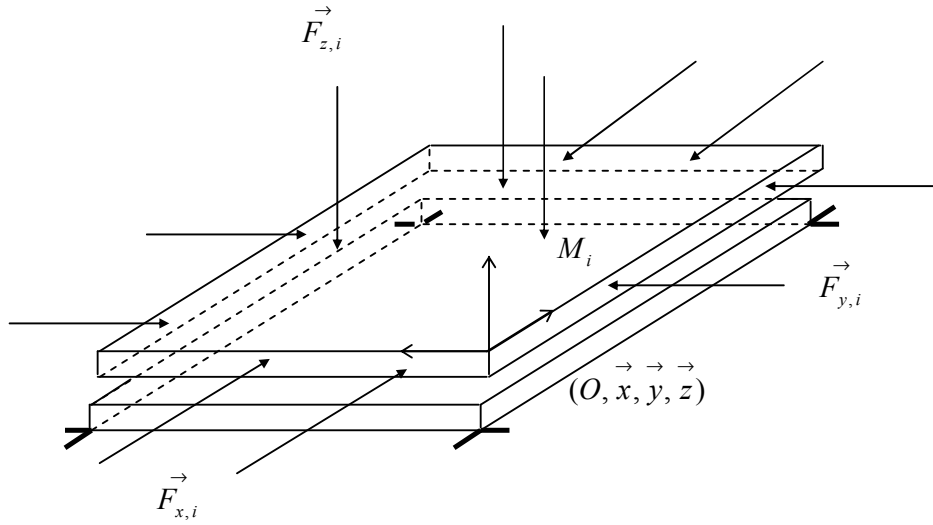


Figure 2-9 : Dispositif d'étalonnage d'un dynamomètre

On obtient donc pour une force  $-F$ , appliquée suivant l'axe  $(O, \vec{z})$  au point  $M_i$  de coordonnées  $(x_i, y_i, z_i)$ , six équations dont les 36 inconnues sont les composantes de la matrice d'étalonnage  $(e_{ij})$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{11} V_{11} + e_{12} V_{12} + e_{13} V_{21} + e_{14} V_{22} + e_{15} V_{31} + e_{16} V_{32} = 0 \\ e_{21} V_{11} + e_{22} V_{12} + e_{23} V_{21} + e_{24} V_{22} + e_{25} V_{31} + e_{26} V_{32} = 0 \\ e_{31} V_{11} + e_{32} V_{12} + e_{33} V_{21} + e_{34} V_{22} + e_{35} V_{31} + e_{36} V_{32} = -F \\ e_{41} V_{11} + e_{42} V_{12} + e_{43} V_{21} + e_{44} V_{22} + e_{45} V_{31} + e_{46} V_{32} = -F y_i \\ e_{51} V_{11} + e_{52} V_{12} + e_{53} V_{21} + e_{54} V_{22} + e_{55} V_{31} + e_{56} V_{32} = F x_i \\ e_{61} V_{11} + e_{62} V_{12} + e_{63} V_{21} + e_{64} V_{22} + e_{65} V_{31} + e_{66} V_{32} = 0 \end{array} \right. \quad (2-31)$$

Afin de déterminer les 36 composantes  $(e_{ij})$  de la matrice d'étalonnage, il faut faire au moins six mesures expérimentales pour six efforts différents. En général, comme dans toute procédure de calibration, on surdimensionne de manière considérable le système d'équations afin d'obtenir des solutions minimisant les erreurs dues au dispositif expérimental.

De plus, pour homogénéiser les réponses du capteur sur l'ensemble de sa surface et dans son domaine d'utilisation, une soixantaine de mesures a été réalisée pour des forces variant de 0 à 5000 Newtons, dans les directions  $(O, \vec{x})$ ,  $(O, \vec{y})$  et  $(O, \vec{z})$ , pour des points d'application répartis sur l'ensemble de la partie libre du dynamomètre (figure 2-9). Le système d'équations linéaires surdimensionné a été résolu au sens des moindres carrés en utilisant la méthode détaillée au paragraphe 2.2.2.2. Les résultats obtenus pour un dynamomètre sont présentés dans le tableau 2-1.

-0.8890	-0.0235	1.0448	-0.0110	0.0009	0.2720
0.5482	-0.0338	0.7974	-0.0148	-1.0596	0.0017
0.1305	1.1319	0.0074	1.0323	0.0847	1.0863
0.1158	0.5985	0.0897	0.0538	-0.0713	0.3433
-0.0258	-0.7869	-0.1112	-0.7054	-0.0010	-0.1917
0.8226	-0.0088	0.4128	-0.0028	-0.1629	-0.1655

Tableau 2-1 : Matrice d'étalonnage d'un dynamomètre six composantes

Les résultats sont fournis en  $(N / mV)$  pour les forces et  $(N.m / mV)$  pour les moments. Pour une carte Analogique Numérique 12 bits possédant une plage d'acquisition de 10 Volts, il convient de multiplier les coefficients de la matrice par 2.4414 ( $= 10\,000 / 2^{12}$ ).

### 2.3.5 Exactitude des mesures

L'exactitude des mesures dynamométriques dépend à la fois :

- De la qualité de fabrication du capteur ;
- De la qualité de l'électronique de la chaîne d'acquisition ;
- De la justesse de l'étalonnage.

Les matériaux utilisés pour réaliser le dynamomètre influencent notamment les mesures en dynamique (cf. paragraphe 2.3.2.2). L'erreur générée est essentiellement liée aux caractéristiques dynamiques (masse, amortissement, rigidité) de la partie libre du capteur. Afin de l'apprécier, il faudrait réaliser un étalonnage dynamique du dynamomètre et non un étalonnage statique.

De plus, les liaisons linéiques annulaires, supposées parfaites dans le principe du dynamomètre, possèdent toujours un peu de frottement qui induit aussi une incertitude supplémentaire sur les mesures.

La chaîne d'acquisition est la principale source d'erreurs et d'incertitudes. En effet, le bruit électronique définit la zone d'incertitude des capteurs, une incertitude de  $\pm 2$  bits de bruit a été mesurée pour chaque pont du capteur avec les enregistreurs sur carte PCMCIA, ce qui correspond à  $\pm 20$  Newtons pour le torseur mesuré. En outre, le codage sur 12 bits n'a pas permis une grande définition, un bit correspond en effet à 10 Newtons. Des cartes d'acquisition 16 bits auraient permis d'améliorer très nettement l'exactitude des mesures.

Enfin, l'étalonnage statique du capteur influence la qualité de « reconstruction » du torseur à partir des données provenant des capteurs de flexion. Cet étalonnage demande donc un travail expérimental très méticuleux et très précis.

En définitive, il est relativement délicat d'apprécier l'incertitude des mesures. Cependant, pour des efforts mesurés relativement importants de l'ordre de plusieurs milliers de Newtons, l'erreur relative est faible si on ne considère que le bruit électronique ( $\pm 20$  Newtons).

## 2.4 Système d'analyse expérimental 3D du saut à la perche

*Ce banc d'analyse a pour objectif de mesurer les paramètres mécaniques qui interviennent dans la performance réalisée par le perchiste. Il se compose donc de deux dynamomètres à six composantes, placés au niveau du dernier appui du sportif pour le premier et dans le butoir pour le second. Un système d'analyse vidéo 3D, comprenant quatre caméras vidéo S-VHS, complète le dispositif.*

### 2.4.1 Contraintes en milieu sportif

Elles sont nombreuses et influencent la nature des instruments de mesure et leur mise au point. Pour l'expérimentation sur le saut à la perche, nous disposons d'un laboratoire de plein air : le stade d'athlétisme. Ce laboratoire comporte de nombreux désavantages quand il s'agit de réaliser des mesures précises :

- L'implantation d'appareils de mesure est délicate et pas toujours possible ;
- Les expérimentations ne sont réalisables que quelques semaines dans l'année ;
- Les conditions climatiques perturbent fortement les mesures vidéos ;
- Les instruments de mesures doivent être légers et autonomes pour pouvoir être déplacés sur le site ;
- L'environnement extérieur est perturbant et non maîtrisable.

L'ensemble des techniques expérimentales ne doit, de plus, pas perturber le sportif afin de pouvoir en apprécier les performances réelles.

Ces contraintes ont été intégrées au mieux pour réaliser puis mettre au point un dispositif expérimental transportable, autonome et performant.

## **2.4.2 Protocole expérimental**

### *2.4.2.1 Dispositif d'analyse vidéo 3D*

L'analyse vidéo 3D d'un geste sportif se déroule en plusieurs étapes :

- Le positionnement et le réglage des caméras pour un espace donné ;
- L'étalonnage de l'espace choisi ;
- L'analyse du mouvement image par image ;
- La reconstruction 3D des trajectoires.

Le positionnement des caméras sur le site d'expérimentation dépend de l'espace d'évolution du sportif. Au saut à la perche, ce dernier est relativement important lorsque l'on s'intéresse au mouvement depuis le dernier appui avant le décollage jusqu'au franchissement de la barre. Cet espace représente un volume conséquent : 6 mètres de long, 6 mètres de haut et 2 mètres de large. Afin d'améliorer la finesse des mesures, l'espace d'évolution a été partagé en deux zones présentant un volume commun. Le premier volume a permis d'analyser la phase d'impulsion alors que le second a permis l'étude de la fin du saut. La première zone est filmée par deux caméras (caméra 1 et 2) placées de part et d'autre de la piste et dont l'angle de prise de vue a été réglé afin de perdre un minimum de cibles (articulations corporelles) cachées par d'autres segments lors du mouvement (figure 2-10).

Deux autres caméras (3 et 4), placées légèrement en avant des deux premières, ont permis la reconstruction du geste dans le deuxième volume. La partition de l'espace en deux a permis d'améliorer très sensiblement les mesures cinématiques, la reconstruction 3D du geste complet a été facilitée par l'espace commun entre les deux volumes. La synchronisation des quatre caméras entre elle et avec les dynamomètres était assurée par un flash se déclenchant en parallèle du système d'acquisition dynamique. Les caméras vidéos utilisées lors des expérimentations étaient des caméscopes S-VHS Panasonic, possédant un obturateur électronique permettant un arrêt sur images parfait. Le réglage des caméras dépendait essentiellement des conditions climatiques et différait d'un essai à l'autre, une obturation rapide ( $\geq 1 / 250^{\text{ème}}$ ) était cependant nécessaire.

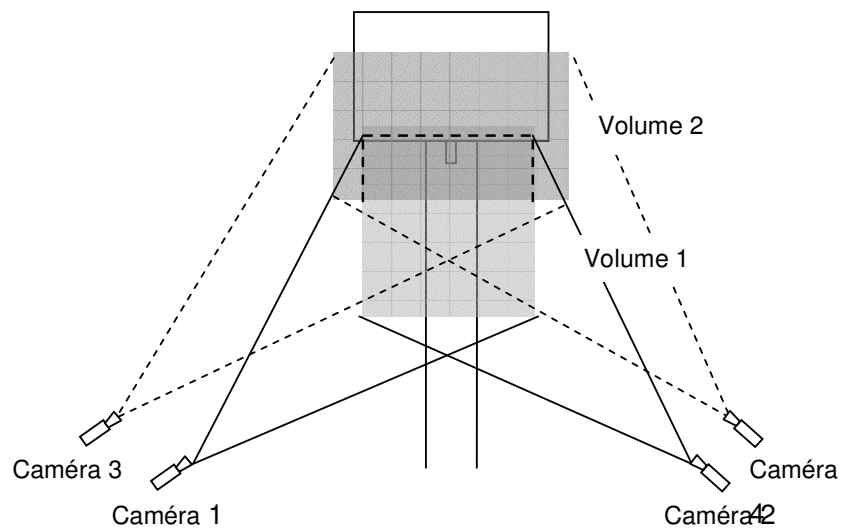


Figure 2-10 : Dispositif d'acquisition vidéo 3D

La reconstruction 3D du geste nécessite un étalonnage préalable de l'espace filmé. C'est en partie de celui-ci que dépend la qualité des mesures vidéo, il doit être, en outre, représentatif du volume dans lequel évolue le perchiste. Des objets de calibration, trièdres détaillés au paragraphe 2.2.2.3, ont été placés sur la piste afin d'étalonner le premier volume (figure 2-11). Le second volume a été calibré en utilisant les poteaux du sautoir et une perche muni de marqueurs placée sur l'origine du repère lié à l'objet de contrôle. De plus, quelques points du second trièdre ont aussi été utilisés pour améliorer la continuité des résultats entre les deux volumes.

Plus de trente points de calibration ont été exploités pour obtenir un étalonnage précis de chaque volume. La qualité de cet étalonnage a été vérifiée lors de la superposition du mouvement exécuté dans la zone commune aux deux volumes.

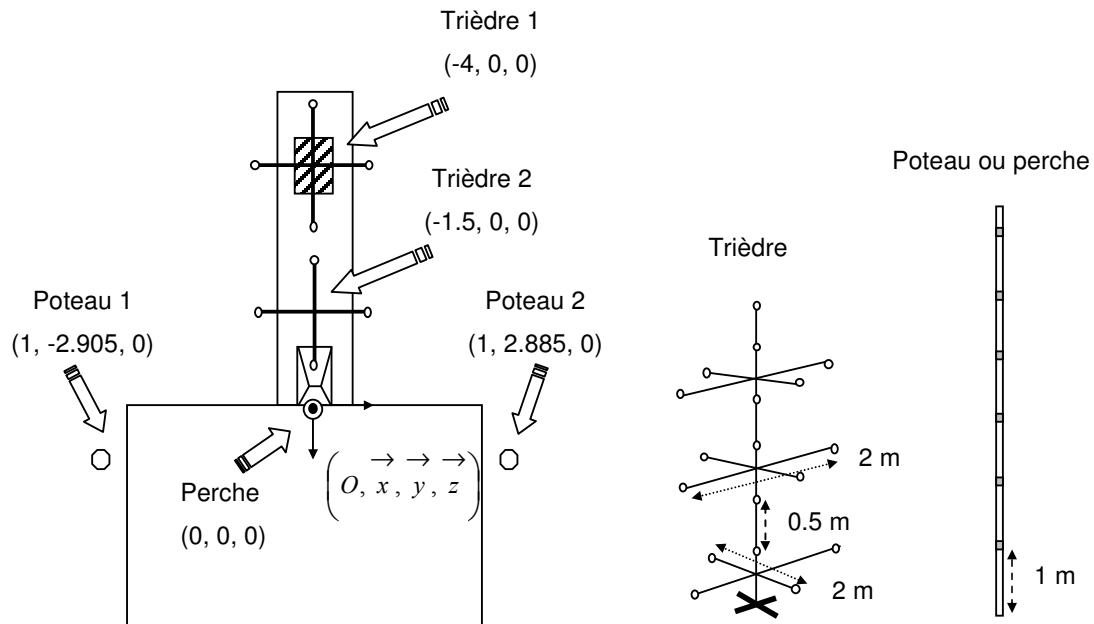


Figure 2-11 : Etalonnage de l'espace d'évolution du perchiste

Après avoir étalonné les caméras puis filmé le mouvement, il faut désormais analyser le geste. Pour ce faire, nous disposons d'un banc d'analyse vidéo qui est constitué d'un magnétoscope S-VHS et d'un ordinateur muni d'une carte d'acquisition vidéo. Le magnétoscope envoie le signal vidéo à la carte d'acquisition qui numérise sans perte de qualité la séquence filmée.

Le logiciel *SNAP 32*, développé par la Société BIOMETRICS, permet ensuite de repérer les coordonnées  $(U, V)$  dans le plan de numérisation de chaque articulation. Sachant qu'une image vidéo est constituée d'une succession de trames paires et de trames impaires, cette opération peut s'effectuer :

- Sur chaque image de la séquence vidéo : la fréquence d'acquisition est alors de 25 Hz et la définition de 720 par 540 pixels ;
- Sur chaque trame de l'enregistrement vidéo : la fréquence d'acquisition est alors de 50 Hz et la définition de 720 par 270 pixels.



La fréquence d'acquisition a été favorisée au détriment de la définition pour l'étude du saut à la perche car le mouvement est relativement rapide. L'analyse du geste sportif image par image est un travail minutieux et généralement fastidieux : deux heures d'analyse sont, en effet, nécessaires pour reconstruire le mouvement complet d'un saut à la perche. L'acquisition automatique des marqueurs ou cibles représentant les différentes articulations corporelles n'est pas possible pour des expérimentations en extérieur, car elle nécessite un contraste important entre les cibles et les autres parties de l'image, décor notamment que l'on ne maîtrise pas sur un stade.

L'algorithme de la DLT permet enfin de reconstruire à partir de l'analyse du geste dans les deux plans de numérisation, les trajectoires 3D des articulations qui composent le modèle mécanique du perchiste.

Le dispositif présenté précédemment fut adapté pour des essais dont les objectifs de mesure étaient sensiblement différents. Par exemple, l'analyse de la première partie du saut, jusqu'à la flexion maximale de la perche permet de remonter au torseur d'action exercé par le perchiste sur la perche pendant la phase de contact. Pour ce faire, un dispositif comportant quatre caméras a été mis en place. Deux caméras placées sur la gauche de la piste d'élan ont alors permis de reconstruire le mouvement des articulations de la gauche du corps, de même deux caméras ont été positionnées à droite. Cette procédure a permis de ne perdre aucune articulation lors du mouvement. De plus, le champ plus restreint et un étalonnage plus fin (en ajoutant des points de contrôle) ont permis des mesures plus sensibles des efforts exercés par le perchiste sur la perche.

En conclusion, l'analyse vidéo 3D du saut à la perche, contrairement à l'analyse dynamométrique, ne s'effectue pas en temps réel, le travail de dépouillement des images successives étant long et minutieux. Elle est, cependant, indispensable pour rendre compte de la dynamique des différents segments corporels.

#### *2.4.2.2 Dispositif d'analyse dynamométrique 3D*

L'analyse dynamométrique du saut à la perche a pour objectif de mesurer les efforts extérieurs s'exerçant sur le perchiste et la perche. Pour ce faire, deux dynamomètres à six composantes ont été implantés sur le stade (figure 2-12) :

- Le premier, intégré à la piste d'élan à 3,60 mètres du fond du butoir et fixé au béton par un système de serrage mis au point spécialement, permet de mesurer les efforts exercés par le perchiste sur le sol lors du dernier appui avant le décollage ;
- Le second, placé sous le butoir, détermine les efforts développés par le système perche – perchiste dans le butoir.

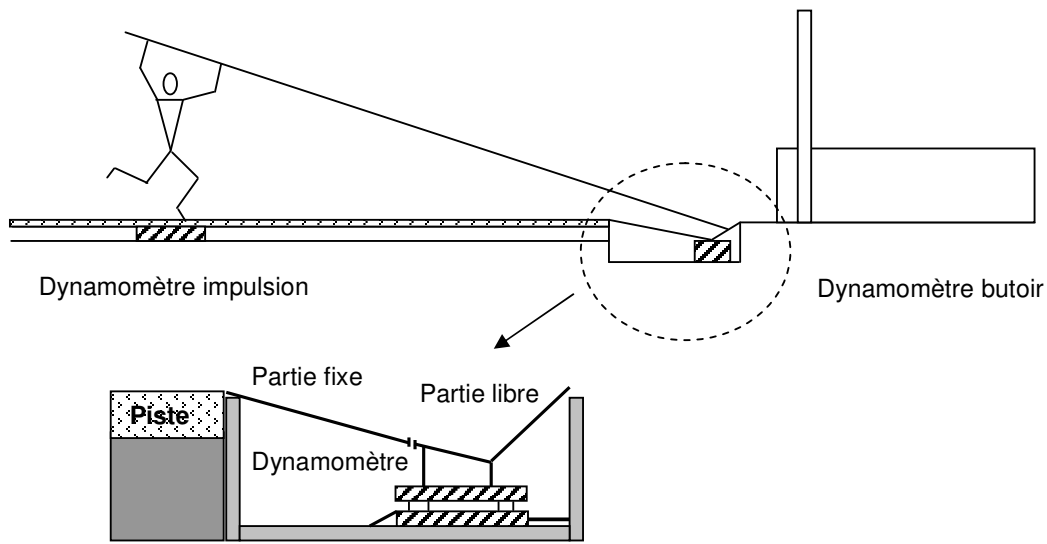


Figure 2-12 : Dispositif expérimental dynamométrique

Les contraintes pour la réalisation des dynamomètres utilisés dans l'étude du saut à la perche furent essentiellement liées à la masse et la taille du capteur placé sur la piste d'élan. En effet, les dynamomètres existant jusqu'alors avaient des encombrements relativement petits (200 mm par 200 mm) pour une masse peu importante (quelques kilogrammes), car conçus pour la mesure des efforts sur des machines outils. Si le dynamomètre placé sous le butoir a sensiblement les mêmes dimensions, celui dédié à la mesure de l'effort d'impulsion a nécessité la réalisation de deux prototypes en raison d'une taille importante : 800 mm de long pour 600 mm de large.

Le premier prototype s'appuyait sur l'architecture suivante :

- Une plaque supérieure d'une dimension de 800 mm par 600 mm en aluminium ;
- Une plaque inférieure pleine en acier et de même dimension.

Le principal inconvénient de ce dynamomètre était sa masse, relativement élevée (80 kg) qui le rendait peu maniable. De plus, de telles caractéristiques mécaniques engendraient une fréquence propre de 40 Hz, peu adapté à la mesure des chocs ou des phénomènes dynamiques rapides. Il a donc fallu pour des raisons de commodité et afin d'améliorer la réponse dynamique du capteur, diminuer de façon considérable la masse de la plaque supérieure en conservant une rigidité équivalente.

Le choix s'est porté sur les matériaux composites, la plaque supérieure du dynamomètre a donc été réalisée en utilisant un sandwich carbone - balsa - carbone. En outre, la partie inférieure du dynamomètre a été évidée pour diminuer la masse du capteur.

En définitive, la réalisation du deuxième prototype a permis de :

- Diminuer la masse du capteur à 20 kg ;
- D'augmenter sa fréquence propre à 60 Hz.

La figure suivante (2-13) permet de constater que les oscillations engendrées sur la force d'impulsion sont nettement plus faibles avec le dynamomètre composite.

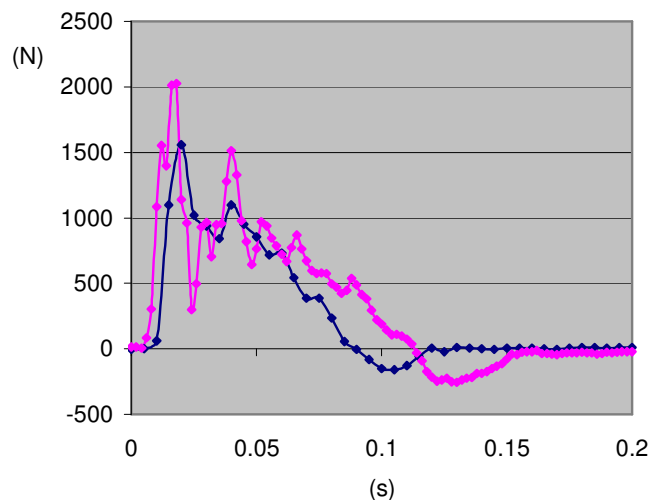
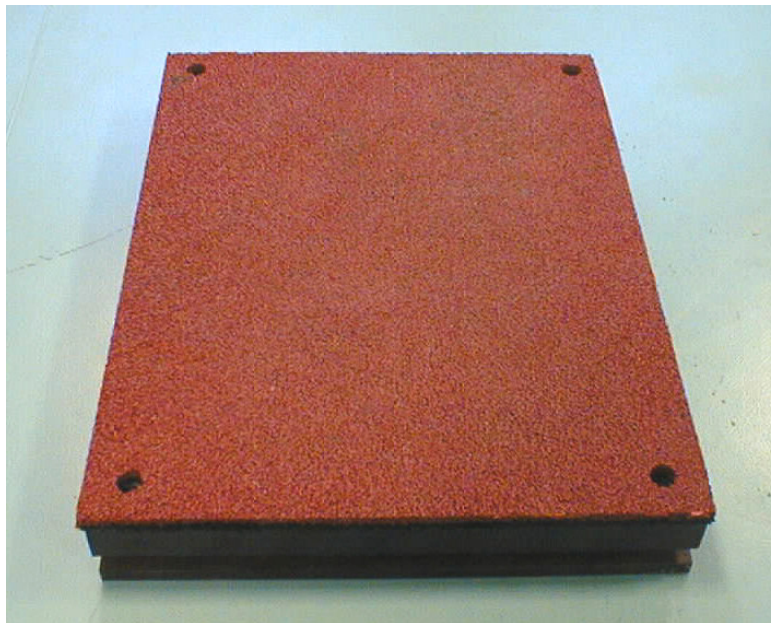


Figure 2-13 : Comparaison entre les dynamomètres aluminium et composite

On peut remarquer, enfin, que l'utilisation d'un revêtement synthétique (de type tartan) posé sur le dynamomètre afin de reproduire les conditions de saut réelles, n'a pas permis d'obtenir une bande passante importante. En effet, ce matériau d'une épaisseur de deux centimètres est assez amortissant et diminue donc sensiblement les performances dynamiques de la plaque supérieure.

En définitive, les caractéristiques mécaniques du dynamomètre d'impulsion sont les suivantes :

- Il mesure 800 mm de long sur 600 mm de large ;
- Il pèse 25 kg ;
- Sa plaque supérieure est constituée d'un sandwich de Balsa et de Carbone, offrant de très bonnes propriétés dynamiques : rigidité élevée, faible masse (5 kg) et facteur d'amortissement structural négligeable. Elle est recouverte d'une couche de deux centimètres de matériau synthétique, équivalent au Tartan des stades d'athlétisme, permettant au perchiste de se retrouver dans les mêmes conditions d'évolution ;
- Sa plaque inférieure est réalisée sous forme d'un Y en acier ;
- Sa bande passante pour des sollicitations dynamiques est de 60 Hz.



*Photo 2-2 : Vue de dessus d'un dynamomètre à six composantes*

Le second dynamomètre, plus petit, est placé sous un butoir en acier adapté pour l'occasion (figure 2-12) et enregistre les efforts développés par le système perche – perchiste dans celui-ci. Afin de limiter les effets dynamiques du butoir, ce dernier a été découpé en deux parties, la première reste fixe alors que la seconde solidaire du dynamomètre est libre et permet ainsi la mesure des efforts. L'ensemble du dispositif est positionné dans un caisson en bois placé dans la piste et fixé au sol.

Ce dynamomètre possède les caractéristiques suivantes :

- Il mesure 400 mm de long sur 400 de large ;
- Il pèse 20 kg ;
- Sa plaque supérieure est réalisée en aluminium et est liée à la partie libre du butoir par une pièce intermédiaire, cet ensemble très rigide ne pèse que 6 kg ;
- Sa plaque inférieure en acier est fixée sur le béton grâce à des vis de fixation ;
- La bande passante du capteur seul est de 300 Hz avec la partie libre du butoir, elle diminue de moitié.

Les caractéristiques des deux dynamomètres ont été calculées au mieux pour limiter les effets dynamiques de la partie libre et pour optimiser la sensibilité des ponts de flexion par rapport à la rigidité des bras.

## 2.5 Conclusions

L'analyse expérimentale du saut à la perche est une étape indispensable vers une meilleure compréhension de la dynamique gestuelle. La réalisation et la mise au point du dispositif d'analyse ont demandé de longs mois de travail afin d'obtenir un système fiable et robuste.

En outre, les nombreuses analyses effectuées sur divers sportifs ont permis :

- D'obtenir les données indispensables pour faire fonctionner les simulations numériques ;
- De déterminer la robustesse des modèles numériques en comparant les résultats de ces derniers avec les valeurs expérimentales ;
- D'analyser les phénomènes physiques mis en œuvre.

Très souvent délaissé au profit de la vidéo, l'analyse dynamométrique est essentielle et complémentaire de l'analyse cinématique.



## CHAPITRE 3. MODELISATION ET METHODES DE CALCUL

---

3.1	Modélisation du perchiste .....	59
3.1.1	Modèle multicorps.....	59
3.1.2	Tables anthropométriques .....	60
3.2	Traitement du signal .....	63
3.2.1	Recalage des trajectoires .....	63
3.2.1.1	Principe du recalage .....	63
3.2.1.2	Résultats obtenus.....	66
3.2.2	Calcul des dérivées .....	67
3.2.2.1	Approximation polynomiale au sens des moindres carrés.....	68
3.2.2.2	Filtres et interpolation polynomiale par morceaux .....	71
3.2.2.3	Generalized Cross-Validatory Spline (GCVS) .....	74
3.2.2.4	Synthèse des résultats et conclusions .....	75
3.3	Modèle de calcul dynamique.....	77
3.3.1	Torseur cinétique de l'athlète en son centre de gravité .....	77
3.3.1.1	Calcul de la résultante du torseur cinétique .....	77
3.3.1.2	Moment cinétique de l'athlète en son centre de gravité .....	79
3.3.2	Torseur dynamique et énergie cinétique .....	82
3.3.3	Validation du modèle et des techniques de calcul.....	83
3.3.4	Détermination du torseur d'action du perchiste sur la perche.....	87
3.3.4.1	Référentiel d'étude .....	88
3.3.4.2	Hypothèses et mise en équations .....	88
3.4	Conclusions .....	92





*Ce chapitre est consacré à l'étude du mouvement du perchiste par une approche dynamique. Avant de mettre en place les équations de la dynamique, il convient de modéliser le perchiste par un ensemble de solides, supposés indéformables liés les uns aux autres par des liaisons mécaniques appelé aussi modèle « multicorps ». Le concept de « Torseur » sera utilisé afin d'alléger les équations de la Mécanique Newtonienne.*

### 3.1 Modélisation du perchiste

*La complexité de la modélisation choisie pour décrire le perchiste va influencer de manière importante les résultats obtenus. Ainsi, nous avons défini la représentation physique la plus fine possible : chaque segment corporel est donc modélisé par un solide rigide dont les caractéristiques d'inertie se rapprochent au mieux de celles réelles.*

#### 3.1.1 Modèle multicorps

Le modèle multicorps représente le sportif comme un ensemble de solides rigides polyarticulés auxquels on peut appliquer les équations de la Mécanique des solides indéformables.

Cette modélisation possède, en outre, de nombreux avantages :

- Elle décrit de manière convenable la réalité ;
- La mise en équation du problème et sa résolution sont plus abordables et moins coûteuses en temps de calcul qu'une approche dynamique en éléments finis ;
- Elle permet enfin de comprendre les mécanismes mis en jeu dans les performances réalisées.

Le modèle choisi pour cette étude est composé des 14 segments rigides suivant, repérés par 18 marqueurs articulaires (placés sur les articulations distales et proximales) :

- Pieds (x 2) : bout du pied – cheville ;
- Jambes (x 2) : cheville – genou ;
- Cuisses (x 2) : genou – hanche ;
- Tronc : milieu des hanches – milieu des épaules ;
- Bras (x 2) : épaule – coude ;
- Avant – bras (x 2) : coude – poignet ;
- Mains (x 2) : poignet – bout des doigts ;
- Tête : cou – sommet du crâne.

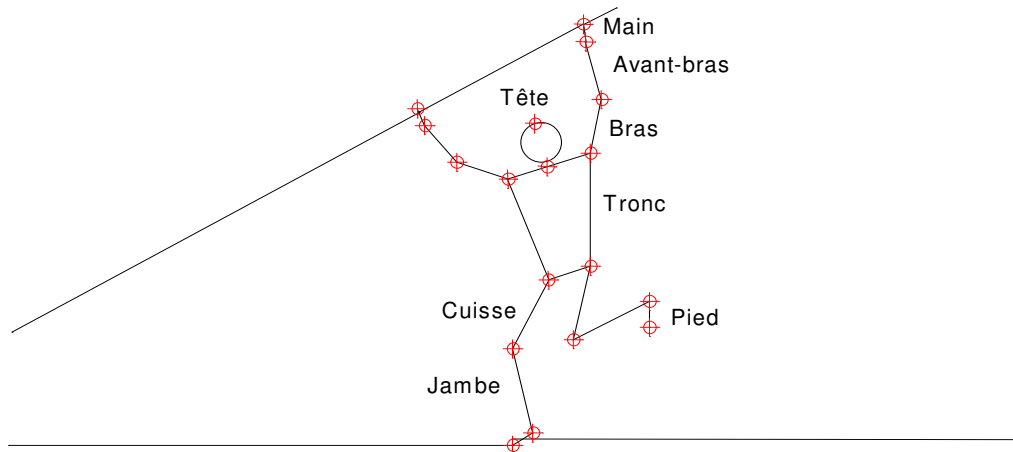


Figure 3-1 : Modèle multicorps du perchiste

Enfin, chaque solide doit posséder des caractéristiques mécaniques (masse, position du centre de masse, matrice d'inertie) proches de celles réelles. Des tables anthropométriques ont été établies et fournissent en fonction de la taille et de la masse des sportifs les caractéristiques d'inertie de ses différents segments corporels. Le paragraphe suivant est consacré à la présentation des tables les plus utilisées et à leurs évolutions.

De plus, il est nécessaire de réaliser une modélisation volumique des segments afin de pouvoir calculer le moment cinétique du sportif en son centre de gravité. Celle-ci est présentée lors du paragraphe traitant du calcul du moment cinétique : l'ensemble des hypothèses relatives à ce calcul est alors développé.

### 3.1.2 Tables anthropométriques

La première étude scientifique, cherchant à déterminer les propriétés d'inertie des segments corporels, fut réalisée par DEMPSTER en 1955 sur huit cadavres. Elle permit de créer les premières tables anthropométriques et servit de référence pendant plusieurs années.

Plusieurs études se sont alors succédées jusqu'au travaux de ZATSIORSKY [Zat83] en 1983. Grâce à la radiographie, il détermina les caractéristiques d'inertie des différents segments corporels en réalisant des mesures sur un échantillon de 100 hommes et fournit les équations de régression donnant la valeur de ces caractéristiques en fonction de la masse et de la taille des individus.

Plus récemment, DE LEVA [DeL93] proposa un ajustement des tables de ZATSIORSKY et valida les résultats obtenus sur des jeunes athlètes. Ces tables font en outre la différence entre des athlètes masculins et féminins et ont permis une amélioration indiscutable sur les résultats obtenus par rapport aux données de DEMPSTER.

Elles ont donc été utilisées dans le modèle multicorps mis en place pour l'étude dynamique du saut à la perche et renseignent sur les paramètres suivants :

- La position  $p$  du centre de masse de chaque segment par rapport à l'articulation distale ou proximale ;
- La proportion de masse  $m$  de chaque segment en fonction de la masse du sportif  $M$  ;
- Les moments d'inertie dans les axes principaux des segments corporels,  $IT^*$  représente le moment d'inertie transverse pour un athlète mesurant 1,74 mètres et pesant 73 kilogrammes.

<i>Segment</i>	$p$ (cdm)	$m$ (% M)	$IT^*$ (kg.m <sup>2</sup> )	<b><math>p</math> (cdm)</b>	<b><math>m</math> (% M)</b>	<b><math>IT^*</math> (kg.m<sup>2</sup>)</b>
Pied	0.4290	0.0146	0.0038	<b>0.4415</b>	<b>0.0137</b>	<b>0.0044</b>
Jambe	0.4330	0.0465	0.0505	<b>0.4524</b>	<b>0.0433</b>	<b>0.0385</b>
Cuisse	0.4330	0.0988	0.1052	<b>0.4095</b>	<b>0.1416</b>	<b>0.1998</b>
Tronc	0.4383	0.5080	1.308	<b>0.4544</b>	<b>0.4346</b>	<b>1.2400</b>
Avant - bras	0.4300	0.0160	0.0076	<b>0.4574</b>	<b>0.0162</b>	<b>0.0065</b>
Bras	0.4360	0.0270	0.0213	<b>0.4228</b>	<b>0.0271</b>	<b>0.0127</b>
Main	0.5060	0.0066	0.0005	<b>0.7900</b>	<b>0.0061</b>	<b>0.0013</b>
Tête	0.5358	0.0730	0.0248	<b>0.4024</b>	<b>0.0694</b>	<b>0.0272</b>
DEMPSTER (1955)				DE LEVA (1993)		

Tableau 3-1 : Tables anthropométriques de DEMPSTER et de DE LEVA

L'exemple qui suit permet de mieux appréhender les paramètres d'inertie en examinant ces derniers sur le segment « bras ». Le bras possède une articulation distale, le coude, notée C et une articulation proximale, l'épaule, E.

La position du centre de masse du bras  $G_{bras}$  est donnée par la relation suivante faisant intervenir la quantité  $p_{bras}$  :

$$\vec{EG}_{bras} = p_{bras} \vec{EC} \text{ où } p_{bras} = 0.4228 \quad (3-1)$$

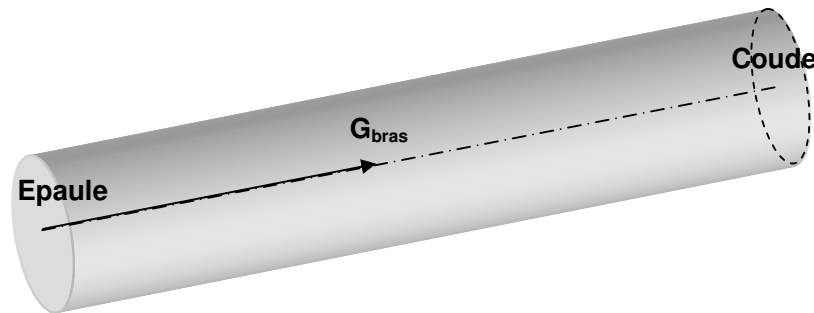


Figure 3-2 : Position du centre de masse du bras

Ainsi, la connaissance des trajectoires des articulations proximales et distales de chaque segment permet de calculer la trajectoire du centre de masse du segment correspondant. De même, la quantité  $m$  détermine la masse du segment alors que ses moments d'inertie sont donnés par les tables anthropométriques dans ses axes principaux (longitudinal et transverse pour une modélisation par un solide possédant un axe de révolution).

Enfin, la modélisation multicorps de l'athlète autorise le calcul du torseur dynamique du perchiste exprimé en son centre de gravité par rapport à un référentiel terrestre. En effet, l'analyse vidéo 3D permet de reconstruire les trajectoires de chacune des 18 articulations constitutives du modèle. En combinant ces résultats expérimentaux avec les différents paramètres d'inertie établis dans les tables anthropométriques, le calcul des torseurs cinétique et dynamique du perchiste en son centre de gravité est alors possible. Les trajectoires brutes issues de la reconstruction 3D doivent être, alors, dérivées deux fois pour déterminer le torseur dynamique. Néanmoins, l'opération de dérivation est délicate, car elle accentue de manière très importante le bruit contenu dans le signal initial. Le paragraphe suivant est donc entièrement consacré à l'étude de la dérivation de nuages de points et à la validation des techniques utilisées couramment.

## 3.2 Traitement du signal

*Avant d'effectuer toute opération, il est souhaitable d'apporter une première correction aux données en utilisant l'hypothèse d'indéformabilité des solides. En effet, les segments corporels étant rigides, les trajectoires des articulations peuvent être recalées en contraignant certaines distances inter segmentaires. L'algorithme d'optimisation avec contraintes, utilisée pour résoudre ce problème est développé au paragraphe 3.2.1.*

*Par la suite, la dérivation de nuages de points expérimentaux a fait l'objet de nombreuses recherches fondamentales ou appliquées, notamment dans le domaine de la Biomécanique. Les algorithmes de calcul sont généralement constitués en deux parties distinctes :*

- *Le premier traitement cherche à lisser la courbe pour éliminer au mieux la partie « bruitée » du signal ;*
- *La seconde étape permet de déterminer une fonction mathématique représentative de la courbe et continûment dérivable au moins deux fois et aboutit ainsi à la détermination des vitesses et accélérations.*

### 3.2.1 Recalage des trajectoires

#### 3.2.1.1 Principe du recalage

Le recalage de certaines trajectoires articulaires permet d'apporter une première correction aux données expérimentales acquises lors de l'analyse vidéo 3D. Le principe de ce recalage découle de l'hypothèse d'indéformabilité des solides constituant le modèle de l'athlète. Ainsi, certaines distances entre deux articulations sont supposées constantes au cours du mouvement, elles constitueront donc les contraintes de notre problème. En outre, on cherchera alors à minimiser l'écart entre les coordonnées réelles et corrigées des articulations considérées pour chaque intervalle de temps avec les contraintes établies auparavant.

Considérons le modèle multicorps du perchiste défini précédemment, seules dix distances inter segmentaires ont servi pour définir les contraintes de l'optimisation. En effet, la distance entre les épaules n'est pas constante et n'a pu être utilisée, de même que la longueur des mains et de la tête.

Afin de mettre en équations le problème d'optimisation, une notation a été définie pour représenter les articulations prises en compte par le recalage.

On notera alors ces 14 articulations de la manière suivante :

- 1 pour le bout du pied droit ;
- 2 pour la cheville droite ;
- 3 pour le genou droit ;
- 4 pour la hanche droite ;
- 5 pour le bout du pied gauche ;
- 6 pour la cheville gauche ;
- 7 pour le genou gauche ;
- 8 pour la hanche gauche ;
- 9 pour l'épaule droite ;
- 10 pour le coude droit ;
- 11 pour le poignet droit ;
- 12 pour l'épaule gauche ;
- 13 pour le coude gauche ;
- 14 pour le poignet gauche.

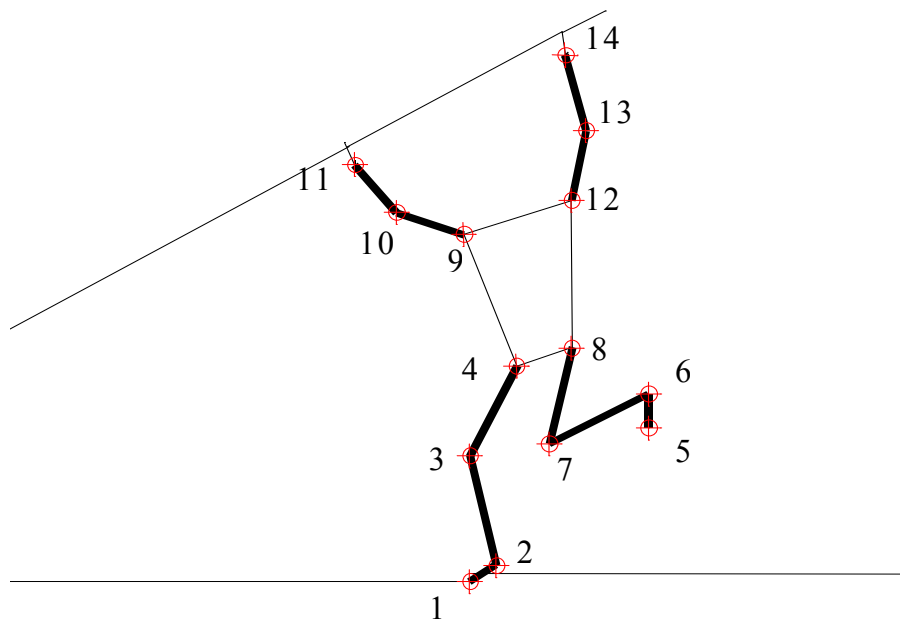


Figure 3-3 : Numérotation des articulations

Seules 10 distances ( $d(i, j)$ ) entre deux articulations (représentées en gras sur la figure 3-2) seront utilisées dans les équations de contraintes. En outre, il est nécessaire de mesurer ces longueurs, notée  $c_{ij}$  sur chaque sportif testé.

Ainsi, on définit les 10 équations de contraintes suivantes :

$$d(i, j) = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} = c_{i,j} \text{ pour } \begin{cases} (i,j) = (1,2) \\ (i,j) = (2,3) \\ (i,j) = (3,4) \\ (i,j) = (5,6) \\ (i,j) = (6,7) \\ (i,j) = (7,8) \\ (i,j) = (9,10) \\ (i,j) = (10,11) \\ (i,j) = (11,12) \\ (i,j) = (12,13) \end{cases} \quad (3-2)$$

Il convient maintenant de définir la fonction objectif à minimiser pour chaque intervalle de temps. En effet, il s'agit de minimiser l'écart entre les coordonnées mesurées  $X'_i: (x'_i, y'_i, z'_i)$  par l'analyse vidéo 3D et les coordonnées recalées : inconnus du problème  $X_i: (x_i, y_i, z_i)$ . Cet écart est défini par la norme euclidienne de  $\mathbf{R}^3$  de  $X' - X$  et on peut alors construire la fonction objectif  $f$  comme la somme sur  $i$  de ces écarts :

$$f = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{14} \|X'_i - X_i\| \quad (3-3)$$

On cherche alors les  $X_i$  qui minimisent  $f$  avec les 10 équations de contraintes du type  $d(i, j) = c_{i,j}$ .

L'algorithme d'optimisation des moindres carrées a été utilisé pour résoudre ce problème. De plus, le calcul a été effectué à l'aide du code MAPLE sur chaque pas de temps afin de déterminer les trajectoires recalées des articulations considérées ( $1 \rightarrow 14$ ).

### 3.2.1.2 Résultats obtenus

L'algorithme de recalage des trajectoires articulaires par rapport aux longueurs segmentaires a été effectué pour chaque saut étudié. Les résultats obtenus montrent que la conservation des distances est améliorée au cours du mouvement.

L'évolution de la longueur de la cuisse droite lors d'un saut réel est présentée dans les figures suivantes, cette distance  $d(3,4)$  a été au préalable mesuré sur le corps du sportif et vaut 530 mm.

On notera alors les différentes longueurs de la manière suivante :

- La longueur expérimentale est la longueur mesurée à partir des résultats bruts de l'analyse vidéo 3D ;
- La longueur corrigée est la distance calculée à partir des trajectoires recalées ;
- La longueur de référence est la distance inter articulaire mesurée sur le corps de l'athlète.

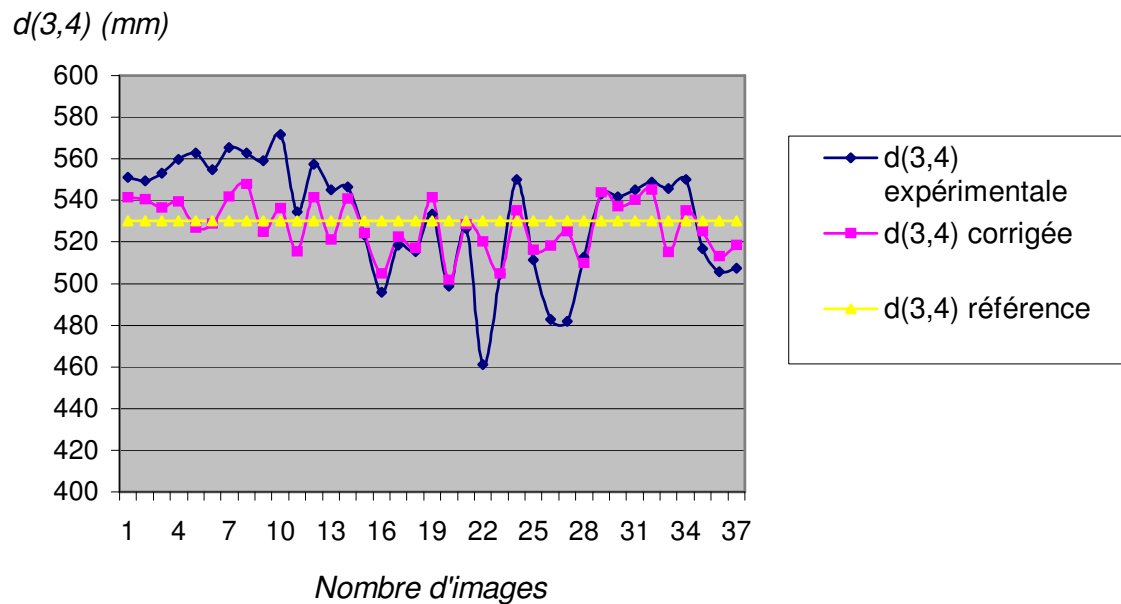


Figure 3-4 : Evolution de la longueur  $d(3,4)$  au cours d'un saut



On constate sur la figure 3-4 que des écarts importants (plus de 10 %) entre les valeurs expérimentales et réelles apparaissent parfois (images 24 et 29). Ces incertitudes de mesure peuvent s'expliquer par le fait que sur certaines images des articulations sont cachées par d'autres segments, l'expérimentateur doit alors estimer la position de ces articulations augmentant ainsi l'incertitude.

En outre, les trajectoires corrigées permettent d'obtenir une longueur de segment plus constante et en outre, plus proche de la réalité. Le recalage améliore donc de façon significative les résultats. En effet, les distances recalées ne s'éloignent pas de plus de 5 % des longueurs réelles contre 15 % pour les trajectoires brutes (figure 3-5).

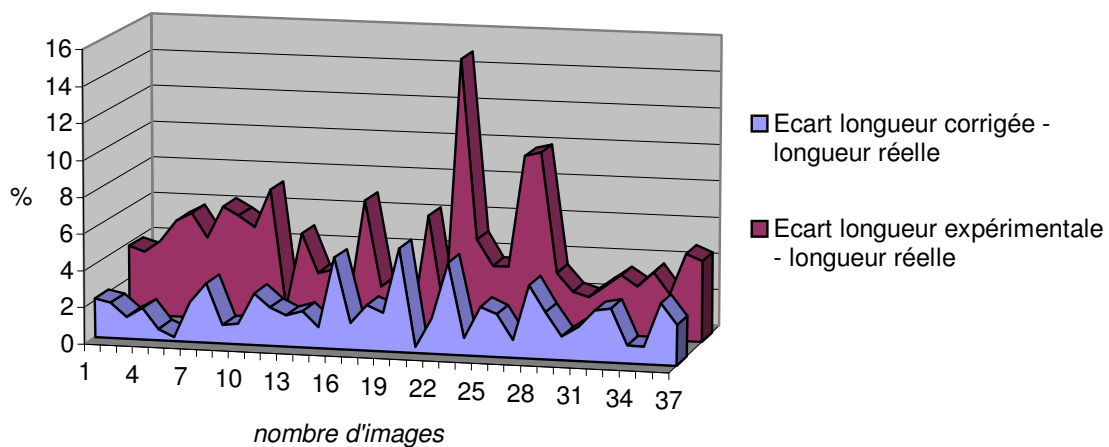


Figure 3-5 : Ecart entre les distances réelles, corrigées et expérimentales

En conclusion, le recalage des trajectoires articulaires par rapport aux distances segmentaires réelles est une première étape vers le calcul des torseurs dynamiques des différents solides mis en jeu dans la modélisation.

Le chapitre suivant est donc consacré à la dérivation de courbes et à la validation des différents algorithmes pour les dérivées première et seconde.

### 3.2.2 Calcul des dérivées

La dérivation de « nuages de points » est un problème complexe de l'analyse numérique. Cependant, on le rencontre fréquemment en Biomécanique pour déterminer des vitesses ou des accélérations à partir de trajectoires issues de l'analyse vidéo 3D. Pour minimiser les erreurs dues au calcul des dérivées, il convient d'utiliser les algorithmes les mieux adaptés à notre problème.

Afin de calculer les dérivées de fonctions données sur lesquelles on ne dispose que d'informations partielles (les fonctions à dériver ne sont connues qu'en un nombre fini de points), il faut pouvoir faire une approximation de la courbe par une fonction mathématique continûment dérivable au moins deux fois (de classe  $C^2$ ). Les fonctions les plus utilisées sont les polynômes, les fonctions polynomiales par morceaux (splines), les fractions rationnelles et les sommes d'exponentielles.

En général, les critères d'approximation s'effectuent sur la bonne continuité des courbes à dériver. En effet, les trajectoires obtenues à partir de l'analyse vidéo présentent souvent de faibles discontinuités ou « bruit » qu'il faut éliminer pour obtenir des dérivées correctes sans pour autant tronquer la trajectoire et ainsi minimiser les vitesses et les accélérations.

Le schéma classique de dérivation peut alors se mettre sous la forme suivante :

- Lissage ou filtrage de la trajectoire à dériver ;
- Détermination d'une fonction de classe  $C^2$  représentative de la courbe obtenue ;
- Dérivation de cette fonction.

Les différents algorithmes présentés dans cette étude seront testés sur la trajectoire du centre de gravité d'un sportif effectuant une détente verticale sans élan. Le champ d'évolution de l'athlète est sensiblement équivalent à celui du saut à la perche. De plus, les accélérations générées par les segments du sportif lors d'une détente verticale sont supérieures à celles rencontrées au saut à la perche.

### 3.2.2.1 Approximation polynomiale au sens des moindres carrés

L'approximation de courbes au sens des moindres carrés permet de réaliser à la fois le lissage et de déterminer la fonction mathématique représentative de la courbe.

Soient  $\{X_i, Y_i\}$  les  $n$  couples de points de notre courbe expérimentale, on cherche le polynôme de degré  $m$  (avec  $m < n$ ) qui minimise l'écart entre les valeurs expérimentales et le polynôme au sens des moindres carrés, on définit alors la quantité  $Q$  :

$$Q = \sum_{i=1}^n \left[ Y_i - (a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m) \right]^2 \quad (3-4)$$

On cherche donc les meilleurs coefficients du polynôme au sens des moindres carrés, soit :

$$\frac{\partial Q}{\partial a_i} = 0 \text{ pour } i \in [0, m] \quad (3-5)$$

On obtient ainsi  $(m+1)$  équations dont les  $(m+1)$  inconnues sont les coefficients du polynôme. La résolution de ce système linéaire permet de déterminer le polynôme d'approximation de la courbe expérimentale au sens des moindres carrés.

Le choix du degré du polynôme est l'étape la plus délicate de l'algorithme, en effet, il conditionne la qualité du lissage : plus ce dernier sera élevé plus le polynôme aura tendance à passer par tous les points de la courbe.

En général, on utilise des polynômes de degré élevé (de l'ordre de 30 à 50) pour une courbe expérimentale contenant une centaine de points. Cependant, la principale insuffisance de la méthode des moindres carrés est de générer des effets de bords très élevés dans le calcul des dérivées. Ainsi, les premiers et les derniers points obtenus pour le calcul des dérivées n'ont alors aucun sens physique. Cette lacune sera en partie comblée par l'utilisation des splines d'interpolation. Enfin, le choix manuel du degré influence de manière importante les résultats obtenus notamment pour la dérivée seconde.

Les résultats obtenus sur la vitesse et sur l'accélération sont présentés sur les figures 3-6 et 3-7. Ils montrent de manière évidente les effets de bords inhérents à la méthode des moindres carrés, ainsi il faut éliminer les quatre premiers et les quatre derniers points pour l'exemple suivant.

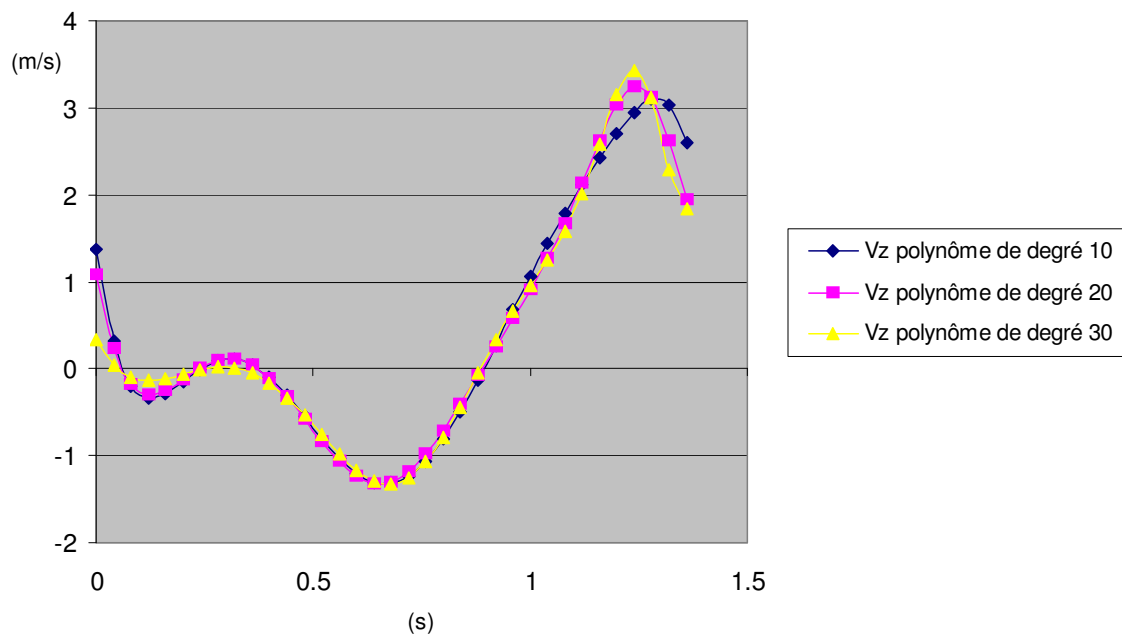


Figure 3-6 : Calcul de vitesse par la méthode des moindres carrés

Les écarts sur les vitesses sont relativement faibles pour des degrés variant de 10 à 30. Cependant, on constate une différence relative maximale de 9 % sur les vitesses. On remarque enfin qu'un degré de polynôme trop faible lisse de manière trop importante la courbe et minimise donc les valeurs des vitesses ainsi obtenues. Inversement, un polynôme de degré proche du nombre de points aura tendance à surestimer la valeur des dérivées.

La recherche du degré optimal est donc la phase très délicate du calcul des dérivées par approximation polynomiale au sens des moindres carrés.

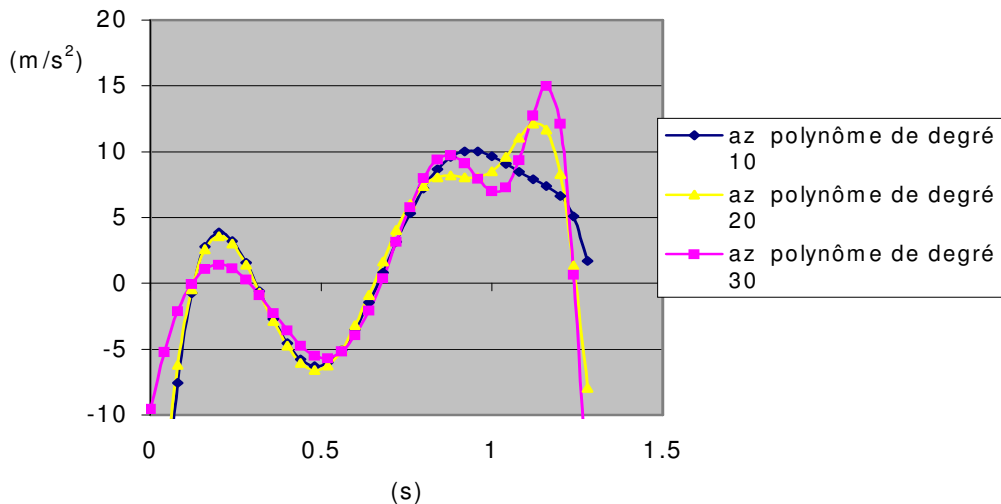


Figure 3-7 : Calcul des accélérations par la méthode des moindres carrés

Les remarques réalisées pour le calcul des vitesses à partir d'une approximation polynomiale restent valables pour les accélérations et sont même accentuées. En effet, le degré choisi sera encore plus influent sur les résultats obtenus, l'écart relatif maximal entre les dérivées secondes d'une même courbe (en omettant les effets de bords) est 30 %. De même, un degré trop faible va minimiser de façon importante la valeur de l'accélération (polynôme de degré 10 dans notre exemple).

En conclusion, l'approximation polynomiale reste mal adaptée pour le calcul des dérivées (notamment de la dérivée seconde) car elle génère des effets de bords importants et est trop sensible au choix du degré du polynôme. Elle reste cependant facile à programmer et peut être acceptable pour le calcul des dérivées premières.

### 3.2.2.2 Filtres et interpolation polynomiale par morceaux

La deuxième méthode consiste à lisser les résultats bruts en utilisant des filtres passe bas puis à interpoler la courbe obtenue à l'aide de polynômes définis par morceaux et au moins de classe  $C^2$ .

Plusieurs types de filtre « passe – bas » sont généralement utilisés en Biomécanique pour éliminer la fraction bruitée du signal étudié (Butterworth, Bessel, Chebyshev, ...), le filtre de Butterworth fait partie des algorithmes les plus fréquemment employés.

Les fonctions de Butterworth utilisées pour réaliser les filtres correspondants sont des cas particuliers des fonctions MFM (Maximally Flat Magnitude) et ont une réponse en amplitude de la forme :

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2n}} \text{ où } f_c \text{ est la fréquence de coupure.}$$

La fréquence de coupure  $f_c$  spécifie l'atténuation apportée au signal et va donc gérer la qualité du filtrage obtenu.

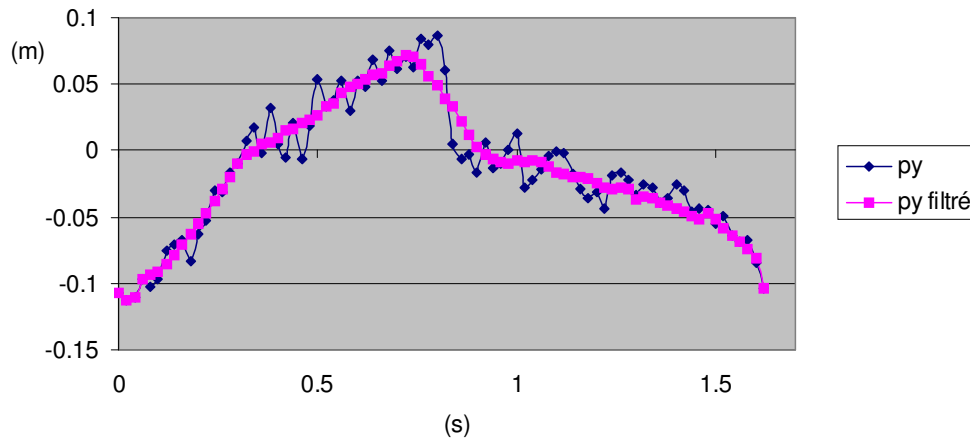


Figure 3-8 : Exemple de filtrage obtenu avec un filtre de Butterworth de fréquence de coupure de 6 Hz sur la trajectoire du centre de gravité selon la direction transverse

Une fois le signal filtré, il convient de déterminer la fonction mathématique de classe  $C^2$  représentative du signal obtenu. Généralement des polynômes d'interpolation définis par morceaux sont utilisés, on parle alors de splines d'interpolation.

La construction de splines d'ordre au moins 2 (c'est à dire au moins 2 fois continûment dérivable) assure la continuité des accélérations.

Considérons une suite de  $n+1$  abscisses distinctes et ordonnées d'un intervalle  $[a, b]$  notés  $x_i$ , en les quelles est connue par ses valeurs  $y_i = f(x_i)$  une fonction  $f$  à interpoler. Soit  $k$  un entier tel que  $1 \leq k \leq n+1$ , alors on admet qu'il existe une fonction  $S$  et une seule de classe  $C^{2k-2}$ , définie sur  $[a, b]$  et formée de polynômes :

- De degré  $(k-1)$  sur  $[a, x_0]$  et  $[x_n, b]$  ;
- De degré  $(2k-1)$  ailleurs ;
- Vérifiant pour  $i = 0, \dots, n$   $S(x_i) = y_i$ .

Pour construire ainsi un spline d'interpolation d'ordre 2, on définit les polynômes suivant

$$\begin{aligned}
 S_0 &= S \Big|_{[a, b]} \text{ polynôme de degré 1} \\
 i=1, \dots, n \quad S_i &= S \Big|_{[x_{i-1}, x_i]} \text{ polynôme de degré 3} \\
 S_{n+1} &= S \Big|_{[x_n, b]} \text{ polynôme de degré 1}
 \end{aligned}$$

De plus, l'écriture de la continuité de la fonction spline et de ses deux premières dérivées (classe  $C^2$ ) conduit à un système linéaire  $Ax = B$  où les inconnus de la matrice  $A$  sont les coefficients des polynômes  $S_i$ . La résolution de ce système construit de manière unique le spline d'interpolation de la fonction  $f$ . Enfin, la dérivation de ce spline est aisée car les fonctions à dériver sont des polynômes de degré 1 ou 3 pour un spline de classe  $C^2$ .

La partie délicate du calcul des dérivées reste donc le choix de la fréquence de coupure  $f_c$ , qui comme pour le degré du polynôme lors de la méthode des moindres carrés, va surestimer ou sous-estimer les valeurs des dérivées. Néanmoins, cette méthode minimise les effets de bords et se montre mieux adaptée à la dérivation de nuages de points.

Les figures suivantes présentent les résultats obtenus sur les composantes verticales de la vitesse et de l'accélération avec différents choix de fréquence de coupure. On constate sur les vitesses un écart maximal de 6.5 % pour des fréquences de coupure allant de 6 à 10 Hz ainsi que la bonne correspondance des courbes en dehors des maxima.

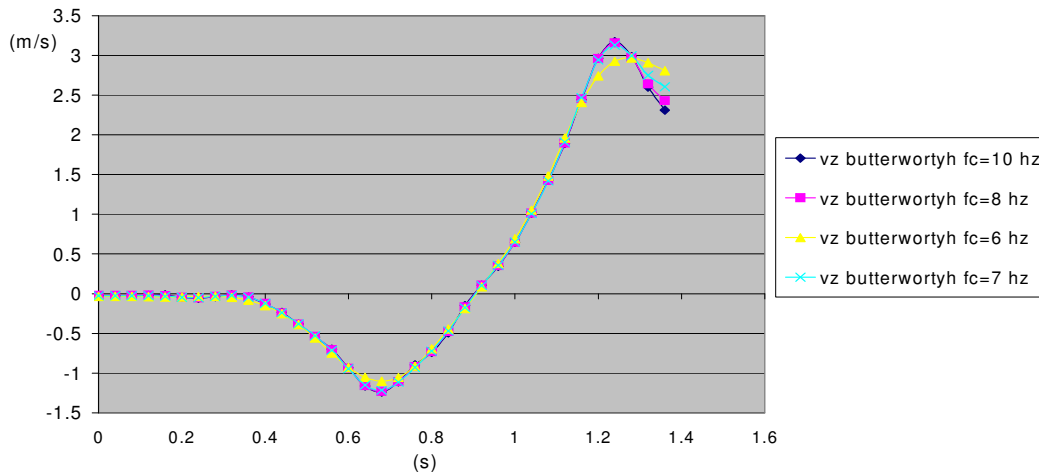


Figure 3-9 : Calcul des vitesses verticales pour différentes fréquences de coupure

En ce qui concerne les accélérations, l'écart maximal atteint 18 % pour des fréquences de coupure allant de 6 à 10 Hz. Il paraît aussi de manière évidente qu'une fréquence de coupure plus faible aura tendance à sous-estimer les valeurs des dérivées alors qu'une fréquence trop forte surestimera ces valeurs.

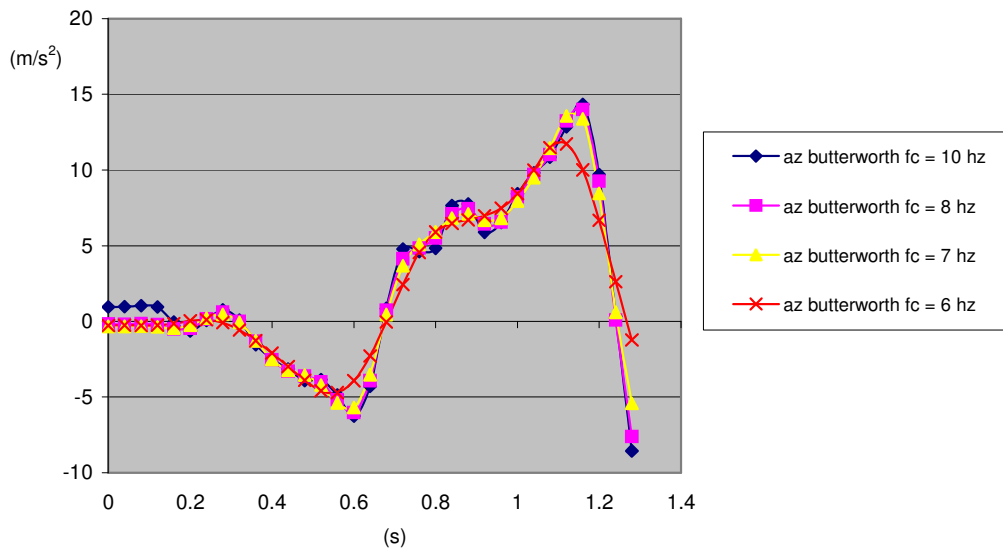


Figure 3-10 : Calcul des accélérations verticales pour différentes fréquences de coupure

En conclusion, cet algorithme est mieux adapté que l'approximation polynomiale par la méthode des moindres carrés mais reste sensible au choix de la fréquence de coupure.

La recherche automatique d'une fréquence de coupure a alors fait l'objet de plusieurs études. Les approches utilisées sont toutes basées sur des méthodes statistiques. En effet, la détermination de la fréquence de coupure optimale s'effectue en recherchant celle qui minimise :

- La somme des écarts expliqués :  $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$  (  $\hat{y}_i$  est la valeur filtrée) ;

ou

- La somme des autocorrélations :  $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(y_i - \bar{y})(y_{i+1} - \bar{y})}{(y_i - \bar{y})^2}$  (  $\bar{y}$  est la valeur moyenne).

La recherche de la fréquence de coupure optimale s'effectue sur l'intervalle  $[0, 0.5 f_s]$  en incrémentant tous les 0.1 Hz ( $f_s$  étant la fréquence d'acquisition).

### 3.2.2.3 Generalized Cross-Validatory Spline (GCVS)

Cet algorithme de calcul a été mis au point par Woltring [Wol86] et repose sur l'utilisation de splines réguliers.

Un spline régulier d'ordre  $2k$  est un polynôme défini par morceaux de degré  $2k-1$  qui minimise la somme :

$$p \int_{t_1}^{t_n} \left( \hat{y}^{(m)}(t) \right)^2 dt + \sum_{i=1}^n \left| \hat{y}(t_i) - y(t_i) \right|^2 \text{ où } t \text{ est le temps, } y \text{ la variable, } \hat{y} \text{ sa valeur lissée et } p$$

le paramètre de lissage.

En effet,  $p$  contrôle le degré de lissage et donc la qualité des dérivées. La valeur optimale de  $p$  est recherchée sur une considération statistique appelée critère de cross-validation tel que l'erreur moyenne au carré soit la plus proche d'une erreur connue à priori :

$$Erreur = 2 [0.5 (1 - h) + h]^2$$



Cet algorithme a donné de bons résultats pour le calcul des dérivées premières et secondes, notamment avec l'utilisation de spline quintic ( $k=3$ ). Il s'est cependant parfois montré instable sur le calcul des dérivées secondes : le paramètre de lissage est alors trop faible et la courbe obtenue présente des discontinuités trop importantes. Les résultats obtenus pour le calcul de la vitesse et de l'accélération du centre de gravité du sportif sont présentés sur la figure 3-11.

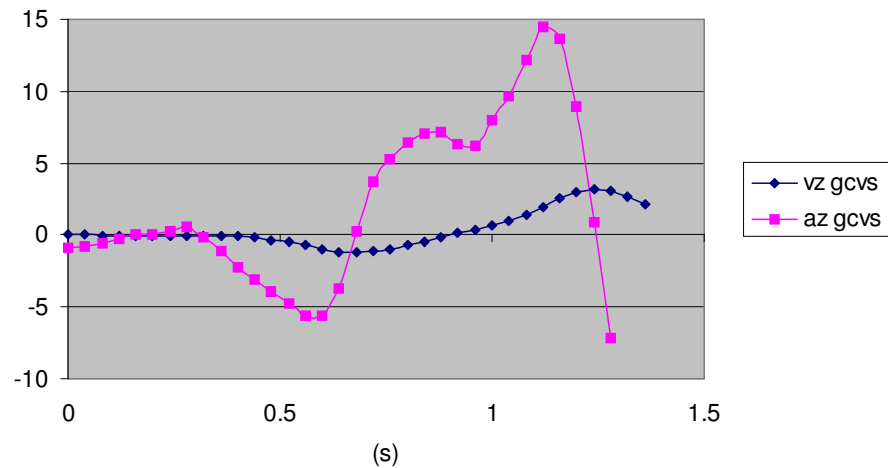


Figure 3-11 : Calcul des composantes verticales de la vitesse et de l'accélération du centre de gravité de l'athlète avec l'algorithme GCVS

#### 3.2.2.4 Synthèse des résultats et conclusions

Les résultats obtenus (présentés sur la figure 3-12) avec les différentes méthodes mettent en avant la réelle sensibilité des paramètres de lissage pour les méthodes manuelles lors du calcul des accélérations. Les écarts sur les vitesses restent faibles et montrent cependant l'avantage des deux derniers algorithmes au niveau des effets de bord (en raison de l'utilisation des splines). L'algorithme GCVS s'est donc montré le mieux adapté au calcul des dérivées en Biomécanique, cependant la recherche du paramètre de lissage ne s'effectue que sur des critères purement statistiques et non physiques. Lors de la comparaison des résultats dynamométriques et vidéo, nous avons cherché la fréquence de coupure qui permettait de recalculer au mieux les accélérations mesurées (dynamomètres) et calculées (vidéo). En supposant que cette fréquence est inhérente aux conditions de mesures vidéo (définition des caméras, importance du champ par rapport à l'athlète filmé, accélérations générées lors du geste sportif) elle pourra être conservée pour l'étude de l'ensemble des essais réalisés. Il s'agit donc d'un moyen plus physique de déterminer le paramètre de lissage optimal.

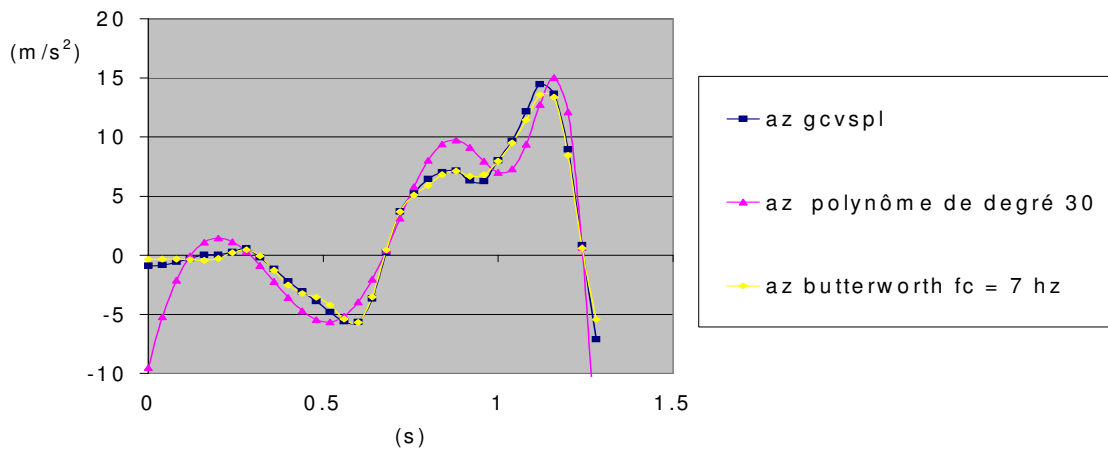


Figure 3-12 : Comparaison du calcul des accélérations avec les différentes méthodes de dérivations

En conclusion, la dérivation de nuages de points est une opération délicate, cependant l'utilisation d'algorithmes de plus en plus précis la rend opérationnelle : on peut estimer au maximum à 5 et 10 % les erreurs commises respectivement sur les dérivées premières et secondes. En outre, l'utilisation d'algorithmes avec recherche du paramètre de lissage automatique améliore sensiblement les résultats obtenus lorsqu'il n'est pas possible de comparer l'analyse dynamométrique et vidéo. Cependant, la qualité des mesures vidéo conditionne de manière définitive l'exactitude des dérivées.

Il serait néanmoins intéressant d'intégrer l'opération de lissage au processus de recalage des trajectoires articulaires par rapport aux longueurs des segments. C'est à dire rechercher non pas à chaque itération les positions des articulations qui conservent au mieux les distances inter articulaires mais de chercher des trajectoires (lissées ou continues) qui conserveront ces distances au cours du mouvement. Il faudrait donc réaliser le processus d'optimisation sur les coefficients des polynômes (pour l'utilisation de spline d'approximation par exemple) et non sur les coordonnées des articulations.

### 3.3 Modèle de calcul dynamique

*La mise en place d'une modélisation multicorps de l'athlète et la mesure des déplacements 3D des articulations constitutives du modèle permettent le calcul des torseurs cinétique puis dynamique du sauteur en son centre de gravité. Ce paragraphe s'attachera donc à expliquer les hypothèses qui permettent de tels calculs (notamment pour le calcul du moment cinétique) puis validera le modèle ainsi que les méthodes de calcul. Enfin, une mise en équation mécanique du saut à la perche sera proposée.*

#### 3.3.1 Torseur cinétique de l'athlète en son centre de gravité

La détermination du torseur cinétique du sauteur en son centre de gravité est indispensable dans toute approche dynamique du geste sportif. Elle nécessite toutefois la réalisation d'une modélisation volumique des segments corporels, celle ci sera présentée lors de l'étude du moment cinétique.

Le calcul du torseur cinétique d'un système  $S$  de  $n$  solides rigides  $S_i$  articulés les uns aux autres par des liaisons mécaniques par rapport à un référentiel galiléen  $R_0$  s'effectue de la manière suivante :

$$\left[ C_{S/R_0} \right]_G = \begin{cases} \vec{p}_{S/R_0} = \sum_{i=1}^n M_i \vec{v}(G_i \in S_i / R_0) \\ \vec{\sigma}_{S/R_0}(G) = \sum_{i=1}^n \vec{\sigma}_{S_i/R_0}(G) \end{cases} \quad (3-6)$$

Il convient de présenter dans un premier temps le calcul de la résultante du torseur cinétique (quantité de mouvement) puis celui du moment au centre de gravité  $G$  de l'athlète (moment cinétique).

##### 3.3.1.1 Calcul de la résultante du torseur cinétique

Afin de déterminer la résultante du torseur cinétique, il faut calculer dans un premier temps, la trajectoire 3D du centre de gravité de l'athlète dans le référentiel d'étude  $R_0$ . Pour ce faire, nous utiliserons les propriétés barycentriques du centre de gravité ainsi que les données issues des tables anthropométriques : proportion en masse  $m_i$  de chaque segment  $i$  et position  $p_i$  du centre de masse  $G_i$  du segment  $i$  par rapport aux articulations proximale  $P_i$  et distale  $D_i$ .

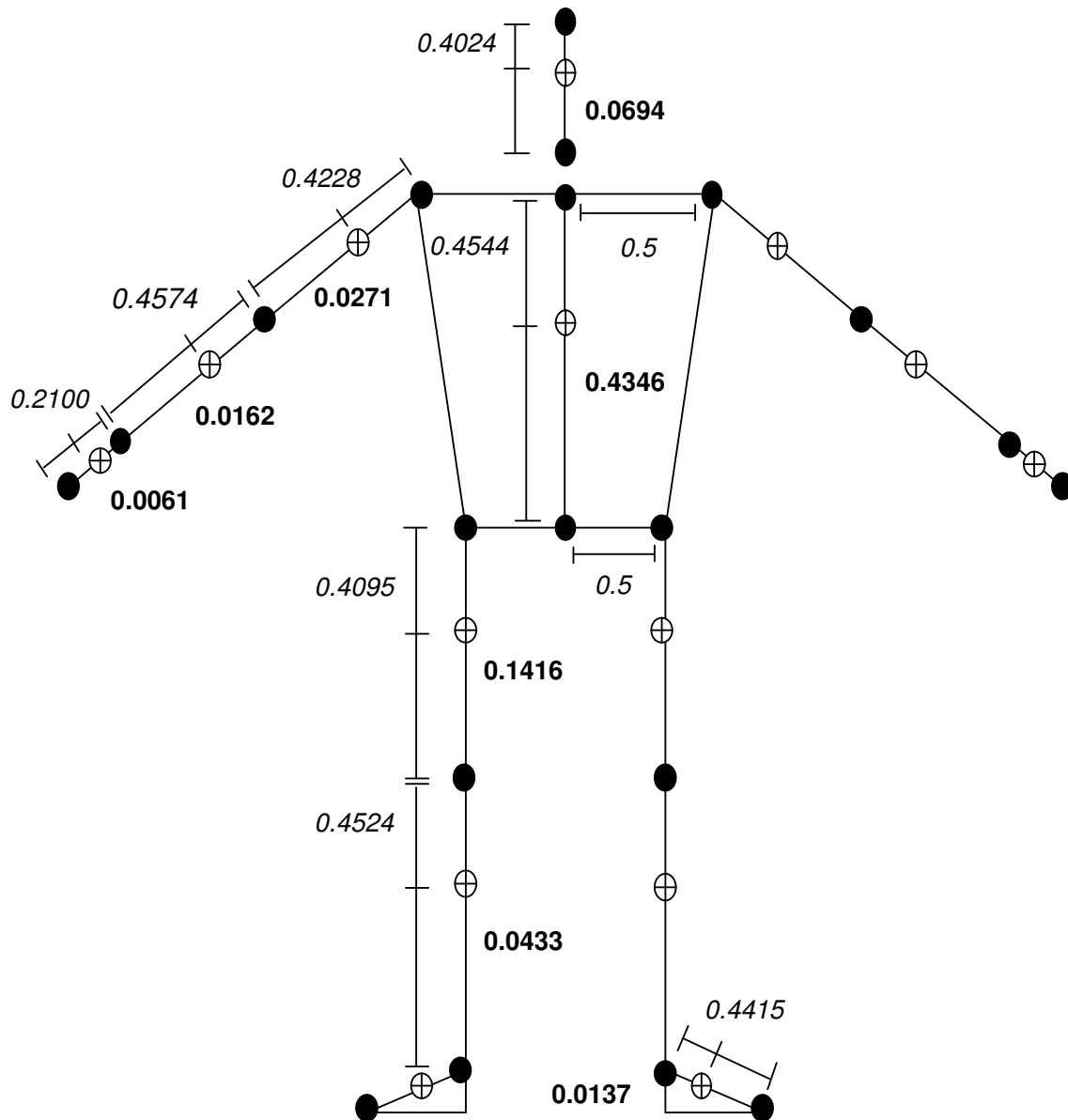


Figure 3-13 : Position des centres de masses (*italique*) et proportion en masse des segments corporels (*gras*)

Pour le segment  $i$ , il est alors aisé de positionner son centre de masse par rapport à l'origine du référentiel  $R_0$ , en effet il vient :



$$\vec{P_i G_i} = p_i \vec{P_i D_i} \text{ d'où } \vec{O G_i} = (1 - p_i) \vec{O P_i} + p_i \vec{O D_i} \quad (3-7)$$

On peut ainsi déterminer la position du centre de gravité  $G$  du solide  $S$  de masse  $M$  à chaque instant en appliquant la relation barycentrique :

$$\vec{O G} = \frac{\sum_{i=1}^n M_i \vec{O G_i}}{\sum_{i=1}^n M_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i M \left[ (1 - p_i) \vec{O P_i} + p_i \vec{O D_i} \right]}{M} \quad (3-8)$$

En définitive, il ne reste plus qu'à utiliser au mieux les algorithmes de dérivation pour calculer la résultante du torseur cinétique :

$$\vec{p_{S/R_0}} = M \frac{d_0 \vec{O G}}{dt} = M \vec{v} (G \in S / R_0) \quad (3-9)$$

### 3.3.1.2 Moment cinétique de l'athlète en son centre de gravité

Afin de déterminer le moment cinétique du sauteur en son centre de gravité  $G$  dans son mouvement par rapport au référentiel d'étude  $R_0$ , il convient de calculer le moment cinétique de chaque segment  $i$  en son centre de masse  $G_i$  (terme local) puis d'en faire le transport au centre de gravité  $G$  de l'athlète (terme de transport).

Le calcul des termes locaux nécessite la mise en place d'un modèle volumique des segments ainsi que l'énoncé de certaines hypothèses.

$$\vec{\sigma}_{S_i/R_0}(G) = \underbrace{\vec{\sigma}_{S_i/R_0}(G_i)}_{\text{Terme local}} + \underbrace{\vec{G}G_i \wedge M_i \vec{v}(G_i \in S_i/R_0)}_{\text{Terme de transport}} \quad (3-10)$$

### Détermination des termes locaux

Deux hypothèses principales sont posées pour permettre la détermination du moment cinétique d'un segment en son centre de masse :

- Chaque segment est modélisé par un solide rigide possédant un axe de révolution (cône cylindrique par exemple) ;
- Les rotations autour de l'axe longitudinal du solide sont négligées pour tous les segments corporels mis à part le tronc.

En définitive, toute rotation d'un segment sera effectuée autour d'un de ses deux axes transverses (qui possèdent les mêmes propriétés d'inertie). Sans cette hypothèse, il aurait été nécessaire pour chaque segment de connaître les mouvements d'un axe perpendiculaire à l'axe longitudinal (repéré par deux articulations successives) afin de mesurer les rotations autour ce dernier. Dans le cas du tronc, la rotation des épaules autour des hanches permet de prendre en compte la rotation longitudinale. En outre, cette hypothèse se justifie dans la mesure où les rotations longitudinales sont très faibles vis à vis de celles transverses.

L'analyse vidéo 3D permet de reconstruire sur chaque trame filmée la position dans l'espace des articulations constitutives du modèle choisi pour l'athlète et servira de base au calcul du moment cinétique

Soit  $\vec{r}_i(t) = \vec{D}_i P_i(t)$  le vecteur position d'un segment  $i$  à un instant  $t$  et  $\vec{r}_i(t + \Delta t)$  le même vecteur repéré à la trame suivante  $t + \Delta t$  ( $\Delta t = 0.02$  s), le produit vectoriel de  $\vec{r}_i(t)$  par  $\vec{r}_i(t + \Delta t)$  normé à 1, permet de déterminer l'axe de rotation du segment à l'instant  $t + \Delta t$  (figure 3-14).

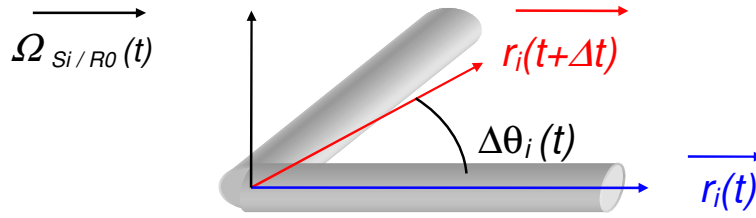


Figure 3-14 : Détermination du vecteur vitesse instantanée de rotation

De plus, le vecteur vitesse instantanée de rotation est calculé grâce à la mesure de l'angle  $\Delta\theta_i$  entre les deux vecteurs (figure 3-14) :

$$\vec{\Omega}_{S_i/R_0}(t) = \frac{\vec{r}_i(t) \wedge \vec{r}_i(t+\Delta t)}{\left\| \vec{r}_i(t) \wedge \vec{r}_i(t+\Delta t) \right\|} \frac{\Delta\theta_i(t)}{\Delta t} \quad (3-11)$$

Enfin, les hypothèses assurent que la rotation s'effectue autour d'un des axes transverses, le moment cinétique du segment  $i$  en son centre de masse  $G_i$  est alors calculé :

$$\vec{\sigma}_{S_i/R_0}(G_i) = I_{ii} \vec{\Omega}_{S_i/R_0} \quad (3-12)$$

Pour le tronc, il faut ajouter le moment cinétique créé par la rotation longitudinale à celui généré par la rotation transverse.

### Détermination des termes de transport

Le calcul des termes de transport ne demande que la connaissance des vitesses des différents centres de masse des segments corporels par rapport au référentiel d'étude.

La relation dite de transport des moments (liée à l'antisymétrie du champ de moments du torseur cinétique) permet la détermination des termes de transport :

$$\sum_{i=1}^n \vec{G}G_i \wedge M_i \vec{v} (G_i \in S_i / R_0) \quad (3-13)$$

En raison des faibles moments d'inertie des différents segments et des vitesses instantanées de rotation peu importantes, les termes de transport prédominent de manière importante dans le calcul du moment cinétique de l'athlète en son centre de gravité.

Le calcul du torseur cinétique est indispensable dans une approche dynamique du mouvement, il se détermine donc de la manière suivante :

$$\left[ C_{S/R_0} \right]_G = \begin{cases} \vec{p}_{S/R_0} = M \frac{d_0 \vec{OG}}{dt} \\ \vec{\sigma}_{S/R_0}(G) = \sum_{i=1}^n \vec{\sigma}_{S_i/R_0}(G_i) + \sum_{i=1}^n \vec{G}G_i \wedge M_i \vec{v} (G_i \in S_i / R_0) \end{cases} \quad (3-14)$$

et il permet :

- De rendre compte de la quantité de mouvement et de rotation du corps ;
- De calculer le torseur dynamique de l'athlète en son centre de masse ;
- D'évaluer l'énergie cinétique mise en jeu lors du mouvement.

### 3.3.2 Torseur dynamique et énergie cinétique

La connaissance du torseur cinétique de l'athlète en son centre de gravité permet le calcul du torseur dynamique. En effet, au centre de gravité, le torseur dynamique et le torseur cinétique sont reliés par la relation suivante :

$$\left[ D_{S/R_0} \right]_G = \frac{d}{dt} \Big|_{R_0} \left[ C_{S/R_0} \right]_G = \frac{d_0}{dt} \left[ C_{S/R_0} \right]_G \quad (3-15)$$

La détermination du torseur dynamique est nécessaire afin d'évaluer les efforts mis en jeu dans les gestes sportifs. Néanmoins, les approches énergétiques sont aussi intéressantes d'un point de vue mécanique, notamment au saut à la perche où s'exerce un transfert d'énergie entre le perchiste et la perche.



Dans tout système de solides indéformables, l'énergie cinétique du système dans son mouvement par rapport au référentiel d'étude vaut la somme des énergies cinétiques des sous systèmes élémentaires :

$$E_C(S / R_0) = \sum_{i=1}^n E_C(S_i / R_0) \quad (3-16)$$

En outre, l'énergie cinétique d'un solide rigide est égale à la moitié du comoment du torseur cinématique et du torseur cinétique. Avec les hypothèses mises en œuvre, on peut écrire alors :

$$E_C(S_i / R_0) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \vec{\Omega}_{S_i / R_0} \\ \vec{v}(G_i \in S_i / R_0) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} M_i \vec{v}(G_i \in S_i / R_0) \\ I_{Ti} \vec{\Omega}_{S_i / R_0} \end{bmatrix} \quad (3-17)$$

### 3.3.3 Validation du modèle et des techniques de calcul

Afin de valider le modèle multicorps de l'athlète et les techniques de dérivation développées, une comparaison des forces mesurées par un dynamomètre six composantes et calculées à partir de l'analyse vidéo 3D a été réalisé en utilisant le théorème de la résultante dynamique.

Deux tests ont été effectués :

- Le premier sur l'étude d'une détente simple sans élan ;
- Le second sur un essai réalisé au saut à la perche en supposant certaines hypothèses sur la perche.

Lors de la première étude, un saut vertical sans élan a été réalisé par un athlète. Le dispositif expérimental comprenait un dynamomètre six composantes mesurant les forces tridimensionnelles développées lors de l'appui du sportif et deux caméras vidéos qui ont permis de reconstruire la trajectoire 3D du centre de gravité de l'athlète. En outre, en appliquant le théorème de la résultante dynamique au sportif, on obtient :

$$\vec{R} = -\vec{P} + M \vec{a}(G \in S / R_0) \quad (3-18)$$

Le calcul de l'accélération du centre de gravité de l'athlète effectué à partir des mesures vidéo a permis de déterminer les forces exercées par le sportif sur la plaque supérieure du capteur et donc de les comparer avec celles mesurées par le dynamomètre.

Les figures suivantes présentent les résultats obtenus selon les trois axes du référentiel d'étude choisi. Les dérivations ont été réalisées avec la méthode de GCVS. La méthode utilisant des filtres de Butterworth donne des résultats équivalents pour une fréquence de coupure de 7 Hz pour les directions  $(O, x)$  (axe de la course) et  $(O, z)$  (axe vertical ascendant) et de 6 Hz pour la direction  $(O, y)$ .

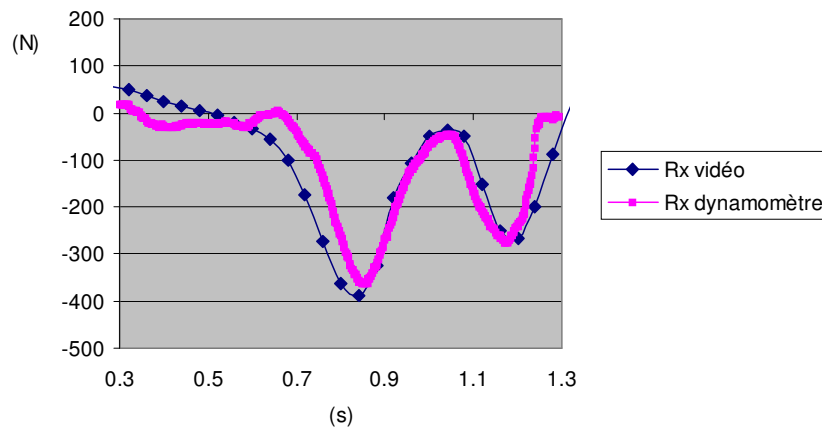


Figure 3-15 : Comparaison de la force suivant l'axe  $(O, x)$

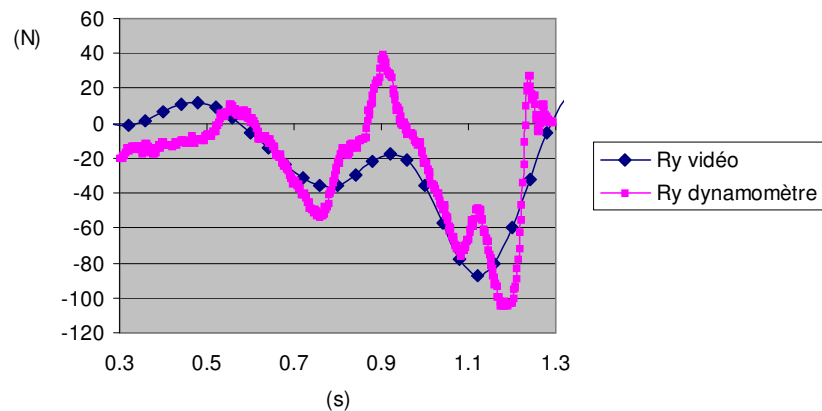


Figure 3-16 : Comparaison de la force suivant l'axe  $(O, y)$

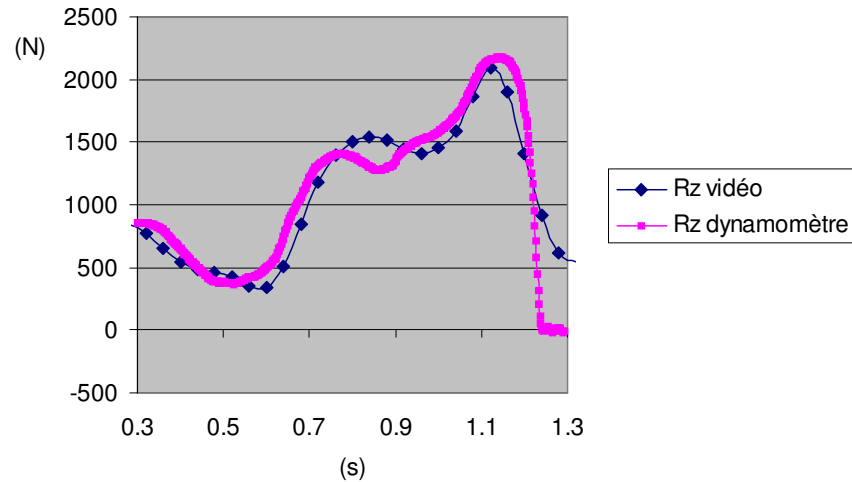


Figure 3-17 : Comparaison de la force suivant l'axe  $(O, z)$

Les courbes se trouvent bien recalées, le modèle et les techniques de calcul semblent donc satisfaisants. Cependant, on remarque les écarts maximaux proviennent sur les forces dans la direction  $(O, y)$  car il s'agit de la direction où les déplacements du centre de gravité sont faibles et beaucoup plus proches donc du domaine de l'erreur. En revanche, les différences relatives sur les maxima sont de 7 et 5 % respectivement pour les axes  $(O, x)$  et  $(O, z)$ .

Il a été alors intéressant de faire la même étude sur le saut à la perche. Les techniques d'analyse expérimentales sont celles détaillées lors du chapitre 2 : l'analyse vidéo est assurée par quatre caméras alors que deux dynamomètres enregistrent les efforts développés par le perchiste au niveau de ses différents appuis. Dans ce cas, les forces (exercées par le perchiste sur la perche) calculées à partir des données vidéos ont été comparées à celle mesurées par le capteur placé dans le butoir. Pour ce faire, on modélise la perche par un fil de masse négligeable et infiniment rigide. L'effort appliqué par le perchiste sur la perche est alors entièrement transmis au butoir.

En définitive, ces hypothèses conduisent à considérer que les forces développées par le perchiste sur la perche sont entièrement transmises dans le butoir et donc évaluées par le dynamomètre. Les calculs ont été effectués depuis le décollage du perchiste jusqu'au lâcher de la perche.

Les figures suivantes présentent les résultats obtenus dans les trois directions de l'espace.

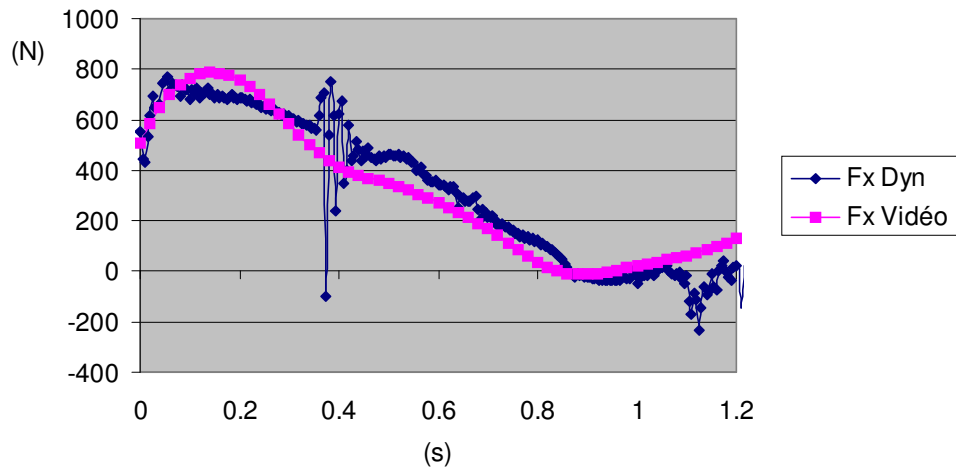


Figure 3-18 : Comparaison de la force suivant  $(O, x)$  pour un saut à la perche

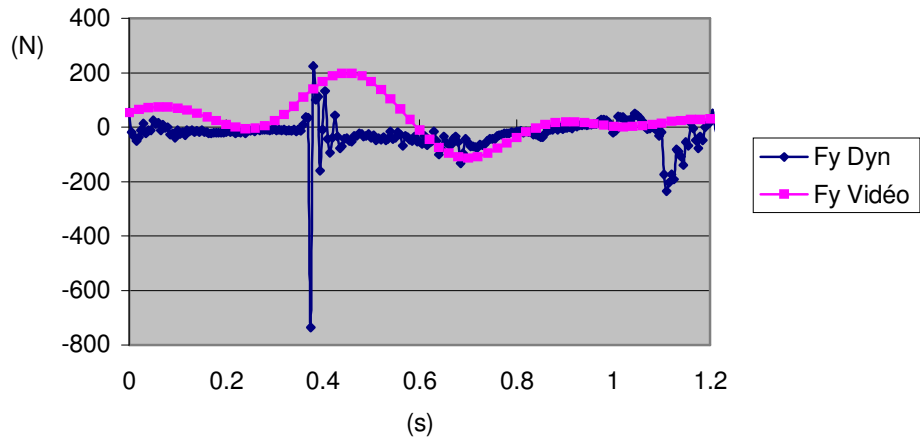


Figure 3-19 : Comparaison de la force suivant  $(O, y)$  pour un saut à la perche

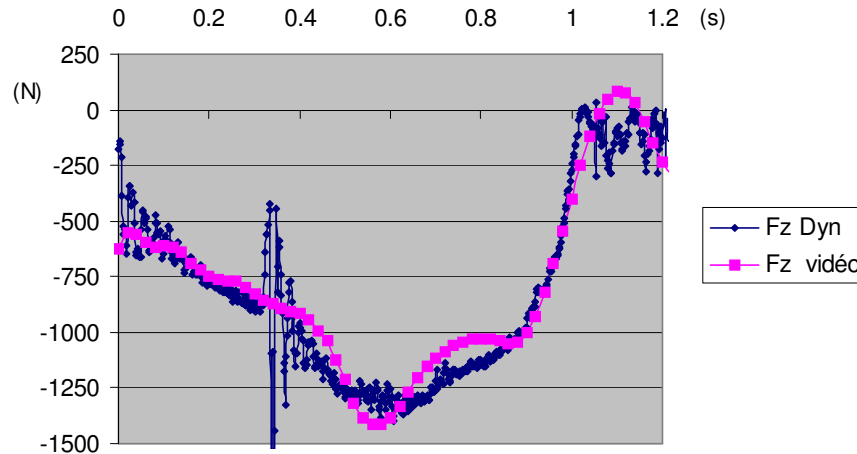


Figure 3-20 : Comparaison de la force suivant  $(O, z)$  pour un saut à la perche

Les résultats sont aussi cohérents que ceux obtenus avec l'étude dynamique d'une détente verticale sans élan bien que les conditions d'analyse vidéo étaient sensiblement différentes. L'algorithme GCVS a été utilisé pour dériver la trajectoire du centre de gravité du perchiste. Le recalage des résultats a aussi autorisé la détermination des fréquences de coupure optimales dans le cas des filtres de Butterworth : 6 Hz pour les axes  $(O, x)$  et  $(O, z)$  et 5 Hz pour  $(O, y)$ . Les remarques formulées lors du saut sans élan restent valables dans cette étude.

En conclusion, le modèle multicorps semble être tout fait représentatif de la réalité et les algorithmes de calcul se sont montrés satisfaisants dans un domaine d'erreur de 5 à 7 %.

### 3.3.4 Détermination du torseur d'action du perchiste sur la perche

*Le concept de torseur sera utilisé pour la mise en équation mécanique du saut à la perche. Contrairement aux études précédentes, une approche globale a été réalisée en appliquant les lois de la Mécanique au système total et non à chaque solide élémentaire. Le but est en effet d'évaluer le torseur d'action exercé par le perchiste sur la perche à partir de l'instant où la perche entre en contact avec le butoir et non de calculer les efforts inter articulaires. L'ensemble des hypothèses utilisées pour la mise en équations sera présenté dans ce paragraphe.*

### 3.3.4.1 Référentiel d'étude

Le référentiel choisi pour cette étude, noté  $R_0$  est considéré comme un référentiel galiléen et fixé à la piste d'élan (figure 3-21). Son origine  $O$  est définie par le centre du butoir et ses axes sont choisis de la manière suivante :

- L'axe  $(O, x)$  est l'axe de la piste d'élan ;
- L'axe  $(O, z)$  est l'axe vertical ascendant ;
- L'axe  $(O, y)$  est tel que  $R_0$  soit un repère direct.

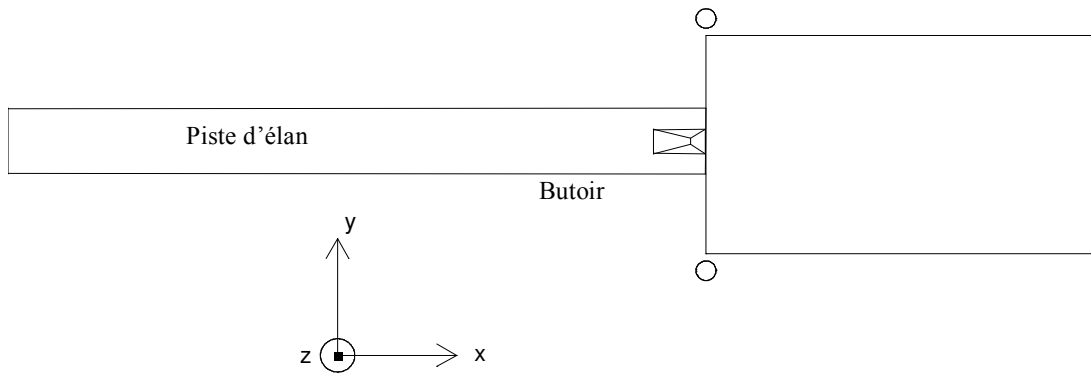


Figure 3-21 : Définition du référentiel d'étude

### 3.3.4.2 Hypothèses et mise en équations

L'athlète est modélisé par un ensemble de 14 solides rigides articulés les uns aux autres par des liaisons mécaniques. Chaque solide élémentaire (segment corporel) est représenté par un solide comprenant un axe de révolution.

L'objectif de ce paragraphe est de présenter les équations permettant de déterminer le torseur d'action du perchiste sur la perche en un point de la perche depuis le contact de la perche dans le butoir jusqu'au lâcher de celle-ci par l'athlète. Nous distinguerons deux phases : la première durant laquelle le perchiste est encore en contact avec la piste et la seconde à partir du décollage jusqu'au lâcher de la perche.

Pour la suite de l'étude, nous définirons par :

- (S) le système de solides indéformables de masse  $m$  représentant le perchiste ;
- $M_1$  la main supérieure du perchiste ;
- $M_2$  la main inférieure du perchiste ;
- $M$  le milieu du segment  $[M_1, M_2]$  ;
- $P$  le point de contact du pied avec le sol lors du dernier appui précédent le décollage ;
- $G$  le centre de gravité de (S).

Soit (S) le perchiste, quatre actions extérieures sont appliquées sur (S) et sont représentées par les quatre torseurs suivant :

- Le poids du perchiste appliqué en son centre de gravité  $G$  :  $[P]_G = \begin{cases} -mg \vec{z} \\ \vec{0} \end{cases}$
- L'effort exercé par la perche sur le perchiste en  $M_1$  :  $[\tau_1]_{M_1} = \begin{cases} \vec{F}_1 \\ \vec{M}_{\tau_1}(M_1) \end{cases}$
- L'effort exercé par la perche sur le perchiste en  $M_2$  :  $[\tau_2]_{M_2} = \begin{cases} \vec{F}_2 \\ \vec{M}_{\tau_2}(M_2) \end{cases}$
- La réaction du sol sur le perchiste en  $P$  :  $[I]_P = \begin{cases} \vec{I} \\ \vec{M}_I(P) \end{cases}$

Afin d'évaluer le torseur d'action du perchiste sur la perche, nous pouvons transporter les torseurs  $[\tau_1]$  et  $[\tau_2]$  au point  $M$  milieu de  $[M_1, M_2]$  (en supposant que la perche est rigide entre  $M_1$  et  $M_2$ ) puis en faire la somme pour obtenir le torseur  $[\tau]$ . Nous supposons que ce torseur représente l'action de la perche sur le perchiste au point  $M$  (figure 3-22).

En vertu du principe d'action – réaction, on peut alors écrire que le torseur d'action du perchiste sur la perche au point  $M$  est l'opposé de celui d'action de la perche sur le perchiste en ce même point :

$$[T]_M = -[\tau]_M = \begin{cases} \vec{F} \\ \vec{M}_T(M) \end{cases} \quad (3-19)$$

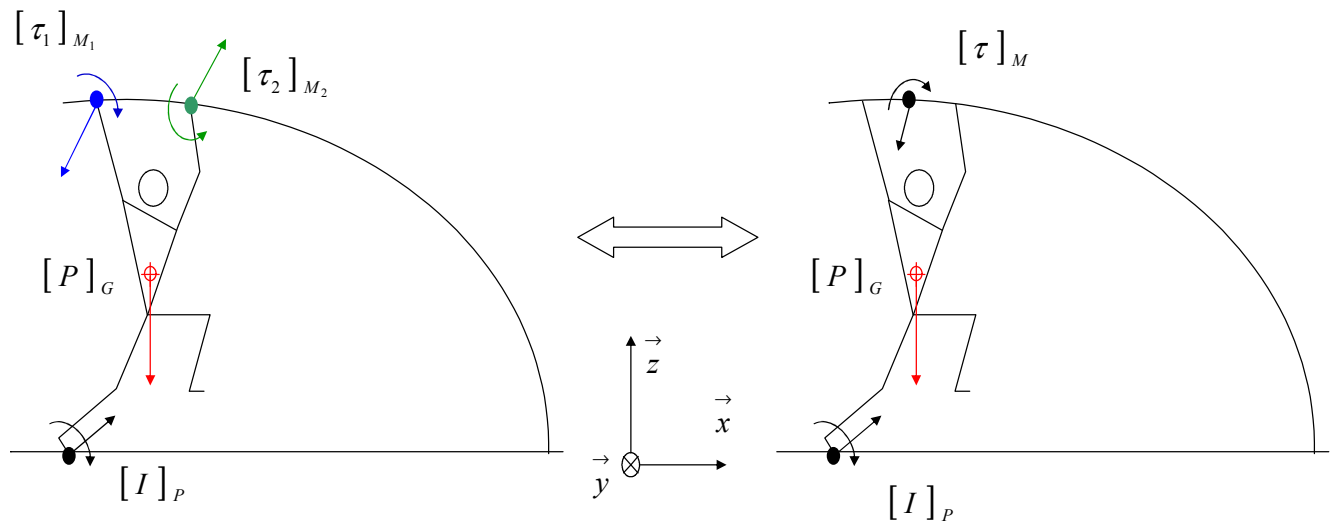


Figure 3-22 : Diagramme des efforts équivalents au saut à la perche

Nous pouvons désormais appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique sur le solide (S) au point G, nous obtenons ainsi l'égalité torsorielle suivante :

$$[D_{S/R_0}]_G = -[T]_G + [P]_G + [I]_G \quad (3-20)$$



En transportant  $[T]$  au point G, il vient :

$$[T]_G = \begin{cases} \vec{F} \\ \vec{M}_T(G) = \vec{M}_T(M) + \vec{GM} \wedge \vec{F} \end{cases} \quad (3-21)$$

De même, pour le torseur  $[I]$  :

$$[I]_G = \begin{cases} \vec{I} \\ \vec{M}_I(G) = \vec{M}_I(P) + \vec{GP} \wedge \vec{I} \end{cases} \quad (3-22)$$

Ainsi, nous en déduisons les deux équations vectorielles suivantes :

$$\begin{cases} m \vec{a}(G \in S/R_0) = -mg \vec{z} - \vec{F} + \vec{I} \\ \vec{h}_{S/R_0}(G) = -[\vec{M}_T(M) + \vec{GM} \wedge \vec{F}] + \vec{M}_I(P) + \vec{GP} \wedge \vec{I} \end{cases} \quad (3-23)$$

$$\text{mais, } \vec{h}_{S/R_0}(G) = \frac{d_0 \vec{\sigma}_{S/R_0}(G)}{dt} \quad \text{et} \quad \vec{GM} = \vec{GM}_1 + \vec{M}_1 \vec{M} = \vec{GM}_1 + \frac{1}{2} \vec{M}_1 \vec{M}_2$$

Finalement, nous obtenons le résultat suivant :

$$\begin{cases} \vec{F} = -m \left[ g \vec{z} + \vec{a}(G \in S/R_0) \right] + \vec{I} \\ \vec{M}_T(M) = -\frac{d_0 \vec{\sigma}_{S/R_0}(G)}{dt} - (\vec{GM}_1 + \frac{1}{2} \vec{M}_1 \vec{M}_2) \wedge \left\{ -m \left[ g \vec{z} + \vec{a}(G \in S/R_0) \right] + \vec{I} \right\} + \vec{M}_I(P) + \vec{GP} \wedge \vec{I} \end{cases} \quad (3-24)$$

Les expressions 3-24 permettent le calcul du torseur d'action du perchiste sur la perche au point  $M$  lorsque l'athlète est encore en contact avec le sol. Durant la seconde phase du saut (à partir du décollage du perchiste jusqu'au lâcher de la perche), le torseur  $[I]$  est nul, les équations 3-24 deviennent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F} = -m \left[ g \vec{z} + \vec{a} \ (G \in S/R_0) \right] \\ \vec{M}_T(M) = -\frac{d_0}{dt} \vec{\sigma}_{S/R_0}(G) - (G\vec{M}_1 + \frac{1}{2}M_1\vec{M}_2) \wedge \left\{ -m \left[ g \vec{z} + \vec{a} \ (G \in S/R_0) \right] \right\} \end{array} \right. \quad (3-25)$$

La détermination du torseur d'action 3D du perchiste sur la perche est indispensable dans toute approche dynamique du saut à la perche. En outre, les résultats obtenus sur des sauts réels (présentés au chapitre 4) seront la base de la simulation numérique réalisée.

### 3.4 Conclusions

Le chapitre 3 a mis en évidence l'importance des algorithmes de dérivation sur la validité des résultats obtenus sur les accélérations. En outre, le critère de dérivation ou de lissage joue un rôle essentiel sur la qualité des dérivées, il peut soit induire un résultat sous-estimé, le lissage est alors trop important, soit surestimé, le lissage est alors insuffisant. Les principaux algorithmes de recherche automatique du paramètre de lissage reposent sur des critères statistiques. Un des intérêts de superposer à l'analyse vidéo une analyse dynamométrique est de pouvoir recaler le critère de lissage par rapport à des données physiques. Ce critère évoluera avec les contraintes de l'expérimentation mise en place. Enfin, le modèle multicorps utilisé pour l'athlète semble rendre compte de manière satisfaisante de la réalité.

## CHAPITRE 4. ANALYSE DES RESULTATS

---

4.1	Introduction et méthodologie.....	95
4.2	Résultats dynamométriques.....	96
4.2.1	Méthode de l'axe central.....	96
4.2.1.1	Définition et propriétés de l'axe central .....	96
4.2.1.2	Equation vectorielle de l'axe central.....	97
4.2.1.3	Application au problème du saut à la perche .....	98
4.2.2	Résultats et commentaires .....	101
4.2.2.1	Effort d'impulsion .....	102
4.2.2.2	Effort exercé dans le butoir .....	105
4.3	Cinématique et cinétique du perchiste .....	111
4.3.1	Cinématique du geste.....	111
4.3.2	Moment cinétique du perchiste en son centre de gravité .....	113
4.3.3	Energie cinétique du perchiste.....	116
4.4	Torseur d'action exercé par le perchiste sur la perche.....	118
4.4.1	Revue bibliographique .....	118
4.4.2	Résultats expérimentaux .....	119
4.4.2.1	Phase d'impulsion .....	120
4.4.2.2	Phase de saut.....	122
4.4.3	Etude comparative.....	124
4.4.3.1	Bilan des résultats .....	124
4.4.3.2	Analyse comparative de deux sauts effectués sur une même perche.....	126
4.4.3.3	Limites des mesures et perspectives .....	129
4.5	Influence de la perche sur les efforts développés .....	130
4.5.1	Etude comparative.....	131
4.5.1.1	Force exercée par un même perchiste sur des perches différentes.....	131
4.5.1.2	Force exercée par différents perchistes sur une même perche.....	133
4.5.1.3	Force d'inertie d'entraînement et force relative développées .....	134
4.6	Amélioration du geste .....	137
4.6.1	Principe de la dynamique segmentaire .....	137
4.6.2	Application au saut à la perche .....	138
4.7	Conclusions et perspectives .....	140



## 4.1 Introduction et méthodologie

Les essais réalisés au Stadium de ROCQUENCOURT (TALENCE) ont permis d'analyser les sauts de 7 perchistes du Stade Bordelais Université Club, dont les meilleurs résultats sont compris entre 4,70 m et 5,55 m. Sept journées de tests ont été nécessaires pour pouvoir enregistrer suffisamment de données cinématiques et dynamiques. Des essais à thèmes (analyse d'un saut complet avec différentes perches pour un même perchiste, avec différents sauteurs sur une même perche, analyse du début du saut, mesure des déplacements des points de l'extrémité de la perche, ...) ont permis une étude pertinente des critères de performance au saut à la perche. A chaque série de tests correspondait une mise au point particulière du dispositif d'analyse vidéo. Les deux dynamomètres placés sur la piste d'élan et sous le butoir ont enregistré lors de chaque test les efforts exercés par le système perche – perchiste au niveau des ses différents appuis.

Au total, une vingtaine de sauts ont fait l'objet d'une analyse vidéo 3D alors qu'une centaine d'essais ont été évalués par les dynamomètres. Néanmoins, peu de perchistes ont pris leur dernier appui sur le dynamomètre placé sur la piste. En effet, l'emplacement de ce dernier avait été calculé pour des longueurs de levier trop importantes, il ne correspondait qu'aux caractéristiques du perchiste dont l'étude a fait l'objet d'un suivi longitudinal. Pour ces raisons, le torseur d'action du perchiste sur la perche pendant la phase de contact avec le sol a été calculé uniquement pour cet athlète.

L'étude portant essentiellement sur une analyse dynamique du geste, les paramètres cinématiques du saut (position et vitesse des segments corporels au moment du contact de la perche dans le butoir) seront considérés exclusivement comme les conditions initiales du mouvement et feront l'objet d'une étude moins approfondie que les paramètres dynamiques bien qu'ils soient essentiels pour la suite du geste.

La problématique du saut à la perche peut se présenter comme suit :

« compte tenu des conditions initiales, le perchiste doit utiliser au mieux ses segments corporels pour appliquer un effort important sur la perche afin d'acquérir une vitesse et un moment cinétique optimaux lors du lâcher de la perche ». L'analyse des résultats obtenus aura pour ambition de justifier l'importance des moments appliqués sur la perche, de rendre compte de l'influence de la perche sur les efforts développés par le perchiste et de proposer un modèle permettant d'optimiser qualitativement le geste.

## 4.2 Résultats dynamométriques

*L'analyse dynamométrique (mesure des torseurs d'action à l'aide d'un dynamomètre à six composantes) est indispensable pour rendre compte des efforts appliqués par le système perche – perchiste sur la piste et dans le butoir. En outre, elle se montre complémentaire de l'analyse vidéo et permet de valider les calculs dynamiques réalisés à partir des mesures obtenues par l'analyse vidéo.*

*Chaque dynamomètre à six composantes fournit les éléments de réduction du torseur d'action à l'origine du capteur. Le transport de ce torseur au « point d'application » de l'effort est rendu indispensable pour exploiter les mesures effectuées sur les moments. On appellera pour la suite de l'étude, « point d'application » de l'effort, l'intersection entre l'axe central du torseur représentant l'effort et le plan sur lequel s'exerce cet effort. Le paragraphe qui suit, présente en détail la méthode de l'axe central utilisé pour déterminer le point d'application.*

### 4.2.1 Méthode de l'axe central

#### 4.2.1.1 Définition et propriétés de l'axe central

L'axe central  $\Delta$  d'un torseur  $[\tau]$  est l'ensemble des points  $P$  tel que le moment en  $P$   $\vec{M}_\tau(P)$  soit colinéaire avec la résultante du torseur  $\vec{R}(\tau)$ . La condition à laquelle satisfait  $P$  s'écrit vectoriellement :

$$\vec{M}_\tau(P) \wedge \vec{R}(\tau) = \vec{0} \quad (4-1)$$

On peut montrer alors deux propriétés essentielles de l'axe central  $\Delta$  :

- L'axe central de  $[\tau]$  est parallèle à la droite support de la résultante  $\vec{R}(\tau)$  ;
- Le module du moment est constant et minimum sur l'axe central.

Cette dernière propriété permet de dire que l'intersection de l'axe central avec le plan sur lequel s'exerce cet effort peut être considérée comme le point d'application de l'effort où le moment est minimal.

#### 4.2.1.2 Equation vectorielle de l'axe central

Par définition, l'axe central du torseur  $[\tau]$  est le lieu des points  $P$  où :

$$\vec{M}_\tau(P) = \alpha \vec{R}(\tau) \quad (4-2)$$

On peut, en outre, écrire la relation de transport des moments entre les points  $P$  et  $O$  (origine du dynamomètre, par exemple) :

$$\vec{M}_\tau(P) = \vec{M}_\tau(O) + \vec{PO} \wedge \vec{R}(\tau) \quad (4-3)$$

On cherche alors l'ensemble des points  $P$  vérifiant l'équation vectorielle suivante :

$$\vec{M}_\tau(O) + \vec{PO} \wedge \vec{R}(\tau) = \alpha \vec{R}(\tau) \quad (4-4)$$

$$\text{ou encore : } \vec{OP} \wedge \vec{R}(\tau) = \vec{M}_\tau(O) - \alpha \vec{R}(\tau) \quad (4-5)$$

$\vec{OP}$  est donc le résultat de la division vectorielle (à droite) de  $\vec{M}_\tau(O) - \alpha \vec{R}(\tau)$  par  $\vec{R}(\tau)$ .

Cette division n'est possible que si :

$$\vec{R}(\tau) \cdot \vec{M}_\tau(O) - \alpha \|\vec{R}(\tau)\|^2 = 0 \quad \text{donc si} \quad \alpha = \frac{\vec{R}(\tau) \cdot \vec{M}_\tau(O)}{\|\vec{R}(\tau)\|^2}$$

En effectuant la division vectorielle, on obtient le résultat suivant :

$$\vec{OP} = \frac{\vec{R}(\tau) \wedge \left( \vec{M}_\tau(O) - \alpha \vec{R}(\tau) \right)}{\|\vec{R}(\tau)\|^2} + \lambda \vec{R}(\tau) \quad (4-6)$$

L'équation vectorielle de l'axe central du torseur  $[\tau]$  s'écrit alors :

$$\vec{OP} = \frac{\vec{R}(\tau) \wedge \vec{M}_\tau(O)}{\|\vec{R}(\tau)\|^2} + \lambda \vec{R}(\tau) \quad (4-7)$$

#### 4.2.1.3 Application au problème du saut à la perche

La méthode de l'axe central est la méthode la plus efficace pour évaluer le point d'application d'un effort et a donc été appliquée pour les torseurs d'action mesurés au saut à la perche. Cette méthode se montre beaucoup plus précise qu'une méthode visuelle qui consiste à mesurer le point d'application d'un effort à partir des données vidéos.

#### Torseur d'impulsion lors du dernier appui précédent le décollage (effort d'impulsion)

La méthode de l'axe central a été appliquée directement sur les résultats obtenus avec le dynamomètre placé au niveau du dernier appui du perchiste avant le décollage. Les éléments de réduction du torseur sont évalués initialement à l'origine du dynamomètre  $O$  (figure 4-1).

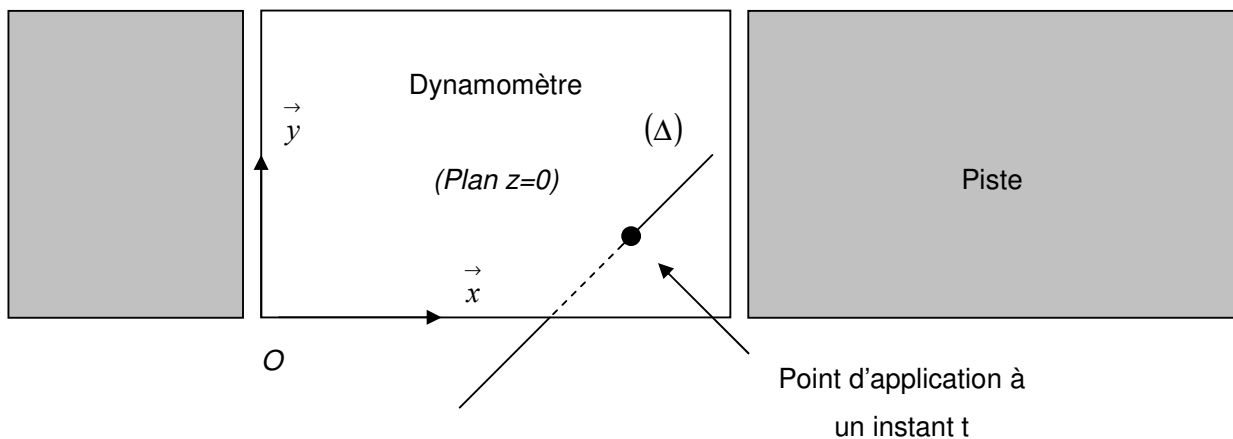


Figure 4-1 : Détermination du point d'application pour l'effort d'impulsion

On cherche, dans ce cas, à déterminer l'intersection de l'axe central avec le plan défini par  $\{z=0\}$  en utilisant l'équation 4-7 et en posant  $\vec{OP} \cdot \vec{z} = 0$ .



Les résultats obtenus sur un saut réel traduisent l'évolution du point d'application de l'effort sur le dynamomètre (figure 4-2).

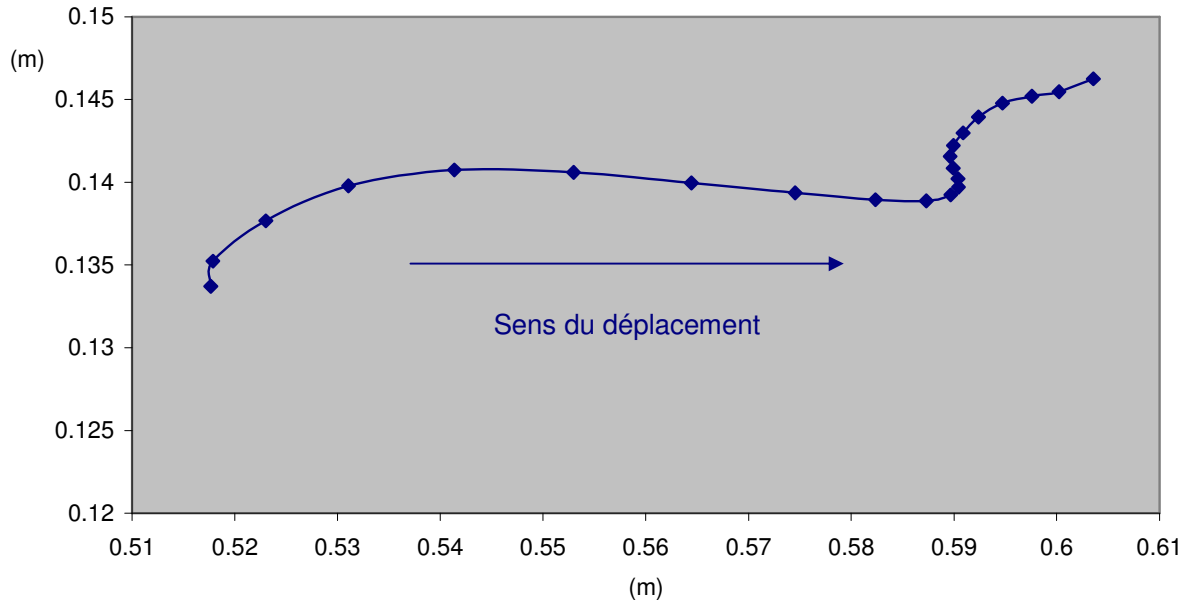


Figure 4-2 : Evolution du point d'application pour l'effort d'impulsion

La figure 4-2 fait apparaître, de manière claire, le déroulement de l'appui du perchiste vers les  $x$  positifs. De plus, la mesure visuelle du point d'application à un instant donné de la phase d'impulsion ( $x = 0.6$  m et  $y = 0.15$  m) conforte de manière significative les résultats obtenus.

### Torseur d'action du système perche – perchiste dans le butoir

Afin d'appliquer la méthode de l'axe central pour le torseur évalué par le dynamomètre placé sous le butoir, il convient de supposer que le perchiste plante la perche directement au fond du butoir et que les mouvements du bout de la perche dans le butoir s'effectuent à la même altitude (figure 4-3). Ces hypothèses, confirmées visuellement en filmant le mouvement de la perche dans le butoir, semblent être valides pour des perchistes de haut niveau.

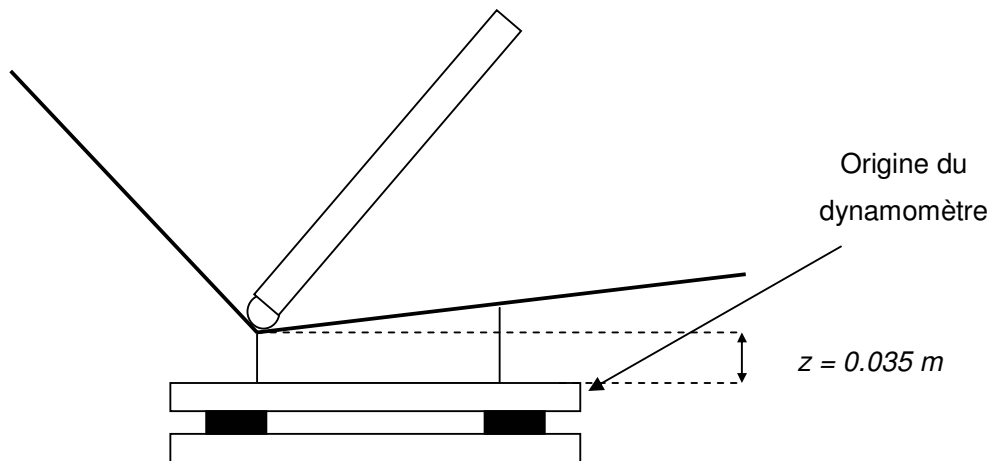


Figure 4-3 : Mouvement de la perche dans le fond du butoir

En revanche, les courtes vibrations créées par le choc de la perche au moment du planter affectent de manière singulière les résultats obtenus pour le point d'application, les efforts mesurés étant alors perturbés par les oscillations de la plaque supérieure du dynamomètre.

Le calcul du point d'application de l'effort exercé dans le butoir par le système perche – perchiste a consisté à rechercher l'intersection entre l'axe central du torseur mesuré et le plan défini par ( $z = 0.035 \text{ m}$ ). Les résultats présentés sur la figure 4-4 traduisent les mouvements de la perche dans le fond du butoir, on constate ainsi que le point d'application de l'effort se déplace peu.

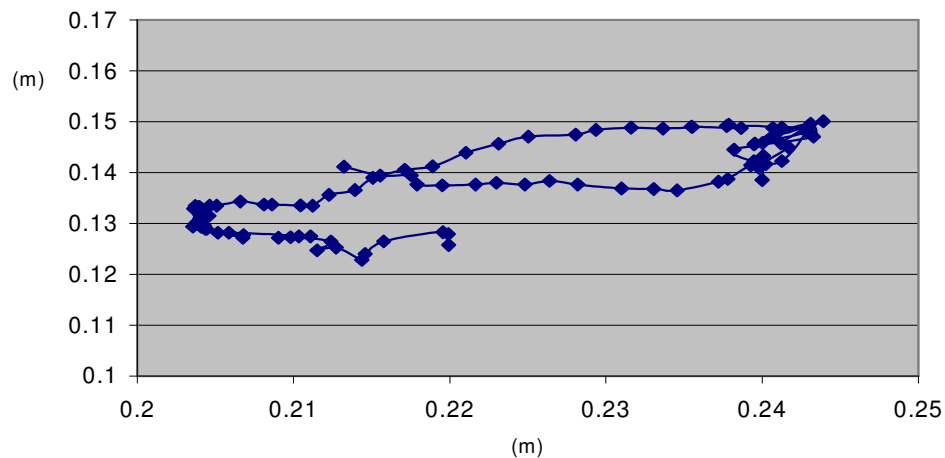


Figure 4-4 : Position du point d'application de l'effort exercé dans le butoir

De plus, une étude de sensibilité sur l'estimation de l'altitude du point de contact de la perche par rapport au dynamomètre a été menée. En effet, on estime dans l'étude que le mouvement de la perche s'effectue au fond du butoir ( $z = 0.035 \text{ m}$ ). Afin d'estimer la sensibilité de la coordonnée  $z$  sur la position du point d'application, deux calculs ont été effectués par la méthode de l'axe central pour  $z = 0.03 \text{ m}$  et  $z = 0.04 \text{ m}$ . La figure 4-5 présente les résultats obtenus, on remarque alors que les variations de la position du point d'application sont de l'ordre du centimètre. On peut estimer alors que la méthode n'est pas très sensible au choix de l'altitude  $z$ .

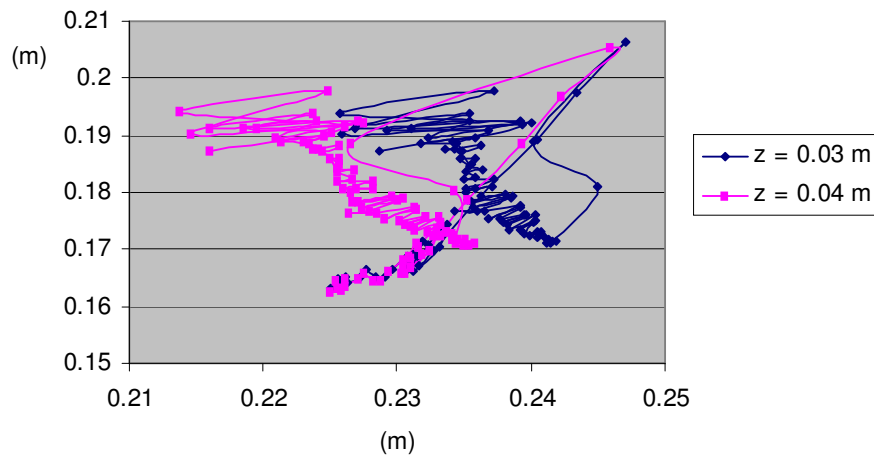


Figure 4-5 : Sensibilité de la méthode de l'axe central

En outre, les valeurs des moments au point d'application, ainsi déterminées, restent par définition inchangées. En effet, en tous les points de l'axe central, le moment est identique et minimal en norme.

#### 4.2.2 Résultats et commentaires

*L'étude dynamométrique réalisée au saut à la perche a permis la mesure d'une centaine de sauts au cours des différentes campagnes d'essais. Les principaux résultats obtenus feront l'objet d'une analyse détaillée, pour chacun des deux dynamomètres.*

#### 4.2.2.1 Effort d'impulsion

L'analyse de l'action exercée par le système perche – perchiste sur le sol lors du dernier appui avant le décollage, appelée effort d'impulsion, est nécessaire pour la connaissance de l'effort appliqué sur la perche, dans la mesure où la perche est alors en contact avec le fond du butoir et commence donc à se déformer. De plus, cette mesure permet d'évaluer la qualité du dernier appui : durée de contact, force appliquée et couple développé.

Néanmoins, le choc provoqué par le contact du pied sur le dynamomètre perturbe nettement les mesures car il a tendance à faire vibrer le capteur. Il est alors indispensable de filtrer le signal obtenu afin d'éliminer la partie inhérente à la vibration du capteur (fréquence propre de la plaque supérieure excitée). Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 4-6.

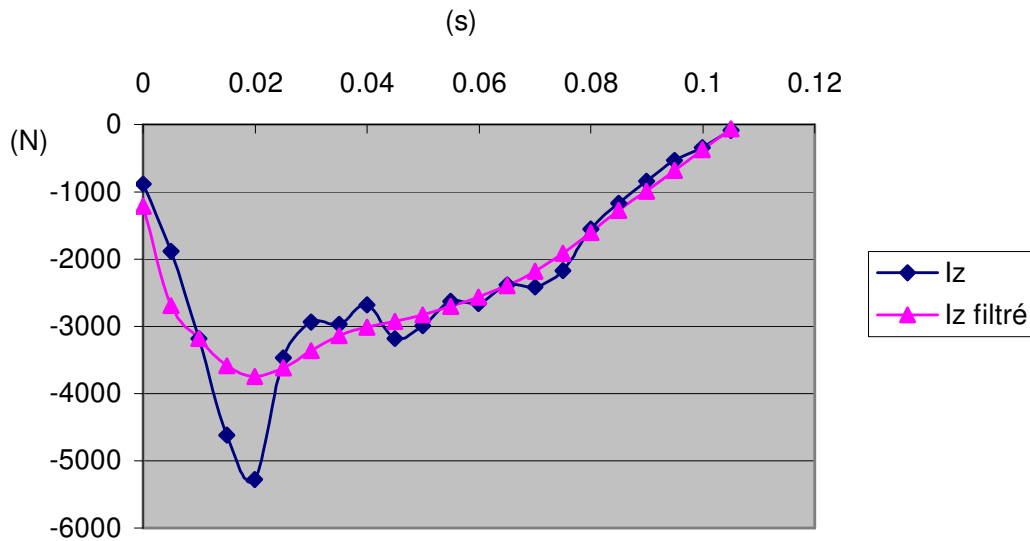


Figure 4-6 : Filtrage de l'effort d'impulsion

### Résultante du torseur

On constate (figure 4-7) que la force appliquée par le perchiste sur la piste est pratiquement essentiellement dans le plan  $(x, z)$ . En outre, la composante la plus importante est celle dans la direction  $(O, z)$ , la composante  $I_x$  traduisant la décélération due au contact de la perche dans le butoir.

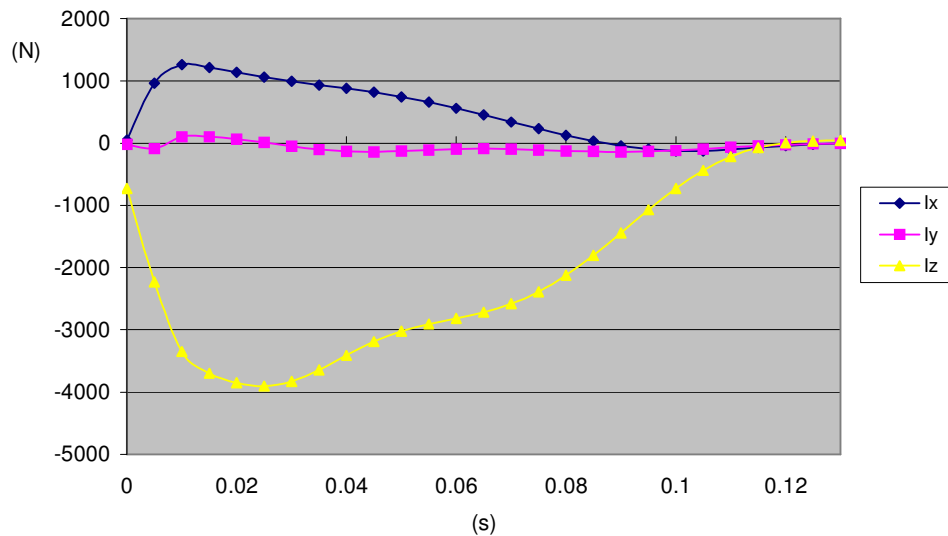


Figure 4-7 : Composantes filtrées de la force d'impulsion

Sur l'ensemble des résultats analysés, les composantes de la force d'impulsion furent relativement semblables. Cependant, une perche plus dure aura tendance à freiner de manière plus importante le perchiste, la valeur maximale de  $I_x$  est alors supérieure. On peut aussi remarquer pour ces mêmes perches, une durée d'appui moins longue car le perchiste a tendance à se faire décoller du sol sous l'action de la perche.

Enfin, le contact de la perche dans le fond du butoir intervient simultanément avec celui du dernier appui du perchiste sur la piste. En effet, un écart de temps entre ces deux événements semble être néfaste pour la performance car il s'agit pour le perchiste de déformer au mieux la perche afin d'emmagasiner de l'énergie. Or, on constate que lorsque le perchiste est encore en contact avec le sol, il a alors la possibilité d'appliquer des efforts importants et d'augmenter l'angle entre l'extrémité de la perche et le butoir. Un dernier appui prolongé et synchronisé avec le contact de la perche dans le butoir est alors gage de performance.

### Moment du torseur

La méthode de l'axe central permet de déterminer le moment du torseur au point d'application de l'effort. La figure 4-8 permet de constater l'évolution des trois composantes du moment, la composante autour de l'axe ( $O, z$ ) est sensiblement la plus importante. On peut alors parler de couple de pivotement du pied sur la piste. Les deux autres composantes restent relativement peu élevées.

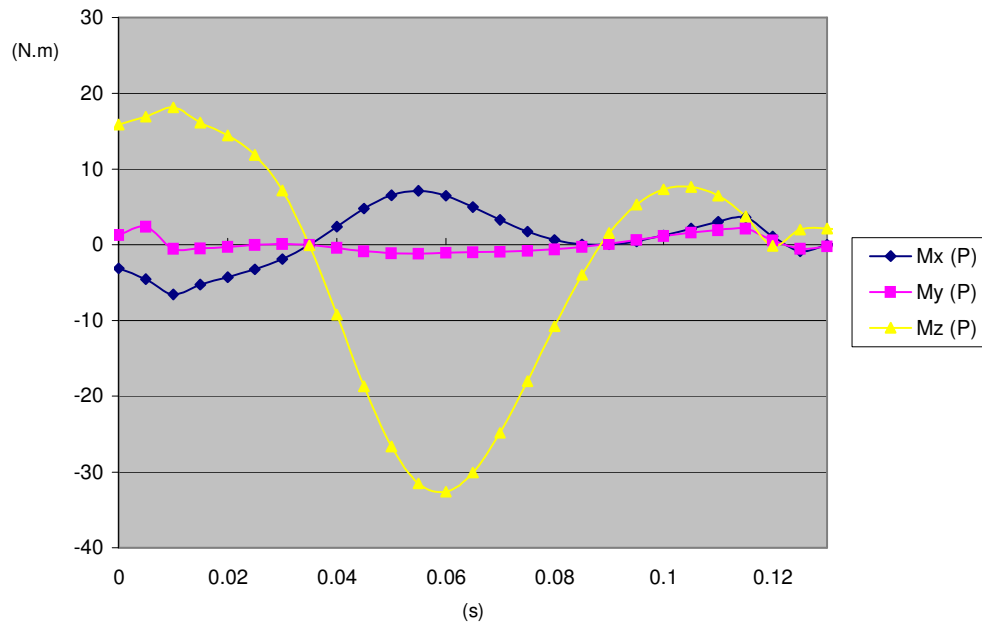


Figure 4-8 : Evolution du moment d'impulsion

Les différents essais ont permis d'apprécier les variations dans la mesure des moments. Il semble que ceux-ci soient plus sensibles que la mesure des forces, en effet une plus grande dispersion a été observée sur la mesure des moments sur différents sauts qui paraissaient sensiblement équivalents en ce qui concerne la mesure des forces. Il est cependant délicat de commenter les résultats obtenus sur l'évolution des moments durant le dernier appui du perchiste.

En définitive, la mesure du torseur d'impulsion est indispensable pour rendre compte des efforts exercés sur la perche pendant la dernière phase d'appui du perchiste sur la piste. Il est cependant difficile d'exploiter directement les résultats obtenus pour rechercher des critères pertinents de performance pour la phase d'impulsion.

#### 4.2.2.2 Effort exercé dans le butoir

Le dynamomètre placé sous le butoir a permis d'enregistrer le torseur d'action du système perche – perchiste sur le butoir depuis le contact de la perche jusqu'au lâcher de celle-ci. Les renseignements apportés par cette mesure sont beaucoup plus nombreux que ceux obtenus par la mesure de l'effort d'impulsion :

- Durée des différentes phases du saut ;
- Estimation de l'accélération du centre de gravité ;
- Evaluation de la force appliquée sur la perche par le perchiste ;
- Evolution du couple de frottement au niveau du contact de la perche dans le butoir ;
- Appréciation des mouvements de l'extrémité inférieure de la perche dans le fond du butoir.

#### Revue bibliographique

BARLOW [Bar73] et GROS [Gro82] avaient déjà entrepris, dans leur travail de thèse, de mesurer les forces bidirectionnelles développées dans le butoir. Les figures 4-9 et 4-10 présentent les comparaisons entre les différents résultats.

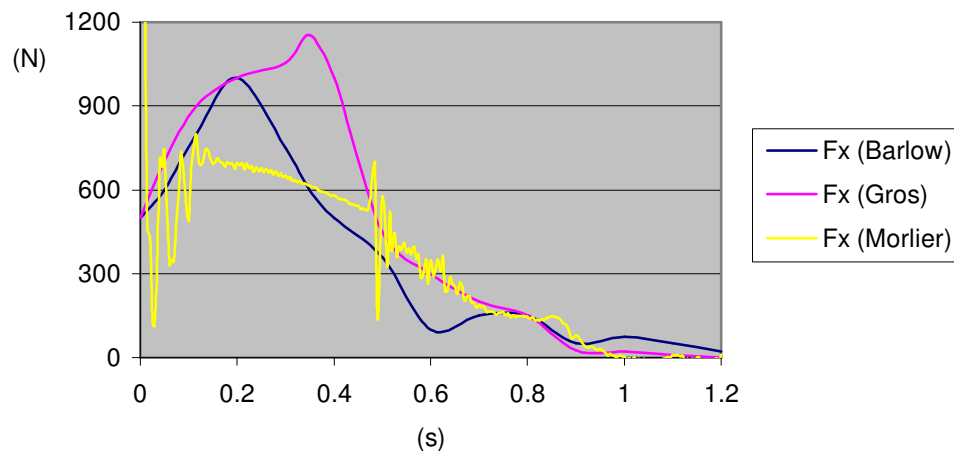


Figure 4-9 : Comparaison de la composante x de la force appliquée dans le butoir

Bien que les perchistes et les perches utilisées soient différents, les résultats obtenus présentent des similitudes, notamment pour la composante z de la force exercée dans le butoir qui est moins sensible aux caractéristiques mécaniques de la perche employée.

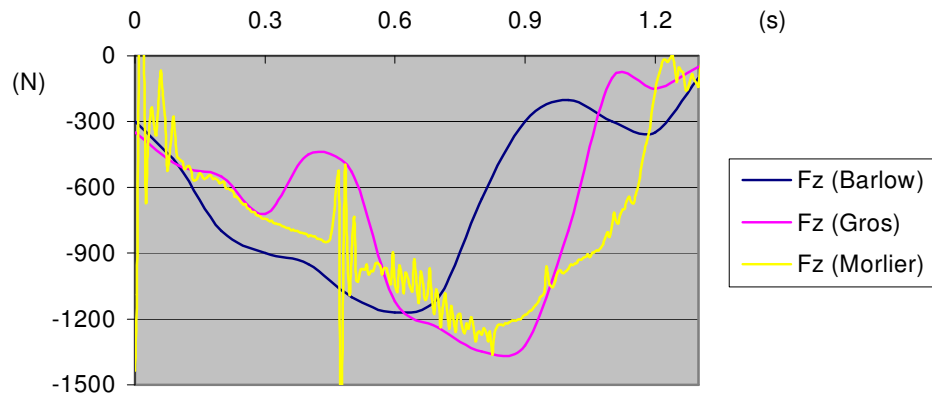


Figure 4-10 : Comparaison de la composante z de la force appliquée dans le butoir

### Résultats expérimentaux

Les figures suivantes présentent les composantes de la force puis du moment développés dans le butoir lors d'un saut réel par le système perche - perchiste.

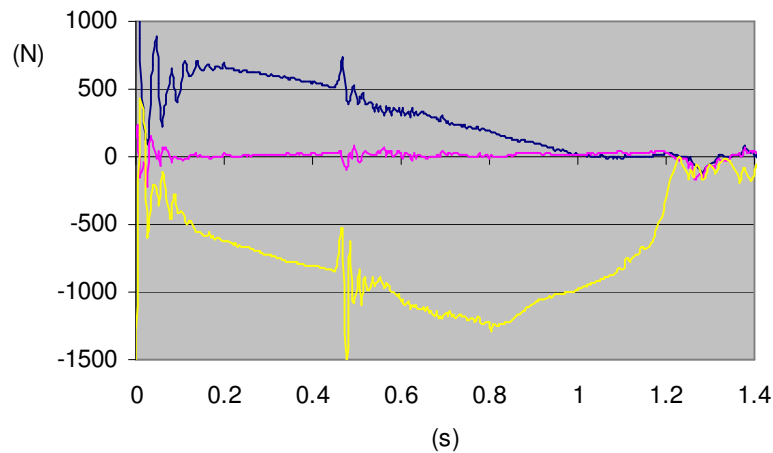


Figure 4-11 : Composantes de la force appliquée dans le butoir



On constate sur la figure 4-11 que la composante  $y$  de la force développée dans le butoir est quasiment nulle, un modèle d'effort deux dimensions est donc cohérent pour rendre compte de la réalité. Les vibrations du capteur permettent, en outre, d'analyser les mouvements de la perche dans le butoir et les valeurs de la force d'évaluer les accélérations du centre de gravité du perchiste, les commentaires sur cette étude seront détaillés lors du paragraphe suivant.

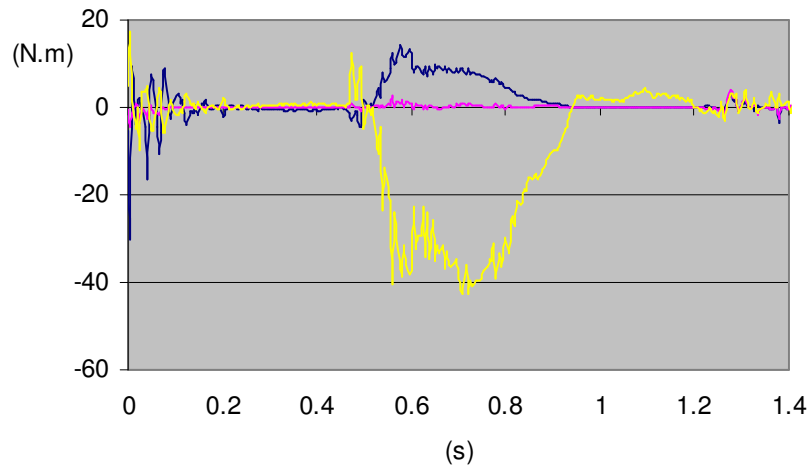


Figure 4-12 : Composantes du moment appliqué dans le butoir par l'extrémité de la perche

La détermination des moments exercés en bout de perche a été réalisée en utilisant les propriétés de l'axe central du torseur mesuré. La figure 4-12 met en avant les faibles valeurs obtenus pour les moments autour des axes  $(O, x)$  et  $(O, y)$ , le couple de roulement appliqué par l'extrémité de la perche dans le butoir est donc pratiquement négligeable. Enfin, le moment autour de l'axe  $(O, z)$  est important (40 N.m) et traduit le couple de pivotement en bout de perche. En effet, pendant la phase de balancer et de grouper, le perchiste doit faire pivoter sa perche autour de l'axe  $(O, z)$  pour pouvoir réaliser son mouvement sans risquer de toucher celle-ci. La sensibilité des résultats obtenus sur les moments, pour différents essais, a été plus élevée que celle concernant les forces.

### Analyse d'un saut à travers $F_z$

La composante suivant l'axe  $(O, z)$  de la force appliquée dans le butoir par le système perche – perchiste,  $F_z$ , est celle qui traduit le mieux les différents mouvements de la perche et du perchiste. La figure 4-13 représente l'évolution de  $F_z$  avec les différents mouvements de la perche (en italique) et ceux du perchiste (en gras). La représentation du poids du perchiste (700 N) sur la figure 4-13 permet de visualiser les phases où l'accélération du centre de gravité du perchiste est positive et négative.

#### Planter de la perche

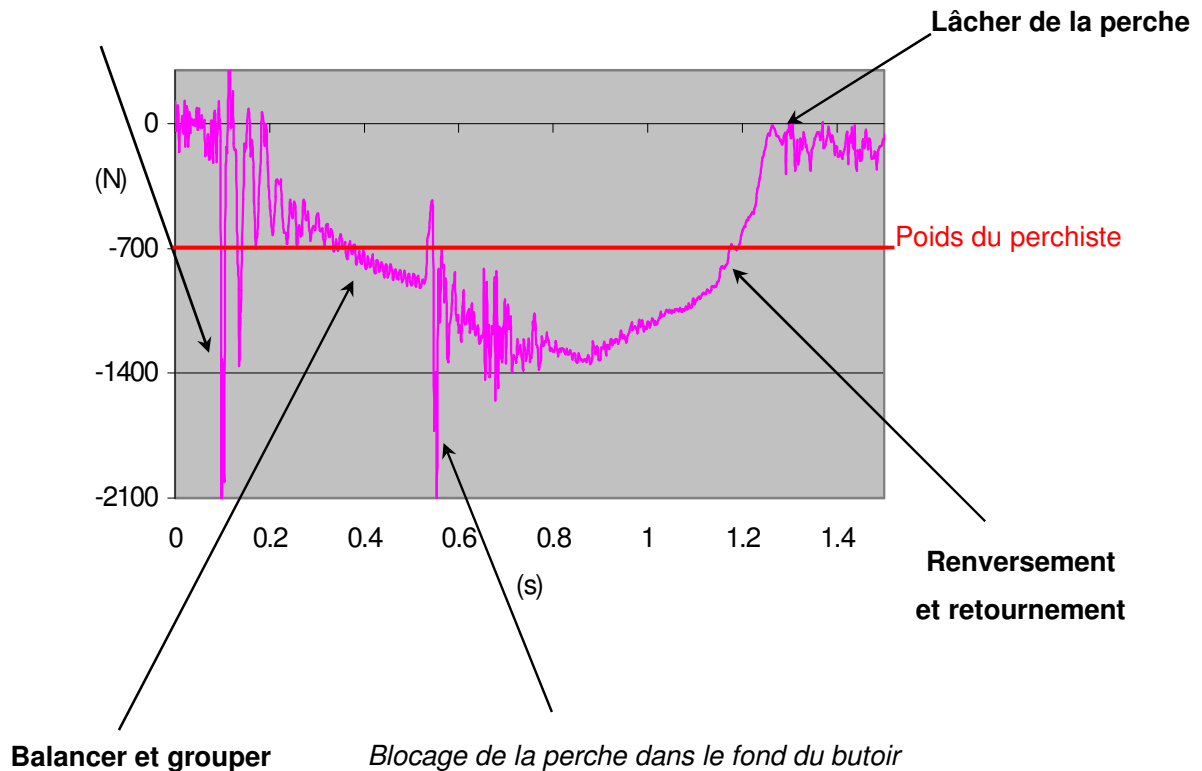


Figure 4-13 : Analyse d'un saut avec  $F_z$

Premièrement, l'impact de la perche dans le fond du butoir se traduit par un pic de  $F_z$  puis induit des vibrations du capteur et de la perche qui s'atténuent avec la suite du mouvement. Dans cette première partie du saut, le perchiste va s'enrouler puis se regrouper de manière dynamique afin d'augmenter la force appliquée sur la perche.

Dans le même temps, l'angle entre l'extrémité de la perche avec le fond du butoir augmente jusqu'à la valeur limite de  $120^\circ$  qui correspond à l'inclinaison du butoir. Le blocage de la perche provoque alors un deuxième choc, nettement visible sur la figure 4-15. L'analyse de  $F_z$  permet ainsi d'évaluer de façon précise le temps écoulé entre le planter de la perche et le blocage de celle-ci dans le butoir, cette durée d'approximativement 40 centièmes de secondes sera, en outre, vérifiée lors de la simulation numérique.

Par la suite, le perchiste se retourne pour bénéficier de l'énergie emmagasinée dans la perche, l'accélération du perchiste diminue pour devenir négative. De plus, la forme de la courbe de  $F_z$  lors de la fin du saut permet de juger de la performance réalisée, en effet, une pente prononcée lors du retour à zéro de  $F_z$  traduit une perte de vitesse du centre de gravité selon l'axe vertical ascendant peu importante (l'accélération est alors négative sur une durée faible), gage d'un saut de qualité.

On peut alors estimer que la perche a stocké suffisamment d'énergie pour catapulter le perchiste au-dessus de la barre, la phase de redressement de la perche s'accompagnant toujours d'une diminution de vitesse verticale du centre de gravité, la force dans cette même direction tend alors vers zéro. Enfin, le lâcher de la perche par le perchiste est marqué sur l'évolution de  $F_z$  par le retour de la courbe à zéro.

### Utilisation des mesures dynamométriques

L'analyse des efforts développés dans le butoir permet aussi de comparer les performances de plusieurs athlètes sur une même perche ou alors de confronter les résultats obtenus par un perchiste avec des perches différentes (conclusions présentées au paragraphe 4-5).

En effet, en négligeant la masse de la perche devant celle du perchiste et en supposant la perche comme une structure non amortie, le théorème de la résultante dynamique (équation 3-18) permet à partir de la mesure de  $F_z$  de calculer l'accélération du centre de gravité du perchiste selon la direction  $(O, z)$ .

La figure 4-14 présente les accélérations du centre de gravité de deux perchistes dans la direction  $(O, z)$ , obtenus à partir des mesures dynamométriques pour des performances respectives de 5 m et 4,70 m. Afin d'éliminer les vibrations du capteur, la fréquence propre du dynamomètre a été supprimée du signal mesuré, les résultats sur les accélérations sont alors plus continus. On constate de manière significative une accélération supérieure pour le saut à 5 m ainsi qu'une pente plus prononcée lors de la phase finale. Enfin, le meilleur saut est souvent celui qui dure le moins longtemps car le geste est alors plus dynamique ou radical : les accélérations positives ou négatives étant supérieures.

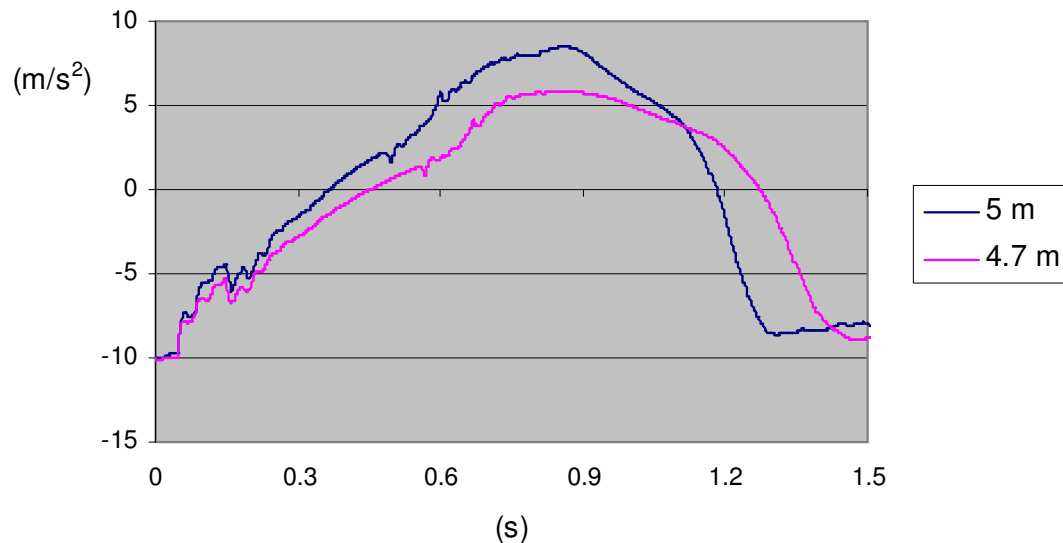


Figure 4-14 : Comparaison des accélérations suivant la direction  $(O, z)$  à partir des mesures dynamométriques

### 4.3 Cinématique et cinétique du perchiste

*L'étude de la cinématique du perchiste dans son mouvement par rapport au référentiel d'étude  $R_0$  choisi est la première étape vers une approche dynamique du geste. Cette analyse nécessite la mise en place d'un modèle multicorps de l'athlète et la mesure des trajectoires tridimensionnelles des articulations constituant ce modèle. L'analyse vidéo 3D est alors la base de ce travail. Les différents algorithmes de dérivation, présentés lors du chapitre précédent, permettent le calcul des vitesses des centres de masse de chaque segment corporel. Enfin, une modélisation volumique de ces segments ainsi que quelques hypothèses autorisent la détermination du moment cinétique du perchiste en son centre de gravité.*

#### 4.3.1 Cinématique du geste

L'étude cinématique du mouvement du perchiste par rapport à  $R_0$  permet de déterminer les conditions initiales du saut (position et vitesse du centre de gravité du perchiste au moment du contact de la perche dans le butoir) ainsi que le calcul des vitesses des centres de masse des différents segments corporels, indispensables pour l'évaluation du moment cinétique de l'athlète en son centre de gravité.

Le modèle multicorps proposé pour l'athlète ainsi que les techniques de calcul détaillées précédemment permettent le calcul de la trajectoire et de la vitesse du centre de gravité du perchiste par rapport à  $R_0$ . Les figures suivantes (4-15 et 4-16) présentant l'évolution de ces deux paramètres au cours d'un saut.

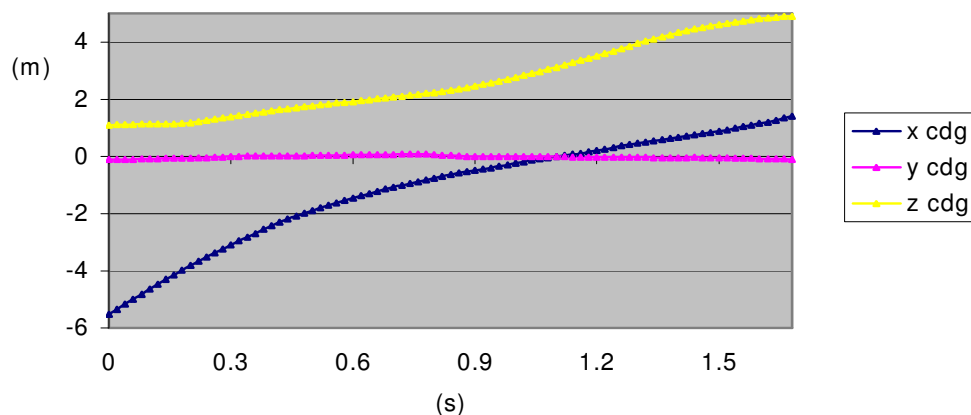


Figure 4-15 : Trajectoire du centre de gravité du perchiste dans  $R_0$

On constate sur la figure 4-15 les faibles déviations latérales (selon l'axe  $(O, y)$ ) du centre de gravité ainsi qu'une performance de 4,9 m pour la hauteur maximale atteinte par le centre de gravité de l'athlète. L'analyse de cette trajectoire permet aussi de positionner le plan vertical de la barre en exploitant la valeur de la coordonnée  $x$  du centre de gravité au moment du franchissement de la barre. Dans l'exemple présenté ci-dessus, la barre devrait être placée à 1 mètre du plan origine du sautoir correspondant à l'extrémité du butoir.

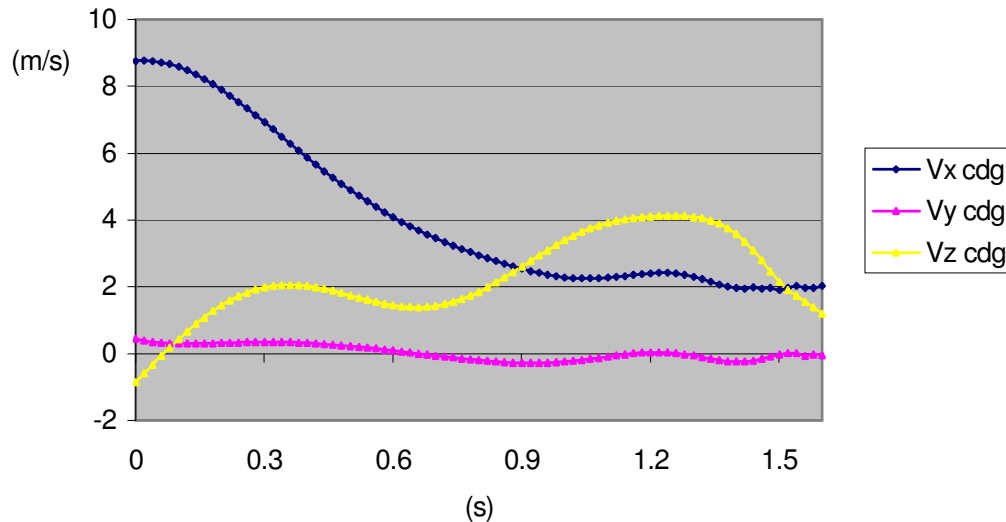


Figure 4-16 : Vitesse du centre de gravité du perchiste par rapport à  $R_0$

L'analyse de la vitesse du centre de gravité du perchiste par rapport à  $R_0$  (figure 4-16) fait apparaître les conclusions suivantes :

- La vitesse suivant l'axe  $(O, y)$  est évidemment faible ;
- La composante  $x$  de cette vitesse diminue toujours au cours du saut ;
- La vitesse initiale suivant l'axe  $(O, x)$  est un facteur important de la performance dans la mesure où le perchiste doit avoir suffisamment de vitesse horizontale lors du franchissement de la barre et que celle-ci diminue considérablement au cours du saut ;
- La composante  $z$  de la vitesse doit être maximale lors du lâcher de la perche.

Enfin, un bilan comparatif de la vitesse initiale du centre de gravité du perchiste au moment du contact de la perche dans le butoir a été réalisé. La composante  $x$  de cette vitesse est un critère de performance et représente dans une approche dynamique du mouvement une des conditions initiales du saut.

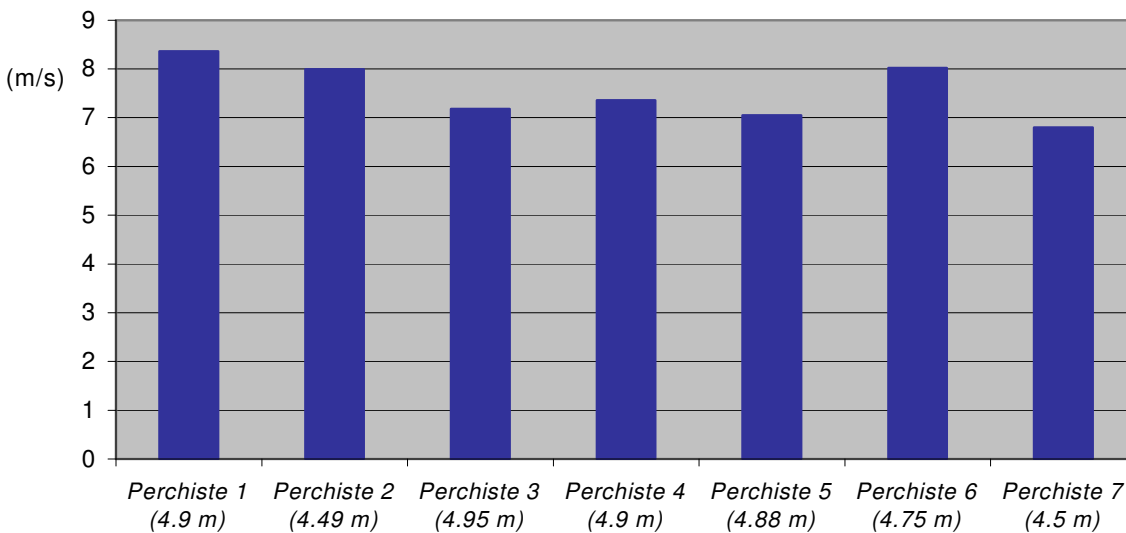


Figure 4-17 : Comparaison des vitesses initiales suivant la direction  $(O, x)$

La figure 4-17 montre pour les perchistes étudiés une dispersion des valeurs entre 6.8 m/s et 8.3 m/s pour une valeur moyenne de 7.5 m/s.

### 4.3.2 Moment cinétique du perchiste en son centre de gravité

La détermination du moment cinétique du perchiste en son centre de gravité est un pas de plus vers une analyse dynamique du geste. En outre, ce paramètre mécanique reste aussi un critère indiscutable de performance. En effet, le perchiste doit posséder un moment cinétique autour de l'axe  $(O, y)$  important lors du lâcher de la perche afin de pouvoir s'enrouler autour de la barre.

## Revue bibliographique

GROS [Gro82] a effectué, grâce à une analyse vidéo bidimensionnelle, le calcul du moment cinétique du perchiste en son centre de gravité autour de l'axe transverse ( $O, y$ ). La figure 4-18 a pour objectif de comparer les résultats obtenus et de valider ainsi le calcul du moment cinétique détaillé au chapitre précédent. En outre, aucune étude n'ayant entrepris le calcul du moment cinétique en trois dimensions pour le saut à la perche, il est alors impossible de valider les composantes du moment cinétique autour des deux autres axes.

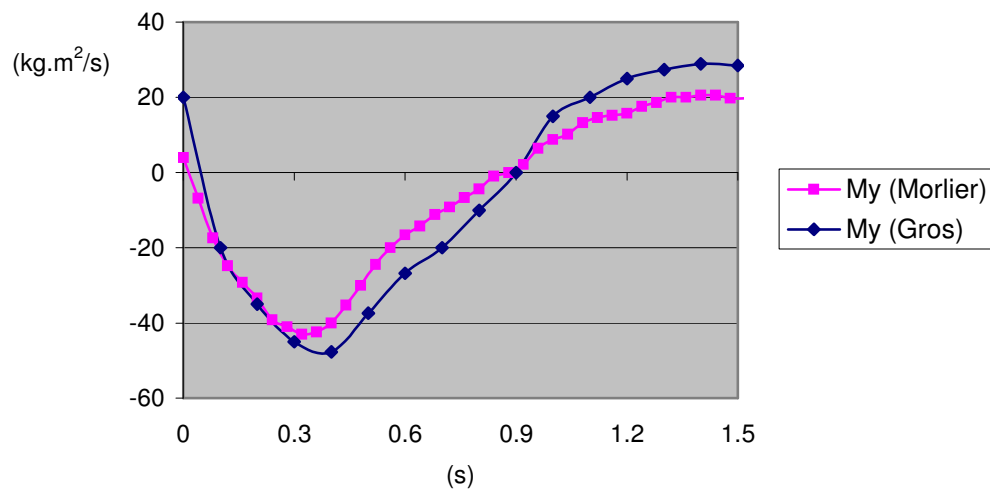


Figure 4-18 : Comparaison de la composante du moment cinétique autour de l'axe transverse

Les deux perchistes analysés dans les études ayant sensiblement le même niveau de performance (4.8 m) et la même morphologie, les résultats obtenus sont tout à fait comparables et confirment ainsi le modèle et les hypothèses développés pour le calcul du moment cinétique.

## Résultats et commentaires

La principale contribution de ce paragraphe est le calcul du moment cinétique du perchiste en son centre de gravité autour des trois axes du référentiel d'étude  $R_0$ . L'analyse tridimensionnelle est nécessaire dans la mesure où aucune hypothèse n'est formulée sur le mouvement plan des segments.



De plus, ce calcul sera une des bases de la détermination des moments appliqués par le perchiste sur la perche en un point de la perche. Les résultats expérimentaux sont présentés sur la figure suivante (4-19).

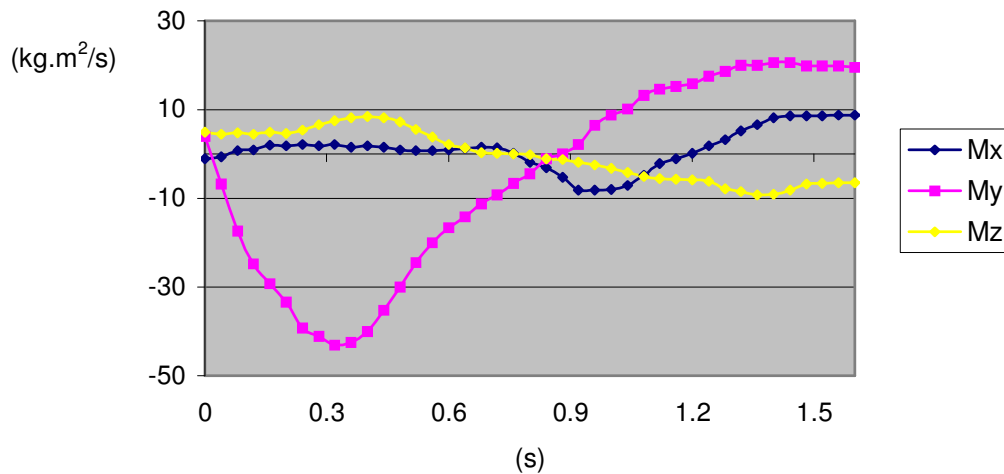


Figure 4-19 : Composantes du moment cinétique du perchiste en son centre de gravité

On observe que dans la première partie du saut, depuis le planter de la perche dans le butoir ( $t = 0$  s) jusqu'au renversement complet du perchiste ( $t = 0.8$  s), une valeur négative importante de la composante  $y$  du moment cinétique. Les deux autres composantes sont alors presque nulles. Ces résultats mettent en valeur la rotation du perchiste autour de l'axe - ( $O, y$ ) qui se traduit par un moment cinétique négatif dans cette direction.

Ensuite, les phases de retournement et d'attaque de la barre engendrent des rotations autour des deux autres axes ainsi qu'une rotation du perchiste autour de l'axe + ( $O, y$ ) qui se manifestent sur la courbe par des valeurs non nulles des composantes  $x$  et  $z$  et par une valeur positive de la composante  $y$  du moment cinétique.

Enfin, après le lâcher de la perche ( $t = 1.4$  s), le perchiste est soumis uniquement à la pesanteur en supposant les effets de l'air négligeables. Dans ces conditions, le moment cinétique du perchiste en son centre de gravité est constant pendant cette phase de chute libre. Sur la figure 4-19, on observe bien que les trois composantes du moment cinétique sont constantes pendant cette période.

### 4.3.3 Energie cinétique du perchiste

L'énergie cinétique du perchiste par rapport au référentiel d'étude  $R_0$  fut pendant longtemps le critère de performance préféré des scientifiques. En effet, il renseigne de l'énergie dont dispose l'athlète pour réaliser sa performance. Néanmoins, il ne rend pas compte de l'aspect vectoriel ou tridimensionnel du mouvement, ainsi un athlète peut posséder une énergie cinétique importante mais ne pas l'exploiter dans les directions privilégiées du mouvement.

#### Résultats expérimentaux

Le calcul de l'énergie cinétique (équations 3-16 et 3-17) du perchiste a été effectué depuis le contact de la perche dans le butoir jusqu'au lâcher de celle-ci par l'athlète. La figure 4-20 met en évidence la quantité importante d'énergie cinétique que possède le perchiste au moment du planter de la perche. Celle-ci va diminuer au cours du mouvement alors qu'évidemment l'énergie potentielle du perchiste va en augmentant. On constate de plus que l'énergie mécanique n'est pas conservée car il existe un échange d'énergie entre le perchiste et la perche dont on pourrait déterminer le rendement.

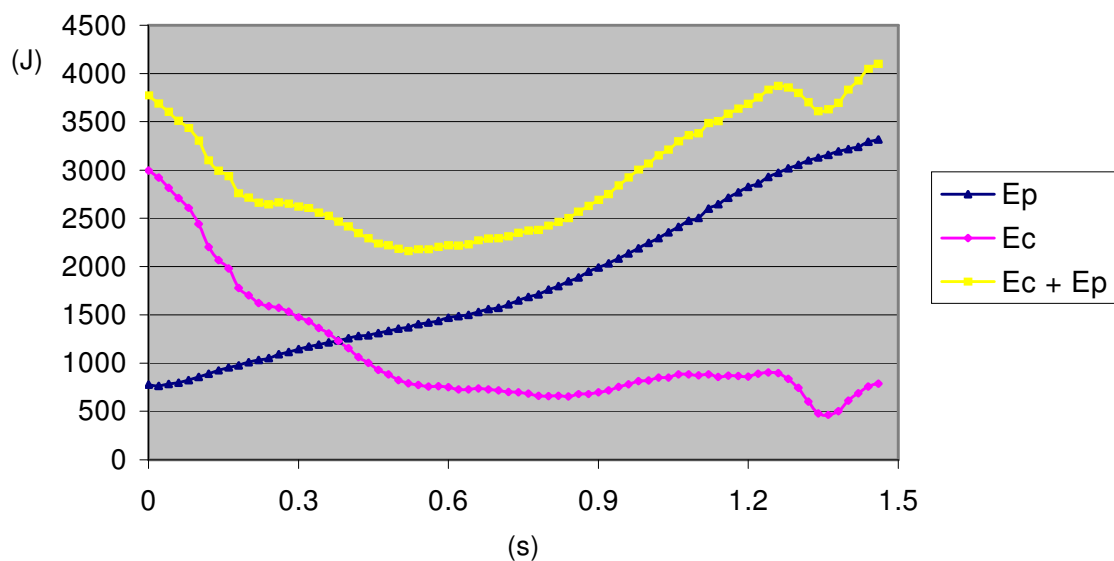


Figure 4-20 : Energies cinétique et potentielle du perchiste par rapport à  $R_0$

### Etude comparative

L'interrogation sur la légitimité de l'énergie cinétique comme critère primordial de performance a amené à réaliser une analyse comparative de l'énergie cinétique développée par deux perchistes sautant avec une perche identique.

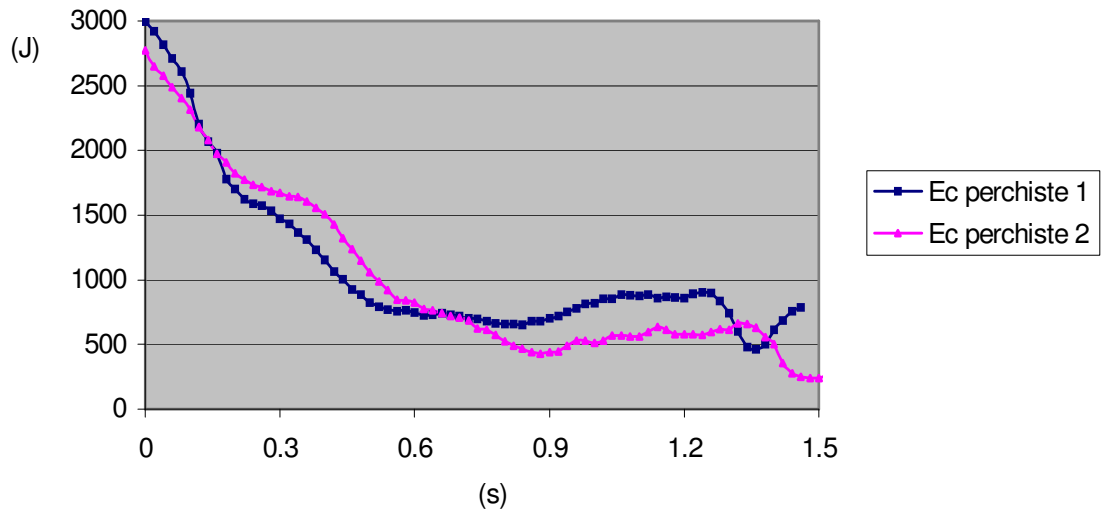


Figure 4-21 : Etude comparative sur l'énergie cinétique

La figure 4-21 permet d'observer un écart peu important sur l'énergie cinétique des perchistes alors que le centre de gravité du perchiste 1 a atteint une hauteur maximale de 4,90 m contre 4,49 pour le perchiste 2. On constate ainsi une évolution similaire de l'énergie cinétique des deux perchistes, bien que dans la première phase du saut le perchiste 2 semble transmettre moins d'énergie à la perche et donc posséder une énergie cinétique supérieure (durant la période [0,15, 0,7 s]). Puis, lors du redressement de la perche, l'effet inverse se produit de manière inévitable : le perchiste 1 bénéficie alors d'une quantité d'énergie stockée dans la perche supérieure. Une telle analyse comparative de l'énergie cinétique de deux perchistes est intéressante, cependant elle ne permet pas de proposer les hypothèses qui permettent une amélioration sensible du mouvement.

## 4.4 Torseur d'action exercé par le perchiste sur la perche

*La détermination de l'effort appliqué par le perchiste sur la perche en un point de la perche (situé entre les mains de l'athlète) constitue une étape indispensable pour une meilleure compréhension du geste. Dans la suite du texte, on parlera uniquement du torseur d'action appliqué par le perchiste sur la perche, en considérant que le point de calcul est le point défini précédemment. En outre, peu d'auteurs se sont intéressés à mettre en œuvre une analyse dynamique du saut à la perche. Pourtant, la connaissance du torseur d'action du perchiste sur la perche renseigne à la fois sur la nature du mouvement et permettra de simuler le comportement dynamique de la structure « perche ». Enfin, les limites de ces mesures seront abordées dans ce paragraphe et de possibles solutions seront proposées.*

### 4.4.1 Revue bibliographique

MAC GINNIS [McG84] a développé au cours de son étude un modèle permettant de calculer le torseur d'action 2D appliquée sur la perche par le perchiste au niveau de la main supérieure. Le modèle et les hypothèses de son travail ont été développés lors du chapitre 1. Les principales innovations du présent travail par rapport à celui de MAC GINNIS résident dans l'analyse tridimensionnelle du geste et dans une modélisation mécanique globale du perchiste. En effet, contrairement à MAC GINNIS, les équations de la mécanique sont appliquées sur le solide « perchiste global » constitué de l'ensemble des sous systèmes élémentaires que représentent les segments corporels.

Enfin, la détermination des efforts appliqués sur la perche a été effectuée par MAC GINNIS depuis le décollage du perchiste jusqu'au lâcher de la perche. Mon étude propose de s'intéresser aussi aux efforts développés lors du dernier appui du perchiste sur le sol en mettant en relation l'analyse dynamométrique et l'étude vidéo.

Le travail de MAC GINNIS a, en outre, concerné l'étude de cinq perchistes américains de haut niveau dont les performances sont situées entre 5,50 mètres et 5,80 mètres. La figure suivante propose la comparaison entre le moment appliqué sur la perche autour de l'axe  $(O, y)$  calculé par MAC GINNIS et celui déterminé dans la présente étude. On rappelle que ce moment est calculé en un point situé au milieu des mains du perchiste dans notre étude et au niveau de la main supérieure dans celle de MAC GINNIS.

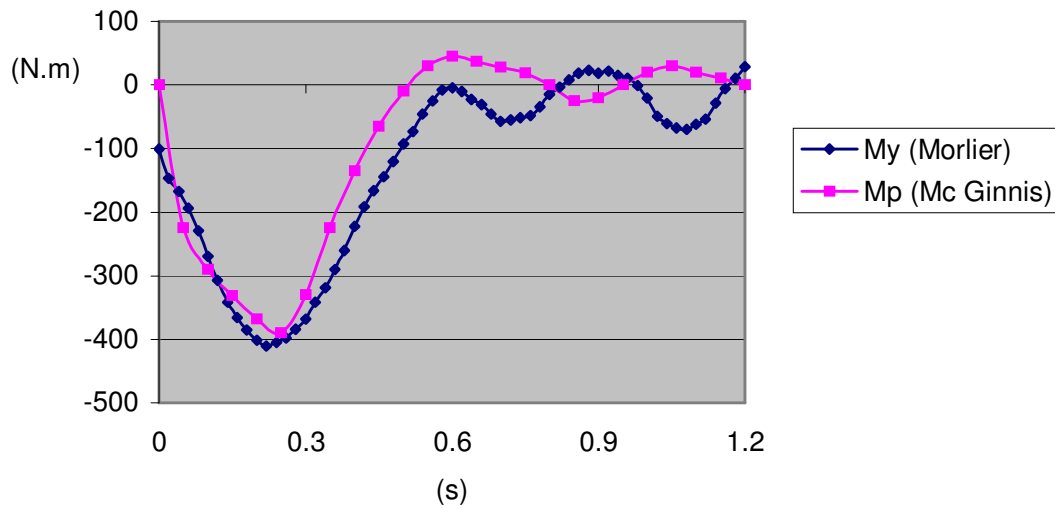


Figure 4-22 : Comparaison du moment appliqué sur la perche autour de l'axe  $(O, y)$

On constate sur la figure 4-22 une évolution similaire des deux moments, ceci permet de conforter le modèle de calcul du moment cinétique. En effet, la comparaison entre les forces mesurées par le dynamomètre placé sous le butoir et celles calculées à partir des données issues de l'analyse vidéo avait déjà permis de confirmer les résultats obtenus pour la résultante de ce même torseur. Enfin, les deux approches semblent assez efficaces bien que celle globale ne soit pas confrontée au problème d'hyperstaticité du tronc.

#### 4.4.2 Résultats expérimentaux

Il semble intéressant de présenter les résultats en distinguant deux phases : la première concerne la mesure des efforts exercés sur la perche lors du contact du perchiste avec le sol (phase relativement courte, d'une durée comprise entre un et deux dixièmes de seconde suivant le perchiste et la perche utilisée) et la seconde depuis le décollage du perchiste jusqu'au lâcher de la perche. On notera, pendant la suite du chapitre, la première étape du geste, phase d'impulsion et la seconde, phase de saut.

#### 4.4.2.1 Phase d'impulsion

Durant la première partie du saut, le calcul entrepris pour déterminer le torseur d'action développé sur la perche met en œuvre conjointement les résultats issus de l'analyse vidéo et ceux obtenus à partir des mesures dynamométriques (équations 3-24).

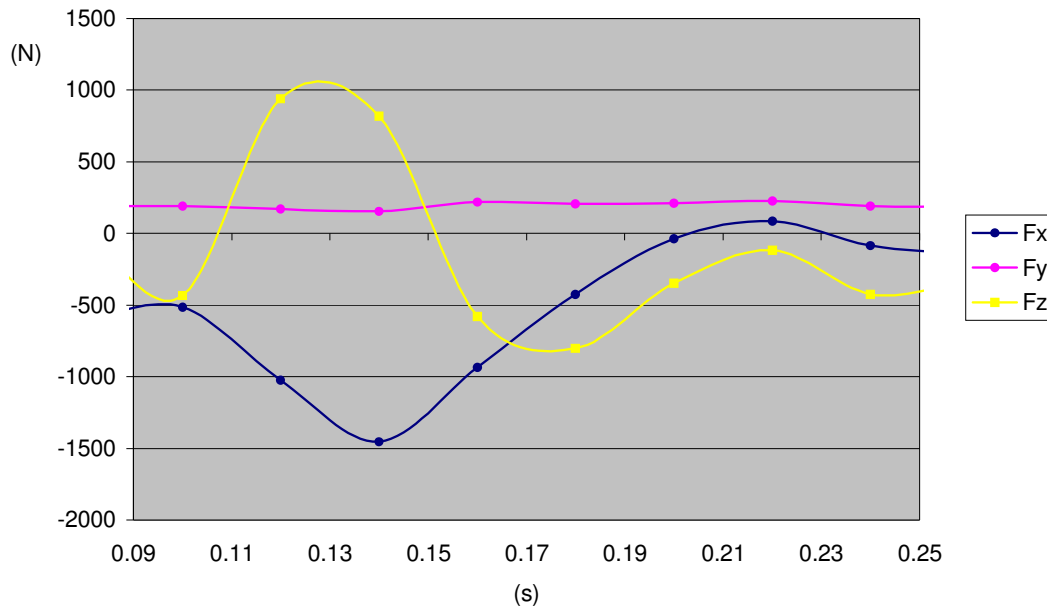


Figure 4-23 : Composantes de la force exercée par le perchiste sur la perche lors du dernier appui du perchiste avant le décollage

Sur l'exemple illustré sur la figure 4-23, la phase durant laquelle le perchiste est encore en contact avec le sol s'effectue sur l'intervalle de temps [0.1 s, 0.24 s]. On constate alors que la force appliquée sur la perche est presque exclusivement située dans le plan  $(x, O, z)$ . De plus, il semble, en analysant la figure 4-23, que le perchiste essaie de résister à l'action de la perche qui a tendance à le décoller du sol, en appliquant sur cette dernière une force dans la direction  $-(O, x)$ .

L'étude a permis de constater qu'un dernier appui prolongé permet de déformer de manière plus sensible la perche : le perchiste subissant, alors, moins l'effort de la perche qui a tendance à l'arracher du sol.

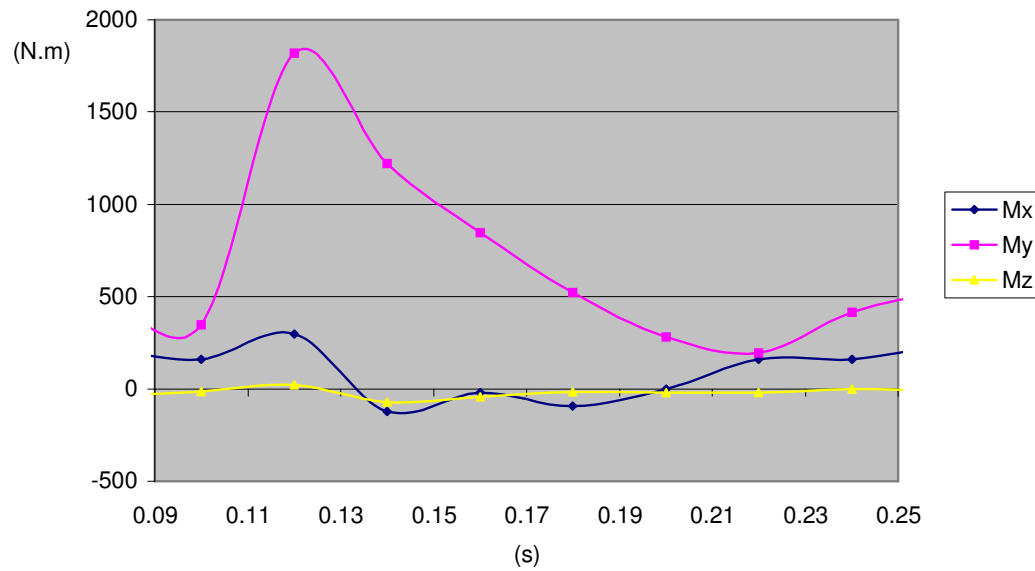


Figure 4-24 : Composantes du moment exercé par le perchiste sur la perche pendant la phase de contact avec le sol

L'hypothèse d'effort plan durant la première phase du saut est confirmée avec les résultats sur les moments présentés sur la figure 4-24, qui montre de manière significative les faibles valeurs obtenus sur les composantes x et z du moment appliqué sur la perche par le perchiste. On observe, en outre, que le perchiste cherche à résister à l'effort de réaction de la perche en appliquant un moment positif important autour de l'axe transverse ( $O, y$ ). Cet effort permet aussi d'augmenter l'angle initial de la perche avec le fond du butoir, paramètre influant nettement sur la déformation de la perche et donc sur l'énergie de déformation emmagasinée dans cette dernière.

Finalement, l'ambition du perchiste lors de son dernier appui avant le décollage est double :

- Résister à l'effort d'arrachement de la perche en prolongeant la durée de contact ;
- Augmenter l'angle de l'extrémité de la perche avec le fond du butoir.

#### 4.4.2.2 Phase de saut

Le calcul du torseur d'action du perchiste sur la perche durant la phase de saut ne nécessite que la connaissance des trajectoires tridimensionnelles issues de l'analyse vidéo et la mise en place du modèle multicorps de l'athlète. La figure 4-25 permet d'observer la force développée sur la perche dans les trois directions de l'espace.

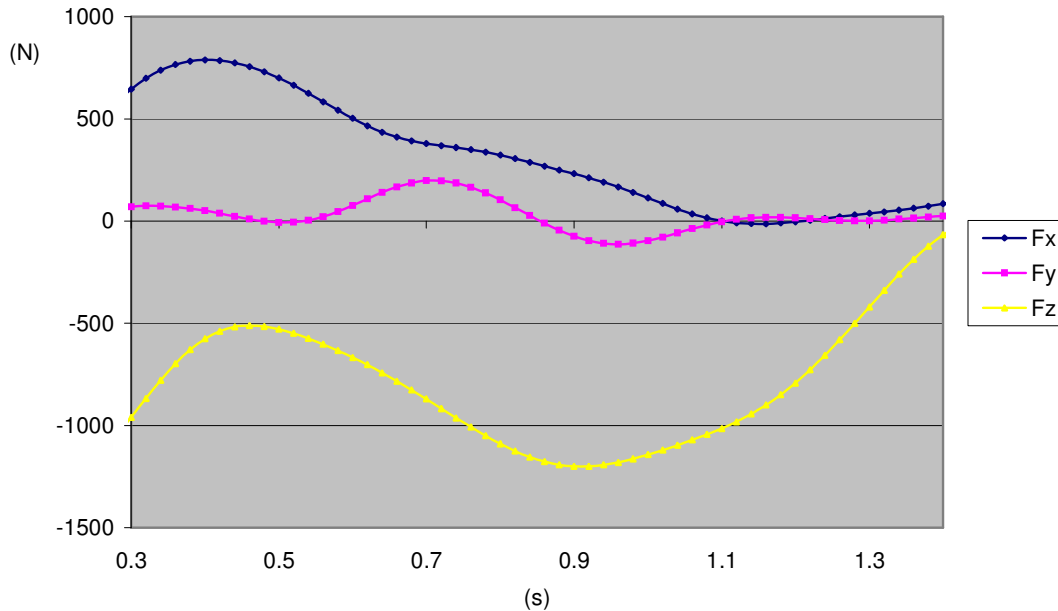


Figure 4-25 : Composantes de la force exercée par le perchiste sur la perche pendant la phase de saut

Le modèle bidirectionnel d'effort reste valable dans la première partie du saut, cependant, pendant la phase de retournement ( $t = 0.6$  s), la force suivant l'axe  $(O, y)$  augmente car le mouvement du centre de gravité du perchiste n'est plus aussi plan qu'auparavant.

On observe, de plus, que la composante  $x$  de la force reste positive au cours du saut, car elle traduit l'accélération négative continue du perchiste. Enfin, la composante  $z$  de la force qui met en avant les accélérations du centre de gravité du perchiste, reste un critère indiscutable de performance et semble beaucoup plus représentative du geste du sportif que la composante selon l'axe  $(O, x)$  qui dépend fortement de la perche utilisée.



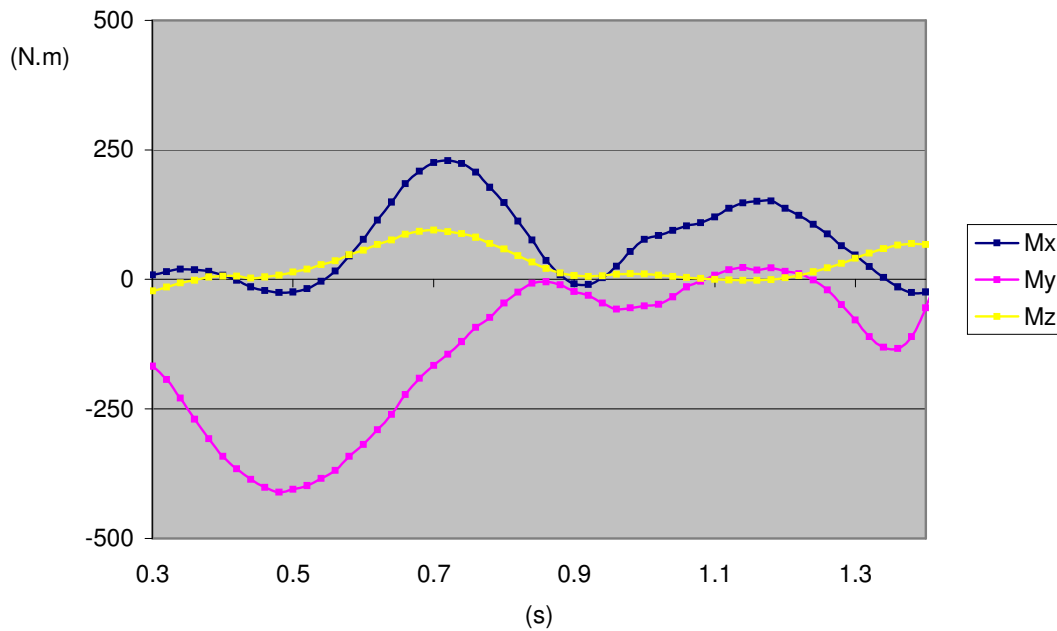


Figure 4-26 : Composantes du moment appliqué par le perchiste sur la perche pendant la phase de saut

Les remarques effectuées sur la force appliquée par le perchiste sur la perche se retrouvent sur le moment (figure 4-26). En effet, lors de la première partie du saut, le moment est essentiellement appliqué dans la direction transverse ( $O, y$ ), l'hypothèse d'un torseur d'action dans le plan ( $x, O, z$ ) est alors complètement justifiée. Durant cette phase, le perchiste réalise une rotation autour de ses hanches qui permet ainsi d'appliquer sur la perche un moment autour de l'axe ( $O, y$ ) négatif.

Ensuite, la phase de renversement et de retournement (à partir de  $t = 0.65$  s) induit des rotations du perchiste autour des deux autres axes, les composantes autour des axes ( $O, x$ ) et ( $O, z$ ) sont alors non nulles. On constate cependant que ces valeurs sont faibles par rapport à celle de la composante  $y$ .

En conclusion, on peut affirmer que le moment appliqué sur la perche par l'athlète dans la direction ( $O, y$ ) qui introduit un moment de flexion dans la perche est un critère important de performance.

### 4.4.3 Etude comparative

La première partie de ce paragraphe sera consacrée à l'analyse des résultats obtenus sur la mesure du torseur d'action exercé par le perchiste sur la perche durant la phase du saut. Par la suite, une étude comparative sur deux sauts effectués sur une même perche par deux sportifs de niveau différent permettra de souligner l'importance du moment appliqué sur la perche.

#### 4.4.3.1 Bilan des résultats

La détermination du torseur d'action du perchiste sur la perche a été réalisée sur les sept perchistes dont le niveau de performance est présenté dans le tableau ci dessous.

Perchiste	1	2	3	4	5	6	7
Performance record (m)	5.4	4.8	5.55	5.35	5.3	5.1	4.7
Performance évaluée (m)	4.9	4.49	4.98	4.9	4.88	4.75	4.49

On se propose de présenter les résultats obtenus sur le calcul de la force suivant l'axe vertical ascendant ( $O, z$ ) et sur l'évaluation du moment autour de l'axe transverse ( $O, y$ ), principaux facteurs dynamiques de performance.

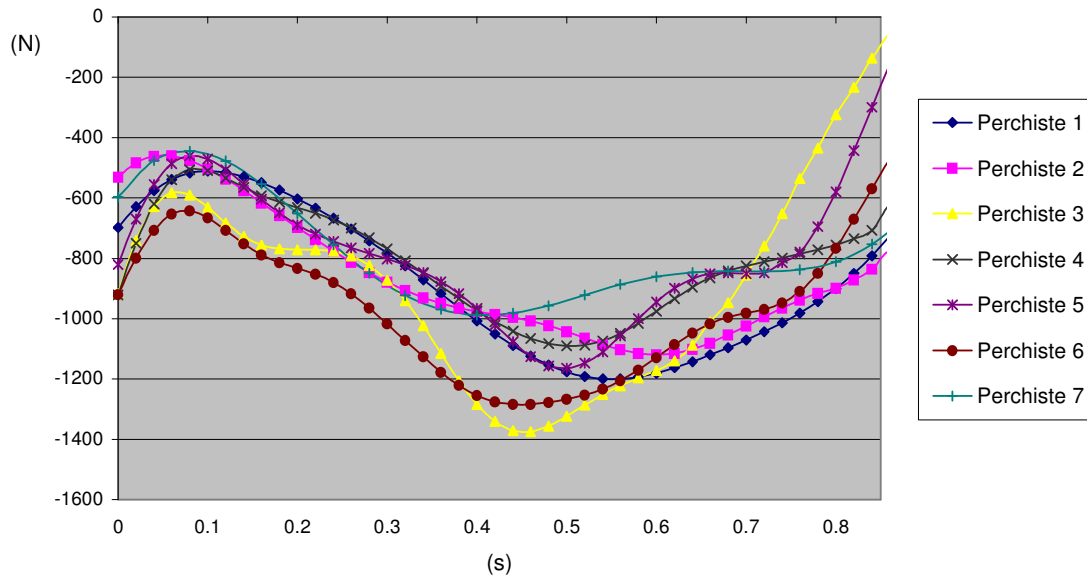


Figure 4-27 : Composante de la force appliquée sur la perche suivant l'axe ( $O, z$ )

L'analyse comparative de la composante z de la force développée sur la perche, figure 4-27, est risquée dans la mesure où tous les perchistes n'ont pas la même masse et ne sautent pas avec les mêmes perches. On constate néanmoins que l'évolution de cette force, caractéristique du geste, est semblable pour les athlètes.

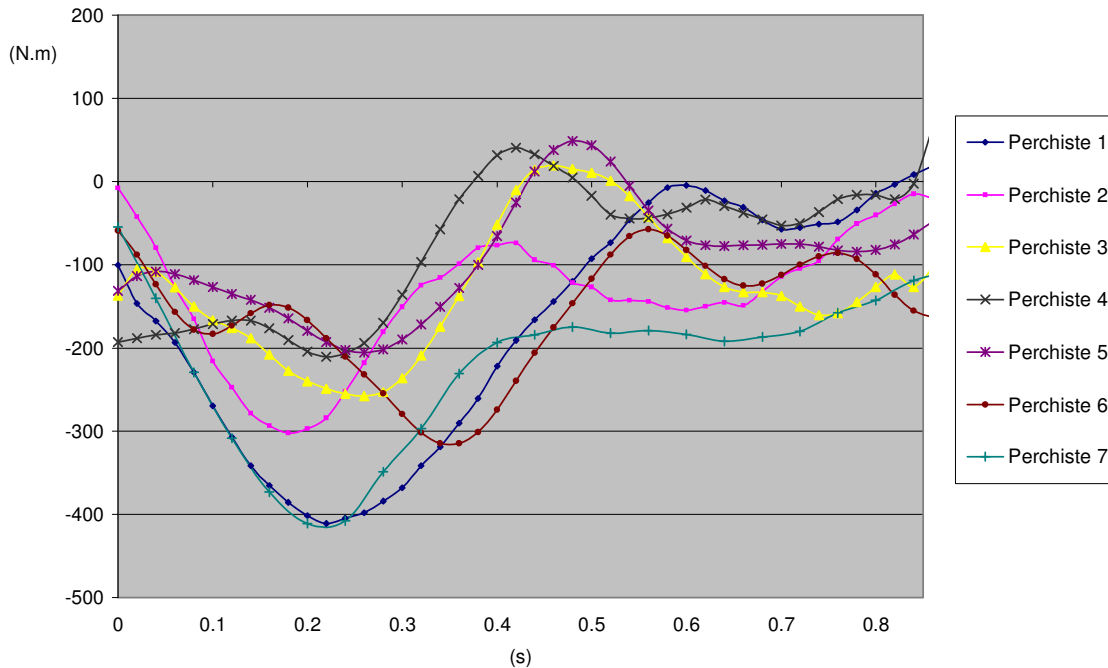


Figure 4-28 : Composante du moment appliquée sur la perche suivant l'axe  $(O, y)$

La figure 4-28, qui présente les résultats obtenus sur les moments autour de l'axe  $(O, y)$ , met en avant une plus grande disparité au niveau des évolutions mesurées. On constate aussi que les meilleurs perchistes, notamment le perchiste 1, auront toujours tendance à appliquer un moment plus grand sur la perche.

Pendant longtemps, les études mécaniques, visant à une analyse dynamique du geste, ne se sont intéressées uniquement qu'aux forces mises en jeu. On peut désormais affirmer que le moment est une grandeur mécanique indispensable à étudier. En outre, le concept de torseur permet l'analyse complète de la dynamique du perchiste (forces et moments).

#### 4.4.3.2 Analyse comparative de deux sauts effectués sur une même perche

Une étude comparative a été effectuée sur deux sauteurs de morphologie comparable sautant avec la même perche afin d'illustrer l'importance du moment appliqué sur la perche. Les deux perchistes n'ont, de plus, pas le même niveau : le perchiste 1 possède un record personnel plus élevé que le perchiste 2. En effet, durant l'essai réalisé, le centre de gravité du perchiste 1 a atteint une hauteur maximale (indice mécanique de performance) de 4,9 m contre 4,49 m pour le perchiste 2.

La figure 4-29 s'attache à mettre en lumière le faible écart observé sur les valeurs de la force développée sur la perche dans la direction  $(O, z)$ .

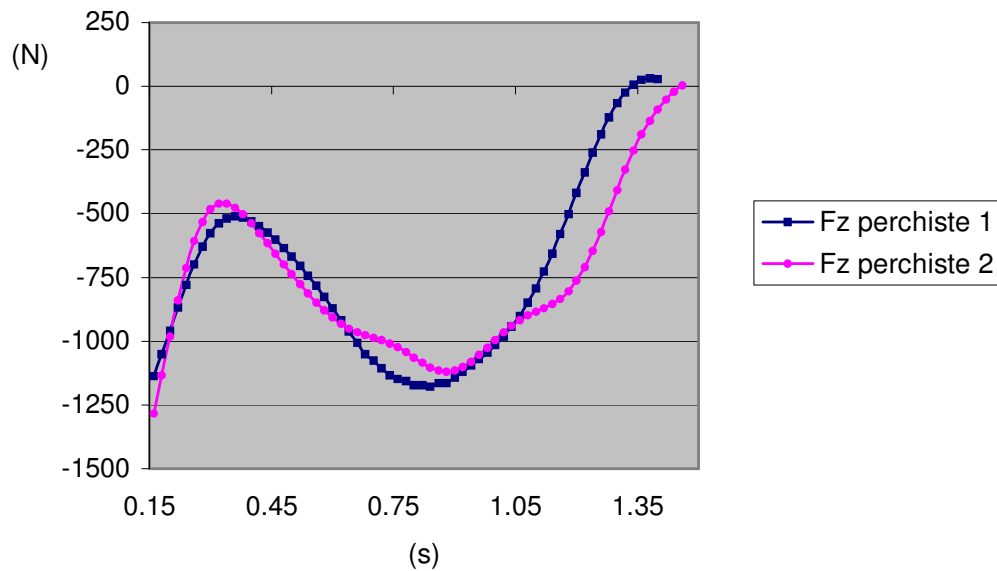


Figure 4-29 : Composante verticale de la force exercée sur la perche

En effet, un écart de 6 % sur les valeurs maximales des forces a été relevé. L'évolution au cours du saut de la force est, quant à elle, tout à fait similaire pour les deux perchistes. Néanmoins, comme le perchiste 1 a emmagasiné plus d'énergie de déformation dans la perche, le redressement de cette dernière est plus rapide.

Les résultats obtenus à partir des données issues de l'analyse vidéo sont, en outre, confirmés par la mesure des efforts exercés dans le butoir (figure 4-30).

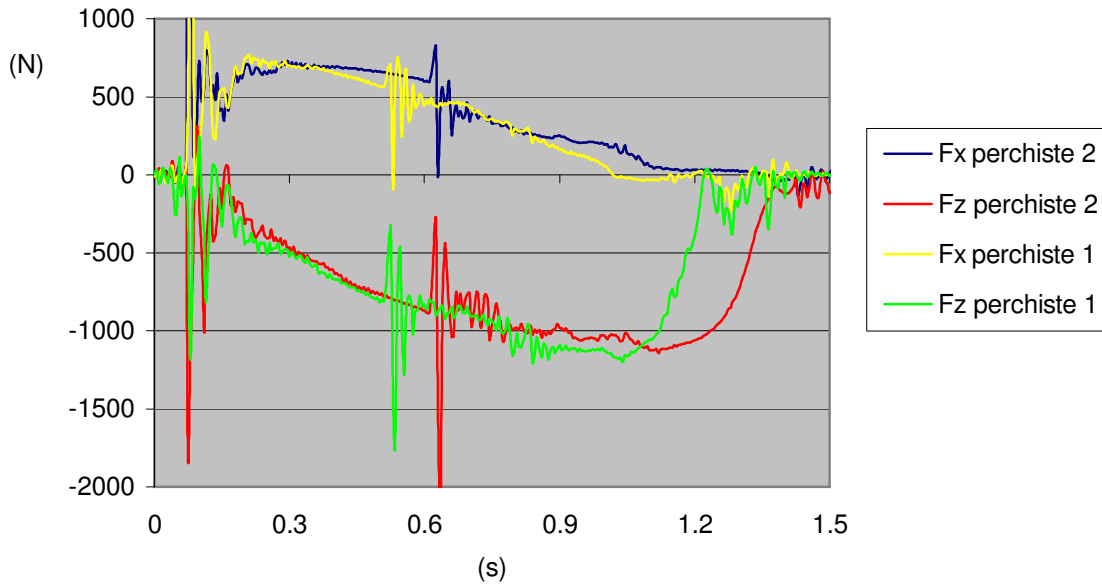


Figure 4-30 : Résultats dynamométriques

On observe sur la figure 4-30 des écarts réduits sur les composantes de la force appliquée dans le butoir par le système perche – perchiste qui confirme les remarques précédentes.

La détermination du moment appliqué sur la perche est alors nécessaire, car l'analyse des forces développées sur la perche ne permet pas de définir un quelconque critère de performance. Les faibles différences enregistrées sur les forces vont tout de même dans le sens de l'indice de performance, le perchiste 1 ayant réalisée une performance nettement supérieure au perchiste 2.

La figure suivante présente les résultats déterminés pour la composante transverse (autour de l'axe  $(O, y)$ ) du moment appliqué sur la perche, grandeur essentielle dans la mesure où elle décrit la faculté du perchiste à appliquer un moment fléchissant sur la structure.

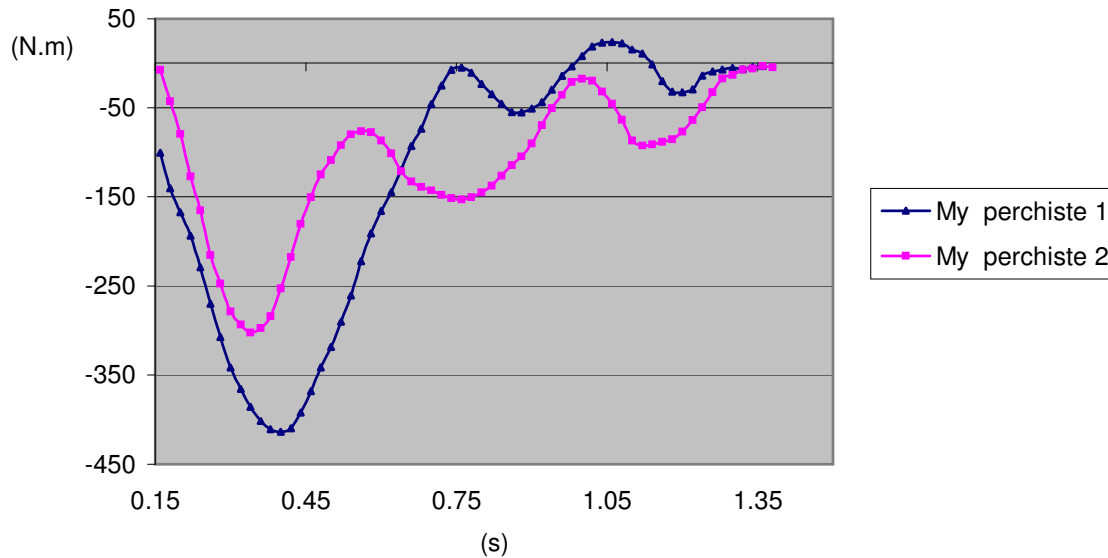


Figure 4-31 : Moment appliqué sur la perche autour de l'axe (O, y)

L'analyse du moment permet d'aboutir dans la recherche d'un critère essentiel de performance. En effet, dans l'exemple présent, les faibles écarts observés sur les forces n'ont pas permis de distinguer fondamentalement les deux gestes réalisés alors que les différences sur les moments sont beaucoup plus sensibles.

On observe ainsi un écart de 27 % sur les moments mesurés, ce qui conduit à affirmer que la faculté du perchiste à plier sa perche réside aussi dans sa possibilité à appliquer un moment fléchissant important sur la structure.

En conclusion, l'étude montre que le moment appliqué sur la perche est un facteur indiscutable de la performance. De plus, cette étape est indispensable pour simuler le comportement dynamique de la perche en effort imposé afin d'essayer d'en optimiser les caractéristiques mécaniques pour chaque type de perchiste.

Un modèle qualitatif permettant de définir un mouvement optimal engendrant des efforts maximaux est proposé au paragraphe 4.6.

#### 4.4.3.3 Limites des mesures et perspectives

La phase d'impulsion est, contrairement à la phase de saut (plus continue), difficile à appréhender avec nos appareils de mesure. Deux facteurs essentiels limitent les mesures effectuées :

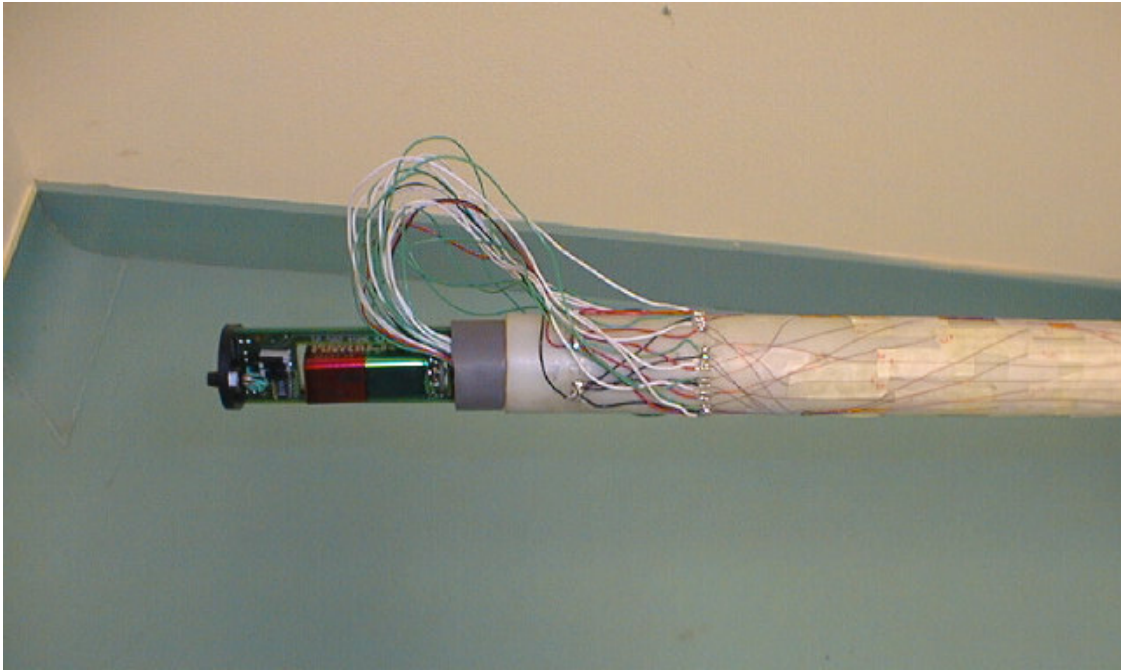
- La durée relativement courte du mouvement (de 1 à 2 dixièmes de seconde) par rapport à la fréquence d'acquisition des caméras (50 Hz) ;
- L'aspect impulsionnel du geste qui excite les modes de vibration du capteur et de la perche.

En effet, le dernier appui du perchiste avant le décollage provoque un choc sur le dynamomètre, ce qui a tendance à perturber très nettement les mesures en raison des vibrations engendrées sur sa plaque supérieure. De plus, la faible durée de cette première phase du saut ne permet pas une mesure précise des accélérations du centre de gravité du perchiste en raison du peu d'images analysées lors de ce dernier appui (une dizaine d'images au mieux).

En définitive, la fréquence propre de la plaque supérieure du dynamomètre et la vitesse d'acquisition des caméras ne sont pas assez élevées pour rendre compte de la dynamique rapide. Des capteurs piézo-électriques et des caméras rapides (250 images / seconde) auraient certainement permis d'améliorer de manière sensible les résultats obtenus.

L'approche entreprise pour déterminer les efforts développés par le perchiste sur la perche reste dépendante du modèle multicorps du perchiste et des techniques de dérivation de nuages de points. Ces raisons nous ont poussé à mettre au point un capteur directement implanté sur la perche. Ce dernier est constitué de plusieurs ponts de jauges collées sur le corps de la perche et d'un système d'acquisition positionné en bout de perche. L'objectif du capteur est de mesurer les moments de flexion, de torsion ainsi que les forces développées au niveau des mains du perchiste.

Ce capteur (photo 4-1), en court de mise au point au laboratoire, devrait permettre d'améliorer les résultats présentés précédemment et de déterminer de nouveaux critères objectifs de performance.



*Photo 4-1 : Capteur d'effort implanté directement sur la perche*

#### 4.5 Influence de la perche sur les efforts développés

*Les efforts appliqués par le perchiste sur la perche dépendent du geste effectué par l'athlète mais aussi de la structure mécanique de la perche. En effet, un même mouvement réalisé sur deux perches différentes n'engendrera pas les mêmes efforts. L'étude de plusieurs sauts exécutés par différents perchistes sur une même perche ainsi que l'analyse d'un même sauteur sur des différentes perches ont permis de quantifier dans quelle mesure les efforts variaient. Enfin, la notion de force d'inertie a permis de rendre compte de l'importance de la perche sur la force développée par l'athlète en distinguant la force relative générée par le mouvement du perchiste dans un référentiel lié à la perche et la force d'inertie due au déplacement de la perche dans le référentiel galiléen .*



### 4.5.1 Etude comparative

Une étude comparative a été menée dans le but de quantifier l'influence de la perche sur les efforts développés par le perchiste. Les résultats dynamométriques enregistrés par le capteur placé sous le butoir sont à la base de cette analyse, on assimilera alors les forces mesurées à celles appliquée par le perchiste sur la perche en négligeant les effets « massiques » de la perche. Une première étude a consisté dans l'observation des forces développées par un même perchiste sur plusieurs perches différentes.

#### 4.5.1.1 Force exercée par un même perchiste sur des perches différentes

Le perchiste ayant servi de référence lors de cette étude comparative est un athlète de niveau national dont la meilleure performance est de 5,45 mètres. Plusieurs sauts ont été réalisés sur des perches dont la rigidité de flexion va en augmentant. La figure 4-32 présente l'évolution des composantes selon la direction  $(O, x)$  de la force appliquée dans le butoir ( $F_x$ ) pour un saut effectué avec une perche raide (4,9 m) et une perche souple (4,6 m) adaptées à des perchistes de masse respective 75 et 68 kg.

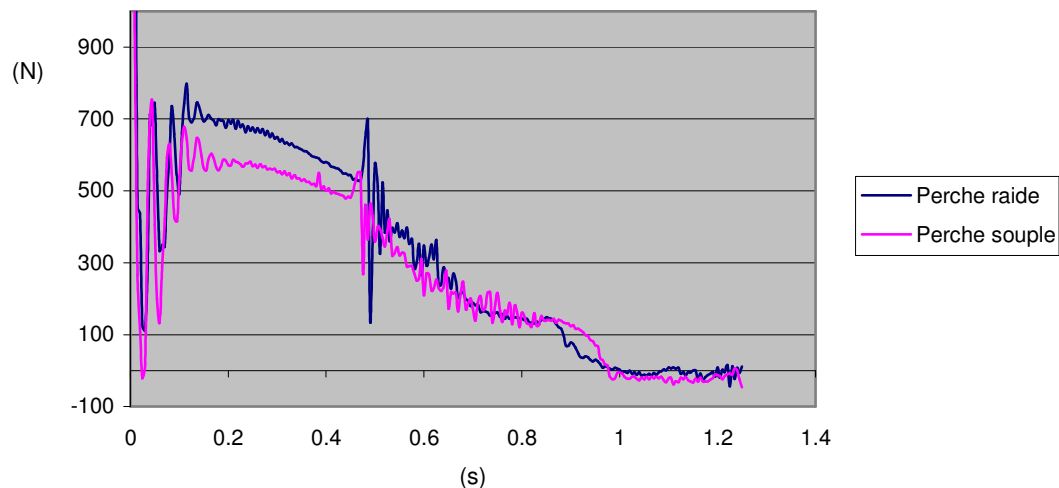


Figure 4-32 : Influence de la rigidité de flexion sur  $F_x$

On observe une nette augmentation de la composante  $x$  de la force exercée dans le butoir par le système perche – perchiste lorsque le saut est effectué avec une perche raide. En fait, on constate que plus la rigidité de la perche est élevée, plus la réaction du butoir sur l'extrémité de la perche sera importante donc plus le perchiste aura tendance à être freiné.

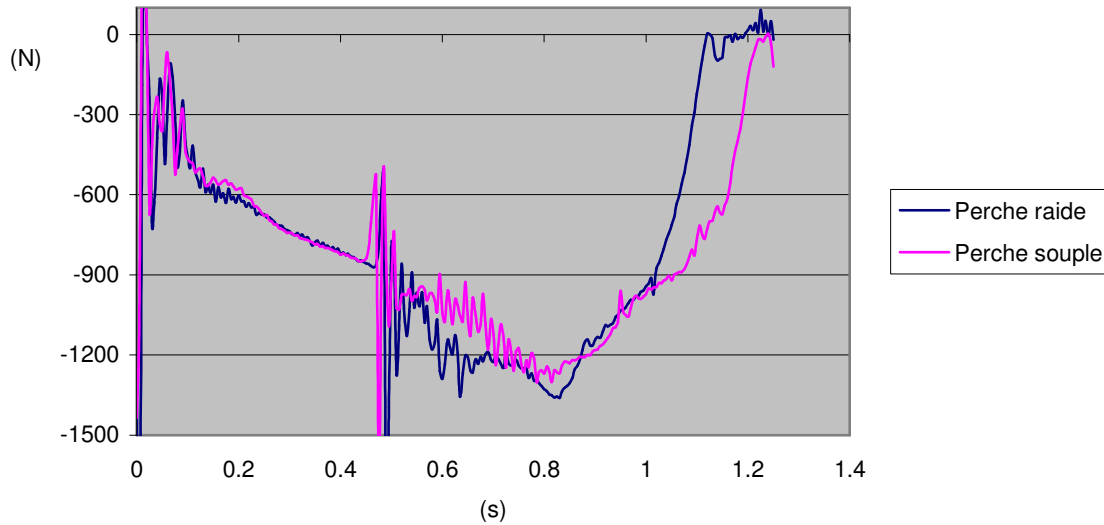


Figure 4-33 : Influence de la rigidité de flexion sur  $F_z$

En ce qui concerne la composante selon la direction verticale ( $O, z$ ) de la force appliquée dans le butoir ( $F_z$ ), les conclusions sont différentes. En effet, la figure 4-33 illustre une évolution similaire de  $F_z$  pour les deux perches dans la première partie du saut, où le perchiste cherche à emmagasiner dans sa perche la plus grande énergie de déformation. Dans la seconde partie du saut où le perchiste profite de l'énergie stockée dans la perche, l'utilisation d'une perche plus souple engendrera un redressement de la perche moins rapide qui est alors caractérisé par la pente moins prononcée de  $F_z$ .

En conclusion, on peut supposer que :

- $F_x$  dépend essentiellement de la rigidité de la perche et caractérise la force de freinage que subit le perchiste ;
- $F_z$  est caractéristique du mouvement du perchiste et semble moins dépendant des caractéristiques mécaniques de la perche (notamment dans la première phase du saut,  $t < 0.8$  s).

#### 4.5.1.2 Force exercée par différents perchistes sur une même perche

L'étude des forces exercées par différents perchistes sur une même perche a ensuite été réalisée afin de valider les conclusions du paragraphe précédent. Ainsi, trois perchistes ont effectué des sauts sur une perche identique dont les caractéristiques sont les suivantes : perche en verre époxyde de marque SPIRIT, de longueur 4.9 mètres et conseillée pour une masse de 75 kilogrammes. Les résultats obtenus sont présentés sur les figures 4-34 et 4-35 qui illustrent respectivement l'évolution de  $F_x$  et  $F_z$ .

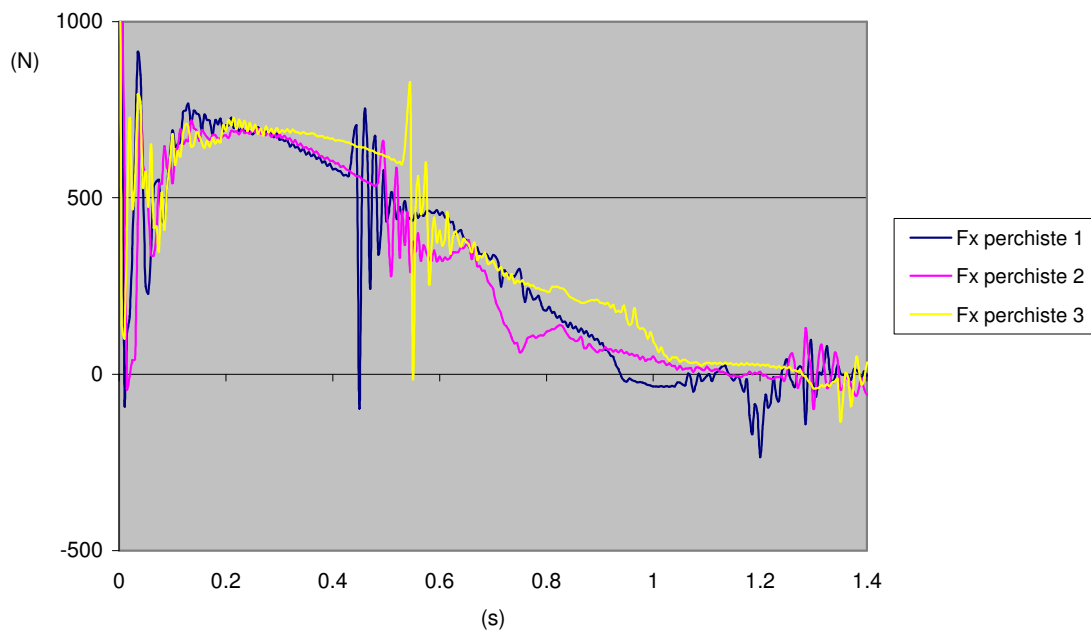


Figure 4-34 : Composante de la force exercée dans le butoir selon l'axe  $(O, x)$  par trois athlètes différents sur une même perche

On constate effectivement que l'évolution de  $F_x$  est très proche pour les trois perchistes testés. La perche utilisée et les conditions initiales lors du contact de la perche dans le butoir influencent l'évolution de  $F_x$ . Cette conclusion est alors en accord avec le fait que la composante de la force appliquée par le perchiste sur la perche selon l'axe longitudinal  $(O, x)$  dépend essentiellement des caractéristiques mécaniques la perche utilisée.

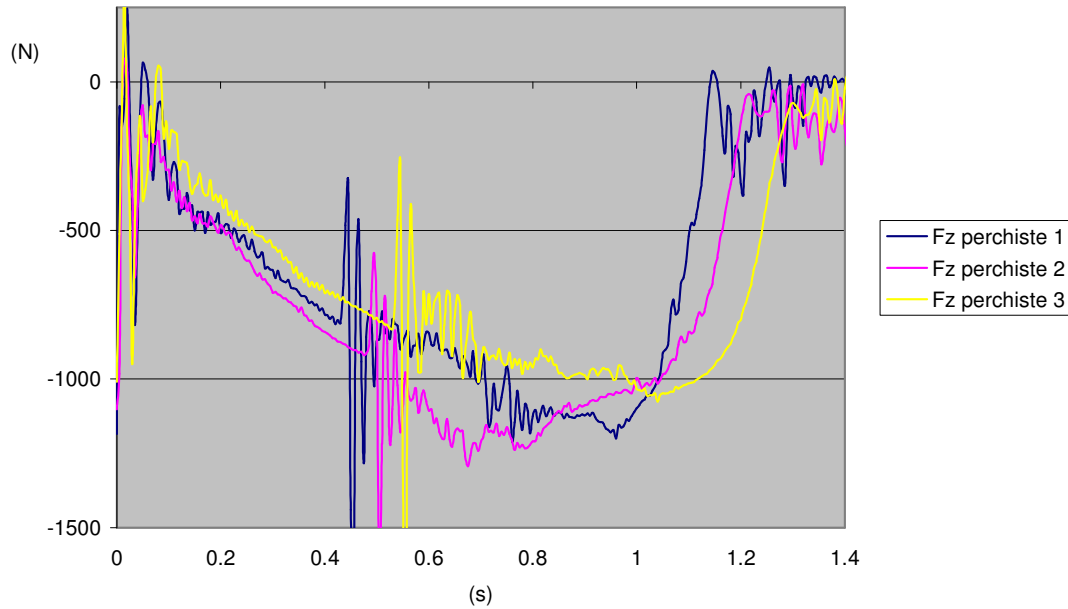


Figure 4-35 : Composante de la force exercée dans le butoir selon l'axe  $(O, z)$  par trois athlètes différents sur une même perche

Bien que les évolutions de la force appliquée sur la perche dans la direction  $(O, z)$  représentées sur la figure 4-35 soient comparables, les différences enregistrées sont plus prononcées que pour la composante selon  $(O, x)$  de la même force. Cette remarque tend à valider encore un peu plus les conclusions élaborées lors du paragraphe précédent. On peut alors poser l'hypothèse que  $F_z$  est caractéristique du mouvement effectué sur la perche par le perchiste. En outre, une perche plus raide emmagasinerait plus d'énergie de déformation pour un même geste ce qui engendrerait un redressement de la perche plus rapide.

#### 4.5.1.3 Force d'inertie d'entraînement et force relative développées

##### Principe

Afin de rendre compte de l'importance de la perche sur les forces développées lors du saut, une analyse du geste dans un repère lié à la perche a été réalisée. Le repère relatif choisi pour cette étude, noté  $R_p$ , est défini de la manière suivante :

- Ses axes restent parallèles avec ceux du repère d'étude  $R_0$  ;
- Son origine  $O_p$  est définie par un point de la perche situé au milieu des mains du perchiste.

Le repère relatif  $R_p$  est donc obtenu à partir d'un changement d'origine du repère absolu  $R_0$ , ainsi le vecteur instantané de rotation de  $R_p$  par rapport à  $R_0$  est nulle.

Dans le repère absolu, le calcul de la force  $F$ , appliquée par le perchiste sur la perche depuis le décollage jusqu'au lâcher de la perche, est déterminé en utilisant le théorème de la résultante dynamique :

$$\vec{F} = \vec{P} - m \vec{a} \quad (G \in S / R_0) \quad (4-8)$$

L'étude du mouvement du perchiste dans le repère relatif permet de déterminer la force relative appliquée sur la perche :

$$\vec{F}_{relative} = -m \vec{a} \quad (G \in S / R_p) \quad (4-9)$$

De plus, l'accélération d'entraînement (égale ici à celle de l'origine du repère relatif par rapport au repère absolu) caractérise la force d'inertie (d'entraînement) due au déplacement de la perche dans le référentiel absolu :

$$\vec{F}_{inertie} = -m \vec{a} \quad (O_p \in R_p / R_0) \quad (4-10)$$

Enfin, la force d'inertie de CORIOLIS est dans notre cas nulle car le repère relatif est en translation par rapport au repère absolu.

L'intérêt d'une telle approche est de mettre en évidence à la fois le mouvement relatif du perchiste dans le référentiel en mouvement et de quantifier les efforts d'inertie induits par les accélérations de la perche dans le référentiel absolu, qui diffèrent avec les caractéristiques mécaniques des perches utilisées. On peut ainsi séparer l'effort d'entraînement, dû à la perche et celui relatif, dépendant du geste de l'athlète. Néanmoins, les déplacements du centre de gravité du perchiste dans le référentiel relatif étant beaucoup plus faibles, les erreurs commises sur les accélérations relatives du centre de gravité  $G$  du perchiste seront plus importantes.

## Résultats expérimentaux

L'étude des forces relatives et d'inertie mises en jeu au saut à la perche a été effectuée à partir d'une analyse vidéo 3D d'un saut réel. Les résultats obtenus pour la composante verticale de la force appliquée sur la perche pendant la phase de saut sont présentés sur la figure 4-36.

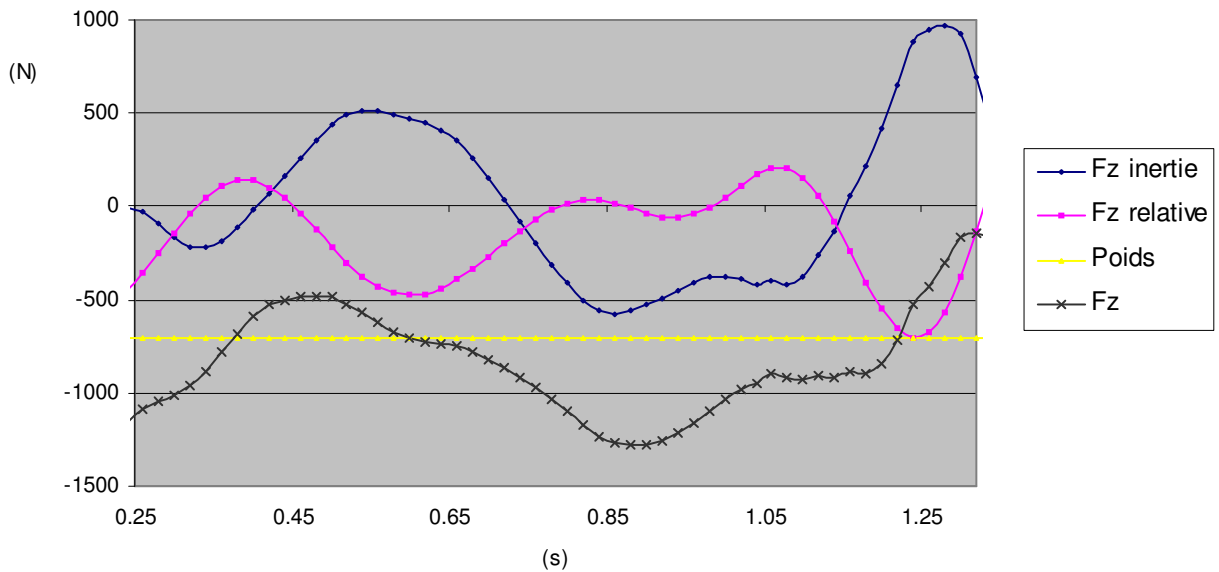


Figure 4-36 : Forces relative et d'inertie développées dans la direction  $(O, z)$

La figure 4-36 illustre l'évolution des différentes composantes de la force développée suivant l'axe  $(O, z)$  :

- Le poids du perchiste ;
- La force d'inertie d'entraînement ;
- La force relative ;
- La force appliquée par le perchiste sur la perche (somme des 3 premières composantes).

On observe une évolution presque opposée de la force d'inertie et de la force relative. Dans la première partie du saut ( $t < 0.8$  s), la force relative appliquée sur la perche est négative alors que la force d'inertie d'entraînement positive tend à redresser la structure.

Ensuite, la phase de renversement s'accompagne d'une force relative quasiment nulle et d'une force d'inertie d'entraînement négative. Enfin, on constate durant la dernière phase du saut que le perchiste applique une force négative sur la perche qui a donc tendance à recharger la structure et implique alors un redressement moins rapide de la perche.

Une telle étude permet de soustraire aux efforts développés ceux engendrés par la perche afin d'analyser la dynamique propre du perchiste. Cependant, les déplacements relatifs du centre de gravité de l'athlète sont plus faibles que dans le repère absolu, par conséquent, les accélérations relatives mesurées deviennent moins précises.

## 4.6 Amélioration du geste

*Le paragraphe suivant propose un principe permettant de rendre compte de manière qualitative de la performance du perchiste. Le principe de la dynamique segmentaire repose sur un modèle multicorps de l'athlète où chaque segment est représenté par un solide indéformable. Ainsi, la force générée lors de l'appui direct d'un athlète sur le sol ou par l'intermédiaire d'une structure déformable résulte de l'accélération de chacun des segments par rapport au référentiel d'étude.*

### 4.6.1 Principe de la dynamique segmentaire

Tout mouvement de solides indéformables sur la terre est régi par les équations de la mécanique Newtonienne (théorème de la résultante et du moment dynamique). Par conséquent, une modélisation multicorps du corps humain permettra d'appliquer ces équations pour les gestes sportifs. Ainsi, les efforts développés lors des appuis directs ou indirects avec le sol sont liés au mouvement des différents segments corporels dans le référentiel d'étude galiléen.

En ce qui concerne les forces mis en jeu, elles dépendent des accélérations du centre de gravité du sportif, elles même reliées à celle des centres de gravité des différents segments corporels par une relation barycentrique.

Les moments développés sont pour leur part liés à l'évolution du moment dynamique du sportif en son centre de gravité et au terme de transfert faisant intervenir la distance entre le point de calcul du moment et le centre de gravité ainsi que les accélérations du centre de gravité dans le référentiel galiléen.

En conclusion, la dynamique de chaque segment intervient dans les efforts mis en jeu au cours d'une activité sportive. En outre, les segments libres ont la capacité de générer des accélérations importantes comparativement aux segments contraints ou liés et leur part dans l'effort développé est souvent primordial bien que leur masse soit faible. A titre d'exemple, la force exercée par les bras lors d'une détente verticale est aussi importante que celle générée par les jambes.

#### **4.6.2 Application au saut à la perche**

Afin d'optimiser qualitativement le geste au saut à la perche, les principes de la dynamique segmentaire ont été appliqués pour proposer les bases d'un mouvement idéal. On a pu constater au cours de l'étude que les efforts développés par le perchiste sur la perche dépendaient en partie des caractéristiques mécaniques de la perche. On se propose donc dans ce paragraphe d'optimiser les mouvements du perchiste dans le référentiel relatif attaché à la perche.

La problématique du saut à la perche peut s'énoncer comme suit : « connaissant les conditions initiales en vitesse et en position du centre de gravité du perchiste, le mouvement idéal de l'athlète est celui qui produira la force selon l'axe  $(O, z)$  et le moment autour de l'axe  $(O, y)$  les plus importants pour une perche donnée ».

En outre, les principaux segments moteurs au saut à la perche sont les segments inférieurs, en effet, les segments supérieurs sont liés à la perche et ne peuvent générer des accélérations importantes dans le référentiel relatif. En fait, les bras transmettent à la perche la force due aux accélérations du bas du corps. Ainsi, un balancer et un grouper dynamique sont liés à la faculté des segments inférieurs du perchiste à s'accélérer dans la direction verticale  $(O, z)$  permettant alors de développer une force maximale sur la perche.



Parallèlement, un moment maximal doit être exercé dans la direction  $(O, y)$  par le perchiste sur la perche. Ce moment est lié d'une part au moment dynamique du perchiste en son centre de gravité et d'autre part au terme de transfert (équations 3-25). De plus, on a pu constater que le terme de transfert est le terme prépondérant sur le moment dynamique dans le calcul du moment exercé sur la perche par le perchiste en un point de la perche situé entre les mains du perchiste (figure 4-37).

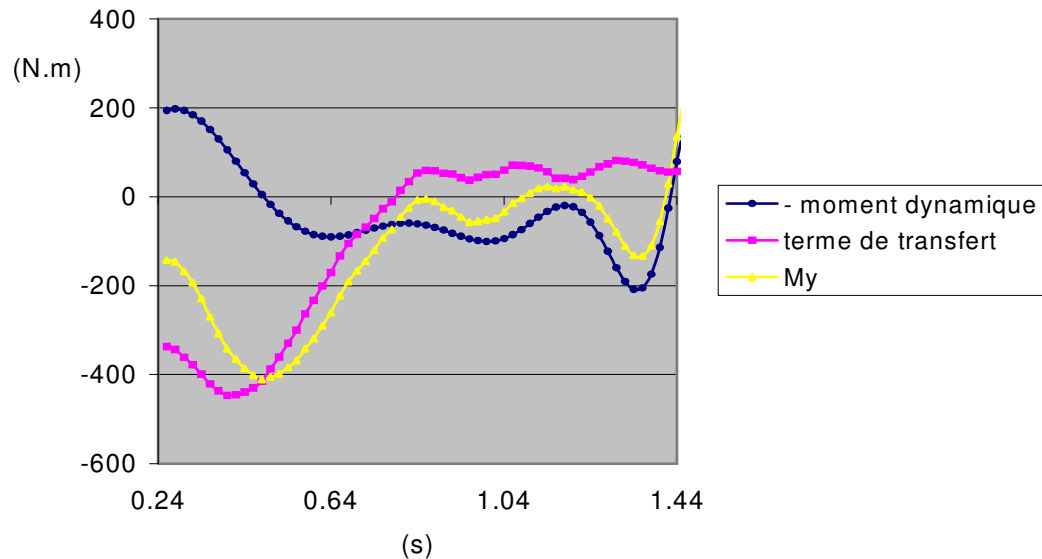


Figure 4-37 : Importance du terme de transfert dans le moment appliqué sur la perche dans la direction  $(O, y)$

Le perchiste a donc intérêt d'écarter le plus son centre de gravité de la perche afin d'augmenter le moment appliqué sur la perche. Pour se faire, il doit rester les bras tendus lors de l'exécution du balancer.

Enfin, l'ensemble des gestes du perchiste sur la perche doit être synchronisé avec les mouvements de l'extrémité de la perche dans le butoir. Les meilleurs perchistes ont alors la faculté de gérer ces mouvements de la perche lors de leurs sauts.

## 4.7 Conclusions et perspectives

L'analyse expérimentale du saut à la perche a permis de quantifier les paramètres mécaniques influençant la performance. Ce paragraphe a souligné l'importance de mesurer à la fois la cinématique du sportif mais aussi les efforts exercés par ce dernier au niveau de ses appuis. De même, l'étude a montré l'importance des moments mis en jeu au cours du mouvement : l'utilisation du concept de torseur dans la mécanique permet alors de transporter les 2 entités d'un effort que sont la force et le moment. Enfin, le principe de la dynamique segmentaire permet une meilleure compréhension du geste et une optimisation qualitative de la performance.

Néanmoins, des améliorations peuvent être apportées sur les outils de mesure. L'utilisation de caméras rapides (200 à 500 images par secondes) ouvrirait ainsi de nouvelles perspectives d'études, notamment sur les phases rapides du mouvement (phase d'impulsion). En outre, ces mêmes phénomènes de dynamique rapide ont sensiblement perturbé les mesures dynamométriques. Il serait alors intéressant d'adapter le dynamomètre existant afin d'augmenter nettement sa bande passante (dimension de la plaque supérieure plus faible, utilisation de capteurs piezos).

Enfin, l'étude comparative d'un même perchiste utilisant des perches différentes a permis de mettre en évidence l'influence de la structure de la perche sur les efforts développés et donc sur la performance. Il semble donc indispensable de déterminer les caractéristiques mécaniques des perches de saut. Le chapitre 5 sera donc consacré à cette étude.

# CHAPITRE 5. CARACTERISATION DE LA STRUCTURE PERCHE

---

5.1	Introduction et principe du recalage .....	143
5.2	Recalage statique .....	144
5.2.1	Modélisation de la structure perche .....	144
5.2.1.1	Modèle élémentaire .....	144
5.2.1.2	Discrétisation de la structure.....	145
5.2.2	Essais expérimentaux.....	145
5.2.2.1	Protocole expérimental .....	146
5.2.2.2	Domaine d'erreur des mesures expérimentales.....	148
5.2.3	Méthode numérique de recalage .....	149
5.2.3.1	Méthode des éléments finis .....	149
5.2.3.2	Algorithme d'optimisation.....	155
5.2.4	Validation et sensibilité de la méthode .....	161
5.2.4.1	Validation de la méthode sur une poutre homogène .....	161
5.2.4.2	Etude de sensibilité de la méthode de recalage.....	162
5.2.5	Résultats, conclusions et perspectives .....	168
5.2.5.1	Résultats du recalage .....	168
5.2.5.2	Conclusions et perspectives .....	169
5.3	Recalage dynamique .....	170
5.3.1	Essais expérimentaux.....	170
5.3.2	Méthode numérique de recalage .....	173
5.3.2.1	Principe des travaux virtuels en dynamique.....	173
5.3.2.2	Méthode de recalage dynamique.....	175
5.3.3	Validation de la méthode de recalage dynamique.....	177
5.3.4	Limites de la méthode en dynamique.....	178
5.3.5	Résultats, conclusions et perspectives .....	178
5.4	Analyse de la structure par essai de perte au feu .....	180
5.4.1	Mesures effectuées .....	180
5.4.1.1	Opérations préliminaires.....	180
5.4.1.2	Caractérisation géométrique de la perche .....	181
5.4.1.3	Caractérisation du matériau composite par essai de perte au feu.....	186
5.4.2	Synthèse et conclusion .....	190

5.4.2.1	Bilan et forme du tissu .....	190
5.4.2.2	Procédé industriel envisagé.....	190
5.4.2.3	Critiques et perspectives .....	191
5.5	Conclusion.....	192

## 5.1 Introduction et principe du recalage

L'évolution de la technique au saut à la perche est essentiellement liée au matériau employé dans la réalisation des perches de saut. Ainsi, l'utilisation des matériaux composites au début des années 1960 a marqué un tournant dans l'amélioration du matériel. De plus, le paragraphe précédent a mis en évidence l'importance de la structure sur les efforts développés au cours du saut. Il semble alors nécessaire de caractériser la structure mécanique des perches de saut. En outre, une simple mesure du diamètre extérieur de perches de saut récentes permet de constater que les caractéristiques mécaniques évoluent sensiblement le long de la structure, rendant alors indispensable une détermination locale des caractéristiques mécaniques de la perche.

En fait, une structure mécanique est définie dynamiquement lorsqu'on peut évaluer localement :

- Ses caractéristiques statiques : raideur ;
- Ses caractéristiques dynamiques : masse et amortissement.

Les méthodes de recalage permettent, en comparant les résultats obtenus à partir d'essais expérimentaux à ceux déterminés par des méthodes numériques (éléments finis), d'établir les caractéristiques dynamiques locales d'une structure. Pour ce faire, il est indispensable, dans un premier temps, de modéliser la structure. En outre, les essais expérimentaux devront permettre la mesure des degrés de liberté du modèle précédemment défini. Enfin, une méthode d'optimisation numérique permettra de faire tendre les résultats issus de la méthode par éléments finis vers ceux établis expérimentalement en minimisant une fonction objectif correctement définie.

On distinguera enfin le recalage statique qui permettra de déterminer les matrices de raideur locales et celui dynamique qui autorisera le calcul des matrices locales de masse. A chaque type de recalage correspondra alors une modélisation et des essais expérimentaux permettant de rendre compte des caractéristiques du modèle choisi.

L'intérêt des méthodes de recalage est de fournir rapidement une évaluation précise des caractéristiques dynamiques d'une structure. Il faut donc réaliser un modèle simple rendant compte de la réalité de manière convenable et permettant des mesures expérimentales abordables.

## 5.2 Recalage statique

*Le choix du modèle utilisé pour la perche est intimement lié aux mesures expérimentales pouvant être réalisées. En effet, plus le modèle sera complexe, plus l'expérimentation à mettre en œuvre nécessitera des moyens importants. Enfin, l'expérimentation devra permettre de mesurer les degrés de liberté du modèle de façon simple : un essai de flexion deux appuis avec chargement central permet de répondre à ces contraintes. Cette méthode de recalage a permis de déterminer les rigidités de flexion locales de deux perches de saut : la première est une perche récente (1998) de marque SPIRIT, la seconde, un perche plus ancienne (1985) de marque CATAPOLE.*

### 5.2.1 Modélisation de la structure perche

#### 5.2.1.1 Modèle élémentaire

Le modèle éléments finis de la perche a été réalisée à partir d'une poutre 2D de BERNOULLI. La structure étant fortement élancée, l'influence des efforts de cisaillement n'est pas prise en compte dans le modèle choisi car la mesure de ce degré de liberté n'est pas aisée. La figure 5.1 présente les degrés de liberté du modèle de poutre de BERNOULLI : on distingue les déplacements nodaux notés  $v(i)$  et les rotations notées  $\varphi(i)$ .

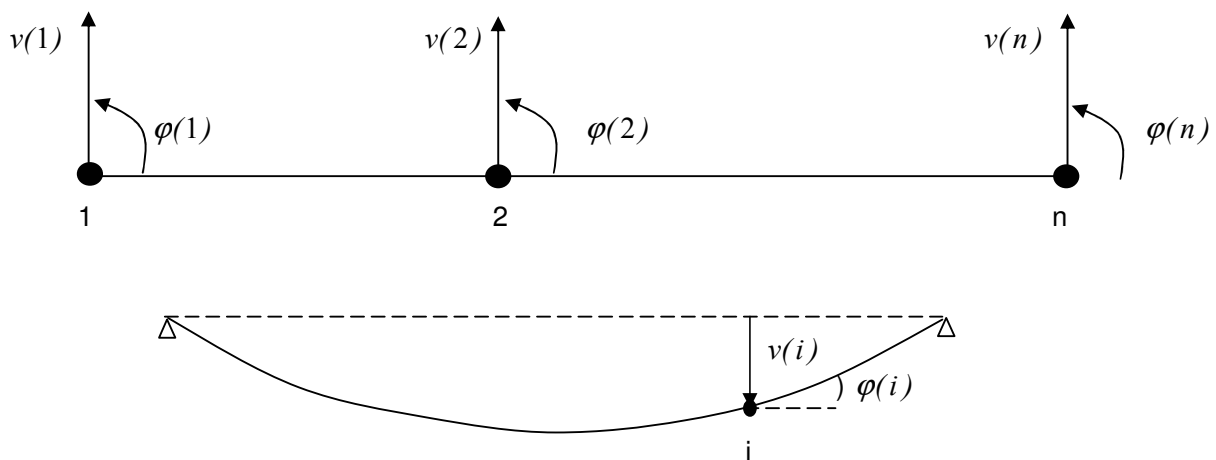


Figure 5-1 : Modèle de poutre de BERNOULLI, application à un essai de flexion deux points

Le vecteur des déplacements nodaux ou degrés de liberté d'une structure constituée de  $n$  poutres élémentaires peut s'écrire de la manière suivante :

$$q = \left\{ \begin{array}{c} v(1) \\ \varphi(1) \\ \dots \\ \dots \\ v(i) \\ \varphi(i) \\ \dots \\ \dots \\ v(n) \\ \varphi(n) \end{array} \right\}, \text{ la structure possédant alors } 2n \text{ degrés de liberté.}$$

#### 5.2.1.2 Discrétisation de la structure

Une fois le modèle élémentaire défini, il convient de discrétiser la structure en un certain nombre d'éléments. Les perches de saut ayant une longueur importante, de presque 5 mètres, le nombre d'éléments choisis pour cette étude est compris entre 20 et 30 suivant les perches recalées. Il est en outre nécessaire d'avoir un nombre  $n$  d'éléments pairs (nombre de nœuds  $n+1$  par conséquent impair) afin de pouvoir appliquer une charge sur le nœud central de la structure.

### 5.2.2 Essais expérimentaux

Les essais expérimentaux permettent d'obtenir les données de base au recalage de la structure. La qualité des mesures va conditionner de manière importante les résultats du recalage. En outre, les mesures expérimentales doivent permettre d'appréhender les degrés de liberté du modèle. Pour notre étude, un essai de flexion entre deux appuis ponctuels a permis la mesure des déplacements nodaux de la structure soumise à une charge placée en son centre.

### 5.2.2.1 Protocole expérimental

Afin de réaliser un essai de flexion deux points, une structure aluminium composée de deux règles de maçon fut fixée en ses extrémités sur deux tréteaux. Les règles d'aluminium ont constitué la référence des mesures : en effet, elles ont alors permis de guider une jauge de profondeur au-dessus de la structure et de mesurer ainsi les déplacements verticaux des différents nœuds de cette structure par rapport à la ligne de référence. Les deux extrémités de la perche furent alors posées en appui ponctuel alors qu'une charge de quelques kilogrammes (pour rester dans les hypothèses d'élasticité linéaire) fut appliquée sur le nœud central de la structure.

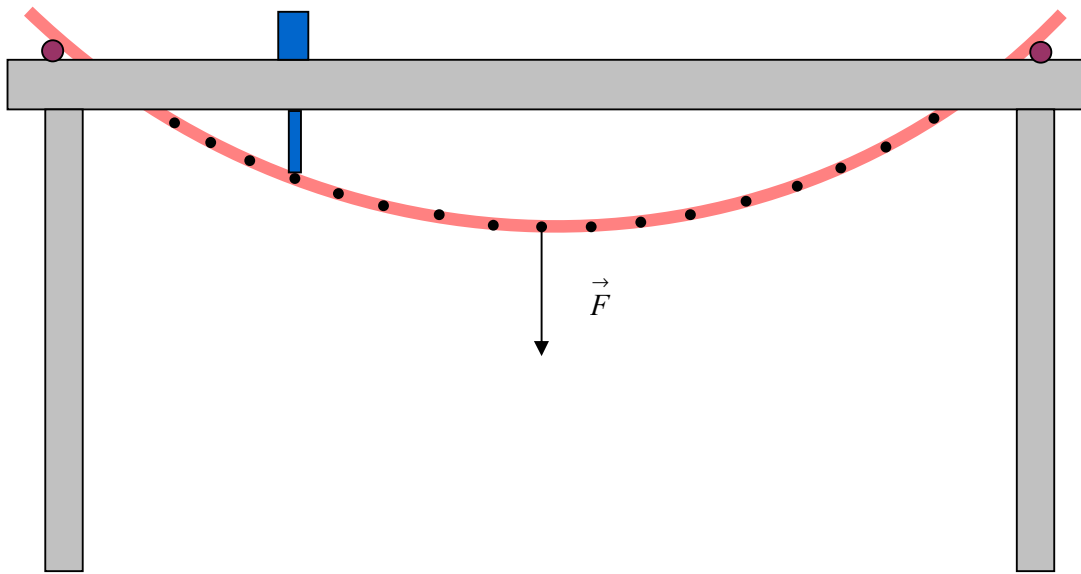


Figure 5-2 : Dispositif expérimental de mesure des déplacements d'une perche pour un essai de flexion entre deux appuis

Le dispositif expérimental a permis de réaliser deux types d'essais :

- Essai de flexion par tronçons afin d'estimer l'évolution des rigidités de flexion le long de la perche ;
- Essai de flexion global afin de mesurer les déplacements nodaux de la structure sous son propre poids et sous l'effet d'une charge placée sur le nœud central.



Une estimation de l'évolution des rigidités de flexion  $\{EI\}$  le long de la perche est nécessaire pour initier l'algorithme de recalage. Pour cette raison, des essais de flexion par tronçons ont été réalisés sur des morceaux de perche de 1,268 mètres. Des calculs analytiques préliminaires (équation 5-1) ont permis de déterminer une charge à appliquer de 400 N afin d'obtenir des déplacements conséquents au centre de la structure (de l'ordre du centimètre). La perche a été alors partagée en 8 tronçons possédant des parties communes (figure 5-3).

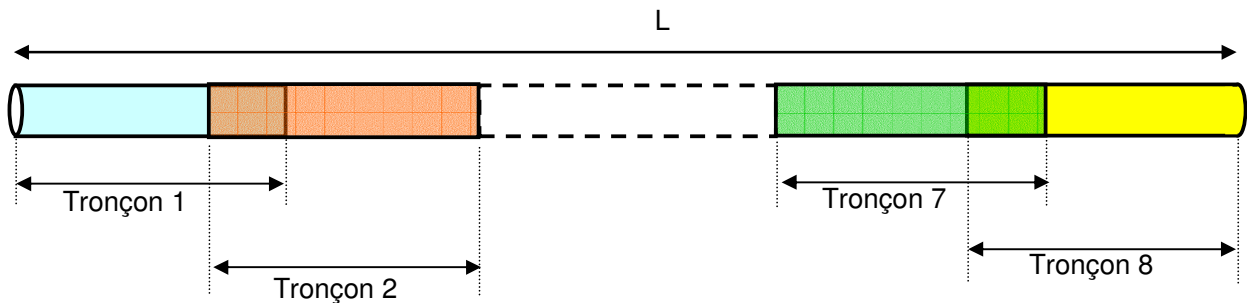


Figure 5-3 : Partition de la perche pour les essais par tronçons

En outre, l'action mécanique d'un câble sur la partie non sollicitée permet de compenser le moment généré au niveau des appuis. On remarque cependant que la prise en compte de ce moment influence peu les résultats obtenus sur les déplacements (un calcul éléments finis indique que dans le pire des cas les déplacements du nœud central diffèrent de 10 % entre le modèle avec moment à l'appui et celui sans).

Enfin, un calcul analytique simple pour une poutre homogène en flexion entre deux appuis et chargement central permet de déterminer la rigidité de flexion supposée constante du tronçon considéré :

$$v = -\frac{Fl^3}{48 EI} \quad (5-1)$$

où  $F$  est la force appliquée,  $v$  la flèche au centre, et  $l$  la distance entre les appuis.

La figure 5-4 présente les résultats obtenus pour une perche SPIRIT, une interpolation polynomiale de la courbe expérimentale a ensuite permis de faire une approximation des rigidités de flexion initiales  $\{EI\}_0$  de chaque élément du modèle éléments finis.

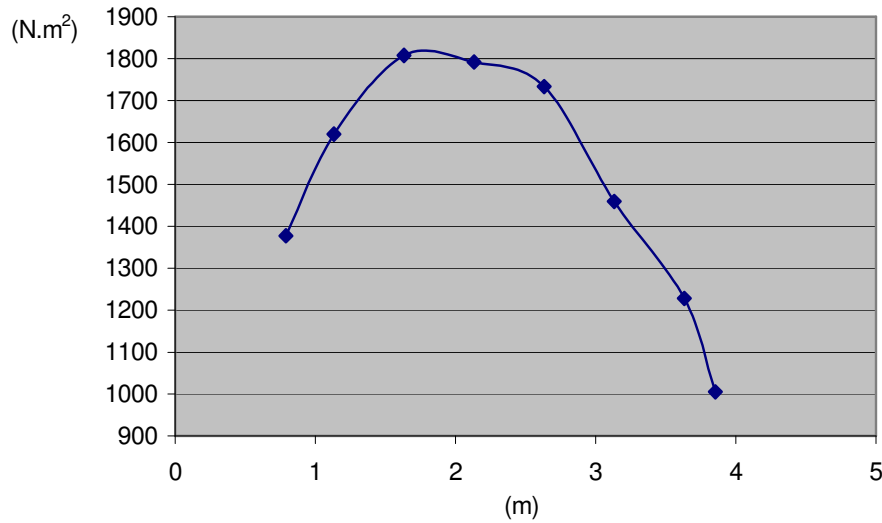


Figure 5-4 : Estimation de l'évolution des  $\{EI\}_0$  le long de la perche

On constate que la perche est sensiblement renforcée en son centre. De plus, l'ordre de grandeur des rigidités de flexion correspond à celui rencontré dans la littérature scientifique, à savoir 2000 Nm². On peut alors estimer que l'évaluation expérimentale des rigidités de flexion est tout à fait acceptable.

#### 5.2.2.2 Domaine d'erreur des mesures expérimentales

L'emploi d'une jauge de profondeur pour la mesure des déplacements nodaux de la perche peut être satisfaisant dans un premier temps. En effet, la précision de mesure d'une jauge de profondeur est théoriquement de  $2/100^{\text{ème}}$  de mm. Cependant lors de la mesure, l'expérimentateur fait fléchir plus ou moins la structure au moment du contact de la jauge sur la perche, il en résulte une dispersion dans les mesures beaucoup plus importante.

Une précision supérieure aurait pu être obtenue en utilisant des comparateurs qui se montrent plus précis au moment du contact avec la structure car la force de contact entre la structure et l'extrémité du comparateur reste identique et n'est donc pas soumise aux «sensations» de l'expérimentateur.

Néanmoins, des mesures répétitives dans les mêmes conditions de chargement ont montré des écarts plus importants mais toujours inférieurs à 0.6 mm. En outre, les déplacements nodaux de la structure étant compris entre 9 mm et 55 mm, la précision de la mesure est satisfaisante.

### 5.2.3 Méthode numérique de recalage

Les méthodes de recalage font appel d'une part à la méthode des éléments finis pour déterminer les déplacements numériques de la structure soumise à des conditions limites (appuis) et à un chargement, mais aussi à des méthodes mathématiques d'optimisation pour déterminer les rigidités de flexion locales qui feront correspondre les déplacements numériques à ceux expérimentaux.

#### 5.2.3.1 Méthode des éléments finis

L'objectif de ce paragraphe n'est pas de réécrire la méthode des éléments finis, mais de mettre en place les équations matricielles de notre problème de poutre en flexion.

### Modèle et hypothèses

Le problème à résoudre numériquement est celui d'une poutre droite chargée en son centre par une masse et dont les extrémités reposent sur des appuis ponctuels. Les chargements seront effectués afin de rester dans les hypothèses des petits déplacements et de pouvoir appliquer les lois de l'élasticité linéaire. Ainsi, en raison de la longueur de la structure, une force de 40 N a été appliquée. De plus, pour prendre en compte les déformations engendrées par le poids propre de la structure, on supposera que les déplacements nodaux dus à la masse  $m$  peuvent s'écrire comme la différence entre les déplacements globaux sous l'action de la masse moins les déplacements résultant du poids propre de la structure.

On considérera donc les déplacements expérimentaux  $v_{exp}$  à recalculer comme étant la différence de ceux mesurés sous la force  $F=mg$  et ceux mesurés sans cette force (on aura choisi auparavant le plan défini par les deux guides comme plan d'origine) :

$$v_{exp} = v_{exp}^F - v_{exp}^0 \quad (5-2)$$

Cette hypothèse permet alors de ne plus tenir compte du poids propre des poutres élémentaires dans le modèle éléments finis.

La perche de longueur  $L$  est alors modélisée par  $n$  poutres élémentaires de rigidité de flexion  $\{EI\}_i$ , de longueur  $l = L/n$ . Par souci de commodité, on choisira un nombre d'éléments pairs afin de pouvoir appliquer la charge  $F$  au centre de la structure.

### Principe des travaux virtuels en statique

L'énoncé du principe des travaux virtuels est le suivant :

« Le travail virtuel extérieur  $\bar{W}_{ext}$  est égal au travail virtuel intérieur  $\bar{W}_{int}$  pour tout champ de déplacements  $u(x)$  et de déformations  $\varepsilon(x)$  virtuels cinématiquement admissibles (c'est à dire  $u(x)$  satisfait aux conditions aux limites géométriques et  $\varepsilon(x)$  est compatible avec  $u(x)$ ) », soit :

$$\bar{W}_{ext} = \bar{W}_{int} \quad (5-3)$$

avec :

$$\bar{W}_{ext} = \sum_{e=1}^n \bar{W}_{ext}^e = \sum_{e=1}^n \bar{q}^{e^t} K^e \bar{q}^e \quad (5-4)$$

$$\bar{W}_{int} = F^t \bar{q} \quad (5-5)$$

$\bar{q}^e = C^e q$  : vecteur des déplacements nodaux élémentaires

$q$  : vecteur des déplacements nodaux

$K^e$  : matrice de rigidité élémentaire

$C^e$  : matrice booléenne

On a donc : 
$$\sum_{e=1}^n \bar{q}^{e^t} K^e \bar{q}^e = F^t \bar{q} \quad (5-6)$$

Soit : 
$$\bar{q}^t \left( \sum_{i=1}^n C^{e^t} K^e C^e \right) \bar{q} = F^t \bar{q} \quad \forall \bar{q} \quad (5-7)$$

Avec  $K = \sum_{i=1}^n C^{e^t} K^e C^e$  matrice de rigidité (5-8)

La relation du principe des travaux virtuels s'écrit donc :  $Kq = F$

### Calcul de la matrice de rigidité élémentaire $K^e$

Pour calculer la matrice de rigidité élémentaire  $K^e$ , il faut définir le type de modèle utilisé pour la perche : modèle de BERNOULLI, avec efforts tranchant négligés.

Cette matrice est déterminée à partir du calcul de l'énergie potentielle d'un élément  $i$  :

$$U = \frac{1}{2} \int_{\tau} \varepsilon^t \sigma d\tau \quad (5-9)$$

On peut alors supposer que le champ de déplacements  $u$  est relié au vecteur des degrés de liberté  $q$  par la relation suivante (où  $N$  est la matrice des fonctions d'interpolation) :

$$u = N q \quad (5-10)$$

En dérivant, on obtient :

$$\varepsilon = B q \quad (5-11)$$

On peut ensuite relier les contraintes aux déformations en utilisant les lois de comportement de l'élasticité linéaire :

$$\sigma = H \varepsilon \quad (5-12)$$

Les coefficients de la matrice  $H$  (appelée matrice de HOOKE) dépendent du module de YOUNG  $E$  et du coefficient de POISSON  $\nu$ .

En utilisant les équations 5-12 et 5-11, 5-9 devient :

$$U = \frac{1}{2} \int_{\tau} (Bq)' HBq d\tau = \frac{1}{2} q^t \left( \int_{\tau} B' HB d\tau \right) q \quad (5-13)$$

$$\text{ou encore : } U = \frac{1}{2} q^t K^e q \quad (5-14)$$

Pour une poutre de BERNOULLI en flexion,  $K^e$  a pour expression :

$$K^e = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ & & 12 & -6l \\ \text{sym} & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (5-15)$$

### Assemblage des matrices élémentaires dans la matrice de rigidité K

La formule d'assemblage des  $K^e$  (équation 5-8) est formelle. Il serait tout à fait inefficace d'assembler numériquement  $K$  suivant cette relation. Les opérations matricielles  $C^{e'} K^e C^e$  ne nécessitent aucun calcul car elles correspondent à une redistribution des  $K^e$  dans  $K$ . Pour faire cette redistribution, on a simplement besoin de la correspondance (tableau 5-1) entre les numéros des déplacements nœuds de l'élément de référence (figure 5-5) et les numéros des déplacements nœuds de l'élément  $e$  de la structure (figure 5-6).



Figure 5-5 : Élément de référence



Figure 5-6 : Élément  $e$  de la structure

$$\begin{array}{l}
 1 \xrightarrow{t} m \\
 2 \longrightarrow m+1 \\
 3 \longrightarrow m+2 \\
 4 \longrightarrow m+3 \\
 k_{ij} \xrightarrow[\text{redispotion}]{K} K_{t(i)t(j)}
 \end{array}$$

Tableau 5-1 : Table de correspondance de l'élément

### Chargement et conditions limites

Une fois la matrice de raideur assemblée, il convient de déterminer le vecteur des forces généralisées  $[F]$ . Le modèle ne prenant pas en compte le poids propre des éléments, le vecteur force est constitué uniquement de la force centrale appliquée et des inconnus de liaisons  $T_i$  (forces au niveau des deux appuis). Le vecteur des forces peut alors s'écrire de la manière suivante :

$$[F] = \begin{bmatrix} -T_1 \\ 0 \\ \dots \\ -F \\ \dots \\ 0 \\ -T_n \end{bmatrix} \quad (5-16)$$

Il reste alors à résoudre le système matriciel suivant :

$$\left[ \begin{array}{c} K \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \varphi(1) \\ \dots \\ v((n+2)/2) \\ \dots \\ \varphi(n) \\ 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} -T_1 \\ 0 \\ \dots \\ -F \\ \dots \\ 0 \\ -T_n \end{array} \right] \quad (5-17)$$

Les inconnus du système d'équations linéaires ( $Kq = F$ ) sont les  $n-2$  degré de liberté du modèle et les inconnus de liaisons  $T_1$  et  $T_n$ . Dans notre étude, on cherche à déterminer uniquement les  $n-2$  degrés de liberté du modèle, on peut donc supprimer la première et la dernière ligne du système pour résoudre alors un système de  $n-2$  équations à  $n-2$  inconnus.

### Résolution de $Kq = F$

La résolution de  $Kq = F$  se fait numériquement en décomposant  $K$  en  $LU$  avec  $L$  matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et  $U$  matrice triangulaire supérieure. Le système s'écrit alors :

$$LUq = F \text{ soit } Ly = F \text{ avec } y = Uq \quad (5-18)$$

On résout successivement les systèmes (a) et (b).

$$(a) \quad Ly = F \rightarrow y$$

$$(b) \quad Uq = y \rightarrow q$$

Cette résolution nous permet de déterminer le vecteur des déplacements nodaux noté  $q_{num}$ , c'est à dire les déplacements et les rotations en chaque nœud du maillage.

Les essais expérimentaux de flexion entre deux appuis sur la perche ne nous donnent que les déplacements en chaque nœud. Le calcul des rotations peut être fait par différences finies mais les incertitudes entraînées par cette méthode seraient grandes. Pour comparer les résultats numériques et expérimentaux il est donc préférable de ne comparer que les déplacements.

Pour cela, on prend en compte uniquement les déplacements  $v(i)$  contenus dans le vecteur  $q_{num}$  soit :

$$q_{num} = \begin{pmatrix} v(1) \\ \varphi(1) \\ \vdots \\ v(n) \\ \varphi(n) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{devient}} v_{num} = \begin{pmatrix} v(1) \\ v(2) \\ \vdots \\ v(n-1) \\ v(n) \end{pmatrix} \quad (5-19)$$



Il en résulte un inconvénient majeur : le premier et le dernier élément ne sont pas recalés car les déplacements des nœuds correspondant sont imposés.

### 5.2.3.2 Algorithme d'optimisation

#### Principe de la méthode d'optimisation

L'algorithme utilisé dans l'étude numérique de la perche est effectué à partir d'une des méthodes du gradient. Ces méthodes consistent à progresser selon des directions opposées au gradient de la fonction objectif (fonction que l'on cherche à minimiser) au point courant. Le schéma général s'écrit :  $x^{k+1} = x^k - \tau^k \nabla f(x^k)$  où  $x^k$  est le paramètre recherché

Les méthodes de résolution diffèrent dans la manière de calculer le pas  $\tau^k$ . La méthode la plus utilisée est *la méthode de la plus grande pente* qui est une méthode itérative d'optimisation non linéaire sans contrainte. Le pas  $\tau^k$  est calculé par recherche linéaire pour minimiser la fonction objectif le long de  $z^k = -\nabla f(E^k)$ .

La procédure générale est la suivante :

- 1) Initialisation :  $x_0 = EI_0$ ,  $k=0$  ;
- 2) Calcul de la direction :  $z^k = -\nabla f(x^k)$  ;
- 3) Recherche linéaire : calcul de  $\tau^k$  tel que  $f(x^k + \tau^k z^k) = \min_{\tau > 0} [f(x^k + \tau z^k)]$  ;
- 4)  $x^{k+1} = x^k + \tau^k z^k$  ;
- 5) Test d'arrêt.

#### Calcul de la direction de recherche

Le vecteur  $z^k$  correspond au gradient de  $f(E^k)$  c'est à dire aux dérivées de  $f(E^k)$  par rapport aux  $\{EI_i\}_{1 \leq i \leq n-1}$ . La fonction  $f(E^k)$  correspond à la norme choisie pour  $(v_{exp} - v_{num})$ .

$$f(EI^k) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (v_{exp}(i) - v_{num}(i))^2 \quad (5-20)$$

ou encore :

$$f(EI^k) = \frac{1}{2} \{v_{\text{exp}} - v_{\text{num}}\}^T \{v_{\text{exp}} - v_{\text{num}}\} \quad (5-21)$$

Le gradient de cette fonction s'écrit :

$$\nabla f(EI^k) = \frac{\partial f(EI^k)}{\partial EI_i} = -\{v_{\text{exp}} - v_{\text{num}}\}^T \frac{\partial v_{\text{num}}}{\partial EI_i} = -z^k \quad (5-22)$$

Pour déterminer  $z^k$ , il faut tout d'abord calculer le vecteur  $\frac{\partial v_{\text{num}}}{\partial EI_i}$ . Pour cela, on part de la relation ( $Kq = F$ ) que l'on dérive par rapport à  $\{EI_i\}$  :

$$\text{d'où : } \frac{\partial}{\partial EI_i} (Kq_{\text{num}}) = \frac{\partial}{\partial EI_i} (F) = 0 \quad (5-23)$$

$$\text{soit : } K \frac{\partial q_{\text{num}}}{\partial EI_i} = -\frac{\partial K}{\partial EI_i} q_{\text{num}} \quad (5-24)$$

La résolution de l'équation 5-24 est la même que celle utilisée pour  $Kq = F$ , et permet donc de déterminer  $\frac{\partial q_{\text{num}}}{\partial EI_i}$ .

Une fois  $\frac{\partial q_{\text{num}}}{\partial EI_i}$  calculée, on en déduit  $\frac{\partial v_{\text{num}}}{\partial EI_i}$  en ne prenant en compte que les dérivées des déplacements par rapport à  $\{EI_i\}$ . On peut alors calculer  $z^k$  à partir des équations 5-22 et 5-24.

### Recherche linéaire : interpolation quadratique

Le but de la recherche linéaire est de définir  $\tau^k$  tel que :

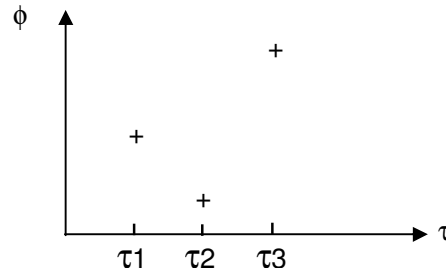
$$f(EI^k + \tau^k z^k) = \min_{\tau > 0} \left\{ f(EI^k + \tau z^k) \right\} \quad (5-25)$$

avec  $\tau$  : scalaire définissant le pas de progression à effectuer suivant la direction  $z^k$ .

Les algorithmes de recherche linéaire sont assez nombreux. Notre choix s'est posé sur l'interpolation quadratique qui est un bon compromis entre la difficulté de résolution de l'algorithme et la précision des résultats.

Cet algorithme fonctionne à partir de trois valeurs vérifiant :

$$\begin{aligned} \tau_1 < \tau_2 < \tau_3 \quad & \Phi(\tau_2) \leq \Phi(\tau_1) \\ & \Phi(\tau_2) \leq \Phi(\tau_3) \end{aligned} \quad \text{avec } \Phi(\tau) = f(E^k + \tau z^k) \quad (5-26)$$

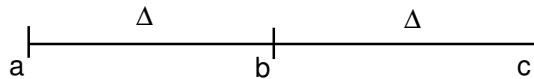


L'algorithme d'interpolation se fait en deux étapes :

- La première étape consiste à déterminer  $\tau^1, \tau^2, \tau^3$  vérifiant 5-26. C'est l'initialisation du processus ;
- La deuxième étape consiste à définir le scalaire  $\tau$  vérifiant la relation 5-25. C'est l'algorithme principal.

#### *Initialisation du processus*

On cherche 3 valeurs équidistantes  $a, b, c$  telles que  $g(b) \leq g(a)$  et  $g(b) \leq g(c)$ .



Pour cela, on utilise la procédure suivante :

On se donne  $\tau^0$  et un pas  $h_i$ . On calcule  $\Phi(\tau^0)$  et  $\Phi(\tau^1) = \Phi(\tau^0 + h_i)$ .

Deux cas de figure sont alors possibles.

- **Premier cas :**  $\Phi(\tau^0 + hi) \leq \Phi(\tau^0)$

On calcule alors successivement :

$\Phi(\tau^2), \Phi(\tau^3), \dots, \Phi(\tau^p)$  pour  $\tau^2 = \tau^1 + 2hi$ ,  $\tau^3 = \tau^2 + 4hi, \dots, \tau^p = \tau^{p-1} + 2^{p-1}hi$  tant que la fonction décroît. On s'arrête dès que la fonction croît à nouveau (itération p).

On a donc :  $\Phi(\tau^0) \geq \Phi(\tau^2) \geq \dots \geq \Phi(\tau^{p-1}) < \Phi(\tau^p)$

On construit  $\tau^{p+1}$  au milieu de  $[\tau^{p-1}, \tau^p]$  soit  $\tau^{p+1} = \tau^p - 2^{p-2}hi$ .

On a alors quatre points équidistants  $\tau^{p-2}, \tau^{p-1}, \tau^{p+1}, \tau^p$ .

Suivant la valeur de  $\Phi(\tau^{p+1})$ , on élimine un des points.

Si  $\Phi(\tau^{p+1}) > \Phi(\tau^{p-1})$  on élimine  $\tau^p$

Si  $\Phi(\tau^{p+1}) < \Phi(\tau^{p-1})$  on élimine  $\tau^{p-2}$

On obtient trois points vérifiant 5-23.

- **Deuxième cas :**  $\Phi(\tau^0 + hi) > \Phi(\tau^0)$

Dans ce cas, on remplace  $\tau^0$  par  $\tau^0 + hi$  (nouveau point de départ) et  $h_i$  par  $-h_i$ . On se retrouve alors dans le cas précédent.

#### Algorithme principal

Soient  $\tau^1, \tau^2, \tau^3$  trois valeurs de  $\tau$  définies lors de l'étape d'initialisation. On fait une approximation de la fonction  $\Phi(\tau)$  sur  $[\tau^1, \tau^3]$  par une fonction quadratique ayant les mêmes valeurs que  $\Phi$  en  $\tau^1, \tau^2, \tau^3$ .

Son équation est :

$$q(t) = \sum_{i=1}^3 \Phi(\tau_i) \frac{\prod_{j \neq i} (\tau - \tau_j)}{\prod_{j \neq i} (\tau_i - \tau_j)} \quad (5-27)$$

et si  $\Phi(\tau_2) < \Phi(\tau_1)$  et  $\Phi(\tau_2) < \Phi(\tau_3)$  alors le minimum de  $q(\tau)$  est atteint en

$$\tau^4 = \frac{1}{2} \frac{r_{23}\Phi(\tau^1) + r_{31}\Phi(\tau^2) + r_{12}\Phi(\tau^3)}{s_{23}\Phi(\tau^1) + s_{31}\Phi(\tau^2) + s_{12}\Phi(\tau^3)} \quad (5-28)$$

où  $r_{ij} = \tau_i^2 - \tau_j^2$  et  $s_{ij} = \tau_i - \tau_j$  avec  $\tau^4 \in [\tau^1, \tau^2]$

Le point  $\tau^4$  est pris comme une approximation du minimum de  $\Phi(\tau)$  sur  $[\tau^1, \tau^3]$ . Suivant la position du point  $(\tau^4, \Phi(\tau^4))$  par rapport aux trois autres, un nouveau triplet contenant  $\tau^4$  est constitué.

La construction est recommencée tant que l'intervalle  $[\tau^1, \tau^3]$  est trop grand, c'est à dire tant que :

$$(\tau^3 - \tau^1) > \varepsilon \quad \text{avec } \varepsilon \text{ petit} \quad (5-29)$$

Dès que la relation 5-29 n'est plus vérifiée la construction s'arrête. Le dernier  $\tau^4$  trouvé est le  $\tau^k$  vérifiant 5-25. On peut alors déterminer le nouveau vecteur  $El : El^{k+1} = El^k + \tau^k z^k$

Afin de savoir si ce nouveau  $El$  correspond au  $El$  de la perche il faut effectuer un test d'arrêt.

### Test d'arrêt de l'algorithme

Le test d'arrêt sert à se rapprocher le plus près possible de la solution exacte. Pour cela, il faut comparer les flèches expérimentales et les flèches déterminées numériquement. Les erreurs entraînées par les mesures et par la résolution numérique de  $Kq = F$  ne nous autorisent pas à prendre un test d'arrêt très fin. En effet, l'écart le plus proche que l'on puisse avoir entre  $v_{num}$  et  $v_{exp}$  en chaque nœud est de l'ordre de  $10^{-3}$ , soit :

$$f(EI^k) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (v_{exp}(i) - v_{num}(i))^2 < \frac{n}{2} 10^{-6} \quad (5-30)$$

Les caractéristiques réelles de la perche en statique  $\{El\}$  sont atteintes dès que 5-30 est vérifiée. La schéma 5-1 présente la méthode utilisée pour le recalage statique.

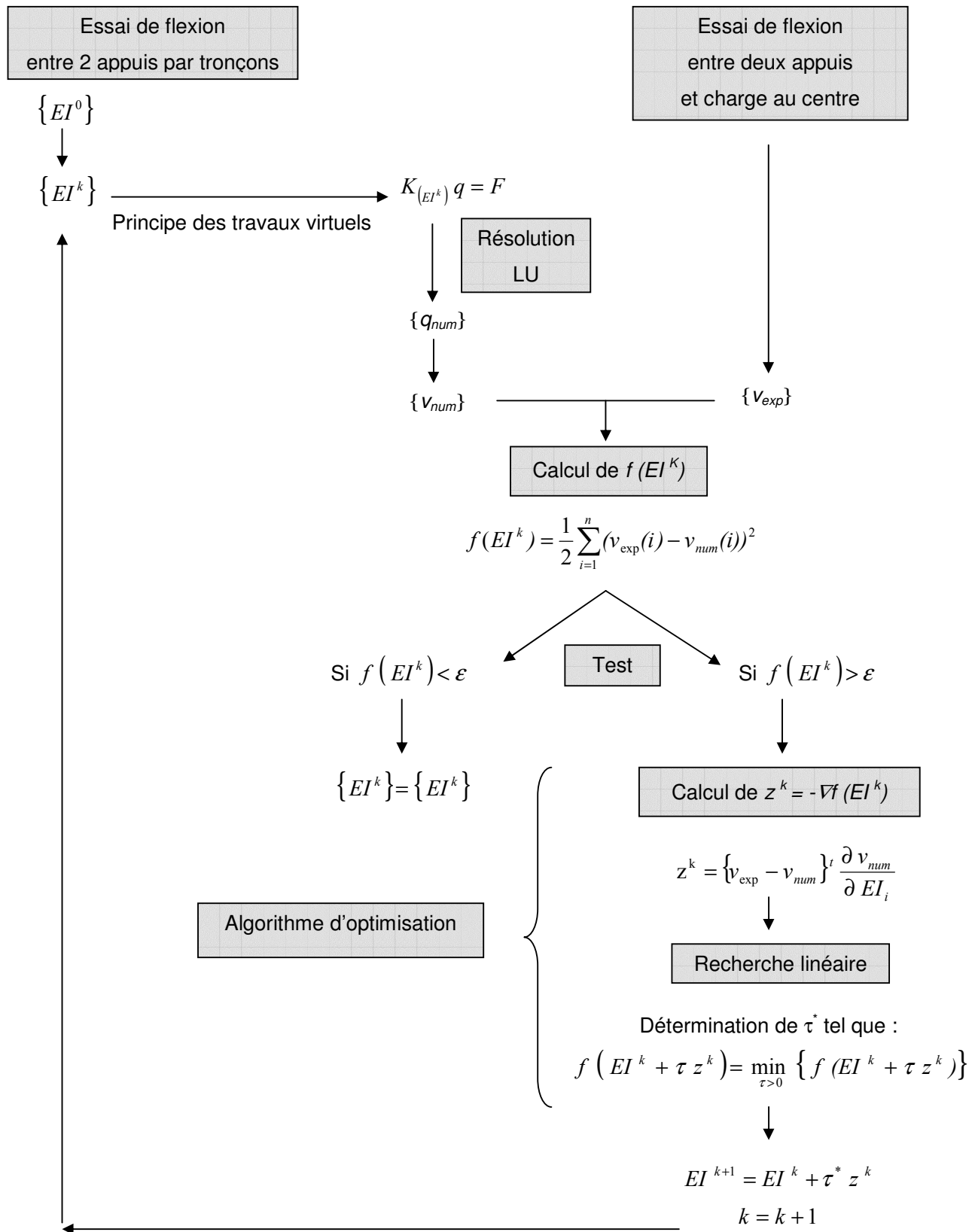


Schéma 5-1 : Algorithme de recalage statique

### 5.2.4 Validation et sensibilité de la méthode

L'ambition de ce paragraphe est de valider la méthode de recalage sur une poutre homogène puis de rendre compte de la sensibilité de l'algorithme numérique. En outre, le nombre d'éléments du modèle, le vecteur  $\{EI\}_0$  initial des rigidités de flexion et les mesures expérimentales des déplacements nodaux influencent les résultats du recalage. Une étude de sensibilité de ces différents paramètres sera alors réalisée dans ce paragraphe à partir des résultats du recalage effectué sur une perche récente (SPIRIT) et une perche plus ancienne (CATAPOLE).

#### 5.2.4.1 Validation de la méthode sur une poutre homogène

Afin de valider le programme de recalage, un test a été effectué sur une poutre homogène de rigidité de flexion constante :  $1500 \text{ Nm}^2$ . En outre, les résultats expérimentaux ont été remplacés par les déplacements nodaux calculés numériquement pour le même problème de flexion entre deux appuis. Ainsi, le vecteur des déplacements expérimentaux est ici représenté par le vecteur constitué des résultats obtenus par éléments finis. On validera donc uniquement dans ces conditions l'algorithme d'optimisation.

Un modèle de poutre comprenant 20 éléments a été utilisé pour tester l'algorithme de recalage. La rigidité de flexion initiale a été choisie à  $1000 \text{ Nm}^2$ , en outre une étude sur l'influence du vecteur de rigidité de flexion initial sera réalisée dans la suite du paragraphe. La figure 5-7 présente les résultats obtenus pour le recalage. On observe une convergence tout à fait satisfaisante du modèle mis à part pour les trois premiers et trois derniers éléments. Cette insuffisance peut s'expliquer par les effets de bords inhérents à toute méthode numérique ainsi que par le fait que le premier et le dernier élément ne sont pas recalés lorsque l'on s'intéresse uniquement aux déplacements nodaux. En outre, pour un essai réel, ces effets peuvent être accentués par le fait que les incertitudes de mesure sont les plus importantes à proximité des appuis où les déplacements sont plus faibles.

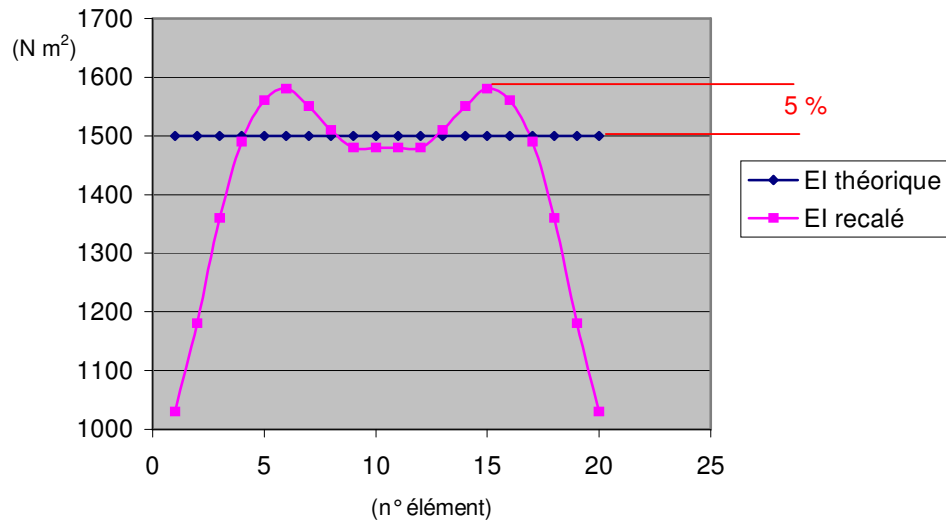


Figure 5-7 : Validation de la méthode de recalage statique.

Le test de validation sur une poutre homogène s'est montré concluant, bien que des limites aient été observées sur les bords du modèle. On peut alors définir un domaine de validité de la méthode compris entre les nœuds 4 et 17. Néanmoins, il reste nécessaire de quantifier l'influence des paramètres d'entrée sur les résultats du recalage.

#### 5.2.4.2 Etude de sensibilité de la méthode de recalage

Il semble important de tester la sensibilité de la méthode de recalage statique. En effet une méthode de recalage n'est pas pertinente si elle se montre trop sensible aux différents paramètres d'entrée :

- Nombre d'éléments du modèle numérique ;
- Vecteur des rigidités de flexion initial  $\{EI\}_0$  ;
- Valeur des déplacements expérimentaux ;
- Valeur du test d'arrêt  $\varepsilon$ .

Tous ces paramètres influencent les résultats obtenus sur le recalage, il est donc indispensable de faire pour chacun une étude de sensibilité.



### Nombre d'éléments du modèle

Le test de sensibilité concernant le nombre d'éléments du modèle a été réalisé sur la perche SPIRIT. Quatre modèles différents ont ainsi permis de recalibrer les caractéristiques statiques de la perche, comprenant respectivement : 6, 8, 10 et 20 éléments. L'observation des résultats, figure 5-8, permet de constater une stabilisation des résultats à partir du modèle possédant 10 éléments. En effet, une dispersion trop importante apparaît sur les modèles plus simples.

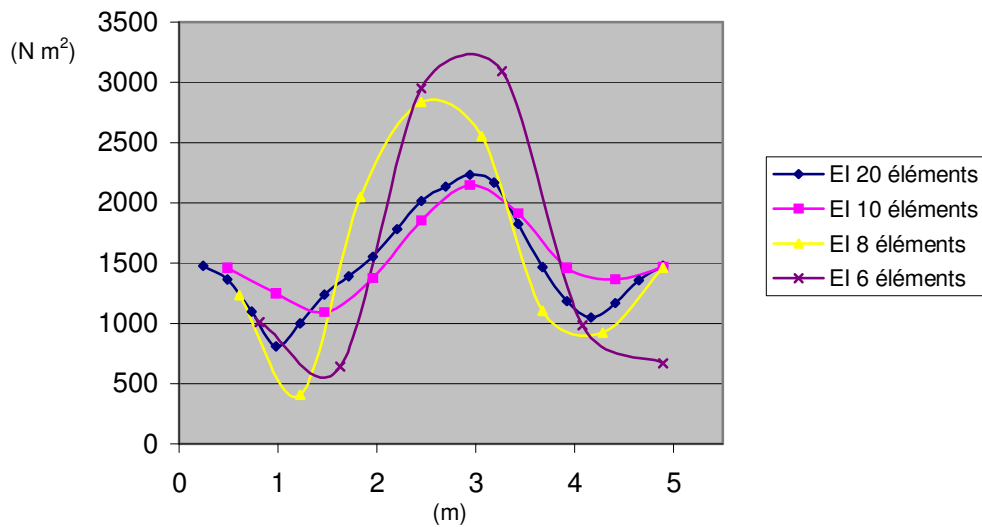


Figure 5-8 : Sensibilité du recalage par rapport au nombre d'éléments du modèle

On peut alors estimer qu'un modèle comprenant 20 éléments est satisfaisant pour obtenir un recalage précis et stable. Les deux perches ont donc été recalées statiquement à partir d'un modèle comprenant 20 éléments (SPIRIT) et 30 éléments (CATAPOLE).

### Vecteur des rigidités de flexion initial $\{EI\}_0$

Le vecteur  $\{EI\}_0$  est le paramètre primordial de la méthode de recalage. En effet, l'algorithme de d'optimisation ne possède pas une solution unique, il est alors essentiel de ne pas initialiser le processus avec une solution trop éloignée sinon on risque de ne pas converger vers la solution physique.

L'étude de sensibilité a été effectuée sur la perche SPIRIT modélisé avec 20 éléments, en choisissant 3 rigidités de flexion initiale constante,  $EI_0$ , différentes mais relativement proches de la rigidité de flexion moyenne de la perche ( $1500 \text{ Nm}^2$ ) :

- $EI_0^1 = 1000 \text{ Nm}^2$  ;
- $EI_0^2 = 1500 \text{ Nm}^2$  ;
- $EI_0^3 = 2000 \text{ Nm}^2$ .

Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 5-9 et mettent en avant une sensibilité peu élevée du recalage par rapport à la rigidité de flexion initiale.

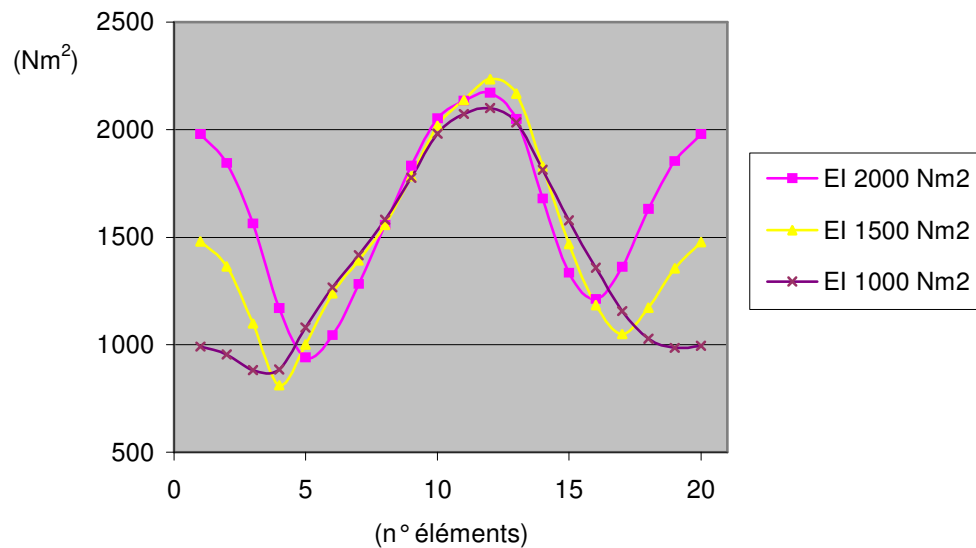


Figure 5-9 : Sensibilité du recalage par rapport à  $EI_0$

On constate sur la figure précédente que la rigidité de flexion initiale influence peu le recalage dans le domaine de validité de la méthode. En dehors, les dispersions sont grandes en raison des insuffisances déjà exposées. Une estimation de  $EI_0$  à partir de la valeur analytique de la rigidité de flexion en supposant la perche homogène (équation 5-1) permet de converger vers une solution cohérente. Cependant, une estimation plus précise par morceaux (figure 5-4) améliorera sensiblement le recalage, notamment pour des poutres non homogènes.

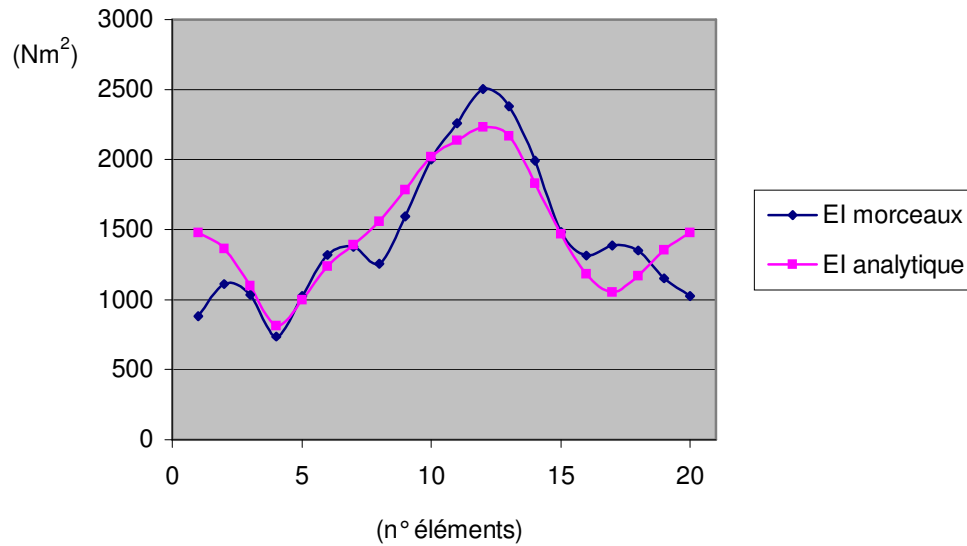


Figure 5-10 : Amélioration du recalage avec un  $EI_0$  mieux estimé

Les résultats du recalage sont sensiblement améliorés notamment sur les bords du modèle, car l'estimation initiale de l'évolution de la rigidité de flexion le long de la perche est plus précise.

### Déplacements expérimentaux

Il est indispensable de quantifier l'influence des incertitudes expérimentales sur les résultats du recalage. En effet, un algorithme produisant des variations importantes sur les  $\{EI\}$  recalés pour des déplacements expérimentaux distants du domaine de l'erreur de mesure ne serait pas satisfaisant. Afin de quantifier la sensibilité des mesures expérimentales sur le recalage, des perturbations ont été introduites sur des déplacements expérimentaux évalués sur la perche CATAPOLE, lors de l'essai de flexion. L'amplitude des perturbations est choisie dans le domaine de l'erreur de mesure : de l'ordre du millimètre. Ainsi, deux recalages ont été réalisés : l'un à partir des mesures réelles et l'autre à partir des mesures perturbées. La valeur du test d'arrêt  $\varepsilon$  ainsi que le vecteur initial des rigidités de flexion  $\{EI\}_0$  furent identiques pour les deux recalages entrepris.

La figure 5-11 présente les perturbations introduites sur les mesures expérimentales des déplacements nodaux.

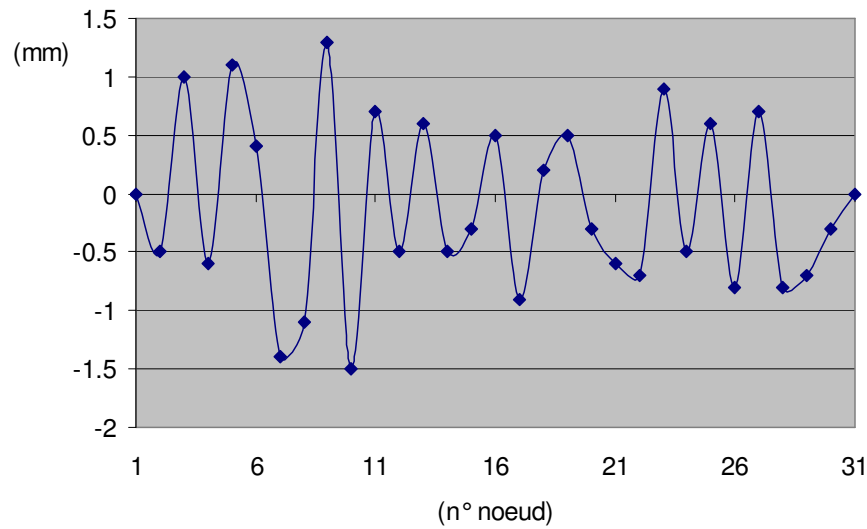


Figure 5-11 : Perturbations générées sur les mesures expérimentales

Ensuite, les écarts relatifs en % entre les déplacements expérimentaux et ceux perturbés ont été calculés (figure 5-12) de même que ceux entre les rigidités de flexion locales ainsi recalées (figure 5-13).

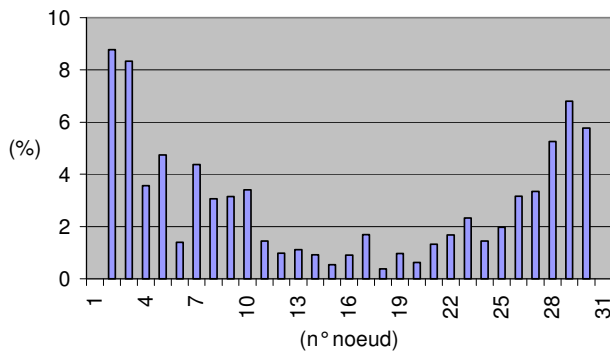
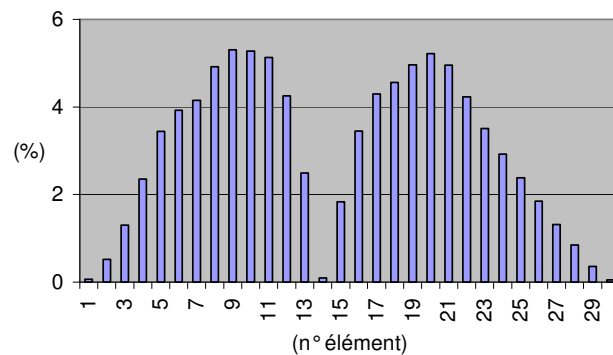


Figure 5-12 : Ecart relatif sur les déplacements

Figure 5-13 : Ecart relatif sur les rigidités de flexion



La comparaison des figures 5-12 et 5-13 met en avant la linéarité de l'algorithme de recalage par rapport aux mesures expérimentales. En effet, pour une différence relative sur les déplacements de l'ordre de 5 %, l'écart sur les rigidités de flexion sera sensiblement du même ordre de grandeur. Ceci permet d'affirmer que la sensibilité de la méthode de recalage statique par rapport aux mesures expérimentales est acceptable.

### Valeur du test d'arrêt

La valeur du test d'arrêt  $\varepsilon$  de l'algorithme d'optimisation peut aussi modifier les résultats du recalage. Le choix de cette valeur est dicté par la précision des mesures, on peut en effet essayer de faire converger le recalage avec une précision plus fine que celle réelle mais les incertitudes alors obtenues ne sauront pas forcément améliorées. Dans notre cas, la valeur de  $\varepsilon$  est de  $10^{-5}$  conformément à l'équation 5-30 qui détermine la valeur du test d'arrêt. Deux valeurs du test d'arrêt, respectivement  $10^{-5}$  et  $5.10^{-6}$ , ont été choisies lors de cette étude. La première valeur correspond à la valeur théorique, la seconde permet un recalage plus fin sur les déplacements nodaux. Les écarts en % obtenus entre les rigidités de flexion recalées sont présentés sur la figure 5-14.

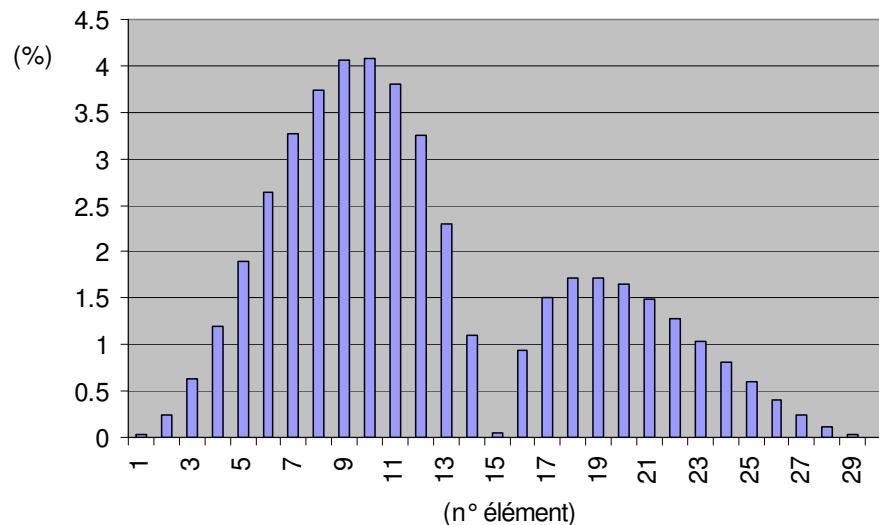


Figure 5-14 : Ecart entre les  $\{EI\}$  recalés pour deux valeurs du test d'arrêt

On observe une différence faible sur les résultats obtenus, ce qui minimise l'influence du test d'arrêt sur le recalage. Néanmoins, la valeur déterminée en considérant l'incertitude de mesure semble bien adaptée à notre problème. En outre, une valeur trop faible du test d'arrêt ne garantit pas la convergence de l'algorithme.

### 5.2.5 Résultats, conclusions et perspectives

Deux perches, dont les caractéristiques mécaniques sont différentes en raison de leur année de fabrication, ont été recalées en utilisant l'algorithme détaillé au paragraphe 5.2.3. La première perche est une perche en fibre de verre de marque CATAPOLE de longueur 4,5 mètres et relativement ancienne puisque datant du milieu des années 1980. La seconde est une perche de saut de conception récente de marque SPIRIT, en verre époxy et de longueur 5 mètres. Le choix de deux perches de générations différentes a, en outre, permis de constater l'évolution du mode de fabrication des perches de saut en matériaux composites.

#### 5.2.5.1 Résultats du recalage

Les résultats obtenus pour les deux perches apparaissent sur la figure 5-15 et rendent compte des différences de conception de ces deux perches.

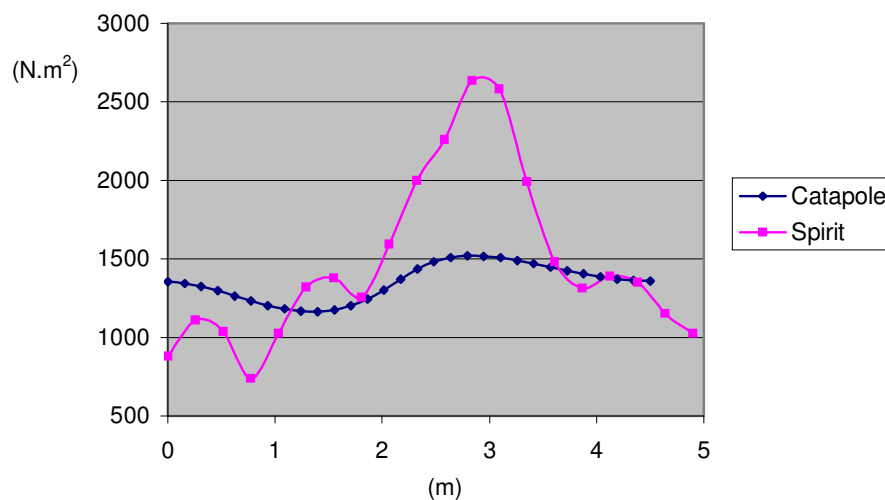


Figure 5-15 : Recalage statique des perches SPIRIT et CATAPOLE

On observe sur la figure précédente une évolution des rigidités de flexion tout à fait distincte entre les deux perches. En effet, la perche la plus ancienne (CATAPOLE) peut être assimilée à une poutre homogène : les rigidités de flexion locales évoluent peu le long de la structure, elles restent comprises entre 1150 et 1550 Nm<sup>2</sup>. En revanche, la conception de la perche SPIRIT essaie d'optimiser l'évolution des rigidités de flexion en renforçant la structure dans sa partie centrale où l'énergie de déformation maximale est emmagasinée.

Ces remarques permettent d'apprécier l'évolution des conceptions des perches de saut en matériaux composites au cours des années 1980 et 1990. En effet, dans un premier temps, les constructeurs n'ont utilisé que les caractéristiques intrinsèques du matériau (déformation importante supportée, amortissement faible, ...) en concevant des perches homogènes (CATAPOLE). Par la suite, une optimisation de la forme de la structure a été entreprise en renforçant la partie centrale ce qui a permis d'augmenter l'énergie de déformation stockée dans la première phase du saut. En outre, le point de flexion de la perche peut être déplacé le long de la structure en modifiant l'évolution des rigidités de flexion. La perche SPIRIT possède, par exemple, un point de flexion légèrement positionné vers son extrémité supérieure.

#### 5.2.5.2 Conclusions et perspectives

La méthode de recalage statique fournit des renseignements intéressants sur les perches étudiées : rigidité de flexion locale, évolution des processus de fabrication, quantification des différences entre plusieurs perches. De plus, l'algorithme d'optimisation se montre stable et relativement peu sensible aux paramètres d'entrée.

Cependant, il possède quelques insuffisances :

- Effets de bords importants sur les trois premiers et trois derniers éléments ;
- Premier et dernier éléments non recalés ;
- Modèle ne prenant pas en compte les efforts tranchants.

Il semble donc important de pouvoir améliorer la méthode. Pour ce faire, il est nécessaire de pouvoir mesurer de manière précise les rotations des différents nœuds et de procéder alors au recalage des deux degrés de liberté du modèle (modification de la fonction objectif). Cette modification permettrait de recalculer le premier et le dernier élément de la structure. La principale difficulté réside dans la mesure expérimentale des rotations.

De même, la prise en compte des efforts tranchants (non négligeable pour les poutres creuses) nécessite de modifier la partie expérimentale et le modèle mécanique. Le changement engendré sur l'algorithme numérique repose uniquement sur la prise en compte des degrés de liberté dans la fonction objectif.

### 5.3 Recalage dynamique

*Après avoir déterminé les rigidités de flexion locales de la perche (recalage statique), il est nécessaire d'évaluer les masses par unité de longueur locales  $\{\rho S\}$ . La détermination du vecteur  $\{\rho S\}$  se fait numériquement par la méthode d'optimisation de la plus grande pente déjà utilisée en statique. Dans le cas de la dynamique, cette méthode consiste à comparer des pulsations propres calculées numériquement avec des pulsations déterminées à partir d'essais de vibration expérimentaux. Les essais de vibration des structures ont été réalisés à l'INSA de Toulouse sous la direction du Professeur P. SWIDER du Laboratoire de Biomécanique, INSERM. Le recalage dynamique a été effectué uniquement sur la perche SPIRIT en ne recalant que les fréquences propres (valeur propre) et non les modes propres de vibration (vecteur propre). En outre, les résultats obtenus sur les rigidités de flexion seront utilisés dans le recalage dynamique pour le calcul des matrices de raideur et de masse.*

#### 5.3.1 Essais expérimentaux

Afin de caractériser le comportement dynamique d'une perche de saut en verre époxy, des essais de vibrations de flexion ont été réalisés. Les conditions aux limites choisies pour ces essais furent de type libre – libre afin d'obtenir le comportement intrinsèque de la structure. En outre, la détermination locale des  $\{\rho S\}$  a été effectuée en comparant les fréquences propres de flexion des  $i$  premiers modes calculées numériquement par éléments finis et déterminées expérimentalement par analyse modale.

L'analyse modale expérimentale permet d'appréhender correctement le comportement dynamique d'une structure et donc d'aboutir à la caractérisation mécanique de cette dernière.



L'analyse modale expérimentale a deux objectifs principaux :

- Déterminer les fréquences et modes propres ;
- Mesurer les amortissements correspondants.

Le banc d'analyse expérimental est composé d'une structure métallique sur laquelle est suspendue la perche, d'un pot vibrant qui permet d'appliquer une sollicitation sinusoïdale à la perche du type  $F \sin(\omega t)$  (un capteur de force permet de mesurer l'excitation appliquée) et de deux accéléromètres placés en bout de perche dans deux plans orthogonaux qui recueillent les vibrations de la structure (figure 5-16). L'ensemble du dispositif est piloté par le logiciel CADA - X (LMS, Louven Measurement System) qui permet notamment la mesure des fréquences propres à partir d'une Fonction de Réponse en Fréquence (FRF) et les facteurs d'amortissement structuraux associés.

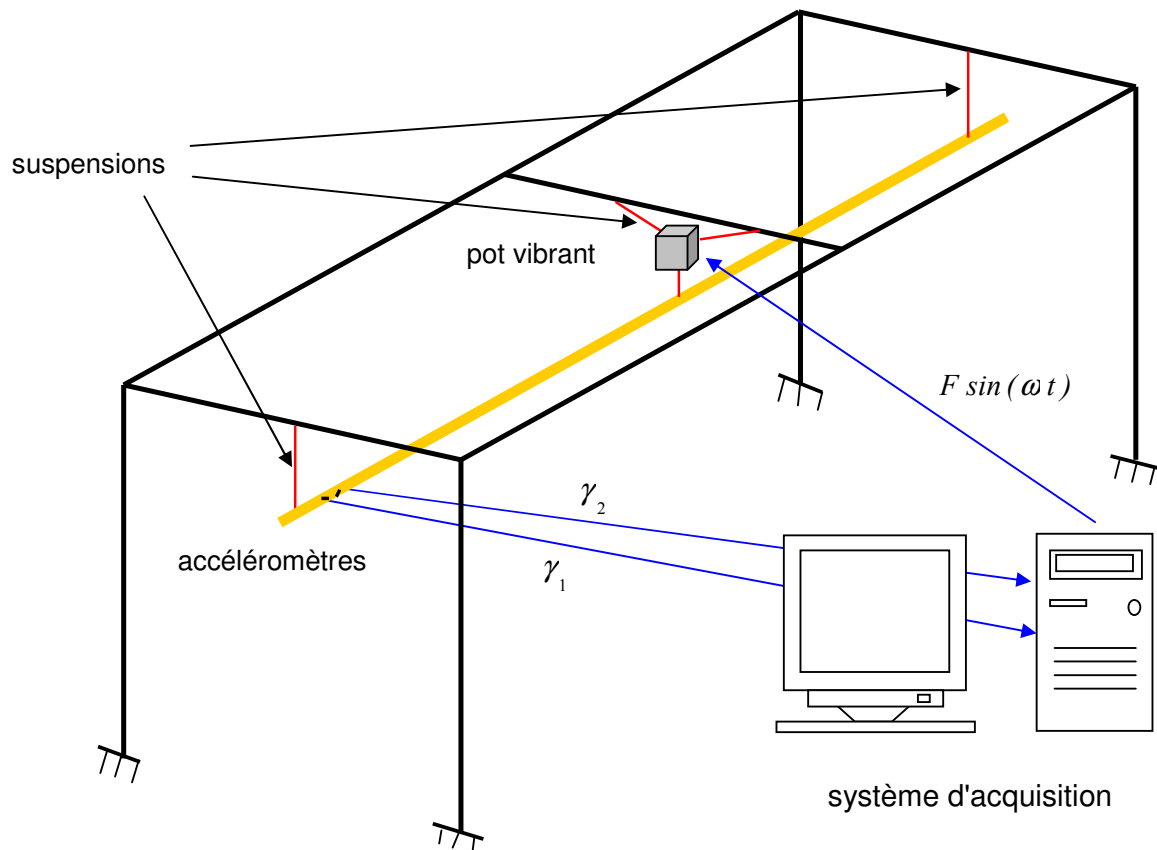


Figure 5-16 : Dispositif expérimental d'analyse modale

L'analyse modale de la perche a été effectuée en libre – libre : les deux extrémités de la perche ainsi que le pot vibrant ont été alors suspendues par des élastiques.

Le balayage sinus a été choisi pour déterminer les 5 premières fréquences propres de flexion. Un premier balayage sinus rapide dans la gamme de fréquences [0, 150 Hz] a permis d'apprécier le comportement général de la perche : nombre et position des fréquences propres de flexion, amortissement global (figure 5-17).

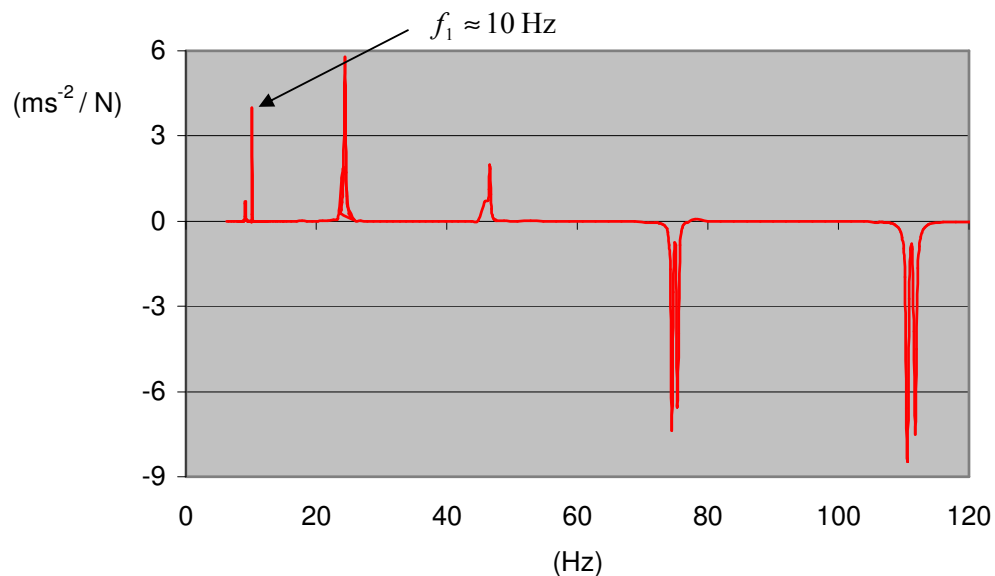


Figure 5-17 : Estimation des 5 premières fréquences propres de flexion

Ainsi, à l'aide de cette première mesure, nous avons pu constater que les modes étaient très bien découplés. Un second balayage fin autour de chaque fréquence de résonance a permis de déterminer très précisément (à 0.02 Hz près) la valeur des 5 premières fréquences propres dont les résultats sont présentés dans le tableau 5-2.

En outre, nous avons aussi calculé les amortissements pour chaque mode par la méthode du *Peak Picking* et du *Circle Fit*, ce qui a permis de conclure que la perche est une structure très peu amortie (elle restituera donc la quasi-totalité de l'énergie emmagasinée).

Mode de flexion	Fréquence propre (Hz)	Amortissement (%)
1	9.65	0.08
2	23.95	0.17
3	46.01	0.25
4	75.82	0.12
5	112.52	0.13

*Tableau 5-2 : Résultats de l'analyse modale*

Nous avons pu enfin visualiser les lignes nodales de la perche qui correspondaient bien évidemment à celles d'une poutre sollicitée en flexion.

Cette analyse modale est indispensable pour caractériser la structure : elle donne des renseignements sur les matrices de raideur, de masse et d'amortissement de la structure. De plus, la mesure expérimentale des fréquences propres est très précise.

### 5.3.2 Méthode numérique de recalage

La détermination des masses locales  $\{\rho S\}$  de la perche s'effectue avec une méthode de recalage identique à celle utilisée en statique. Les modifications apportées à l'algorithme en statique se font au niveau du principe des travaux virtuels et de la fonction objectif. Dans ce cas, on minimise l'écart entre les pulsations expérimentales  $\omega_{exp}$  et numériques  $\omega_{num}$ . De plus, le vecteur des rigidités de flexion  $\{EI\}$  déterminé lors du recalage statique sera utilisé pour le calcul des matrices de raideur et de masse.

#### 5.3.2.1 Principe des travaux virtuels en dynamique

En dynamique, le principe des travaux virtuel s'écrit :

$$\overline{W}_{int} + \overline{W}_a = \overline{W}_{ext} \quad (5-31)$$

La matrice de rigidité  $K$  est la même que celle calculée en statique. La matrice de masse  $M$  est déterminée à partir de la formule 5-32 :

$$M = \sum_{e=1}^{n-1} C^{et} M^e C^e \quad (5-32)$$

où  $C^e$  est une matrice booléenne et  $M^e$  la matrice de masse élémentaire.

Dans le cas d'une poutre à deux dimensions, la matrice de masse élémentaire a pour expression :

$$M^e = \frac{\rho SL}{420} \begin{pmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ & & 156 & -22L \\ sym & & & 4L^2 \end{pmatrix} \quad (5-33)$$

L'assemblage de la matrice de masse  $M$  se fait de manière identique à celle de la matrice de raideur  $K$  et est détaillé au paragraphe 5.2.3.1.

Lors d'un essai de vibration sur une poutre en libre – libre les efforts extérieurs sont nuls ( $F = 0$ ). On a donc :  $\bar{W}_{ext} = 0$ . Le système à résoudre s'écrit donc :

$$\ddot{\bar{q}}^t M \bar{q} + \bar{q}^t K \bar{q} = 0 \quad \forall \bar{q} \quad \text{soit} \quad \ddot{\bar{q}}^t M + \bar{q}^t K = 0 \quad (5-34)$$

$M$  et  $K$  étant des matrices symétriques, l'équation 5-34 devient :

$$M \ddot{\bar{q}} + K \bar{q} = 0 \quad (5-35)$$

Pour déterminer les pulsations numériques il faut résoudre le système différentiel 5-35. Les solutions de telles équations différentielles sont du type  $q = q_0 e^{i(\omega t + \varphi)}$ . Le système 5-35 conduit donc au problème 5-36

$$(K - \omega^2 M) q_0 e^{i(\omega t + \varphi)} = 0 \Leftrightarrow (K - \omega^2 M) q_0 = 0 \quad (5-36)$$

L'équation 5-36 peut aussi s'écrire :

$$Kq_0 - \omega^2 Mq_0 = 0 \quad (5-37)$$

$$\text{Soit } (K^{-1}M)q_0 = \frac{1}{\omega^2} q_0 \quad (5-38)$$

L'équation 5-38 correspond à un problème aux valeurs propres du type  $Ax = \lambda x$  et peut être résolu par la méthode de LANCZOS [Bar91] et permet d'atteindre les pulsations  $\{\omega_{num}\}$  numériques.

### 5.3.2.2 Méthode de recalage dynamique

Une fois les modes propres expérimentaux et numériques définis, il reste à reprendre l'algorithme utilisé en statique et à modifier la fonction objectif en remplaçant les  $EI$  par les  $\rho S$  (schéma 5-2).

Cependant pour initialiser l'algorithme, il convient d'évaluer le vecteur  $\{\rho S\}_0$  initial, que l'on choisira constant et égal à la valeur moyenne de la masse par unité de longueur  $\rho S_{moy}$ .

Pour calculer  $\rho S_{moy}$ , on utilise la formule analytique suivante :

$$\omega_k = \Omega_k \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad \text{soit} \quad \rho S = \frac{\Omega_k^4}{\omega_k^2} EI \quad (5-39)$$

$EI$  : valeur moyenne de la rigidité de flexion  $1500 \text{ Nm}^2$

$\omega_k = 2\pi f_k$  : pulsation propre,  $f_k$  : fréquence propre

$\Omega_k = \frac{(2k+1)\pi}{L}$  avec  $L$  : longueur de la perche

$k$  : numéro du mode propre choisi

$\rho S$  : masse moyenne de la perche

La résolution de 5-39 se fait avec la fréquence correspondant au premier mode propre ( $k=1$ ), soit  $f_1 = 10,15 \text{ Hz}$  (tableau 5-2). On obtient alors :  $\rho S_{moy} = 0,34 \text{ kg m}^{-1}$ .

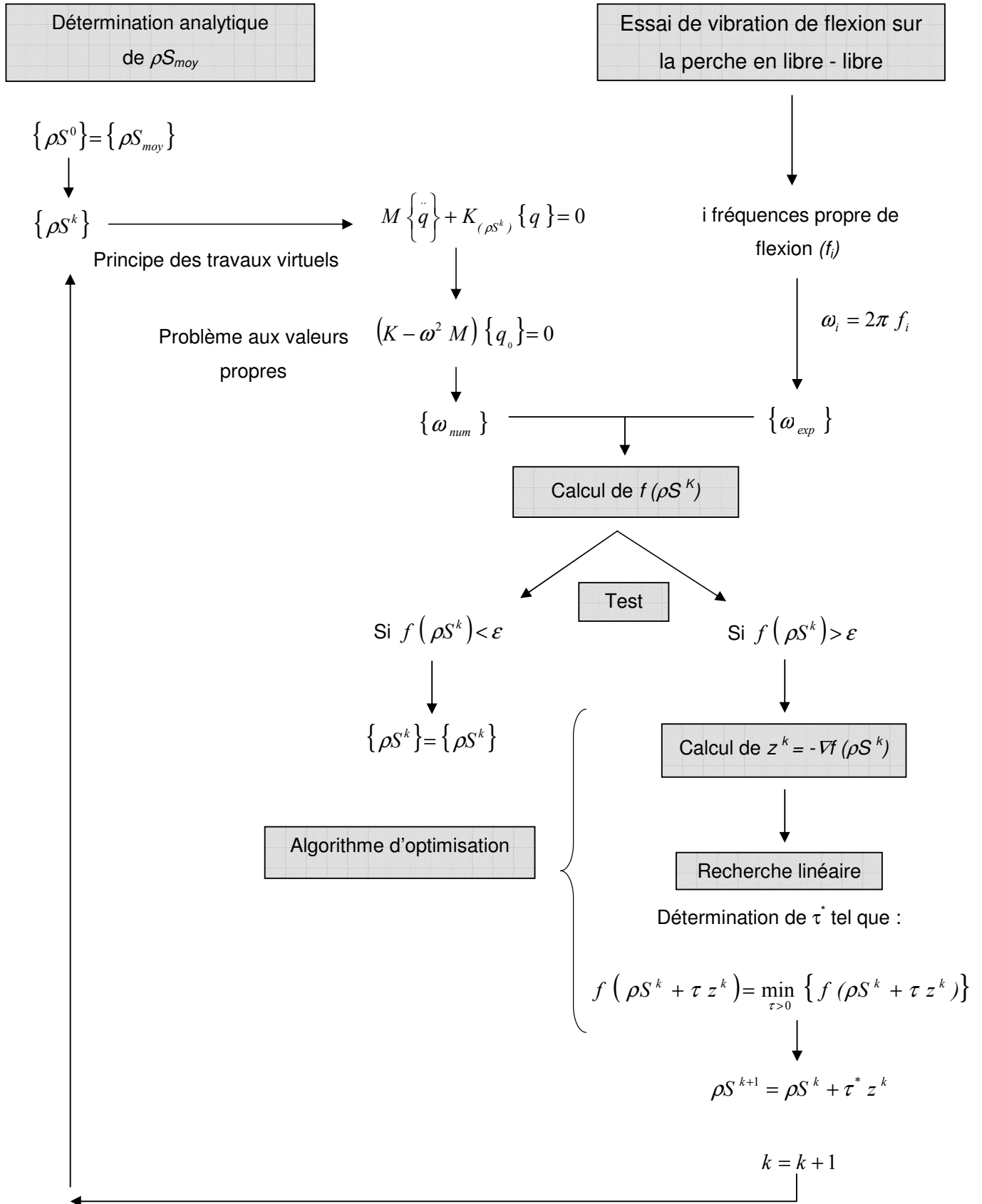


Schéma 5-2 : Algorithme de recalage dynamique

### 5.3.3 Validation de la méthode de recalage dynamique

Afin de valider l'algorithme de recalage dynamique, un test a été entrepris sur une poutre homogène possédant les caractéristiques suivantes : longueur  $l = 4,9$  m, rigidité de flexion  $EI = 2000$  N m<sup>2</sup> et masse par unité de longueur  $pS = 0,4$  kg m<sup>-1</sup>. L'équation 5-39 a permis d'obtenir (de manière analytique) les 5 premières fréquences de résonance des modes de flexion correspondants. Ces résultats ont représenté les mesures expérimentales dans l'algorithme de recalage. Des essais de recalage ont été effectués en choisissant un vecteur  $\{\rho S\}_0$  initial constant relativement proche du vecteur à recaler. En outre, le modèle éléments finis est constitué de 20 éléments poutres et le problème à résoudre est celui de vibration de flexion en libre – libre. La figure 5-18 présente les résultats obtenus pour un  $\rho S$  initial égale à 0,3 kg m<sup>-1</sup>. Des résultats équivalents ont aussi été obtenus pour une valeur de 0,5 kg m<sup>-1</sup>.

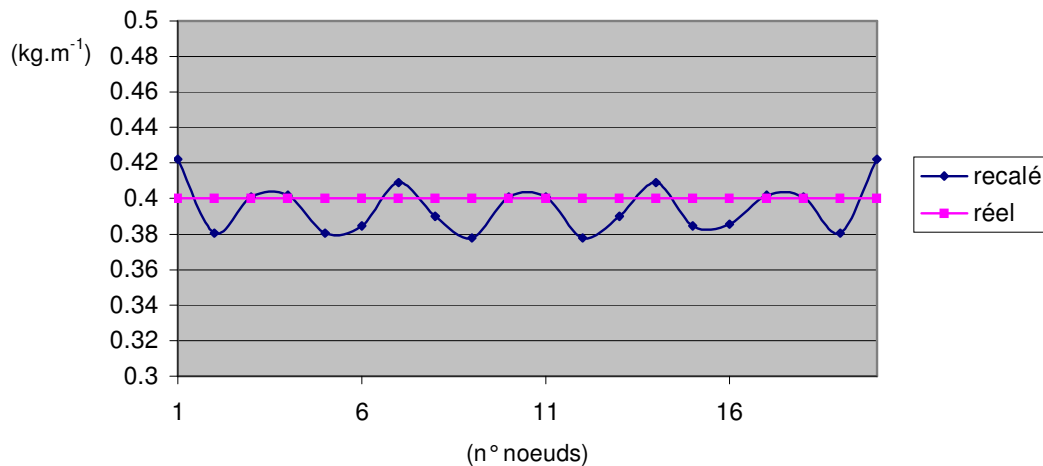


Figure 5-18 : Test du recalage dynamique sur une poutre homogène

Les résultats obtenus sont satisfaisants, les fréquences expérimentales étant recalées à moins de 1% alors que l'écart sur les masses par unité de longueur est toujours inférieur à 5%. Néanmoins, le choix d'un vecteur  $\{\rho S\}_0$  initial trop éloigné du vecteur recherché ne permet pas une convergence acceptable du recalage : le test d'arrêt  $\varepsilon$  de l'algorithme ne peut alors être choisi suffisamment fin. La méthode est donc trop sensible au vecteur initial. Un certain nombre de facteurs peut être mis en avant pour expliquer les insuffisances de la méthode de recalage dynamique.

### 5.3.4 Limites de la méthode en dynamique

La principale limite de la méthode de recalage dynamique est la trop grande sensibilité au vecteur  $\{\rho S\}_0$  initial, qui mal choisi peut entraîner la non-convergence de l'algorithme d'optimisation. En effet, seules les fréquences propres sont recalées, or leur nombre dans une plage de mesure correct [0, 200 Hz] est faible. La fonction objectif dépend donc de peu de paramètres, son gradient est alors un vecteur de dimensions relativement faibles. Ceci ne permet pas de restreindre le nombre de solutions du processus d'optimisation. Un plus grand nombre de paramètres dynamiques à recaler permettrait d'obtenir une moins grande sensibilité au vecteur initial en réduisant le nombre de solutions possibles.

En revanche, aucune étude de sensibilité sur la précision des mesures n'a été réalisée, car la mesure de fréquence propre de vibration est très précise par rapport à celle des déplacements effectuée pour le recalage statique. En effet, les méthodes expérimentales permettent d'atteindre des précisions sur les fréquences très élevées, on peut estimer l'incertitude de mesure à moins de 0,05 Hz.

### 5.3.5 Résultats, conclusions et perspectives

Pour effectuer le recalage dynamique de la perche SPIRIT, une évaluation plus précise du vecteur  $\{\rho S\}_0$  initial a dû être réalisée. En effet, celle effectuée avec une valeur moyenne comme estimation du vecteur initial n'a pas donné des résultats satisfaisants.

Pour ce faire, une détermination de la masse par unité de longueur pour le premier et dernier élément a été effectuée en mesurant le rayon extérieur et intérieur de la perche puis en choisissant une valeur moyenne pour la masse volumique d'un verre époxy à  $1900 \text{ kg m}^{-3}$ . De plus, en s'appuyant sur les résultats du recalage statique, on a pu estimer la valeur de  $\rho S$  pour le 12ème nœud du modèle éléments finis à approximativement  $0,6 \text{ kg m}^{-1}$ . Ensuite, une approximation polynomiale a permis de déterminer le vecteur  $\{\rho S\}_0$  initial. La figure 5-19 présente les résultats obtenus pour le recalage dynamique de la perche SPIRIT, ainsi que l'estimation du vecteur  $\{\rho S\}_0$  initial.



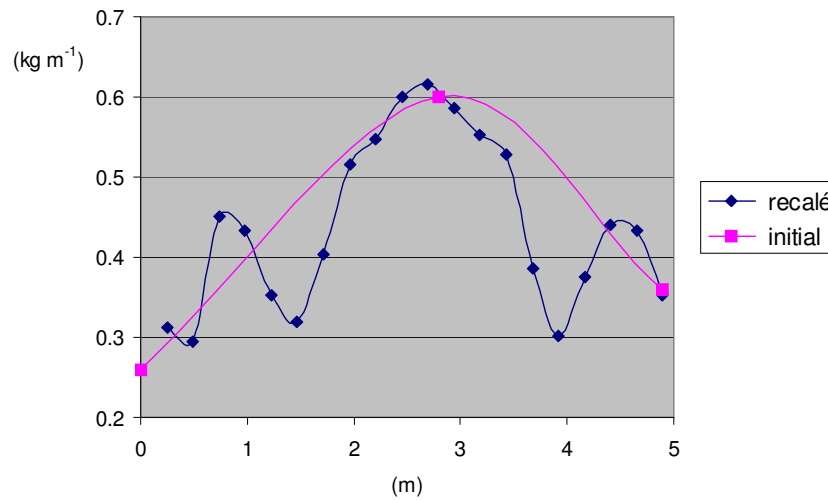


Figure 5-19 : Recalage dynamique de la perche SPIRIT

Les résultats du recalage dynamique confirment les informations recueillies avec le recalage statique, à savoir que la perche est renforcée en son centre et présente un profil symétrique. Dans le tableau 5-3, figurent les résultats sur les fréquences et sur la qualité du recalage dynamique.

Mode propre	Fréquence expérimentale (Hz)	Fréquence numérique (Hz)	Précision du recalage (%)
1	9.65	9.40	2.6
2	23.95	24.32	1.5
3	46.01	45.73	0.6
4	75.82	75.14	0.9
5	112.52	113.10	0.5

Tableau 5-3 : Précision du recalage dynamique de la perche SPIRIT

Le recalage dynamique s'avère relativement précis. Cependant le trop petit nombre de paramètres dynamiques à recaler entraîne une sensibilité importante au vecteur  $\{\rho S\}_0$  initial. Le recalage simultané des fréquences de résonance (valeur propre du problème) ainsi que des modes propres (vecteur propre) permettraient d'augmenter considérablement la taille du gradient de la fonction objectif. La méthode se montrerait alors beaucoup plus précise et moins sensible aux valeurs initiales de l'algorithme de recalage. Cette méthode nécessite néanmoins de reconstruire à partir des données expérimentales le vecteur normé des différents modes propres.

## 5.4 Analyse de la structure par essai de perte au feu

Afin de vérifier les résultats obtenus par la méthode de recalage, des essais de perte au feu ont été entrepris sur la perche SPIRIT. Leur objectif est de caractériser le matériau composite verre epoxy, à savoir la nature du tissu, le taux massique de résine, la masse surfacique du tissu, le type d'enrubannage et de proposer une méthode industrielle de fabrication. Néanmoins, cette étude ne fournira aucun renseignement sur la nature de la résine utilisée.

En outre, la destruction organisée de la structure a permis de caractériser géométriquement et localement la perche. Le paragraphe suivant présentera sommairement les procédés employés pour caractériser la structure et le matériau composite puis mettra en relation les résultats obtenus avec ceux déterminés par les méthodes de recalage.

### 5.4.1 Mesures effectuées

#### 5.4.1.1 Opérations préliminaires

Après avoir soigneusement mis en place le référentiel, la perche sera découpée en trois morceaux pour des raisons de commodité. D'après le profil des diamètres extérieurs les zones de découpe ont été choisies de la manière suivante :

- Une première découpe au point d'abscisse 150 ;
- Une deuxième découpe au point d'abscisse 300.

Chaque tronçon sera ensuite découpé en 2 parties dans le sens longitudinal (figure 5-20). Pour des raisons de repérage chaque tronçon sera nommé respectivement A, B, C, orienté dans le sens des abscisses croissantes, et chaque moitié de tronçon sera affectée d'un signe (+) ou d'un signe (-) : (+) pour la partie supérieure, (-) pour la partie inférieure.

On obtient donc le découpage suivant :

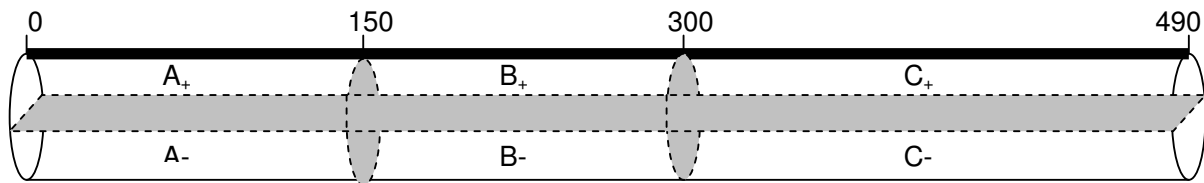


Figure 5-20 : Découpage de la perche

Après la découpe, on peut effectuer des observations sur l'intérieur de la perche. On découvre un enrubannage ayant les caractéristiques apparentes suivantes:

- Pas de 10 mm (bord à bord de l'enrubannage) ;
- Angle d'enrubannage de 6 à 7 degrés.

Ces observations étant faites sur l'intérieur de la perche, elles ne concernent que la première couche de tissu.

#### 5.4.1.2 Caractérisation géométrique de la perche

Dans le but de caractériser géométriquement la perche, les mesures suivantes ont été effectuées :

- Pesée de la perche :  $M = (2,18 \pm 0,01)$  kg ;
- Mesure de la longueur de la perche :  $L = (4,91 \pm 0,01)$  m ;
- Mise en place d'un référentiel dont l'origine sera prise à l'extrémité que tient le perchiste lors du saut.

#### Mesure de la masse volumique

Afin de mesurer la masse volumique du matériau composite, nous avons utilisé une balance utilisant le principe d'ARCHIMEDE :

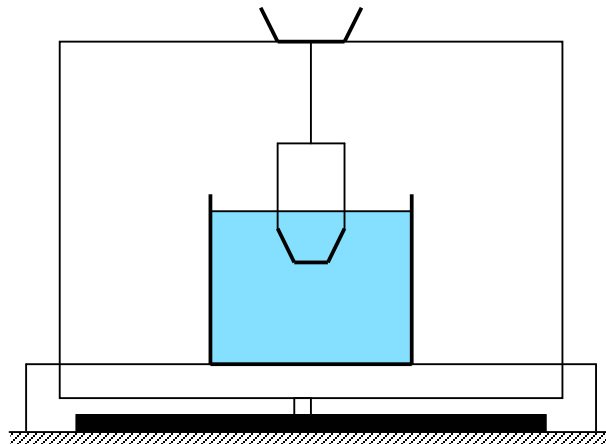


Figure 5-21 : Dispositif de mesure de la masse volumique

Dans un premier temps, la masse dans l'air  $M_a$  de l'échantillon a été mesurée. Après tarage, le même échantillon a été placé dans l'eau. On obtient alors la différence  $G$  entre sa masse dans l'air et sa masse dans le liquide (  $G = M_a - M_{liq}$  ). La masse volumique de l'échantillon dépend également de celle du liquide. Il est alors nécessaire de connaître la masse volumique du fluide pour une température donnée. Dans notre exemple, on a à 22°C :  $\rho_{liq} = 0,9978 \text{ g / cm}^3$

La masse volumique recherchée est alors donnée par :

$$\rho = \frac{M_a (\rho_{liq} \times 0,0012)}{0,9983 \times G} + 0,0012 \quad (5-40)$$

On a donc :  $\rho = 1,84 \text{ g / cm}^3$

Les mêmes mesures effectuées sur plusieurs échantillon on donné une masse volumique moyenne égale à  $\rho = 1\,850 \text{ kg / m}^3$ .

### Mesure des diamètres extérieurs

Le modèle mécanique utilisé pour la simulation du comportement dynamique de la perche (poutre de BERNOULLI 2D), nécessite la connaissance de l'évolution des diamètres extérieurs et intérieurs. Une section droite de la perche n'étant apparemment pas circulaire, on réalisera trois mesures de diamètre ( $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$ ) à chaque abscisse à l'aide d'un pied à coulisse numérique, selon le schéma suivant :

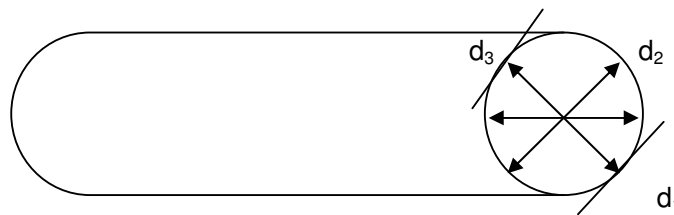


Figure 5-22 : Mesure des diamètres extérieurs

Les résultats de ces mesures donnent la répartition moyenne des diamètres extérieurs suivante :

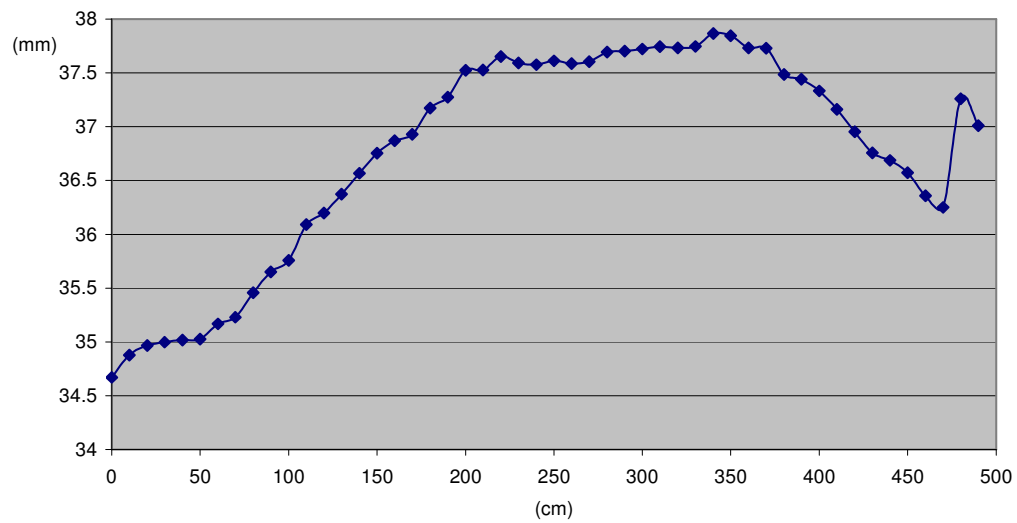


Figure 5-23 : Evolution des diamètres extérieurs

### Mesure des épaisseurs

Afin de déterminer les diamètres intérieurs de la perche, nous avons mesuré deux fois en chaque point l'épaisseur de matériau grâce à un pied à coulisse, (exemple du tronçon A+) comme indiqué sur la figure 5-24 :

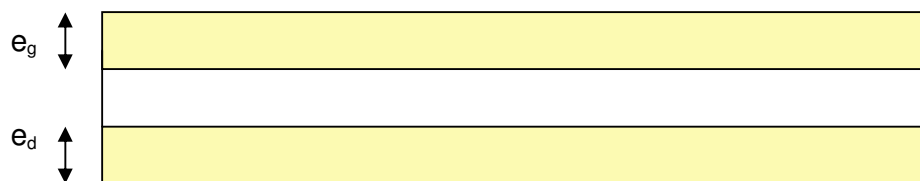


Figure 5-24 : Mesure des épaisseurs

La figure 5-25 montre que l'évolution de l'épaisseur moyenne est sensiblement la même que celle du diamètre extérieur. On peut donc supposer une évolution linéaire du diamètre intérieur.

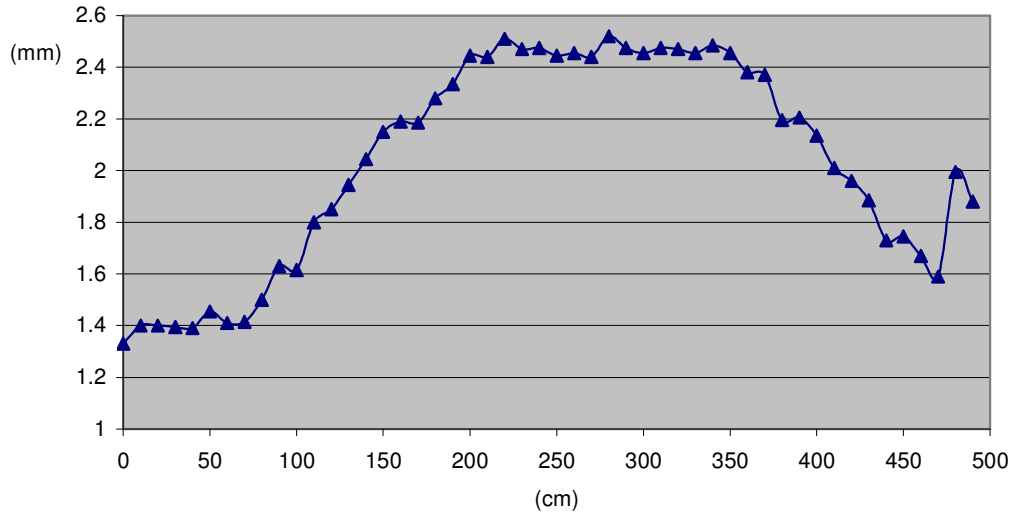


Figure 5-25 : Evolution de l'épaisseur

### Diamètre intérieur

En connaissant le diamètre extérieur et l'épaisseur pour une abscisse donnée, on obtient le diamètre intérieur en enlevant deux fois l'épaisseur au diamètre extérieur, soit :

$$\Phi_{int} = \Phi_{ext} - 2e \quad (5-41)$$

On observe sur la figure 5-26 que l'évolution du diamètre intérieur est linéaire. On peut alors supposer que l'intérieur de la perche est légèrement conique.

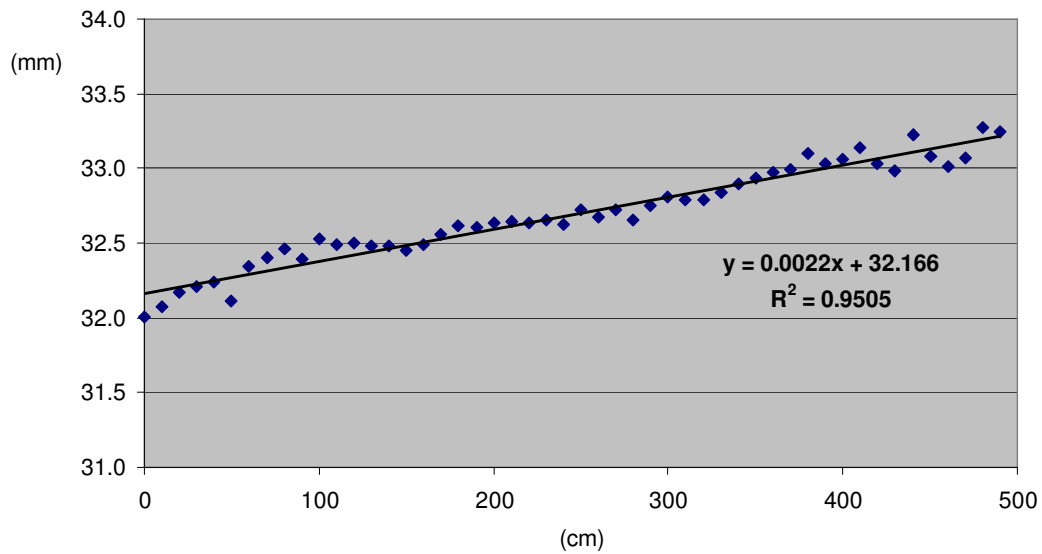


Figure 5-26 : Evolution du diamètre intérieur

### Moment d'inertie de surface

Afin de comparer les rigidités de flexion obtenues par une méthode de recalage à la réalité, il nous faut déterminer le moment d'inertie de surface  $I$ .

Pour le calcul du moment quadratique, on assimile la section de la perche, pour une abscisse donnée, à un anneau (figure 5-27). Dans ce cas, le moment quadratique au point C est donné par :

$$I = I_x = I_y = \frac{\pi}{4}(a^4 - b^4) \quad (5-42)$$

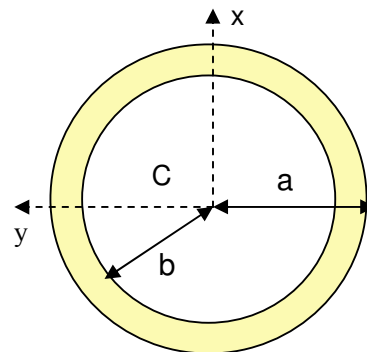


Figure 5-27 : Section de la perche

Les valeurs de  $a$  et de  $b$  sont respectivement les rayons extérieurs et intérieurs déterminés précédemment.

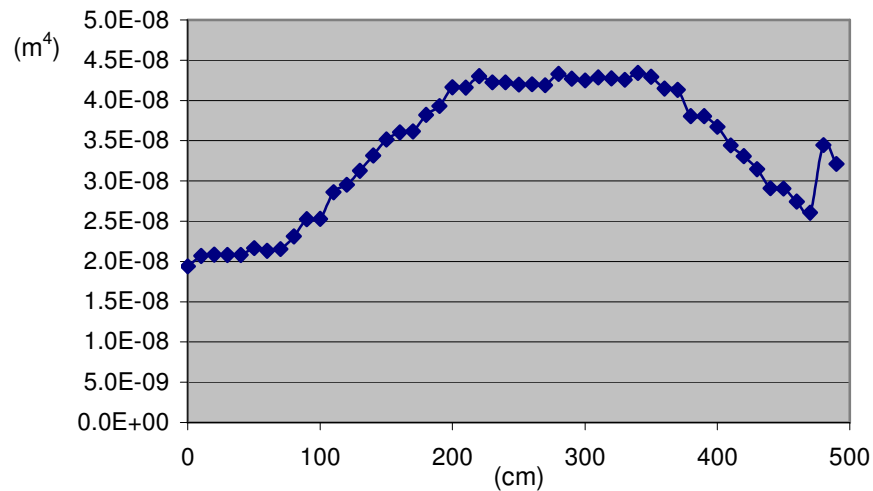


Figure 5-28 : Evolution du moment d'inertie quadratique  $I$

La figure 5-28 représente l'évolution du moment d'inertie quadratique le long de la perche, ces résultats permettront de comparer les rigidités de flexion mesurées avec celles recalées.

#### 5.4.1.3 Caractérisation du matériau composite par essai de perte au feu

##### Protocole expérimental

Les informations quantitatives que nous recherchons lors des essais sont :

- Le pourcentage massique de résine par un essai de perte au feu ;
- Le nombre de plis ;
- La largeur de chaque pli ;
- La masse surfacique de chaque pli.

De plus, des informations qualitatives seront recherchées par l'observation de chaque pli, de manière à déterminer la nature du tissu et à envisager le procédé de fabrication. L'essai de perte au feu nécessite des récipients particuliers dont la masse ne varie pas lors de la calcination. La petite taille de ces récipients nous oblige à utiliser des échantillons de 3 cm de long au plus.



Etant donnée la grande longueur de la perche, toutes les éprouvettes ne subiront pas un essai de perte au feu. Les éprouvettes qui ne subiront pas cet essai (mais qui seront quand même calcinées) mesureront 15 cm de long au plus, en raison de la taille limite du four.

La moitié de perche est donc découpée alternativement en éprouvettes de 3 cm et de 15 cm de longueur, ce qui fournit au total 50 éprouvettes. Pour effectuer les essais nous disposons d'un four dont la température monte jusqu'à 620 °C. ; la calcination de chaque éprouvette nécessitera donc une quarantaine de minutes.

### Mesures effectuées

Les mesures suivantes ont été effectuées :

Pour les grands échantillons, nous avons suivi la démarche suivante :

- Calcination totale de l'échantillon dans un four haute température (640 °C) ;
- Détermination de la masse de chaque pli après refroidissement de l'échantillon ;
- Mesure de sa longueur et sa largeur ;
- Calcul de sa surface, puis de sa masse surfacique.

Pour les petits échantillons, un récipient en porcelaine (dont la masse ne varie pas avec la température) a permis de déterminer aussi le pourcentage massique de résine :

- On mesure avant la calcination la masse  $m_1$  du récipient seul, puis la masse  $m_2$  du récipient contenant l'échantillon préalablement dégraissé ;
- On réalise la calcination ;
- On mesure la masse  $m_3$  du récipient contenant l'échantillon calciné et refroidi ;
- On pèse chaque pli ;
- On mesure sa longueur et sa largeur ;
- On en déduit sa surface, puis sa masse surfacique.

Une fois les masses  $m_1$ ,  $m_2$  et  $m_3$  mesurées, on obtient le pourcentage massique de résine en utilisant la formule :

$$\%M_R = \frac{(m_2 - m_1)}{(m_3 - m_1)} \times 100 \quad (5-43)$$

## Exploitation des résultats

On a pu observer une superposition de plusieurs plis d'un tissu de verre avec :

- Un premier pli (ou pli intérieur) dont l'armature est de la forme unidirectionnelle (UD) circonférencielle, sans fil de trame ;
- De cinq à neuf plis superposés, avec une armature du type satin-5 non classique.

Le premier pli constitué d'UD ne pouvant être manipulé (car trop fragile), ne fera pas l'objet de mesure spécifique. Toutes les autres mesures effectuées feront l'objet de moyennes, et ces valeurs moyennes permettront d'établir les grandeurs recherchées pour la perche.

Les mesures concernant le deuxième type de tissu font apparaître des caractéristiques identiques tout le long de la perche, à savoir une masse surfacique moyenne de l'ordre de  $340 \text{ g/m}^2$  et le même tissage pour les 50 échantillons utilisés. En outre, L'orientation des fibres est du type  $0 - 90^\circ$  avec un nombre de fibres plus important dans le sens longitudinal.

D'autre part, la mesure du pourcentage en masse en résine n'a été réalisé que sur 20 échantillons parmi les 50, couvrant toute la longueur de la perche. Les résultats indiquent un pourcentage massique de résine constant et de l'ordre de 30 %.

## Bilan des résultats

Au regard de toutes les mesures effectuées, on peut établir un bilan chiffré des résultats : la masse surfacique moyenne du tissu est de  $(242.6 \pm 6.6) \text{ g/m}^2$  et le pourcentage massique de résine est de  $(30.0 \pm 0.4) \%$ . La précision des mesures, de l'ordre de 98%, est satisfaisante.

On peut à présent tracer l'évolution de la masse surfacique moyenne (figure 5-29) et du pourcentage massique de résine (figure 5-30)

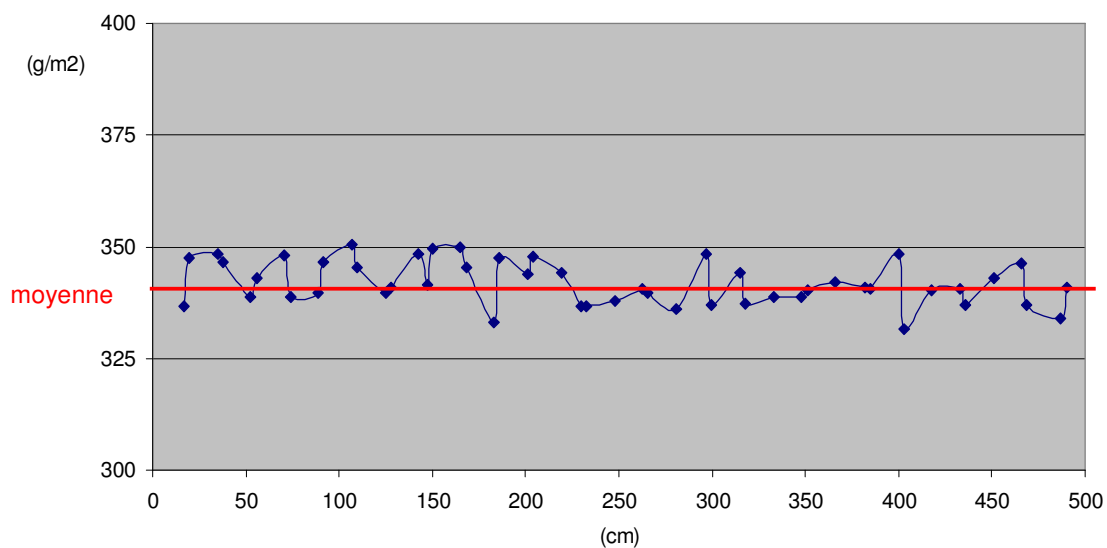


Figure 5-29 : Evolution de la masse surfacique le long de la perche

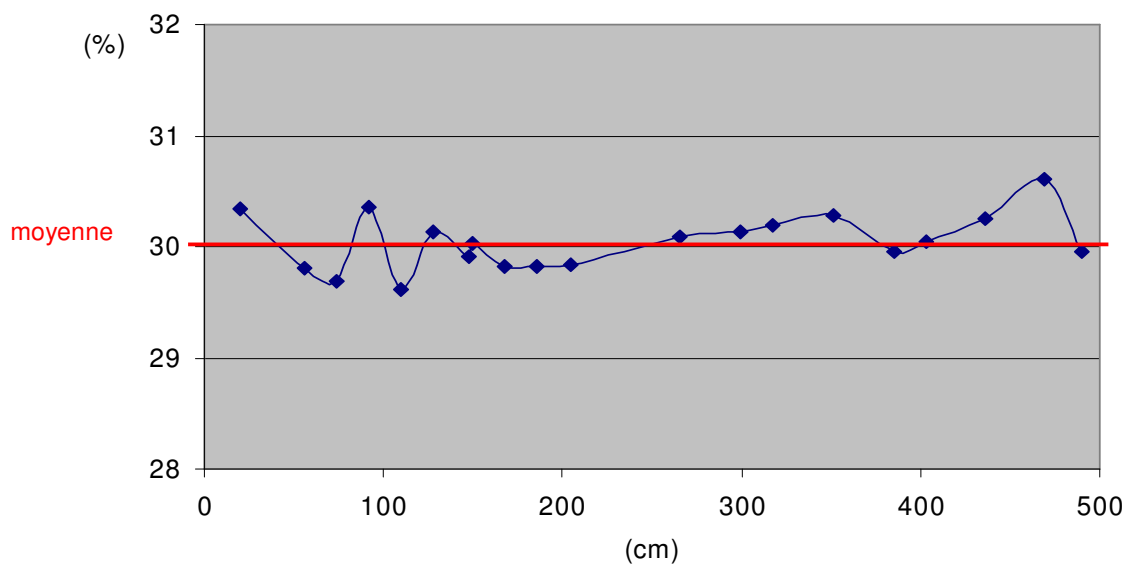


Figure 5-30 : Evolution du pourcentage de masse en résine le long de la perche

## 5.4.2 Synthèse et conclusion

### 5.4.2.1 Bilan et forme du tissu

Les mesures de perte au feu indiquent un pourcentage massique de résine constant le long de la perche et égal à 30%, ce qui suppose l'utilisation d'un tissu préimprégné.

L'observation des échantillons calcinés permet d'affirmer qu'il ne s'agit pas d'une bande de faible largeur enrubannée avec un certain angle, mais d'une bande dont la longueur est celle de la perche, et enroulée perpendiculairement au mandrin sur tout le long de la perche. La forme du tissu utilisé (figure 5-31), a été calculée à partir des mesures géométriques effectuées sur chaque pli. Elle montre que la perche est renforcée dans sa partie centrale et plus précisément aux 2/3, ce qui confirme les conclusions de l'étude mécanique. Un renfort supplémentaire est ajouté à l'extrémité inférieure de la perche, zone qui supporte une charge importante lors du planter de la perche.

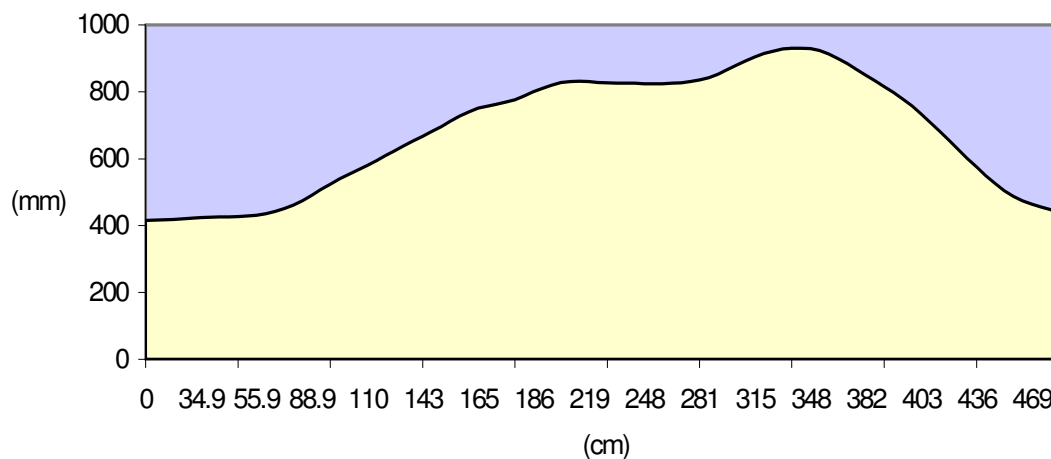


Figure 5-31 : Profil du tissu utilisé

### 5.4.2.2 Procédé industriel envisagé

Le procédé industriel de fabrication repose sur une technique d'enroulement de tissu sur un mandrin (figure 5-32). En outre, la première couche, UD circonférentiel, garantira la qualité du démoulage après les différentes phases de polymérisation. On a pu vérifier lors de cette étude la forme légèrement conique du mandrin qui elle-même facilite le démoulage.

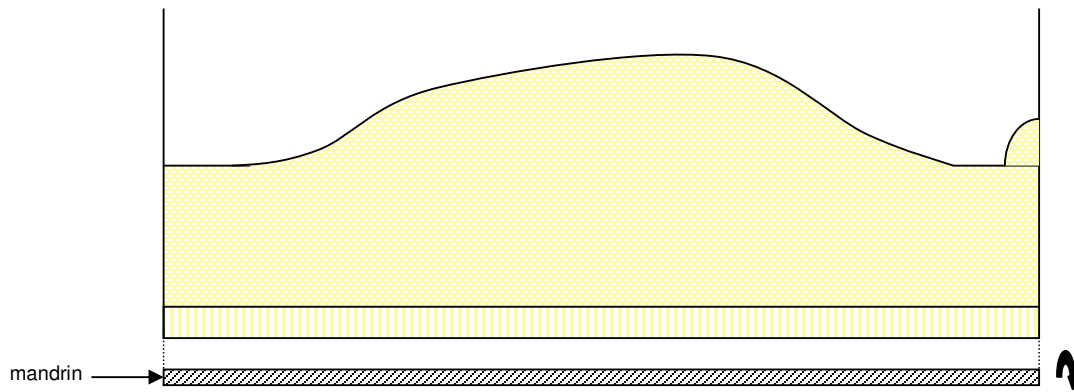


Figure 5-32 : Procédé de fabrication envisagé

L'étude montre aussi l'utilisation d'un tissu de verre préimprégné, avec une armature du type satin-5 non classique, ayant les caractéristiques suivantes :

- Pourcentage massique de résine de 30 % ;
- Masse surfacique de  $342 \text{ g/m}^2$  .

Enfin la forme du tissu, précédemment décrit, permettra d'obtenir des perches différentes caractérisées par l'évolution de la rigidité de flexion.

#### 5.4.2.3 Critiques et perspectives

Il convient de formuler des critiques au sujet du procédé de fabrication utilisé. Son principal avantage est que seule l'inertie varie le long de la perche. Il est donc possible de modifier la répartition des raideurs le long de la perche en jouant simplement sur le moment d'inertie de surface c'est-à-dire sur la largeur de tissu. Cette facilité de manœuvre est intéressante sur le plan industriel.

Mais, ce procédé néglige totalement la possibilité de faire varier la rigidité du matériau composite le long de la perche par l'emploi de différents types de tissage.

Cependant, cette étude peut servir de base en vue d'établir un procédé de fabrication permettant d'optimiser la perche. En effet, la possibilité de faire varier le tissage le long de la perche élargit l'éventail des possibilités, en incluant, par exemple, des plis de kevlar pour l'amortissement.

## 5.5 Conclusion

Les mesures sur la géométrie de la perche ont permis, en supposant un module pour le verre époxy de 45 Gpa, de déterminer la rigidité de flexion mesurée, notée  $\{EI\}_{mes}$ . La figure 5-33 présente une évolution comparative des rigidités de flexion mesurée et recalée.

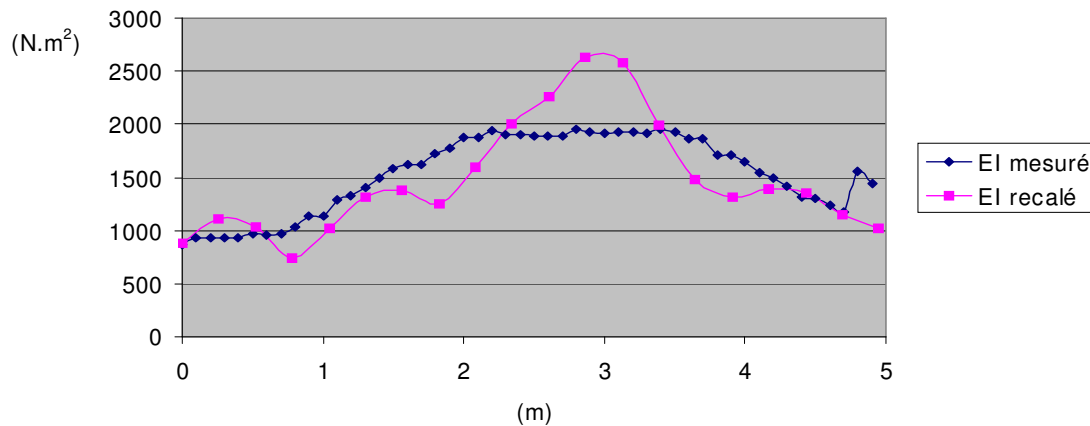


Figure 5-33 : Comparaison des rigidités de flexion mesurée et recalée

On observe sur la figure ci dessus une bonne correspondance entre les valeurs des rigidités de flexion mesurés et recalées. Un écart plus important apparaît dans la partie centrale de la perche (nœuds 11, 12 et 13) où le recalage semble surestimer la rigidité de flexion de la structure. Un maillage plus fin dans cette zone présentant un point d'inflexion aurait certainement permis d'affiner les résultats du recalage.

En conclusion, la méthode de recalage s'est montrée tout à fait satisfaisante en statique : les essais expérimentaux étant simples à mettre en œuvre et la sensibilité de la méthode est faible par rapport aux paramètres d'entrée et de contrôle de l'algorithme d'optimisation. Néanmoins, le recalage dynamique nécessite une amélioration importante : la prise en compte des modes propres dans la fonction objectif.

Enfin, les essais de perte au feu ont permis de caractériser le matériau utilisé pour la fabrication de perche de saut mais aussi de proposer un procédé de fabrication industriel.

# CHAPITRE 6. SIMULATION NUMERIQUE DU COMPORTEMENT DE LA PERCHE

---

6.1	Introduction.....	195
6.2	Modèles numériques de la bibliographie .....	196
6.2.1	Simulation statique .....	196
6.2.1.1	Modèle analytique de TIMOSHENKO [Tim61] .....	196
6.2.1.2	Modèle itératif de DAPENA [Dap83].....	198
6.2.2	Simulation dynamique .....	203
6.2.2.1	Principe de la dynamique des structures .....	203
6.2.2.2	Méthode d'intégration .....	204
6.2.2.3	Modèle éléments finis ABAQUS.....	206
6.3	Modélisation dynamique du comportement d'une perche de saut.....	207
6.3.1	Modèle éléments finis 2D.....	207
6.3.2	Modèle en effort imposé .....	210
6.3.2.1	Modélisation .....	210
6.3.2.2	Résultats obtenus.....	211
6.3.2.3	Limites du modèle .....	213
6.3.3	Modèle en déplacement imposé .....	213
6.3.3.1	Modélisation en déplacement imposé.....	214
6.3.3.2	Résultats obtenus.....	215
6.4	Conclusions et perspectives .....	219





## 6.1 Introduction

La modélisation du comportement mécanique des perches de saut a fait l'objet de plusieurs études. Les principaux modèles développés au cours de ces recherches seront présentés dans le premier paragraphe de ce chapitre. La mise en place d'un modèle validant l'expérience offrirait alors la possibilité de concevoir des perches sur mesure adaptées à la dynamique des perchistes. Néanmoins, la réalisation d'un modèle mécanique satisfaisant n'est pas aisée. En effet, la modélisation de la structure nécessite de déterminer localement les caractéristiques d'une perche de saut. Ensuite, il convient de modéliser correctement la liaison entre la perche et le butoir ainsi que d'évaluer les efforts à appliquer sur l'extrémité supérieure de la perche. En outre, la prise en compte de la dynamique dans la modélisation du comportement de la perche permet de rendre compte des conditions initiales du saut dans la simulation.

L'utilisation de la méthode des éléments finis a permis d'améliorer sensiblement les modèles. Ainsi, les premières simulations furent réalisées en utilisant les lois de la statique en petits, puis en grands déplacements. Désormais, de puissants codes de calcul éléments finis (ABAQUS, MECANO) permettent de résoudre les équations non linéaires de la dynamique des structures en intégrant les énergies cinétiques de vibration ainsi que les conditions initiales en position et en vitesse de la structure.

La réalisation de modèles numériques du comportement de la perche a pour ambition d'optimiser la structure par rapport à un effort appliqué : une même structure pourra alors stocker plus d'énergie de déformation pour une même évolution de l'effort exercé. Le chapitre précédent a mis en évidence l'évolution dans la conception des perches de saut : les perches récentes ont fait l'objet d'une amélioration sur l'évolution des rigidités de flexion. Cependant, aucune simulation numérique n'a pour l'instant intégré des modèles prenant en compte des variations sur la géométrie et donc sur les inerties locales.

On montrera aussi durant ce chapitre les limites des modèles numériques ainsi que la sensibilité importante des méthodes de résolution des équations de la dynamique non linéaire.

## 6.2 Modèles numériques de la bibliographie

*Ce paragraphe est consacré à une présentation sommaire des principaux modèles numériques du comportement mécanique des perches de saut. Les études successives ont apporté une évolution sensible sur les modèles utilisés. Les codes de calcul éléments finis et le gain de puissance des ordinateurs ont, en outre, permis d'élaborer des simulations de plus en plus réalistes. On distinguera alors les modèles reposant sur les équations de la statique et les simulations intégrant un modèle de comportement dynamique de la structure.*

### 6.2.1 Simulation statique

#### 6.2.1.1 Modèle analytique de TIMOSHENKO [Tim61]

L'étude d'une barre élastique en grands déplacements fut menée par EULER au 18<sup>ème</sup> siècle. Ensuite, TIMOSHENKO [Tim61] s'intéressa aux flèches de grande valeur produites par le flambement de barres élastiques. WALKER et KIRMSEY [Wal73] furent les premiers à présenter un modèle numérique d'une perche de saut en s'appuyant sur les résultats d'EULER et de TIMOSHENKO. Par la suite, Hubbard [Hubb80] améliora le modèle en introduisant la notion de moment fléchissant et en proposant une méthode de résolution numérique itérative.

Le modèle repose essentiellement sur l'étude d'une barre élastique de longueur  $L$  et de rigidité  $\Gamma$  soumise en ses extrémités à une force de compression  $P$  (figure 6-1). On notera  $\beta$  l'angle de la tangente à la barre au niveau de son extrémité inférieure et  $l$  la longueur de la corde.

On peut montrer que la force  $P$  s'écrit :

$$P = \frac{4 \Gamma K^2(k)}{L^2} \quad (6-1)$$

avec  $k = \sin(\beta / 2)$

et  $K(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \zeta)^{-1/2} d\zeta$  intégrale elliptique du premier ordre.

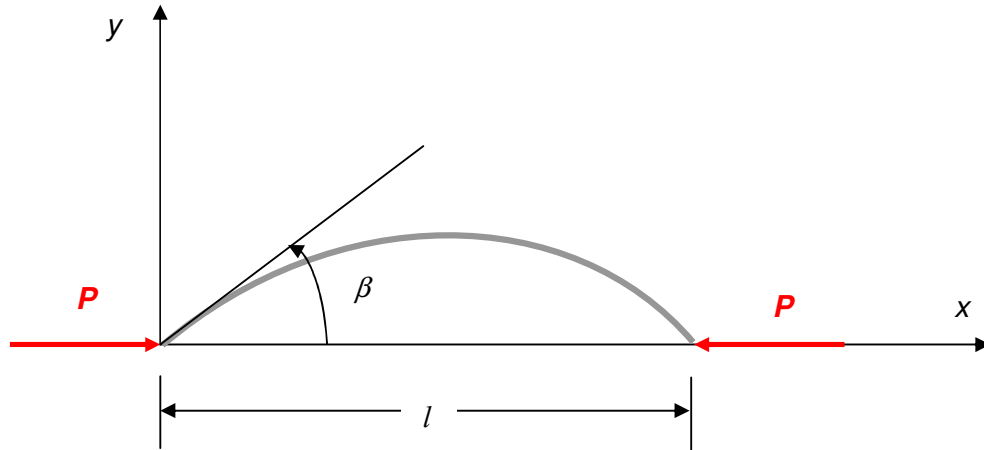


Figure 6-1 : Modèle analytique de TIMOSHENKO

La longueur de la corde de la perche  $l$  est donnée par la relation suivante :

$$l = L \left\{ 2 \frac{E(k)}{K(k)} - 1 \right\} \quad (6-2)$$

avec  $E(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \zeta)^{1/2} d\zeta$  intégrale elliptique du second ordre

Les intégrales elliptiques  $K(k)$  et  $E(k)$  sont calculées à l'aide de series ou établies à partir de tables mathématiques.

Parallèlement, le perchiste est modélisé par un solide indéformable à inertie variable (chapitre 1). Cette modélisation conduit à un système d'équations différentielles non linéaires (issu du principe fondamental de la dynamique) complétant les équations 6-1 et 6-2 et résolu itérativement par une méthode d'intégration de RUNGE-KUTTA-GILL. Schématiquement, la position du centre de masse du perchiste permet de calculer la longueur de la corde qui conduit à la détermination du paramètre  $k$ . La force  $P$  est alors calculée ce qui permet d'obtenir les nouvelles coordonnées du centre de gravité du perchiste. Le processus est répété pour évaluer la trajectoire du centre de gravité du perchiste.

### 6.2.1.2 Modèle itératif de DAPENA [Dap83]

#### Principe

Initialement, le modèle a été développé pour calculer la force de réaction exercée par le butoir sur l'extrémité inférieure de la perche en fonction de la position des mains du perchiste sur la structure. Néanmoins, en traitant le problème inverse (le force de réaction est alors connue), le modèle permet de reconstruire la déformée 2D de la perche en fonction de différentes données d'entrée (figure 6-2) :

- Longueur de la perche ;
- Rigidité de flexion locale  $\{EI\}$  de la structure ;
- Position des mains sur la perche ;
- Composante de la force  $F$  exercée par le sol sur la perche :  $F_x$  et  $F_y$  ;
- Angle  $\beta_0$  de l'extrémité inférieure de la perche.

La perche est modélisée par un ensemble de  $n$  poutres de BERNOULLI de longueur constante  $\Delta S$  et de rigidité de flexion variable  $EI_i$ . En outre, la prise en compte des grands déplacements est réalisée grâce à un procédé itératif de calcul des déplacements nodaux (dont le principe est présenté sur le schéma 6-1).

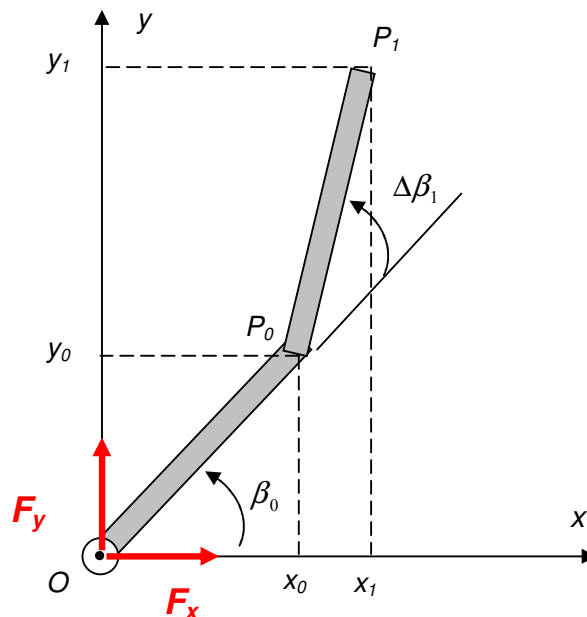


Figure 6-2 : Modèle itératif de DAPENA

Pour une poutre 2D de Bernouilli, la courbure  $c_i$  de la structure est donnée en tout point par la relation :

$$c_i = \frac{d\beta_i}{dS} = \frac{M_i}{EI_i} \quad (6-3)$$

où  $M_i$  est le moment fléchissant appliqué sur l'élément  $i$

On choisit alors une longueur de poutre  $\Delta S$  suffisamment petite pour approcher la dérivée  $\frac{d\beta_i}{dS}$  par  $\frac{\Delta\beta_i}{\Delta S}$ , ce qui impose de réaliser une discrétisation très fine (200 à 500 éléments) pour le modèle de DAPENA.

La rotation du premier élément  $\beta_0$  est alors imposée ce qui permet, dans un premier temps, de positionner géométriquement les coordonnées  $(x_0, y_0)$  du premier nœud  $P_0$ . Ensuite la rotation de l'élément suivant est calculée à l'aide de l'équation 6-4 :

$$\Delta\beta_i = \frac{M_i}{EI_i} \Delta S \quad (6-4)$$

Le moment fléchissant appliqué sur l'élément  $i$  est calculé à partir des coordonnées du nœud de l'élément  $i-1$  ce qui permet de rendre compte artificiellement des grands déplacements :

$$\vec{M}_i = \vec{OP}_i \wedge \vec{F} = (F_y x_{i-1} - F_x y_{i-1}) \vec{z} \quad (6-5)$$

De même, les coordonnées du nœud de l'élément  $i$  sont déterminées à partir de celles de l'élément  $i-1$  par les relations géométriques suivantes :

$$\begin{cases} x_i = x_{i-1} + \Delta S \cos(\beta_{i-1} + \Delta\beta_i) \\ y_i = y_{i-1} + \Delta S \sin(\beta_{i-1} + \Delta\beta_i) \end{cases} \quad (6-6)$$

Le processus est ainsi itéré pour reconstruire la déformée de la perche jusqu'à la main inférieure du perchiste. A partir de ce point, le modèle suppose que la variation de rotation décroît linéairement jusqu'à la main supérieure. Au-delà, l'angle est supposé constant et égal à celui calculé pour la main supérieure.

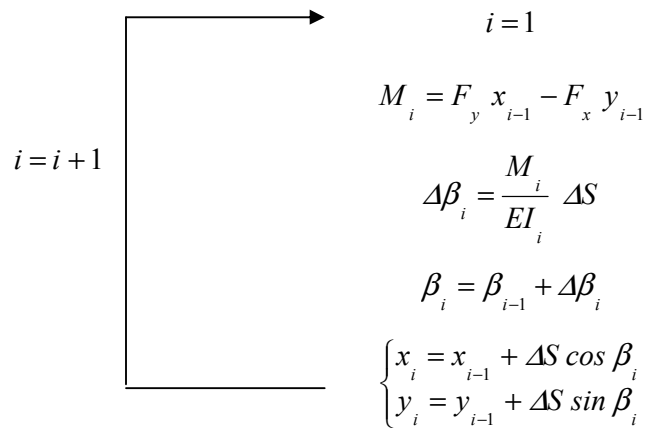
➤ Paramètre d'entrée du modèle :

- $n$  = nombre d'élément
- $L$  = longueur de la perche
- $\Delta S = \frac{L}{n}$  longueur d'un élément
- position de la main inférieure  $n_1$  et supérieure  $n_2$
- $(EI) = (EI_i)_{i=1,\dots,n}$
- $\beta_0$  = angle initial

➤ Initialisation de l'algorithme :

$$\beta_0 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \Delta S \cos \beta_0 \\ y_0 = \Delta S \sin \beta_0 \end{cases}$$

➤ Itération principale (jusqu'à  $n_1$ )



➤ Itération secondaire (de  $n_1$  à  $n$ )

décroissance linéaire de  $\Delta \beta_i$  entre  $n_1$  et  $n_2$

$\Delta \beta_i$  est constant entre  $n_2$  et  $n$

Schéma 6-1 : Algorithme de reconstruction de la déformée à partir du modèle de DAPENA

### Validation du modèle

L'intérêt de la méthode de DAPENA réside dans la prise en compte d'une rigidité de flexion variable le long de la structure grâce à une méthode de calcul itérative. Pour cette raison, l'algorithme a été implanté dans le code de calcul MAPLE et a permis de simuler des déformées statiques de la perche SPIRIT pour une configuration donnée.

Dans le but de valider le modèle théorique, un essai de flexion statique reproduisant au maximum les conditions réelles d'utilisation de la perche a été réalisé. Pour cela, un dispositif expérimental a été conçu (photo 6-1). A l'extrémité haute de la structure, un système de préhension a été installé. Il est lié par des mords vissés qui jouent le rôle des mains du perchiste. La perche a été posée verticalement dans un butoir. Elle est maintenue à l'aide de trois treuils rattachés au socle, dont les câbles sont liés au système de préhension, un angle de  $120^\circ$  séparant les trois fixations. Sous l'embout inférieur, un dynamomètre à 6 composantes a été installé. Les valeurs des forces de réaction ainsi mesurées au cours de la flexion, ont permis de calculer la déformée numérique de la perche. Parallèlement, deux caméras vidéos ont filmé la perche lors de la flexion créée par notre action sur les treuils, ce qui a permis de reconstruire la déformée 3D mesurée de la perche.



*Photo 6-1 : Dispositif expérimental de flexion statique*

Cependant, la déformée de la perche est plane, les résultats obtenus sur les forces et sur les déplacements des points de la perche ont donc été projetés dans le plan de la déformée pour être comparés avec les valeurs numériques.

La figure 6-3 présente les résultats obtenus pour les conditions suivantes :  $F_x = -110$  N,  $F_y = 600$  N et  $\beta_0 = 70^\circ$ .

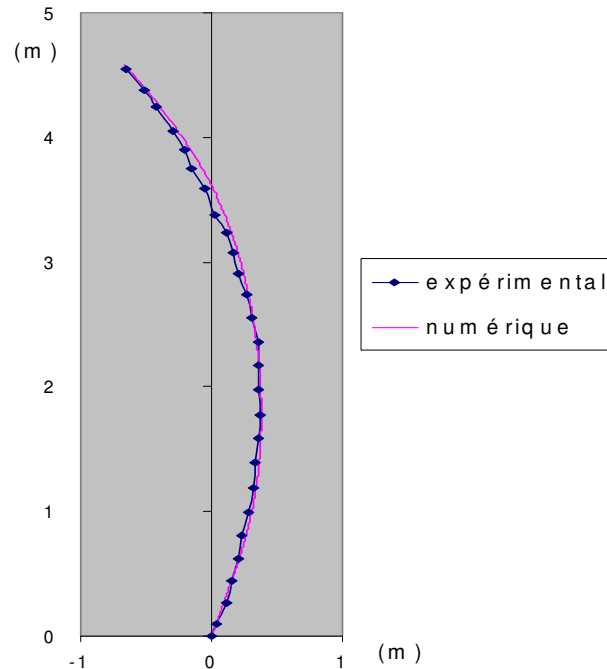


Figure 6-3 : Déformée de la perche SPIRIT mesurée et simulée

On constate une bonne corrélation entre le modèle numérique et les mesures expérimentales, ce qui tend à valider le modèle pour des sollicitations statiques. Cependant, le dispositif n'a pas permis de déformer de manière importante la structure ce qui aurait peut être permis d'atteindre les limites du modèle en statique, dans la mesure ou de plus grands déplacements auraient été générés.

### Limites du modèle pour une utilisation en dynamique

Une simulation pseudo - statique 2D de l'évolution de la déformée de la structure au cours du saut a pu être effectuée en utilisant les forces mesurées dans le butoir (analyse dynamométrique) ainsi que l'évolution des angles initiaux de l'extrémité inférieure de la perche (analyse vidéo).



Cette simulation a permis de déterminer l'énergie potentielle élastique  $\left( Ep = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} ds \right)$  stockée dans la perche. La figure 6-4 permet de visualiser la déformée maximale de la perche et de constater que l'énergie potentielle est de 824 J.

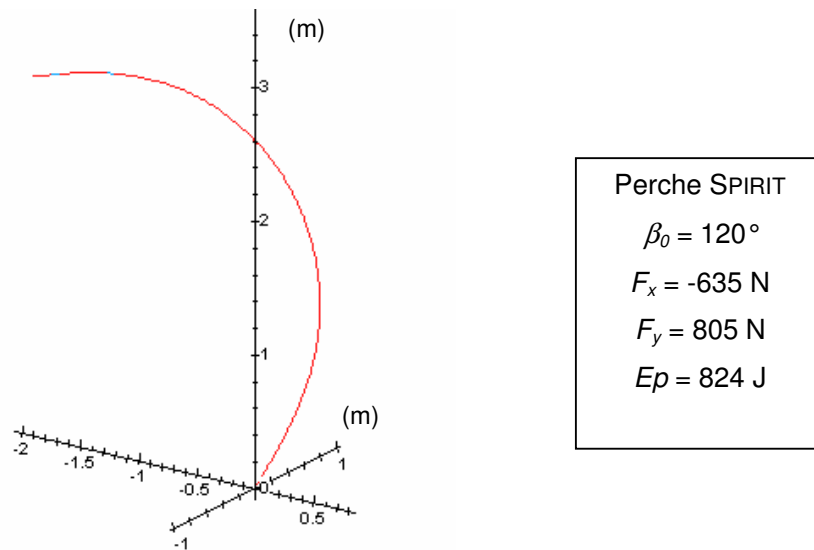


Figure 6-4 : Déformée maximale calculée d'une perche SPIRIT

## 6.2.2 Simulation dynamique

Afin de prendre en compte la réponse transitoire de la perche, il convient de réaliser un modèle de comportement dynamique de la structure. L'avantage d'une telle démarche est de rendre la simulation plus réaliste en y intégrant notamment les conditions initiales en vitesse. Néanmoins, cette modélisation nécessite de puissants codes de calcul éléments finis ainsi que des ordinateurs récents et performants. De plus, la durée de calcul de la simulation est allongée considérablement par rapport à un modèle statique.

### 6.2.2.1 Principe de la dynamique des structures

Lors d'une analyse dynamique d'une structure, trois types d'énergie sont mis en jeu :

- Energie de déformation élastique ou potentielle ;
- Energie dissipée par amortissement ;
- Energie cinétique.

En outre, plusieurs types de sollicitations peuvent apparaître, engendrant les réponses correspondantes : transitoire, harmonique, périodique, spectrale et aléatoire. La réponse transitoire de la structure est souvent la plus étudiée. L'équation différentielle qui régit le mouvement d'une structure amortie soumise à une sollicitation dynamique  $F(t)$  est de la forme :

$$M \ddot{q} - F_a + Kq = F(t) \quad (6-7)$$

avec  $q$  le vecteur des déplacements nodaux,  $M$  la matrice de masse,  $K$  la matrice de raideur et  $F_a$  le terme d'amortissement.

La réponse transitoire est l'étude au cours du temps des déplacements nodaux de la structure soumise à une sollicitation  $F(t)$ . La résolution du système matriciel 6-7 dépend alors des conditions initiales en déplacement  $q_0$  et en vitesse  $\dot{q}_0$ . De plus, le terme  $F_a$  est proportionnel à la vitesse nodale  $\dot{q}$  et son expression dépend du type d'amortissement rencontré. On a, par exemple, pour un amortissement visqueux :

$$F_a = -B\dot{q} \quad (6-8)$$

#### 6.2.2.2 Méthode d'intégration

##### Principe

La résolution du problème transitoire peut être abordée à l'aide de 2 méthodes d'intégration :

- L'intégration directe : intégration pas à pas des équations du mouvement (équation 6-7) ;
- La superposition modale : les équations du mouvement sont projetées sur la base modale puis intégrées.

La superposition modale présente l'avantage de réduire de manière importante le nombre d'équations à intégrer en limitant la réponse de la structure aux premiers modes propres. Cependant, cette méthode est mal adaptée aux excitations complexes de type choc et induit aussi une réponse linéaire. L'intégration directe est une méthode plus générale qui traite l'ensemble du contenu fréquentiel de la sollicitation imposée à la structure. Elle reste néanmoins très coûteuse en temps de calcul. Parmi les méthodes de résolution numérique directe, on peut citer le schéma de NEWMARK et celui de HHT utilisé dans la plupart des codes de calcul dynamique et notamment dans MECANO.

### Méthode de Newmark

Il s'agit d'un schéma d'intégration à un pas qui nécessite la connaissance de l'accélération au temps  $t_{n+1}$  pour déterminer la vitesse et le déplacement. En outre, le déplacement et la vitesse sont développés en série de TAYLOR à l'aide des 2 paramètres indépendants  $\beta$  et  $\gamma$  ainsi que du pas de temps  $h$  :

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + h \left[ (1-\gamma) \ddot{q}_n + \gamma \ddot{q}_{n+1} \right] \quad (6-9)$$

$$q_{n+1} = q_n + h \dot{q}_n + h^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{q}_n + \beta \ddot{q}_{n+1} \right] \quad (6-10)$$

En reportant les équations 6-9 et 6-10 dans l'équation du mouvement 6-7, on obtient la relation matricielle suivante :

$$\left( M + h \gamma B + h^2 \beta K \right) \ddot{q}_{n+1} = F_{n+1} - B \left( \dot{q}_n + (1-\gamma) h \ddot{q}_n \right) - K \left( q_n + h \dot{q}_n + h^2 \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{q}_n \right) \quad (6-11)$$

On note alors  $\bar{\dot{q}}_{n+1} = \dot{q}_n + (1-\gamma) h \ddot{q}_n$  et respectivement  $\bar{q}_{n+1} = q_n + h \dot{q}_n + h^2 \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{q}_n$

les prédictions des vitesses et des déplacements effectués à partir du début des développements en série de TAYLOR.

La force  $F$  étant, pour une simulation en force imposée, connue à chaque instant, la résolution du système linéaire 6-11 permet de déterminer l'accélération  $\ddot{q}_{n+1}$ . La vitesse et le déplacement sont alors corrigés par les relations :

$$\dot{q}_{n+1} = \bar{\dot{q}}_{n+1} + \gamma h \ddot{q}_{n+1} \quad \text{et} \quad q_{n+1} = \bar{q}_{n+1} + \beta h^2 \ddot{q}_{n+1} \quad (6-12)$$

En itérant cette opération au cours du temps, on peut ainsi calculer le champ de vitesses et de déplacements des nœuds de la structure pour un effort imposé.

Cette méthode présente l'avantage d'être inconditionnellement stable (indépendante du pas de temps choisi) et induit un amortissement numérique faible.

### Schéma HHT (HILBERT, HUGHES et TAYLOR)

Le schéma HHT utilise la méthode d'intégration temporelle du schéma de NEWMARK couplé aux modifications de HILBERT, HUGHES et TAYLOR.

Ces modifications font apparaître la matrice d'itération  $S$  qui associe les matrices de masse, de raideur tangente et d'amortissement. La matrice  $S$  est recalculée au plus à chaque itération du schéma de NEWMARK et permet ainsi de prendre en compte les raidissements géométriques de la structure.

### 6.2.2.3 Modèle éléments finis ABAQUS

MC GINNIS [McG84] fut le premier auteur à présenter une modélisation éléments finis en dynamique du saut à la perche. En effet, il réalisa une simulation d'un saut en utilisant le code de calcul ABAQUS. Son modèle intégrait à la fois le perchiste et la perche et fut piloté en force en imposant des moments au niveau des articulations du perchiste (figure 6-5).

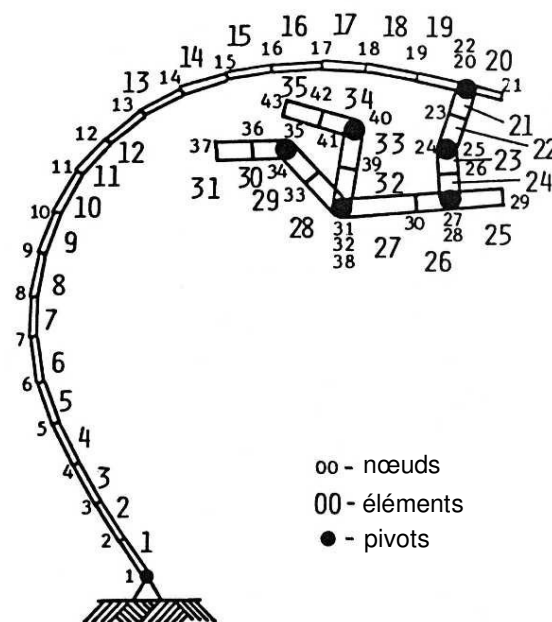


Figure 6-5 : Modèle élément fini de MC GINNIS

Le modèle utilisé pour la perche est constitué de 20 éléments de poutre supportant les grands déplacements et les grandes rotations et possédant 6 degrés de liberté. La perche possède des caractéristiques constantes :

- Rigidité estimée à 38.61 GPa ;
- Masse volumique évaluée à  $1,893 \text{ g/cm}^3$  ;
- Rayon extérieur de 2 cm ;
- Epaisseur de 0,332 cm.

Afin de modéliser le perchiste, des poutres de rigidité très élevée (500 Gpa) ont été utilisées. Les dimensions de ces éléments ont été recalées pour reproduire les caractéristiques d'inertie des tables anthropométriques.

Enfin, le modèle est piloté en force en imposant au niveau des liaisons du perchiste des moments articulaires. Ces moments furent déterminés par une analyse dynamique inverse à partir de mesures cinématographiques [McG83].

Cependant, aucune information n'est fournie sur la modélisation du contact entre la perche et le butoir. La simulation n'a jamais pu être menée durant toute la phase du saut : le modèle divergeant après 0,8 s. En effet, la simulation dynamique du saut à la perche n'est pas aisée et se montre sensible aux paramètres d'entrée issus de mesures expérimentales.

Plus récemment, LUNDBERG et EKEVAD [Eke95] ont amélioré les travaux de MC GINNIS en pilotant le modèle à l'aide d'une stratégie basée sur des valeurs limites des moments articulaires.

### 6.3 Modélisation dynamique du comportement d'une perche de saut

*La démarche entreprise pour simuler le comportement dynamique de la perche est sensiblement différente de celle de MC GINNIS ou de LUNDBERG. En effet, la modélisation proposée est une approche plus globale simulant le comportement de la perche soumis à un effort dynamique représentatif du mouvement du perchiste. On remplace le modèle du perchiste par un torseur dynamique 2D équivalent mesuré expérimentalement.*

#### 6.3.1 Modèle éléments finis 2D

La modélisation du comportement dynamique 2D de la perche SPIRIT est suffisante compte tenu du mouvement quasi plan observé pendant les essais. Celle ci a été réalisée à l'aide du code de calcul MECANO de la société SAMTECH<sup>1</sup>.

Dans un premier temps, la perche d'une longueur de 4,95 m a été modélisée à l'aide de 20 éléments de poutre comprenant les grands déplacements et les grandes rotations. Les caractéristiques d'un verre époxy standard ont servi à définir physiquement la structure.

---

<sup>1</sup> SAMTECH, 25 Boulevard Frère Orban, 4000 Liège, Belgique

Le tableau 6-1 présente les valeurs retenues pour les différentes caractéristiques mécaniques du matériau.

Module d'élasticité	$E$ (Pa)	4.50E+10
Module de cisaillement	$G$ (Pa)	4.50E+09
Coefficient de poisson	$\nu$	0.3
Masse volumique	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	1900

Tableau 6-1 : Caractéristiques mécaniques de la structure

Les mesures géométriques effectuées lors des essais de perte au feu ont permis d'attribuer à chaque élément des dimensions correctes dont les valeurs sont présentées dans le tableau 6-2.

Éléments	$R_{\text{ext}}$ (cm)	$R_{\text{int}}$ (cm)
1	1.734	1.604
2	1.750	1.610
3	1.751	1.612
4	1.773	1.619
5	1.788	1.622
6	1.819	1.624
7	1.844	1.625
8	1.859	1.631
9	1.876	1.632
10	1.879	1.631
11	1.879	1.634
12	1.885	1.638
13	1.887	1.640
14	1.893	1.645
15	1.887	1.649
16	1.872	1.652
17	1.848	1.652
18	1.834	1.656
19	1.813	1.657
20	1.851	1.663

Tableau 6-2 : Dimensions de éléments de la structure

La modélisation de la liaison entre l'extrémité inférieure de la perche et le butoir a nécessité l'emploi d'une liaison pivot possédant un degré de liberté en rotation. Cette liaison a été placée entre un nœud fixe et le premier nœud de la perche. Afin de reproduire le blocage de la perche dans le fond du butoir (pour un angle respectif de  $120^\circ$ ), un ressort de butée (en rotation) a été positionné sur le nœud virtuel qui permet le contrôle de la rotation de la liaison pivot. Cet élément a donc permis de bloquer la rotation à partir d'une valeur angulaire égale à 2,09 rad. En outre, le choix d'une raideur suffisamment importante a permis de modéliser correctement le butoir sans perturber de manière trop sensible la résolution numérique. Enfin, un amortissement de rotation a joué le rôle du frottement de la perche dans le fond du butoir. L'ensemble du modèle de la perche et du butoir est représenté sur la figure 6-6.

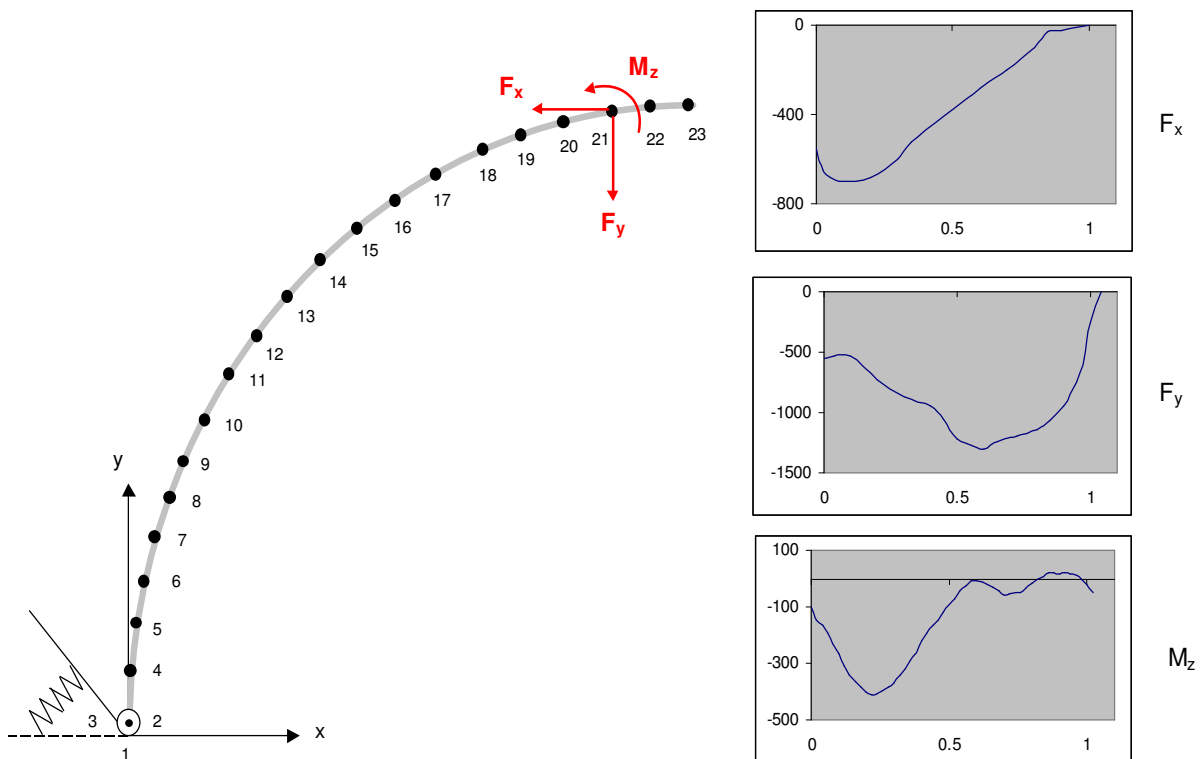


Figure 6-6 : Modèle éléments finis en effort imposé

Par souci de commodité, la structure a été maillée en coordonnées polaires en reproduisant pour l'angle initial  $\beta_0$  du premier élément de la structure, la valeur mesurée expérimentalement. La modélisation du perchiste a été effectuée par une approche globale de son mouvement.

En effet, la modélisation du perchiste a été générée en introduisant sur un nœud de la perche un torseur d'action 2D équivalent. Cette modélisation a conduit à réaliser un premier modèle du comportement dynamique de la perche : "modèle en effort imposé". Le schéma numérique de HHT a été utilisé pour résoudre les différents modèles éléments finis.

### 6.3.2 Modèle en effort imposé

#### 6.3.2.1 Modélisation

Le principe du modèle en effort imposé est de substituer au modèle du perchiste un torseur d'action équivalent déterminé à partir des mesures expérimentales (figure 6-6). La simulation des déformations de la perche a été réalisée depuis le décollage du perchiste jusqu'au lâcher de la perche.

Afin de reproduire la dynamique 2D du perchiste, les composantes de la force suivant l'axe  $(O, x)$  (figure 4-27) et  $(O, z)$  (figure 4-27) ainsi que la composante du moment autour de l'axe  $(O, y)$  (figure 4-28) ont été imposées sur le nœud 21 de la structure correspondant au milieu des mains du perchiste. En outre, un changement d'axe a été nécessaire pour ce replacer dans les axes du modèle éléments finis présentés sur la figure 6-6 : les axes  $(O, y)$  et  $(O, z)$  sont inversés.

Enfin, des conditions initiales en position et en vitesse sont indispensables pour simuler dynamiquement le comportement de la perche. Ces conditions sont déterminées à partir des mesures vidéos :

- $42^\circ$  pour l'angle initial  $\beta_0$  de l'extrémité inférieure de la perche ;
- 1,4 m/s pour la vitesse initiale suivant l'axe  $(O, y)$  du nœud 21 ;
- - 6,5 m/s pour la vitesse initiale suivant l'axe  $(O, x)$  du nœud 21.

En conclusion, les paramètres suivants sont imposés :

- Force imposée sur le nœud 21 dans la direction  $(O, x)$  ;
- Force imposée sur le nœud 21 dans la direction  $(O, y)$  ;
- Moment imposé sur le nœud 21 autour de l'axe  $(O, z)$  ;
- Vitesse imposée sur le nœud 23 dans les directions  $(O, x)$  et  $(O, y)$ .



Le calcul de la déformée statique initiale permet de rendre compte de l'état de la structure sous l'action des efforts initiaux. Le procédé de calcul employé par MECANO a nécessité de modéliser la structure dans sa position inclinée et donc d'utiliser des coordonnées polaires.

#### 6.3.2.2 Résultats obtenus

Le modèle en effort imposé s'est montré très sensible aux paramètres d'entrée et n'a jamais permis de simuler l'ensemble des déformations de la perche. En effet, la simulation divergeait généralement entre 6 et 8 dixièmes de secondes après le décollage du perchiste. Néanmoins, un certain nombre de résultats a pu être analysé. Les déplacements de la structure sont présentés sur la figure suivante. Cependant, afin de ne pas trop surcharger les figures, une échelle est fournie à titre indicatif. En effet, aucune valeur n'est mentionnée à côté de l'échelle car le logiciel les recalcule pour chaque pas de temps. Il aurait donc fallu, pour pouvoir utiliser ces indications, présenter une échelle de couleur avec les valeurs correspondantes pour chaque représentation de la déformée.

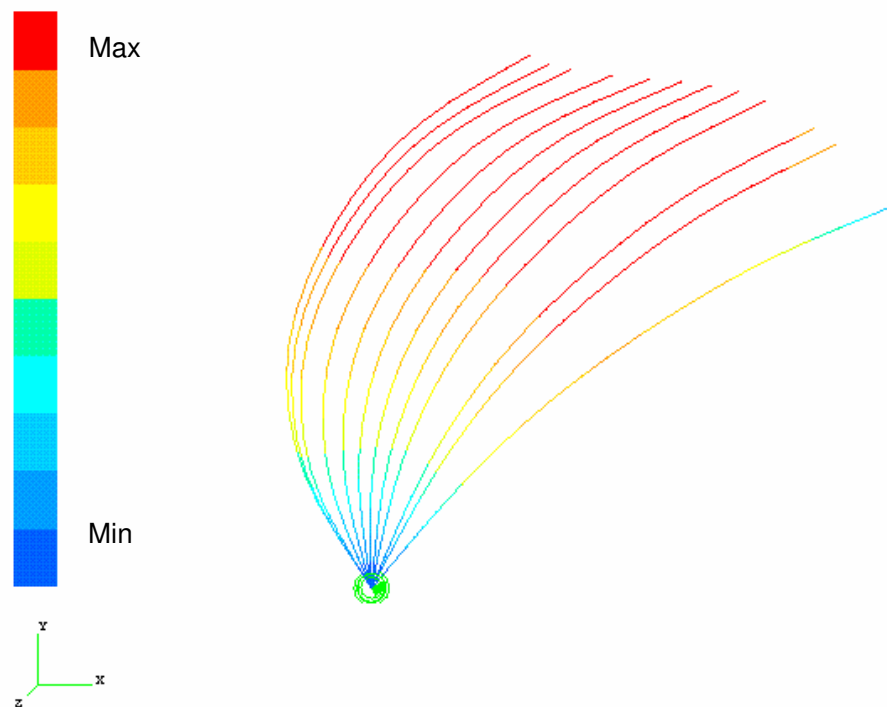


Figure 6-7 : Simulation des déplacements de la structure en effort imposé

En outre, les trajectoires 2D du bout de la perche (nœud 23) ainsi que l'évolution de l'angle  $\beta(t)$  de l'extrémité inférieure de la perche ont pu être simulées et alors comparées avec celles mesurées. Les figures suivantes présentent les résultats obtenus.

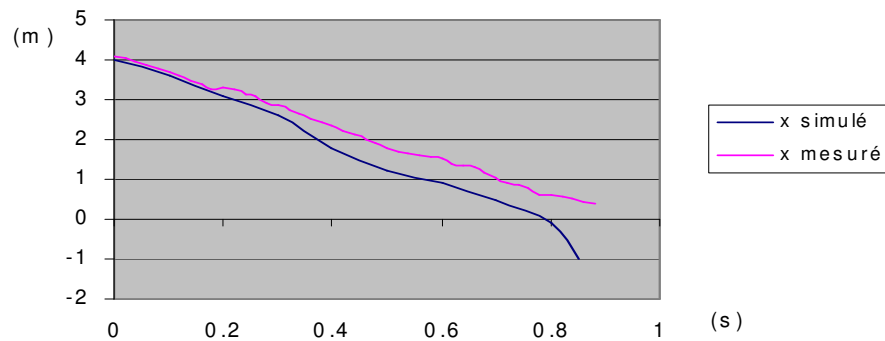


Figure 6-8 : Trajectoires simulée et mesurée du nœud 23 dans la direction  $(O, x)$

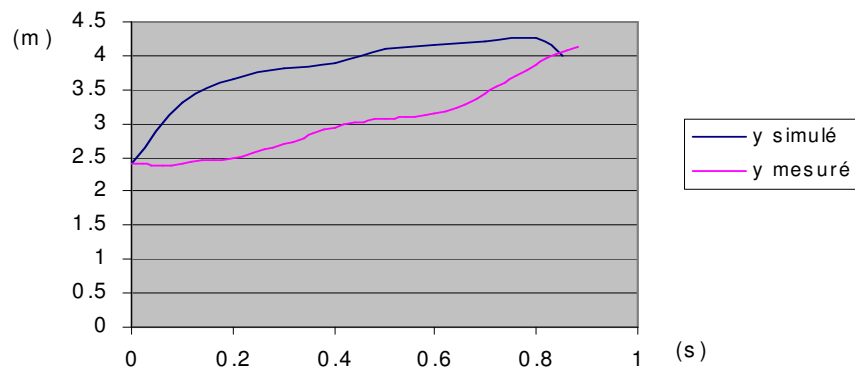


Figure 6-9 : Trajectoires simulée et mesurée du nœud 23 dans la direction  $(O, y)$

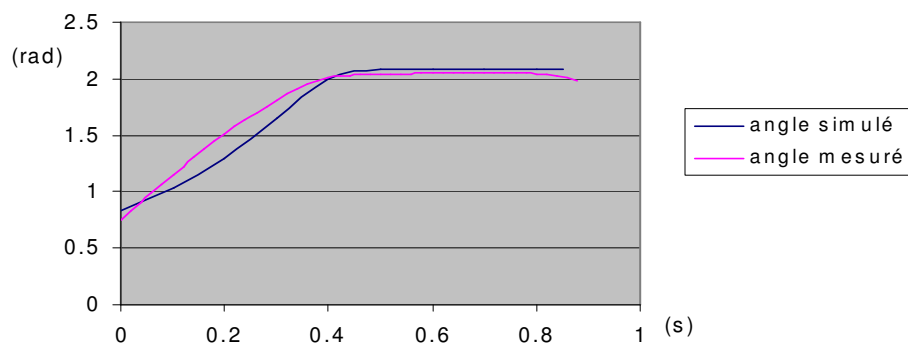


Figure 6-10 : Angle  $\beta$  simulé et mesuré

L'analyse des résultats obtenus pour le modèle en effort imposé montre que la simulation diverge après 0,8 s. De plus, bien que la modélisation de la liaison entre la perche et le butoir semble valide (l'évolution de l'angle  $\beta$  est simulée correctement), des écarts assez importants interviennent sur la trajectoire du nœud 23 dans la direction  $(O, y)$ . La trajectoire de ce même nœud dans la direction  $(O, x)$  est en revanche mieux reproduite par le modèle.

En conclusion, le modèle en effort imposé a montré rapidement des limites importantes, ce qui a conduit à réaliser un modèle en déplacement imposé.

#### 6.3.2.3 Limites du modèle

Les limites du modèle en effort imposé réside dans sa grande sensibilité par rapport aux paramètres d'entrée : forces, moments, position angulaire initiale et vitesse initiale. En effet, seulement quelques simulations ont permis de calculer les déformées de la perche pendant un temps conséquent (entre 0,6 et 0,8 s). Les autres divergeaient trop rapidement ou produisaient même parfois une déformée statique initiale incohérente. Il n'a donc pas été possible de simuler chaque essai mesuré expérimentalement.

De plus, il semble que le code de calcul utilisé soit plus adapté à simuler des systèmes mécaniques pilotés en déplacement. En effet, au cours d'autres études (notamment sur la simulation du swing de golf), les modèles réalisées en déplacement imposé ont toujours fourni des résultats cohérents.

Ces remarques ont conduit à réaliser une seconde modélisation en déplacement imposé qui a permis notamment de simuler les forces mesurées expérimentalement dans le butoir.

### 6.3.3 Modèle en déplacement imposé

La réalisation d'un modèle en déplacement imposé a été nécessaire en raison des limites rencontrées sur le modèle en effort imposé. Pour ce faire, il a fallu imposer les déplacements de l'extrémité supérieure de la perche (nœud 23) mais aussi la rotation de la liaison pivot modélisant le contact perche butoir. Le modèle s'est alors montré beaucoup moins sensible et a donc permis de calculer différents paramètres mécaniques caractéristiques du comportement dynamique de la perche : énergies cinétique et potentielle de la structure, effort interne dans la structure et les efforts dans la liaison pivot.

### 6.3.3.1 Modélisation en déplacement imposé

Le modèle en déplacement imposé permet de simuler les déformations de la perche pendant la totalité du saut : c'est à dire depuis le planter de la perche dans le butoir jusqu'au lâcher de la perche par le perchiste. Les déplacements mesurés  $d_x$  et  $d_y$  de l'extrémité supérieure de la perche (à l'aide de l'analyse vidéo 3D) respectivement dans les directions  $(O, x)$  et  $(O, y)$  seront imposés au nœud 23 dans le modèle numérique. De plus, la rotation de la liaison pivot sera pilotée à partir de l'évolution de l'angle  $\beta$  de l'extrémité inférieure de la perche mesurée expérimentalement. La figure 6-11 résume les déplacements imposés dans le modèle numérique.

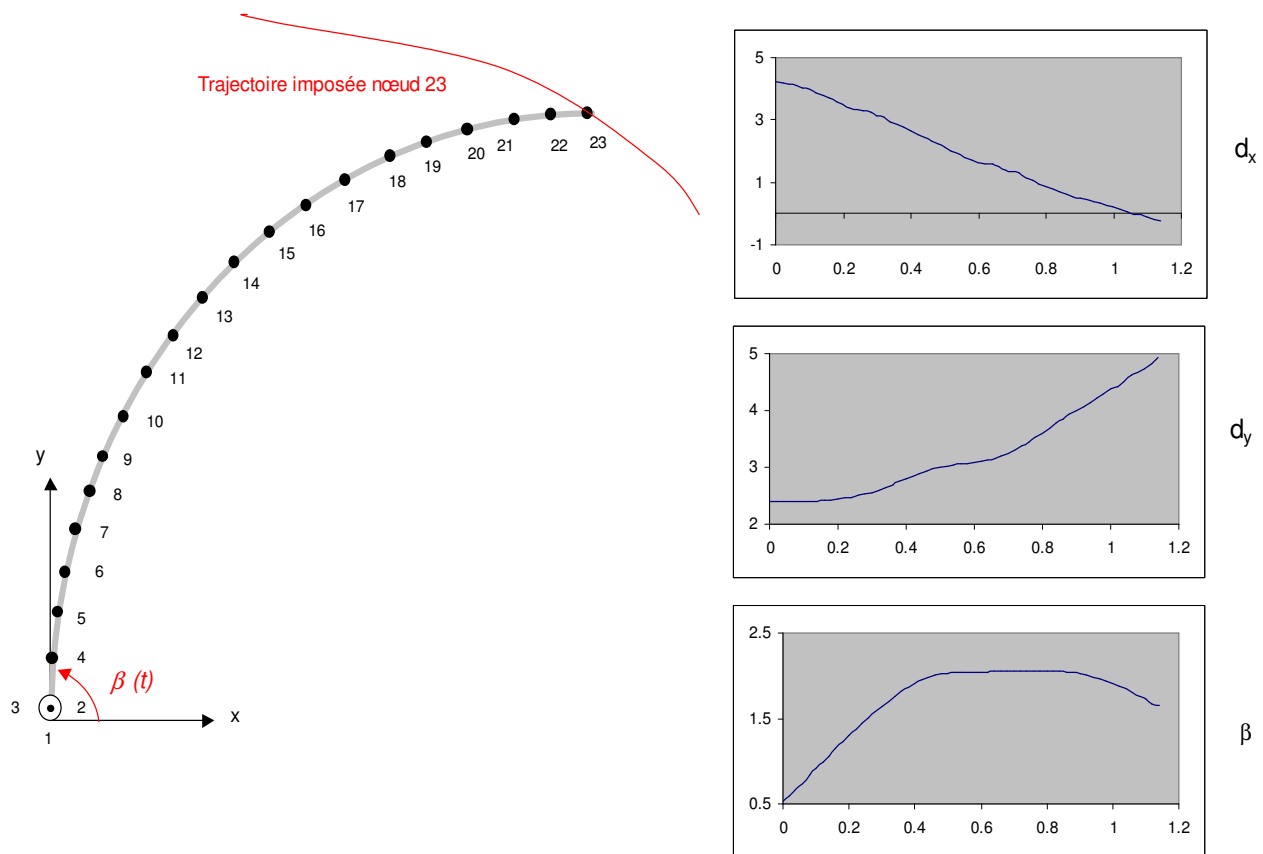


Figure 6-11 : Modèle éléments finis en déplacement imposé

Il faut enfin définir le champ de vitesses initiales de la structure, pour ce faire, on impose une vitesse initiale sur le nœud 23. Le code de calcul détermine ensuite un champ de vitesses cinématiquement admissibles.

Les conditions initiales sont imposées à partir des mesures vidéos, soit - 8 m/s pour la composante x et 1 m/s pour la composante y.

### 6.3.3.2 Résultats obtenus

Le modèle en déplacement imposé s'est montré beaucoup moins sensible aux conditions initiales que celui réalisé en effort imposé. Les résultats obtenus ont donc été plus facilement exploitables. La simulation a été effectuée sur une perche SPIRIT en reprenant les données du modèle en effort imposé détaillé dans les tableaux 6-1 et 6-2.

Le calcul des énergies cinétique et potentielle de la structure a été réalisé et est présenté sur les figures 6-12 et 6-13.

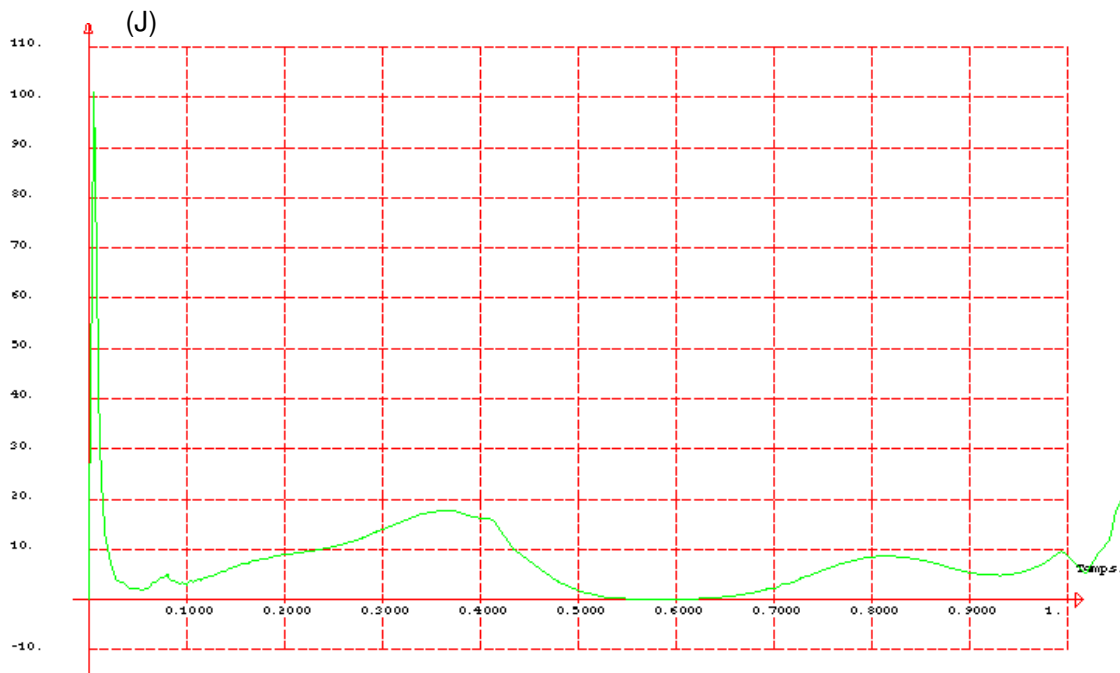


Figure 6-12 : Energie cinétique simulée pour une perche SPIRIT

L'analyse de l'énergie cinétique de la perche SPIRIT met en évidence un très fort ralentissement de la structure après le planter de la perche dans le butoir. Ensuite, l'énergie cinétique reste faible (il semble que les modes de vibration de la structure soient peu excités) alors qu'une grande partie de l'énergie est stockée dans la perche sous forme d'énergie élastique.

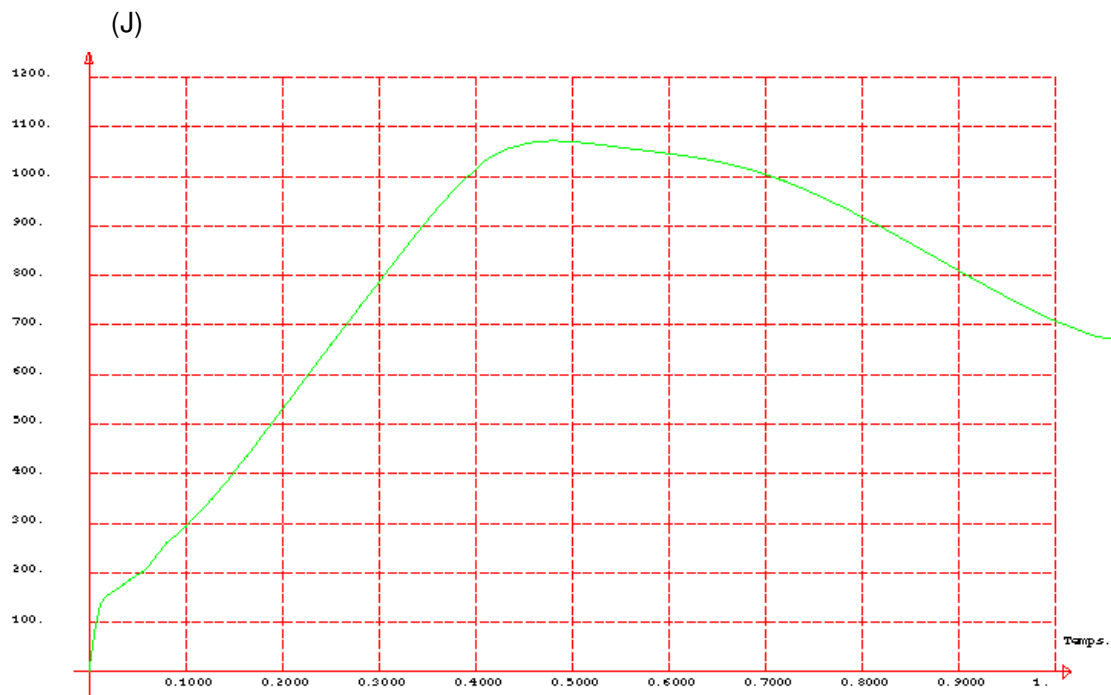


Figure 6-13 : Energie potentielle simulée pour une perche SPIRIT

L'évolution de l'énergie potentielle de la perche est comme pour l'énergie cinétique cohérente par rapport à la déformation de la structure. En effet, l'énergie potentielle est maximale lorsque la perche est la plus fléchiée ( $t = 0,5$  s). La valeur maximale de l'énergie potentielle élastique de 1080 J est supérieure de 23 % à celle simulée en statique (figure 6-4), le modèle statique ne prenant pas en compte les conditions initiales en vitesse de la structure et les effets massiques de la structure. Comparativement, l'énergie cinétique maximale du perchiste au moment du décollage est d'environ 3000 J (figure 4-22), on constate donc qu'environ 30 % de l'énergie du perchiste est transmise à la perche.

Le principal intérêt de la méthode éléments finis est de remonter localement aux efforts internes dans la structure. Le post traitement de MECANO a néanmoins permis de déterminer les principales composantes des efforts internes de la perche SPIRIT.

On s'intéressera donc dans la suite du paragraphe à l'étude qualitative des moments fléchissants et des efforts normaux.

Sur les figures 6-14 et 6-15, sont représentés les résultats obtenus respectivement pour le moment fléchissant et l'effort normal.



Figure 6-14 : Evolution du moment fléchissant

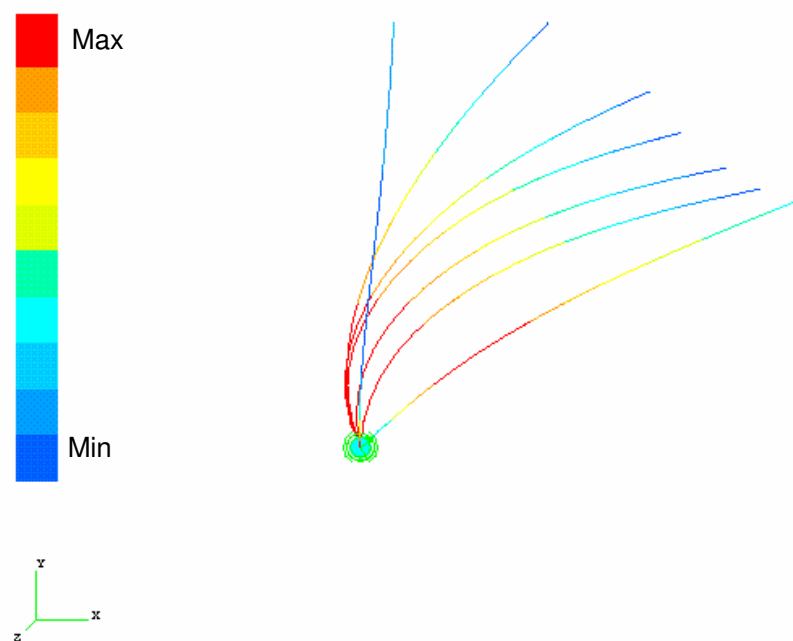


Figure 6-15 : Evolution de l'effort normal

On constate que le moment fléchissant est maximal dans la partie inférieure de la perche car la structure se trouve proche des conditions limites encastrée - libre. Afin d'utiliser plus quantitativement les résultats du modèle en déplacement imposé, il faudrait simuler le comportement de plusieurs perches.

L'analyse de la figure 6-15 montre que l'effort normal est maximal dans la partie la moins déformée de la structure ce qui semble cohérent. De plus, des simulations comparatives du comportement de perches différentes permettraient d'exploiter quantitativement les résultats obtenus.

Un intérêt supplémentaire du modèle en déplacement imposé est de pouvoir simuler les efforts dans les différentes liaisons du modèle. La figure suivante permet d'analyser par exemple la force appliquée dans la liaison pivot du modèle selon la direction  $(O, x)$ .

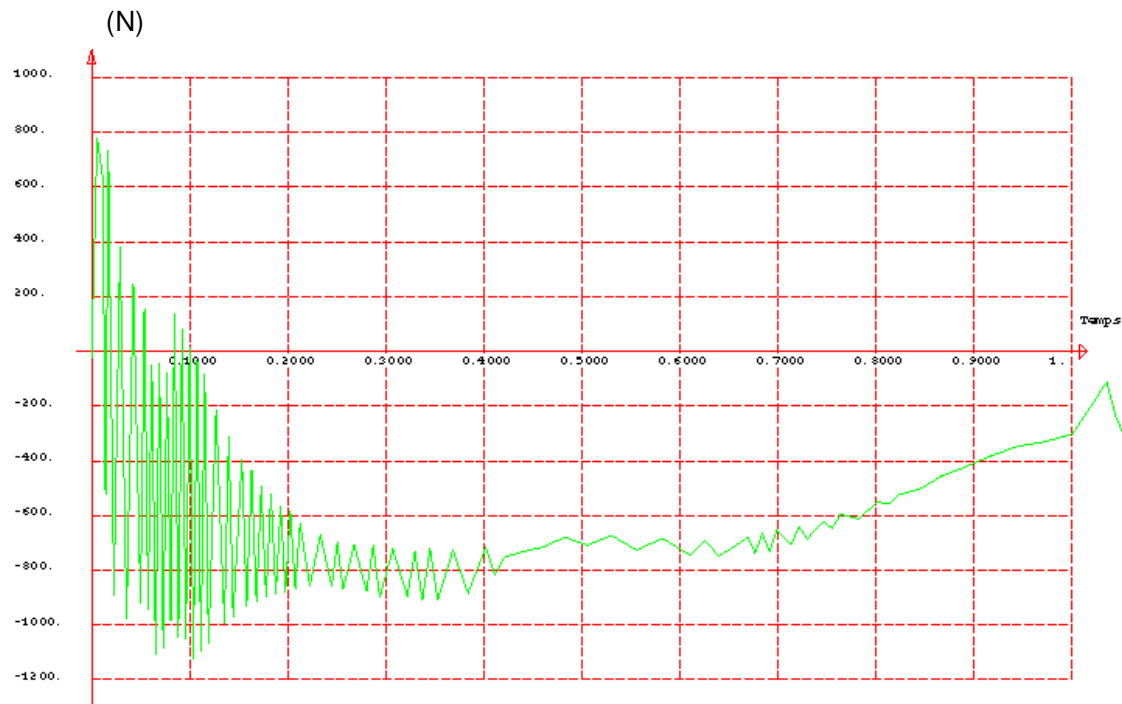


Figure 6-16 : Effort de liaison simulé dans la direction  $(O, x)$

La courbe simulée (figure 6-16) présente dans sa première partie des vibrations importantes qui sont dues d'une part à la forte décélération de la perche après le planter mais aussi au manque de monotonie des déplacements imposés. En outre, une plus grande précision sur les lois de pilotage en déplacement permettrait d'améliorer le modèle et par conséquent le calcul des efforts de liaison.



La figure 6-17 présente la comparaison entre l'effort de liaison simulé et mesuré dans la direction  $(O, x)$  (les résultats simulés ont été replacés dans les axes du repère expérimental). La difficulté de gérer le post traitement de MECANO a conduit à ne présenter que quelques points de la courbe simulée afin de rendre compte de sa forme.

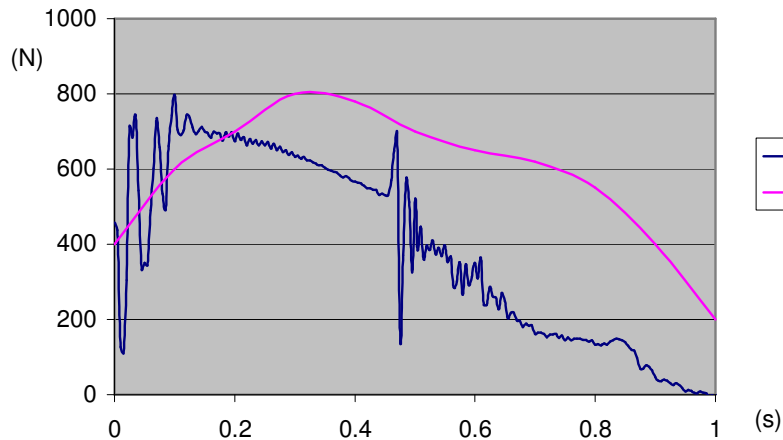


Figure 6-17 : Effort dans la liaison simulé et mesuré

Bien que l'ordre de grandeur et que la forme de la courbe expérimentale sont relativement bien simulés, des écarts non négligeables interviennent entre les valeurs simulées et mesurées. La précision des données d'entrée peut expliquer de telles différences. De plus, les conditions de contact perche butoir (choc) sont différentes d'une liaison pivot en dynamique.

## 6.4 Conclusions et perspectives

La simulation dynamique du saut à la perche n'est pas aisée, la modélisation doit reproduire convenablement la liaison perche butoir, les efforts développés par le perchiste sur la perche et les conditions initiales du saut.

En outre le modèle en effort imposé mis en place s'est montré trop instable pour pouvoir être exploité correctement. Il serait alors nécessaire pour utiliser ce modèle de disposer de mesures expérimentales nettement plus précises afin de déterminer l'exploitabilité du code de calcul en effort imposé.

Le modèle en déplacement imposé a fourni des résultats intéressants et est moins sensible aux paramètres d'entrée. Néanmoins, seule une analyse qualitative des résultats a pu être menée. Il serait alors intéressant d'utiliser le modèle sur des perches différentes et de confronter les résultats notamment les énergies mises en jeu dans la structure.

Enfin, les perspectives de travail sur la simulation numérique du saut à la perche sont nombreuses. Il serait notamment utile de réaliser un modèle intégrant le sportif pour rendre compte de l'interaction entre le perchiste et la perche. Le modèle mis en place par MC GINNIS [McG84] est intéressant mais il serait plus judicieux d'imposer non pas les moments articulaires mais de piloter en déplacement en imposant les rotations des articulations. La modélisation de la perche et de la liaison perche butoir développée dans ce chapitre pourrait aussi être utilisée dans ce modèle. Il reste, enfin, à prendre en compte les problèmes de choc générés par le planter de la perche dans le butoir.

# CONCLUSION

---

Ce travail a pu mettre en avant un certain nombre de remarques et de conclusions sur l'utilisation de la mécanique appliqué au sport et notamment au saut à la perche.

Le *chapitre 1* a présenté une revue des principaux travaux scientifiques traitant du saut à la perche et a permis de dégager les directions de recherche de la présente étude.

Le *chapitre 2* a été consacré à présenter les techniques expérimentales qui permettent d'appréhender les paramètres mécaniques régissant le mouvement du perchiste. Il semble alors important, pour une approche dynamique du geste, d'acquérir à la fois la cinématique tridimensionnelle du sportif à l'aide d'un dispositif d'analyse vidéo mais aussi d'évaluer les torseurs d'action mis en jeu au niveau des différents appuis de l'athlète. Une connaissance approfondie des techniques expérimentales permet en outre d'estimer la précision des mesures réalisées et de déterminer les domaines d'utilisation de ces outils. L'analyse vidéo tridimensionnelle reste un moyen efficace de reconstruire les déplacements 3D d'un point. Néanmoins, sa fréquence limitée à 50 Hz ne permet pas de rendre compte de manière précise des phénomènes dynamiques rapides tels que les chocs ou les impulsions brèves. Afin d'améliorer le dispositif, l'emploi de caméras vidéo rapides (200 à 1000 Hz) permettra une adaptation vers la dynamique rapide. Enfin, l'étalonnage préalable de l'espace doit être réalisé avec précision et de manière homogène afin de garantir une transformation efficace dans tout le domaine d'évolution du sportif. L'utilisation des dynamomètres à six composantes a permis la mesure des efforts exercés par le perchiste sur la piste et par le système perche - perchiste dans le butoir. La mesure bien que précise a aussi montré des limites en dynamique rapide en raison de la conception du capteur (dont le principe repose sur un équilibre statique de sa partie supérieure) et la taille trop importante de la plaque supérieure. Une évolution des dynamomètres (capteurs piezos, plaque supérieure plus rigide et plus légère) permettra de mieux appréhender ses phénomènes en augmentant la bande passante du capteur.

Le *chapitre 3* a traité de la modélisation du mouvement du perchiste ainsi que des techniques de calcul nécessaires à une telle démarche. Une modélisation en solides indéformables du perchiste offre un modèle simple mais réaliste lorsqu'on s'intéresse au mouvement global du perchiste, les comparaisons réalisées sur les forces mesurées par les

dynamomètres et calculées à partir des données cinématiques et leur bonne concordance en attestent. Néanmoins, les différents algorithmes de dérivation doivent être employés avec précaution.

En effet, si les écarts sur les vitesses sont relativement faibles, le calcul des accélérations est plus délicat. Les algorithmes avec recherche automatique du critère de lissage permettent d'obtenir des résultats plus fiables. L'étude propose aussi de déterminer ce paramètre de manière plus physique en comparant les résultats des accélérations avec ceux des dynamomètres. Enfin, la mise en équation du problème de saut à la perche propose un modèle de calcul du moment cinétique du perchiste en son centre de gravité et a été réalisée en utilisant le concept de torseur.

Cette approche dynamique du saut à la perche permet de déterminer le torseur d'action appliqué par le perchiste sur la perche. Les résultats obtenus, présentés dans le *chapitre 4*, sont probants pour la phase de saut. Cependant, la phase d'impulsion, plus rapide, a montré les limites en dynamique rapide des mesures réalisées. Les résultats obtenus sur la phase de saut ont toutefois permis de mettre en avant l'importance des moments appliqués par le perchiste sur la perche. L'étude montre également les effets de la structure sur les efforts développés par le perchiste. Il est alors important de pouvoir dissocier la part de la structure dans la performance et celle due au mouvement relatif du perchiste sur la perche. Le concept d'axe central du torseur a été utile pour exploiter les mesures dynamométriques. Une étude plus poussée sur les couples appliqués en bout de perche devra néanmoins être réalisée pour quantifier l'influence du matériau employé pour l'embout inférieur de la perche. Enfin, le principe de la dynamique segmentaire, bien que relativement simple, permet de proposer les bases du geste idéal.

Le *chapitre 4* a donc mis en évidence les effets de la structure sur la performance, ainsi il a semblé indispensable de devoir caractériser localement une perche de saut. Pour ce faire, une méthode de recalage a été développée au *chapitre 5*. Ces méthodes de recalage nécessitent une modélisation numérique éléments finis de la structure et des essais expérimentaux qui permettent de fournir des données d'entrée au programme de recalage. Enfin, un algorithme d'optimisation a été créé afin de déterminer les caractéristiques du modèle éléments finis qui recalent aux mieux les données expérimentales. Une méthode de recalage statique a permis d'évaluer les matrices de raideur locales de la structure. De même, une étude dynamique a permis le recalage des matrices locales de masse. L'algorithme statique s'est montré fiable et peu sensible, donc tout à fait opérationnel, alors que celui dynamique a présenté une trop grande sensibilité aux

paramètres d'entrée. Le recalage effectué uniquement sur les valeurs propres et non sur les vecteurs propres du problème dynamique peut expliquer ces défauts. Le recalage statique réalisé sur 2 perches de générations différentes a permis d'estimer l'évolution dans la conception des perches de saut. Enfin, des essais de perte au feu ont conforté les résultats du recalage et permis d'observer la structure composite du matériau utilisé.

Des simulations dynamiques du comportement de la perche ont été effectuées à l'aide d'un code de calcul éléments finis ( *chapitre 6* ). Le modèle en effort imposé s'est comporté de manière trop instable et n'a donc pas permis une étude poussée. Il a néanmoins orienté le travail de modélisation vers une approche en déplacements imposés. Ce modèle a permis de proposer les évolutions des énergies mises en jeu dans la structure au cours du mouvement, de remonter aux efforts internes et de simuler correctement les efforts exercés dans le butoir. Cependant, une étude comparative sur des perches différentes devra être menée afin de pouvoir utiliser de manière qualitative les résultats obtenus.

Les perspectives de travail sur le saut à la perche sont encore nombreuses tant par une approche expérimentale que numérique. Il serait en effet intéressant d'étudier la phase d'impulsion de manière plus précise en utilisant des caméras rapides et des capteurs plus performants en dynamique. De plus, une analyse plus approfondie des moments mis en jeu lors de l'impulsion permettrait de caractériser les déséquilibres de l'athlète. De même, l'influence du matériau utilisé pour l'embout de la perche pourrait être caractérisée grâce à l'étude des couples en bout de perche. D'un point de vue numérique, il reste à modéliser les chocs de la perche dans le butoir et à réaliser un modèle du perchiste et de la perche afin de prendre en compte les interactions homme – engin. Ce modèle pourrait reprendre le modèle de la perche présenté dans cette étude ainsi que le modèle multicorps du perchiste de Mc GINNIS [McG84]. Néanmoins, il conviendrait de piloter ce modèle en déplacement en imposant l'évolution des rotations au niveau de chaque articulation du sportif.



## BIBLIOGRAPHIE

---

### Articles et congrès

- [Abd71] ABDEL-AZIZ Y. I. (1971) Direct linear transformation from comparator coordinates into object space coordinates in close-range photogrammetry. *Proceedings of the Symposium on Close Range Photogrammetry*, 1-18
- [Bar73] BARLOW D. A. (1973) Kinematic and kinetic factors involved in pole vaulting. *Thesis, Indiana University*
- [Bar80] BARLOW D. A. (1980) A multiple segment pole vault model with optimization of vaulter inputs and its use in coaching. *Proceedings of Biomechanics Symposium, Bloomington (Indiana)*, 33-48
- [Bar94] BARBIER F. (1994) Modélisation biomécanique du corps humain et analyse de la marche normale et pathologique - Application à la rééducation. *Thèse, Université de Valenciennes*
- [Bur96] BURGESS S. C. (1996) The design optimisation of poles for pole vaulting. *The Engineering of Sport*, 83-90
- [Cid96] CID M. (1996) Le saut à la perche. *Pour la Science* **225**, 36
- [Cid97] CID M. (1997) Analyse tridimensionnelle du saut à la perche. *Journée thématique de la société de Biomécanique sur "la modélisation du mouvement", 9 Juin 1997, Paris*, 31-35
- [Dap78] DAPENA J. (1978) A method to determine the angular momentum of a human body about three orthogonal axes passing through its center of gravity. *J. Biomechanics* **11**, 251-256
- [Dap79] DAPENA J. (1979) A simulation method for predicting the effects of modifications in human airborne movements. *Thesis, University of Iowa*
- [Dap81] DAPENA J. (1981) Simulation of modified airborne movement. *J. Biomechanics* **14**, 81-89
- [Dap83] DAPENA J. (1983) Use of separate hand locations to calculate ground reaction force exerted on a vaulting pole. *Medecine and Science in Sports and Exercice* **15**, 313-318

- [Dap85] DAPENA J. (1985) A 2D simulation method for the prediction of movements in pole vaulting. *Biomechanics* **9B**, 458-463
- [Del93] DE LEVA P. (1993) Validity and accuracy of four methods for locating the center of mass of young male and female athletes, *ISB 93 Paris I*, 318-319
- [Dil68] DILLMANN J. D. (1968) The mechanical energy transformation of pole vaulting with a fiberglass pole, *J. Biomechanics*, 175-183
- [Dur89] DUREY A. (1989) Modelisation du saut à la perche : perspectives d'utilisation pour l'entraînement assisté par ordinateur. *III<sup>èmes</sup> Journées Internationales d'Automne de l'ACAPS, Poitiers*, 174
- [Eke95] EKEVAD M. (1995) Simulation of smart pole vaulting. *J. Biomechanics* **28**, 1079-1090
- [Eke97] EKEVAD M. (1997) Influence of pole length and stiffness on the energy conversion pole-vaulting. *J. Biomechanics* **30**, 259-264
- [Fle60] FLECTCHER J. G. (1960) Human power output : the mechanics of pole vaulting. *Ergonomics* **3**, 30-34
- [Gri94] GRINNER G. M. (1984) A parametric solution to the elastica pole vaulting pole problem. *Journal of Applied Mechanics* **51**, 409-414
- [Gro82] GROS H. J. (1982) Computerized analysis of the pole vault utilizing biomechanics cinematography and direct forces measurements. *Thesis, University of Alberta*
- [Gro88] GROS H. J. (1988) Biomechanical analysis of the pole vault. *Scientific research project at the games of the XXIV<sup>th</sup> Olympiad Seoul 1988, Final report.*
- [Hay71] HAY J. G. (1971) Mechanical energy relationships in vaulting with a fiberglass pole. *Ergonomics* **14**, 437-448
- [Hub80] HUBBARD M. (1980) Dynamics of pole vault. *J. Biomechanics* **13**, 965-976
- [Hub81] HUBBARD M. (1981) Prediction and verification of trajectories and forces in the pole vault. *J. Biomechanics* **14**, 495
- [Hubb80] HUBBARD M. (1980) An iterative numerical solution for the elastica with causally mixed inputs. *Journal of Applied Mechanics* **47**, 200-202
- [Lin94] LINTHORNE N. P. (1994) Mathematical model of the takeoff phase in the pole vault, *Journal of Applied Biomechanics* **10**, 323-334



- [Mar75] MARZAN T. (1975) A computer program for direct linear transformation solution of the colinearity condition and some application of it. *Symposium of Close-Range Photogrammetric Systems, American Society of Photogrammetry*, 420-477
- [McG83] MC GINNIS P. M. (1983) The inverse dynamics problem in pole vaulting. *Medecine and Science in Sports and Exercise* **15**, 112
- [McG84] MC GINNIS P. M. (1984) Dynamic finite element analysis of a human implant system in sport : the pole vault. *Thesis, University of Illinois*
- [McG86] MC GINNIS P. M. (1986) Inverse dynamic analysis of the pole vault. *International Journal of Sport Biomechanics* **2**, 186-201
- [Mor95] MORLIER J. (1995) Analyse mécanique 3D du saut à la perche. *12ème Congrès Français de Mécanique, Septembre 1995, Strasbourg, Vol I*, 53-56
- [Mor96] MORLIER J. (1996) Three-dimensional analysis of the angular momentum of a pole-vaulter. *J. Biomechanics* **29**, 1085-1090
- [Mor97] MORLIER J. (1997) Biomécanique 3D du saut à la perche. *Science et Sports* **12 - Suppl. 1**, 35s-36s
- [Morl96] MORLIER J. (1996) Three-Dimensional dynamic analysis of pole vaulting. *ISBS' 96, XIV International symposium on Biomechanics in Sports, June 1996, Madeira (Portugal)*, 378-381
- [Morl97] MORLIER J. (1997) Determination of efforts applied by the vaulter on the pole. *BIOMEC 97 - International conference of biomechanics, September 30 - October 1 1997, Mons (Belgique)*
- [Nic87] NICKLASS O. (1987) A 3D method to predict movemens in pole vaulting. *Thesis, Indiana University*
- [Sha78] SHAPIRO R. (1978) Direct linear transformation method for three-dimensional cinematography. *The Research Quaterly* **49**, 197-205
- [Vas93] VASLIN P. (1993) Analyse cinématique et dynamique du saut à la perche, recherche d'un critère de performance. *Thèse, Université de Bordeaux II*
- [VGh78] VAN GHELUWE B. (1978) Computerized three dimensional cinematography for any arbitrary camera setup. *International Seminar on Biomechanics, Biomechanics VI-A*, 343-348

- [Wal81] WALTON J. S. (1981) Close-range cine-photogrammetry : a generalized technique for quantifying gross human motion. *Thesis, Pennsylvania State University*
- [Wal73] WALKER H. S. (1973) Computer modeling of pole vault. *Mechanics and Sport, AMD* **4**, 131-141
- [Wal85] WALKER H. S. (1985) Biomechanical parametric analysis of pole vaulting and optimization of performance. *Human performance : Efficiency and improvements in sports, exercices and fitness*, 444-461
- [Wol86] WOLTRING H. J. (1986) A fortran package for generalized cross-validatory spline smoothing and differentiation. *Advances in Engineering Software* **8**, 104-113
- [Wol89] WOLTRING H. J. (1989) An optimal smoothing and derivate estimation from noisy displacement data in biomechanics, *Human Movement Science* **4**, 229-245
- [Yea90] YEADON M. R. (1990) The simulation of aerial movement - III. The determination of the angular momentum of a human body. *J. Biomechanics* **23**, 75-83
- [Zat83] ZATSIORSKY V. (1983) Estimation of the mass and inertia characteristics of the human body by means of the bast predictive regression equations. *Biomechanics IX-B, Human Kinetics*, 233-239

## Ouvrages de référence

- [Bam97] BAMBERGER Y. (1997) *Mécanique de l'ingénieur : Tome I, II et III*. Hermann, Paris
- [Bar91] BARANGER J. (1991) *Analyse numérique*. Hermann, Paris
- [Ble95] BLEVINS R. D. (1995) *Formulas for natural frequency and mode shape*. Krieger Publishing Compagny, Malabar Florida
- [Che96] CHEVALIER L. (1996) *Mécanique des systèmes et des milieux déformables*. Ellipses, Paris
- [Cia80] CIARLET P. G. (1980) *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Masson, Paris
- [Cor97] CORNIL J. M. (1997) *Maple V Release 4 - Introduction raisonnée à l'usage de l'étudiant, de l'ingénieur et du chercheur*. Springer, New York

- [Cra97] CRAVEUR J. C. (1997) *Modélisation des structures, calcul par éléments finis*. Masson, Paris
- [Dec96] DECLERCQ D. (1996) *Le filtrage des signaux*. Hermes, Paris  
QUINQUIS A.
- [Des96] DESJARDINS D. (1996) *Mécanique des solides*. Masson, Paris  
COMBARNOUS M.  
BACON C.
- [Dro93] DROIUN B. (1993) *De la mécanique vibratoire classique à la méthode des éléments finis, Volume 1*. AFNOR, Paris  
SENICOURT J. M.  
LAVASTE F.  
FEZANS G.
- [Dur97] DUREY A. (1997) *Physique pour les sciences du sport*. Masson, Paris
- [Fer73] FERTIS D. G. (1973) *Dynamics and vibration of structures*. Wiley-Interscience, New York
- [Gar86] GARDAN Y. (1986) *Mathématique et CAO : méthodes de base*. Hermes, Paris
- [Imb91] IMBERT J. F. (1991) *Analyse des structures par éléments finis*. Cépaduès-Editions, Toulouse
- [Jun94] JUNQUA A. (1994) *Mécanique Humaine - Eléments d'une analyse des gestes sportifs en deux dimensions*. Editions Revue EPS, Paris  
DUBOY J.  
LACOUTURE P.
- [Lal80] LALANNE M. (1980) *Mécanique des vibrations linéaires*. Masson, Paris  
BERTHIER P.  
DER HAGOPIAN J.
- [Lar88] LAROZE S. (1988) *Mécanique des structures, Tome 2 : poutres*. Masson, Paris
- [Min90] MINOUX M. (1990) *Programmation mathématique, théorie et algorithme, tome 1*. Dunod, Paris
- [Mok97] MOKHTARI M. (1997) *Apprendre et maîtriser MATLAB*. Springer, New York  
MESBAH A.
- [Tim61] TIMOSHENKO S. P. (1961) *Theory of elastic stability*. Mc Graw-Hill, New York  
GERE J. M.
- [Win79] WINTER D. A. (1979) *Biomechanics of Human Movement*. Wiley-Interscience, New York