TAS
Cours 02 - Lambda-Calcul : Stratégie et Types Simples

Romain Demangeon

TAS - M2 STL

26/09/2024

Plan du Cours 01

1. Stratégies pour λ.
2. Types simples.

Termes usuels

Notations

- $\lambda xy.M$ pour $\lambda x.(\lambda y.M)$ (regroupement des paramètres)
- $M_1\ M_2\ M_3$ pour $(M_1\ M_2)\ M_3$ (parenthèsage à gauche)
- $\lambda x.M\ N$ pour $\lambda x.(M\ N)$ (maximalité du λ)

- $I = \lambda x.x$ (identité)
- $K = \lambda xy.x$ (sélection gauche ou T)
- $F = \lambda xy.y$ (sélection droite ou $\perp$)
- $S = \lambda xyz.(x\ z)\ (y\ z)$ (application généralisée)
- $\delta = \lambda x.(x\ x)$ (auto-application)
- $\Omega = \delta\ \delta$ (divergence)
- $Y = \lambda f.(\lambda x.f\ (x\ x))\ (\lambda x.f\ (x\ x))$ (combinateur paradoxal)

Graphes de Réduction

Définition

Un graphe de réduction est un multi-graphe dirigé connexe où les sommets sont des termes. Il y a une arête de M vers N pour chaque manière d'obtenir $M \longrightarrow N$.

$$\begin{tikzcd} & (I\ I)\ (I\ I) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ I\ (I\ I) \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & & (I\ I)\ I \arrow[dl] \\ & (I\ I) \arrow[d] & \\ & I & \end{tikzcd}$$

Graphes de Réduction (II)

$$\begin{tikzcd} K\ I\ \Omega \arrow[r] \arrow[loop above] & (\lambda y.I)\ \Omega \arrow[r] \arrow[loop above] & I \end{tikzcd}$$

avec $\color{blue}{Tr} = \lambda x.(x\ x\ x)$

$$Tr\ Tr \longrightarrow Tr\ Tr\ Tr \longrightarrow Tr\ Tr\ Tr\ Tr \longrightarrow \ldots$$

$$\begin{tikzcd} (\lambda x.I)\ (Tr\ Tr) \arrow[r] \arrow[d] & (\lambda x.I)\ (Tr\ Tr\ Tr) \arrow[r] \arrow[dl] & (\lambda x.I)\ (Tr\ Tr\ Tr\ Tr) \arrow[r] \arrow[dll] & \ldots \\ I & & & \end{tikzcd}$$

Couples

Encodage

$(x, y) \overset{def}{=} \lambda f.f\ x\ y$

- $(.,.) = \lambda abf.f\ a\ b$ (encouplage)
- $\Pi_2^1 = \lambda c.(c\ K)$ (projection gauche)
- $\Pi_2^2 = \lambda c.(c\ F)$ (projection droite)
- $\leftrightarrow = \lambda cf.f\ (\Pi_2^2\ c)\ (\Pi_2^1\ c)$ (échange)

SORBONNE UNIVERSITÉ

Entiers de Church

Encodage

$n \stackrel{def}{=} \lambda fe.f\ (f\ \ \ldots\ (f\ \ e)\ldots)$ (n applications de f à e)

- $0 = F$ (zéro)
- $1 = \lambda fe.(f\ \ e)$ (unité)
- $add = \lambda nmfe.n\ f\ (m\ f\ \ e)$ (addition)
- $mult = \lambda nmfe.n\ (m\ f)\ e$ (multiplication)
- $power = \lambda nmfe.(m\ n)\ f\ \ e$ (puissance)
- pour *pred* il faut définir $\sigma : (x, y) \mapsto (x + 1, x)$ en utilisant les couples.

Listes

Encodage

$[e_1; e_2; \ldots; e_k] \stackrel{def}{=} \lambda cn.c\ e_1\ (c\ e_2\ (\ldots\ (c\ e_k\ n)\ldots))$

- $[] = 0$ (liste vide)
- $[.] = \lambda ecn.c\ e\ n$ (encapsulation)
- $cons = \lambda elcn.c\ e\ (l\ c\ n)$ (construction)
- $append = \lambda l_1 l_2 cn.(l_1\ c\ (l_2\ c\ n))$ (concaténation)
- $hd = \lambda L.L\ K\ 0$ (tête)
- pour tl (queue) il faut définir la fonction
  $\sigma : a\ ,\ (x, y) \mapsto ((cons\ a\ y), y)$
- $map = \lambda flcn.l\ (\lambda as.(c\ (f\ a)\ s))\ n$
- $filter = \lambda plcn.l\ (\lambda as.(p\ a)\ (c\ a\ s)\ s)\ n$
- $reduce = \lambda fal.l\ f\ a$

arbres

$(e, A_g, A_d) \stackrel{def}{=} \lambda cn.c\ e\ A_g\ A_d$

Limites du λ-calcul

Substitutions

- écrire $M[N/x]$ c'est triché.
- $\lambda_{\sigma\Uparrow}$: calcul implémentant les substitutions de manière explicite
  - on descend dans le terme avec l'argument et on remplace au bon endroit.

α-conversion

- le λ-calcul est trop syntaxique.
  - la notion de variable est décevante.
  - difficulté d'implémentation
- λ avec indices de De Bruijn: $M, N ::= n \mid \lambda.M \mid M\ N$
  - le nombre de λ à traverser pour trouver le λ liant.
  - $K = \lambda\lambda.1$ et $S = \lambda\lambda\lambda.(2\ 0)\ (1\ 0)$
- Réseaux d'interaction.

Non-Déterminisme

Un modèle de calcul est non-déterministe quand deux réductions aboutissant à deux termes différents sont possibles depuis un même terme.

- $\exists t, t_1, t_2.(t \longrightarrow t_1) \wedge (t \longrightarrow t_2) \wedge (t_1 \neq t_2)$

- langages usuels: déterministes,
- machines de Turing: non-déterministes (cf. P & NP),
- réseaux de Petri et CCS: non-déterministes.
- λ-calcul: non-déterministe
  - $(I\ I)\ (I\ I) \longrightarrow I\ (I\ I)$
  - $(I\ I)\ (I\ I) \longrightarrow (I\ I)\ I$
- un "endroit où l'on peut réduire" est appelé redex.
- on a parfois le choix entre plusieurs redex.

Confluence Locale

$\longrightarrow^*$: cloture réflexive transitive de $\longrightarrow$ (i.e. $\longrightarrow^n$ pour un certain $n \geq 0$)

Un modèle de calcul est localement confluent quand deux réductions aboutissant à deux termes différents sont joignables en 0 ou plus réductions.

- $\forall t, t_1, t_2.(t \longrightarrow t_1) \wedge (t \longrightarrow t_2) \Rightarrow \exists u.(t_1 \longrightarrow^* u) \wedge (t_2 \longrightarrow^* u)$

$$\begin{tikzcd}
 & t \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
t_1 \arrow[dr, dotted, "*"] & & t_2 \arrow[dl, dotted, "*"] \\
 & u &
\end{tikzcd}$$

Confluence

Un modèle de calcul est confluent quand deux séries de réductions aboutissant à deux termes différents sont joignables en 0 ou plus réductions.

- $\forall t, t_1, t_2.(t \longrightarrow^* t_1) \wedge (t \longrightarrow^* t_2) \Rightarrow \exists u.(t_1 \longrightarrow^* u) \wedge (t_2 \longrightarrow^* u)$

$$\begin{tikzcd}
 & t \arrow[dl, "*"] \arrow[dr, "*"] & \\
t_1 \arrow[dr, dotted, "*"] & & t_2 \arrow[dl, dotted, "*"] \\
 & u &
\end{tikzcd}$$

Différence entre les deux notions

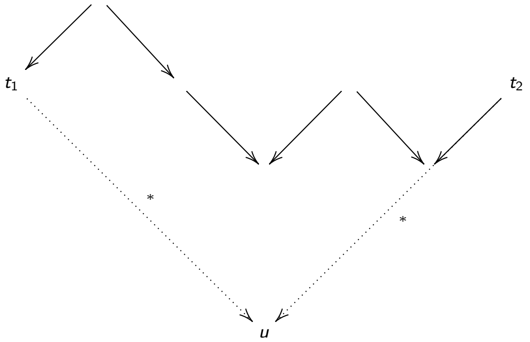
$$\longleftarrow \qquad \rightleftarrows \qquad \longrightarrow$$

Church-Rosser

- $u \equiv t$ (équivalence) quand il existe une suite $(u_i)_{0 \leq i \leq k}$ avec $u_0 = u$ et $u_k = t$ telle que, $\forall i < k, (u_i \longrightarrow u_{i+1}) \vee (u_{i+1} \longrightarrow u_i)$.
- $u \equiv t$ quand on peut utiliser $\longrightarrow$ dans les deux sens pour les relier.

Un modèle de calcul est Church-Rosser quand deux termes équivalents sont joignables en 0 ou plus réductions.

- $\forall t, t_1, t_2.(t_1 \equiv t_2) \Rightarrow \exists u.(t_1 \longrightarrow^* u) \wedge (t_2 \longrightarrow^* u)$



Cas du λ-calcul

- le λ-calcul est Church-Rosser.
- implication pratique: pas de concurrence.
  - "aucun choix n'est définitif"
- nombre de réductions:
  - $K\ I\ (power\ 10\ 2\ I\ I) \longrightarrow\ \longrightarrow I$,
  - $K\ I\ (power\ 10\ 2\ I\ I) \longrightarrow^{(N)} I$ (avec N tres grand).
- "vu qu'on est confluent, autant réduire au plus rapide".

Normalisation Faible

Une forme normale n d'un terme t est un réduit de t qui ne se réduit pas

- $(t \longrightarrow^* n) \wedge \neg(\exists s, n \longrightarrow s)$

- I est une forme normale de $S\ K\ K$.

Un terme est faiblement normalisant s'il admet une forme normale.

- $S\ K\ K$ est faiblement normalisant.
- $K\ I\ \Omega$ est faiblement normalisant.
- Ω n'est pas faiblement normalisant.

Un modèle de calcul est faiblement normalisant si tous les termes sont faiblement normalisants.

- le λ-calcul n'est pas faiblement normalisant.

Unicité de la forme normale

- soit un terme t qui a deux formes normales n_1 et n_2,
- comme $t \longrightarrow^* n_1$ et $t \longrightarrow^* n_2$, par confluence, il existe n tel que $n_1 \longrightarrow^* n$ et $n_2 \longrightarrow^* n$,
- comme n_1 est une forme normale $n_1 = n$,
- comme n_2 est une forme normale $n_2 = n$,
- finalement $n_1 = n_2$.

Les termes du λ-calcul ont au plus une forme normale.

Normalisation Forte

Un terme est fortement normalisant (terminant) s'il n'existe pas de suite infinie de réductions depuis ce terme.

- $\nexists (t_n)_{n \in \mathbb{N}}.(t_0 = t) \wedge (\forall k \in \mathbb{N}, t_k \longrightarrow t_{k+1})$

- $S\ K\ K$ est fortement normalisant.
- Ω n'est pas fortement normalisant.
- $K\ I\ \Omega$ n'est pas fortement normalisant.

Un modèle de calcul est fortement normalisant (terminant) si tous les termes sont fortement normalisants.

- le λ-calcul n'est pas fortement normalisant (divergent).

Combinateur de point fixe

- λ-calcul divergent:
  - comment exprimer la récursion ?
  - nécessaire pour la Turing-completude.

Un combinateur de point fixe *fix* est une fonction(nelle), qui quand elle est appliquée à une fonction F, donne un point fixe de F.

- $F\ (\mathit{fix}\ F) \equiv (\mathit{fix}\ F)$

- plusieurs combinateurs de points fixe en λ-calcul.
- $Y = \lambda f.(\lambda x.f\ (x\ x))\ (\lambda x.f\ (x\ x))$
  - vérifier que $(Y\ F) \equiv F\ (Y\ F)$.
- Y permet de programmer des fonctions récursives.

Factorielle

- $isZero = \lambda n.n\ (\lambda y.F)\ K$ (égalité avec 0)
- $F = \lambda fn.(isZero\ \ n)\ 1\ (mult\ \ n\ \ (f\ \ (pred\ \ n)))$ (fonctionnelle)
- $fact = Y\ \ F$ (factorielle, point fixe de la fonctionnelle)

$$
\begin{array}{ll}
 & fact\ 3 \\
= & (Y\ \ F)\ 3 \\
\equiv & F\ (Y\ \ F)\ 3 \\
\equiv & (isZero\ 3)\ 1\ (mult\ 3\ ((Y\ \ F)\ (pred\ 3))) \\
\equiv & (mult\ 3\ ((Y\ \ F)\ 2)) \\
\equiv & (mult\ 3\ ((isZero\ 2)\ 1\ (mult\ 2\ ((Y\ \ F)\ (pred\ 2))))) \\
\equiv & (mult\ 3\ (mult\ 2\ ((Y\ \ F)\ 1)))
\end{array}
$$

λ-calcul pur

$$M, N ::= x \mid \lambda x.M \mid M\ N$$

$$(\beta)\,\frac{}{(\lambda x.M)\ N \longrightarrow M[N/x]} \qquad \frac{M \longrightarrow M'}{M\ N \longrightarrow M'\ N}$$

$$\frac{N \longrightarrow N'}{M\ N \longrightarrow M\ N'} \qquad \frac{M \longrightarrow M'}{\lambda x.M \longrightarrow \lambda x.M'}$$

- Syntaxe et sémantique du λ-calcul pur.
- Modèle de programmation fonctionnelle réaliste ?
  - non-déterminisme.
  - réduction sous les λ.

Une stratégie est un ensemble de règle de réduction tel qu'un terme à au plus un réduit.

- une stratégie est une sous-relation déterministe de $\longrightarrow$.

Appel par Valeur de Gauche à Droite (LtR-CbV)

$$\begin{array}{lcl} M, N & ::= & x \mid \lambda x.M \mid M\ N \\ V & ::= & x \mid \lambda x.M \mid x\ V \end{array}$$

$$(\beta)\,\frac{}{(\lambda x.M)\ V \longrightarrow M[V/x]} \qquad\qquad \frac{M \longrightarrow M'}{M\ N \longrightarrow M'\ N}$$

$$\frac{N \longrightarrow N'}{V\ N \longrightarrow V\ N'}$$

- Syntaxe des valeurs: termes qu'on ne peut pas réduire.
  - variable, abstraction, ou application bloquée.
- β-réduction uniquement si l'argument est une valeur.
- On réduit d'abord la fonction et apres l'argument.
- On ne réduit pas sous le λ.
- C'est la stratégie de la plupart des langages de programmation.

Appel par Nom (CbN)

$$M, N \quad ::= \quad x \mid \lambda x.M \mid M\ N$$

$$(\beta)\frac{}{(\lambda x.M)\ N \longrightarrow M[N/x]} \qquad\qquad \frac{M \longrightarrow M'}{M\ N \longrightarrow M'\ N}$$

- Syntaxe classique.
- β-réduction classique.
- On ne peut pas réduire l'argument.
- On ne réduit pas sous le λ.
- C'est la stratégie de *Haskell* (stratégie paresseuse).

Continuations

- programmer par continuation, c'est manipuler explicitement le futur du résultat
  - il est passé en paramètre.

```
let add x y k = k (x + y)

let n = add 1 2 (fun x -> add x 3 (fun y -> y))
```

- Programmer par continuation permet de manipuler l'environnement.

  - dans certain langage: `call/cc`

Stratégies CPS

$$
\begin{array}{lcl}
[x] & = & x \\
[\lambda x.M] & = & \lambda x.[\![M]\!] \\
[\![V]\!] & = & \lambda k.k\ [V] \\
[\![M\ N]\!] & = & \lambda k.[\![M]\!]\ (\lambda a.[\![N]\!](\lambda b.a\ b\ k))
\end{array}
$$

- - $[\![\delta I]\!] I$
  - $= (\lambda k.[\![\delta]\!]\ (\lambda a.[\![I]\!]\ (\lambda b.a\ b\ k)))\ I$
  - $\longrightarrow [\![\delta]\!]\ (\lambda a.[\![I]\!]\ (\lambda b.a\ b\ I))$
  - $= (\lambda k.k[\delta])\ (\lambda a.[\![I]\!]\ (\lambda b.a\ b\ I))$
  - $\longrightarrow (\lambda a.[\![I]\!]\ (\lambda b.a\ b\ I))[\delta]$
  - $\longrightarrow ([\![I]\!]\ (\lambda b.[\delta]\ b\ I))$
  - $\longrightarrow (\lambda k.k[I])\ (\lambda b.[\delta]\ b\ I))$
  - $\longrightarrow (\lambda b.[\delta]\ b\ I))\ [I]$
  - $\longrightarrow ([\delta]\ [I]\ I))$
  - $\ldots$
- Encodage par continuation: implémente la stratégie CbV-LtR.

Réduction Standard

- tout terme M s'écrit

$$\lambda x_1 x_2 \ldots x_k . M_1 \ M_2 \ \ldots \ M_n$$

avec $k \geq 0$, $n > 0$ et M_1 une variable ou une abstraction
  - (et si M_1 est une abstraction $n > 1$).
- si M_1 est une variable on dit que M est en forme normale de tête.
- sinon $M_1 = \lambda x.N_1$ et $(\lambda x.N_1 \ M_2)$ est le redex de tête.
- la réduction standard est la stratégie qui
  1. réduit le redex de tête s'il existe.
  2. applique la réduction standard aux $M_2 \ldots M_n$ si M est en forme normale de tête.
- la réduction standard termine si M a un forme normale.

Types : Motivation

- Certains termes paraissent "étranges" du point de vue de la programmation:
  - $\delta = \lambda x.x\ x$: on applique un programme à lui-même.
  - $\lambda fe.(f\ e)\ (e\ f)$
- On pourrait essayer d'éliminer de tels termes.
- Le typage peut permettre de discriminer des termes bien-formés.

Syntaxe des Types Simples

$$T, S ::= \alpha \mid T \longrightarrow S$$

- α: variables de type (différentes des variables de termes),
- $T \longrightarrow S$: type fonctionnel, T paramètre, S résultat,
- exemples:
  - $\alpha \longrightarrow \alpha$,
  - $\alpha \longrightarrow (\beta \longrightarrow \alpha)$
- parenthèsage à droite: $\alpha \longrightarrow \beta \longrightarrow \gamma \;=\; \alpha \longrightarrow (\beta \longrightarrow \gamma)$

Typage

Environnement

Un environnement de typage Γ est une fonction partielle des variables de terme dans les types.

- $\Gamma = x_1 : T_1, \ldots, x_n : T_n$

- On peut modifier l'ordre de Γ.

Jugement

Le jugement de typage $\Gamma \vdash M : T$ indique que, sous l'environnement Γ, le terme M est typable avec le type T.

- $\emptyset \vdash I : \alpha \longrightarrow \alpha$
- $\emptyset \vdash I : (\alpha \longrightarrow \alpha) \longrightarrow (\alpha \longrightarrow \alpha)$
- $\emptyset \vdash K : \alpha \longrightarrow \beta \longrightarrow \alpha$
- $x : \alpha, y : \alpha \longrightarrow \beta \vdash \lambda z.z\ (y\ x) : (\beta \longrightarrow \gamma) \longrightarrow \gamma$

Règles

$$(\textbf{Var})\frac{}{\Gamma, x : T \vdash x : T} \qquad (\textbf{Abs})\frac{\Gamma, x : T \vdash M : S}{\Gamma \vdash \lambda x.M : T \longrightarrow S}$$

$$(\textbf{App})\frac{\Gamma \vdash M : S \longrightarrow T \qquad \Gamma \vdash N : S}{\Gamma \vdash M\ N : T}$$

- typer une variable: elle doit apparaitre dans l'environnement,
- typer une abstraction: un type $T \longrightarrow S$ si le paramètre à un type T et le corps de la fonction un type S
- typer une application: M doit avoir un type fonctionnel et N le type du paramètre de M, et $M\ N$ a le type du résultat.
- de haut en bas: déduction.
- de bas en haut: inférence.

Dérivation

- typage de $K\ I\ I = (\lambda z_1 z_2.z_1)\ (\lambda y.y)\ (\lambda x.x)$

$$
\dfrac{
  (\textbf{App})\,\dfrac{
    (\textbf{Abs})\,\dfrac{
      (\textbf{Abs})\,\dfrac{
        (\textbf{Var})\,\dfrac{}{z_1 : \alpha \to \alpha, z_2 : \alpha \to \alpha \vdash z_1 : \alpha \to \alpha}
      }{z_1 : \alpha \to \alpha \vdash \lambda z_2.z_1 : (\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)}
    }{\emptyset \vdash K : (\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)}
    \quad
    (\textbf{Abs})\,\dfrac{
      (\textbf{Var})\,\dfrac{}{y : \alpha \vdash y : \alpha}
    }{\emptyset \vdash I : \alpha \to \alpha}
  }{\emptyset \vdash K\ I : (\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)}
  \quad
  (\textbf{Abs})\,\dfrac{
    (\textbf{Var})\,\dfrac{}{x : \alpha \vdash x : \alpha}
  }{\emptyset \vdash I : \alpha \to \alpha}
}{\emptyset \vdash K\ I\ I : \alpha \to \alpha}
$$

Inférence

- on part du terme à typer,
- on crée des contraintes de typage en remontant la dérivation,
- on unifie les contraintes de typage:
  - succes: on récupère le type le plus général,
  - échec: le terme n'est pas typable.

$$
\dfrac{
\textbf{(App)}\ \dfrac{
\textbf{(Abs)}\ \dfrac{
\textbf{(Abs)}\ \dfrac{
\textbf{(Var)}\ \dfrac{}{z_1 : T_4, z_2 : T_1 \vdash z_1 : T_0}
}{z_1 : T_4 \vdash \lambda z_2.z_1 : T_1 \to T_0}
}{\emptyset \vdash K : T_4 \to T_1 \to T_0}
\quad
\textbf{(Abs)}\ \dfrac{
\textbf{(Var)}\ \dfrac{}{y : T_5 \vdash y : T_6}
}{\emptyset \vdash I : T_4}
}{\emptyset \vdash K\ I : T_1 \to T_0}
\quad
\textbf{(Abs)}\ \dfrac{
\textbf{(Var)}\ \dfrac{}{x : T_2 \vdash x : T_3}
}{\emptyset \vdash I : T_1}
}{\emptyset \vdash K\ I\ I : T_0}
$$

$$\{T_1 = T_2 \to T_3, T_2 = T_3, T_4 = T_5 \to T_6, T_5 = T_6, T_0 = T_4\}$$

s'unifie en

$$T_0 = T_4 = \alpha \longrightarrow \alpha, T_1 = \beta \longrightarrow \beta, T_2 = T_3 = \alpha, T_5 = T_6 = \beta$$

Algorithmes

- On explore le terme en construisant la dérivation.
  - les (**Var**) produisent des contraintes,
  - les (**Abs**) produisent des contraintes et génèrent des variables,
  - les (**App**) génèrent des variables.
- Algorithmes d'unification:
  - Martelli-Montanari, W, Hindley-Milner.

Termes non-typables

- typage de $\delta = \lambda x.x\ x$
  - $\emptyset \vdash \delta : T_0$
  - (**Abs**): $x : T_1 \vdash x\ x : T_2$ et $T_0 = T_1 \longrightarrow T_2$
  - (**App**): (1) $x : T_1 \vdash x : T_3 \longrightarrow T_2$, (2) $x : T_1 \vdash x : T_3$
  - (**Var**) pour (1), on a $T_1 = T_3 \longrightarrow T_2$
  - (**Var**) pour (2), on a $T_1 = T_3$
  - l'unification explose devant $T_3 = T_3 \longrightarrow T_2$

Propriétés

Réduction assujettie

Si $\Gamma \vdash M : T$ et $M \longrightarrow M'$, alors $\Gamma \vdash M' : T$.

Terminaison

Si $\Gamma \vdash M : T$, alors M est fortement normalisant.

- le λ-calcul simplement typé termine.
  - entre autres, Ω n'est pas typable.
- plusieurs preuves:
  - relation logiques (interpretation des types), David, Gandi.
- la réduction est élémentaire en la taille du terme.

Types Habités

On dit que le type T est habité s'il existe M tel que $\Gamma \vdash M : T$.

- $\alpha \longrightarrow \alpha$ est habité par I,
- $\alpha \longrightarrow \beta$ n'est pas habité,
- $(\alpha \longrightarrow \beta) \longrightarrow \alpha \longrightarrow \beta$ est habité (par $\lambda xy.x\ y$).
- $(\alpha \longrightarrow \beta) \longrightarrow \beta$ n'est pas habité.
- "on doit utiliser les types des paramètres pour produire le type résultat".

Correspondance de Curry-Howard

- les types simples sont les formules de la logique propositionnelle.
- un type est habité si la formule correspondante est prouvable en logique intuitionniste.
- un terme est une preuve: la dérivation de typage du terme est la dérivation de preuve.
- la réduction d'un terme est l'élimination des coupures dans la preuve correspondante.

- "La Programmation c'est de la Logique" (et vice-versa),
  - construction de *theorem provers* (*Coq*, *Agda*, *Isabelle*)
- autre correspondance: logique classique et `call/cc` ($\lambda_{\mu\tilde{\mu}}$)

SORBONNE UNIVERSITÉ

La Suite

Prochain Cours

- Polymorphisme: $\emptyset \vdash \lambda x.x\ x : (\forall \alpha.\alpha \longrightarrow \alpha) \longrightarrow (\forall \alpha.\alpha \longrightarrow \alpha)$
- Inférence de ML (Hindley-Milner).
- Typage des opérateurs impératifs.

En TD

Typer $S\ K\ K$.