Sorbonne Université - Master Informatique
Paradigmes de Programmation Concurrente
MU5IN553

Cours 2 - Algèbre de processus

Carlos Agon - Romain Demangeon

24 septembre 2024

Calculus of Communicating Systems

Plan du cours

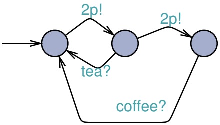
- Syntaxe et représentations graphiques
- Équivalence structurelle entre processus
- Sémantique opérationnelle entre processus
  - Sémantique de réactions
  - Sémantique de transitions : LTS (Labelled Transition System)

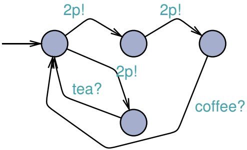
Calculus of Communicating Systems

Calculus of Communicating Systems - Robin Milner (1980)

Concepts

- Les composants d'un système sont des automates qui communiquent avec d'autres automates
- Utilisé pour la modélisation de systèmes interactifs.





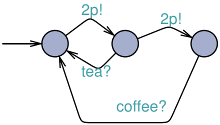
Le langage reconnu par ces automates est

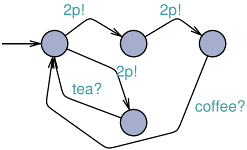
Calculus of Communicating Systems

Calculus of Communicating Systems - Robin Milner (1980)

Concepts

- Les composants d'un système sont des automates qui communiquent avec d'autres automates
- Utilisé pour la modélisation de systèmes interactifs.





Le langage reconnu par ces automates est (2p !.(tea ? + 2p.coffee ?))*
2p !.(tea ? + 2p !.coffee ?) $\neq$ 2p !.tea ? + 2p !.2p !.coffee ?

Processus séquentiels

Définition

$\mathcal{P}^{seq} ::= A\langle a_1, ..., a_n\rangle \mid \sum_{i \in I} \alpha_i.P_i$

$\alpha.P$ l'action α entraîne le processus P
Si $I = \emptyset$ alors $P = 0$
On assume que tout processus peut être défini par une équation :
$A(\vec{a}) =_{def} P_A$
avec P_A une addition et $\vec{a} = a_1, ..., a_n$ tous différents

Exemples

$A(a, b) =_{def} a.A\langle a, b\rangle + b.B\langle a, a\rangle$
$B(c, d) =_{def} c.d.0$ avec 0 la somme vide

Congruence structurelle

Si $\vec{b} = b_1, ..., b_n$ (pas forcement différents) alors A $\langle\vec{b}\rangle$ est équivalent à $\{\vec{b}/\vec{a}\}P_A$

Congruence structurelle

Définition

Soit P et $Q \in \mathcal{P}^{seq}$ $P \equiv Q$ si on peut transformer l'un dans l'autre en remplaçant les occurrences de $A\langle \vec{b} \rangle$ par $\{\vec{b}/\vec{a}\}P_A$ (et vice-versa) pour un $A(\vec{a}) =_{def} P_A$

Exemple :

soit
$A(a, b) =_{def} a.A\langle a, b\rangle + b.B\langle a, a\rangle$
$B(c, d) =_{def} c.d.O$
alors
$B\langle a, a\rangle \equiv a.a.O$
$A\langle a, b\rangle \equiv a.(a.A\langle a, b\rangle + b.B\langle a, a\rangle) + b.a.a.O$

Systèmes de transition étiquettés
Labelled Transition Systems (LTS)

Actions

$\mathcal{N}$ = {a,b,...} et $\overline{\mathcal{N}} = \{\overline{a} | a \in \mathcal{N}\}$ avec $\mathcal{N} \cap \overline{\mathcal{N}} = \emptyset$
$\mathcal{L} = \mathcal{N} \cup \overline{\mathcal{N}} = Act$

Définition LTS

Labelled transition systems (LTS) sur $Act = (\mathcal{Q}, \mathcal{T})$ avec :

- $\mathcal{Q}$ un ensemble d'états
- $\mathcal{T}$ une relation ternaire $\mathcal{T} \subseteq (\mathcal{Q} \times Act \times \mathcal{Q})$

On note $q \xrightarrow{\alpha} q'$ si $(q, \alpha, q') \in \mathcal{T}$

LTS de processus séquentiels

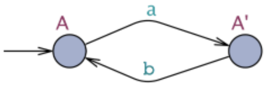
Définition

Labelled transition systems (LTS) sur *Act* avec :

- $\mathcal{Q} = \mathcal{P}^{seq}$
- Si $P \equiv \sum_{i \in I} \alpha_i . P_i$ alors $\forall i \in I, P \xrightarrow{\alpha_i} P_i$

Exemple

A $=_{def}$ a.A'   A' $=_{def}$ b. A

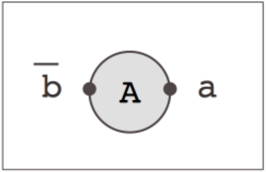


Processus concurrents

- Comment un ou plusieurs processus interagissent ?
- Distinction entre actions internes et externes

Flowgraphs

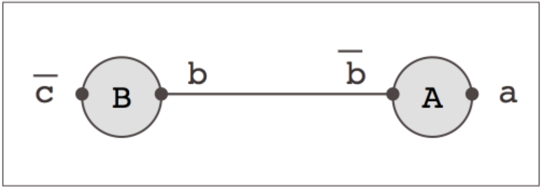
$$A =_{def} a.A' \qquad A' =_{def} \bar{b}.\ A$$



Interaction

- Une paire complémentaire de ports $(b, \bar{b})$ est un moyen d'interaction entre deux processus (ce n'est pas un buffer ni un channel).

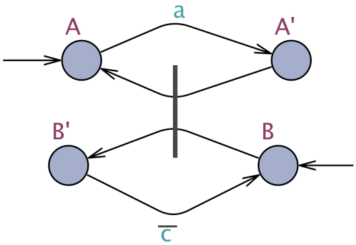
$$A =_{def} a.A' \qquad A' =_{def} \bar{b}.\ A$$
$$B =_{def} b.\ B' \qquad B' =_{def} \bar{c}.\ B$$



Actions internes

A $=_{def}$ a.A'　　A' $=_{def}$ $\bar{b}$. A

B $=_{def}$ b. B'　　B' $=_{def}$ $\bar{c}$. B



- l'action *a* se produit et induit les processus A' | B
- l'action partagée se produit et induit A | B'
- *a* et $\bar{c}$ dans n'importe quel ordre induisent A' | B

L'action partagée (interne, reaction) est notée τ et Act $=_{def}$ $\mathcal{L} \cup \tau$

Calculus of Communicating Systems (CCS)

Définition

$\mathcal{P} ::= A\langle a_1, ..., a_n\rangle \mid \sum_{i \in I} \alpha_i . P_i \mid \quad P_1 | P_2 \quad \mid new\ a\ P \mid 0$

Notation

On écrit $a.b$ à la place de $a.b.0$ et
$\nu a.P$ à la place de $new\ a\ P$

Réaction

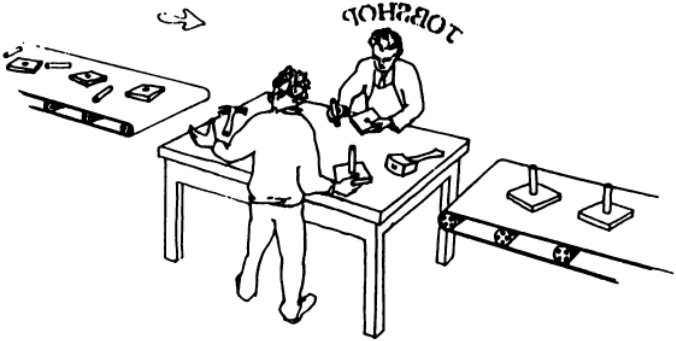
Soit $P \equiv \bar{b}.A | b.B'$ alors $P \rightarrow A | B'$

Restriction

Si P $= (\nu a) a.b$ alors a est lié dans P.
$(\nu a) a.b \equiv (\nu a') a'.b$

Exemple

The jobshop



Réactions alternatives

Attention : $\nu a P|Q \equiv (\nu a P)|Q$ et non $\nu a(P|Q)$

Réaction

Soit $P = \nu a((a.Q_1 + b.Q_2)|\overline{a}.0)|(\overline{b}.R_1 + \overline{a}.R_2)$ alors

$P \rightarrow \nu a Q_1|(\overline{b}.R_1 + \overline{a}.R_2)$ et
$P \rightarrow \nu a(Q_2|\overline{a})|R_1$ mais
$P \nrightarrow \nu a(Q_1|\overline{a})|R_2$

Renommage

$P \equiv \nu a'((a'.Q_1' + b.Q_2')|\overline{a'}.0)|(\overline{b}.R_1 + \overline{a}.R_2)$
comme Q_1 et Q_2 peuvent avoir des a alors on doit les remplacer par :
$Q_1' = \{a'/a\}Q_1$ et $Q_2' = \{a'/a\}Q_2$

CCS Syntaxe

Syntaxe

Soit $\mathcal{N}$ ={a,b,c..} on définit Act $= \{a, \overline{a}, b, \overline{b}, c...\} \cup \{\tau\}$
On définit l'ensemble de processus du CCS par :

- $D(\overrightarrow{x}) ::= P$
- $P ::= 0 \quad | \quad \alpha.P \quad | \quad D\langle\overrightarrow{v}\rangle \quad | \quad P + P \quad | \quad P|P \quad | \quad \nu aP$
- $\alpha ::= a|\overline{b}|\tau$

Quelques formules

- $a.b.A + B$
- $(\nu b)(a.0 + \overline{a}.0)$
- $(\nu\tau)A + B$

Sémantique de Réduction : Règles de réaction

Règles de reaction

1. TAU : $\dfrac{}{\tau.P + M \to P}$
2. REACT : $\dfrac{}{(a.P + M)|(\overline{a}.Q + N) \to P|Q}$
3. PAR : $\dfrac{P \to P'}{P|Q \to P'|Q}$
4. RES : $\dfrac{P \to P'}{\nu aP \to \nu aP'}$
5. STRUCT : $\dfrac{P \to P'}{Q \to Q'}$ if $P \equiv Q$ et $P' \equiv Q'$

Déduction

Soit $P = \nu a((a.Q_1 + b.Q_2)|\overline{a})|(\overline{b}.R_1 + \overline{a}.R_2)$
On veut prouver que à partir de P on peut déduire $\nu a Q_1|(\overline{b}.R_1 + \overline{a}.R_2)$

Déduction

Soit $P = \nu a((a.Q_1 + b.Q_2)|\overline{a})|(\overline{b}.R_1 + \overline{a}.R_2)$
On veut prouver que à partir de P on peut déduire $\nu a Q_1|(\overline{b}.R_1 + \overline{a}.R_2)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(a.Q_1 + b.Q_2)|\overline{a} \rightarrow Q_1 \mid \mathbf{0}}\ (\text{REACT})}{(a.Q_1 + b.Q_2)|\overline{a} \rightarrow Q_1}\ (\text{STRUCT})}{\nu a((a.Q_1 + b.Q_2)|\overline{a}) \rightarrow \nu a.Q_1}\ (\text{RES})}{\nu a((a.Q_1 + b.Q_2)|\overline{a})|(\overline{b}.R_1 + \overline{a}.R_2) \rightarrow \nu a Q_1|(\overline{b}.R_1 + \overline{a}.R_2)}\ (\text{PAR})$$

Congruence de processus

Définition context

Un contexte de processus $\mathcal{C}$ est une expression avec un trou [ ].
$\mathcal{C}$::= [ ] | $\alpha.\mathcal{C} + \mathcal{M}$ | new a$\mathcal{C}$ | $\mathcal{C}|P$ | $P|\mathcal{C}$
Les contextes élémentaires sont :
$\alpha.[\,] + \mathcal{M}$, new a [ ], [ ] | P et P | [ ]
$\mathcal{C}[Q]$ dénote le fait de remplir le contexte $\mathcal{C}$ avec le processus Q.

Définition Congruence de processus

Soit $\cong$ une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}$ alors $\cong$ est une congruence de processus si elle est preservée par tous les contextes élémentaires,
c-à-d si P $\cong$ Q alors :

$$\alpha.P + M \cong \alpha.Q + M$$

new a P $\cong$ new a Q

P | R $\cong$ Q | R

R | Q $\cong$ R | Q

$\cong$ arbitraire est une congruence de processus ssi $\forall \mathcal{C}\ P \cong Q \Rightarrow \mathcal{C}[P] \cong \mathcal{C}[Q]$

Sémantique de Transition : LTS + Règles de transition

Définition LTS pour un processus P

Le LTS associé à un processus P = <Q,T> avec :

- Q = {P' | P $\xrightarrow{*}$ P' est possible}
- T = {P' $\xrightarrow{\alpha}$ P'' | P' $\xrightarrow{\alpha}$ P'' est possible $\wedge$ P', P'' $\in$ Q }

Transitions et chemins

- Une transition P' $\xrightarrow{\alpha}$ P'' est possible si on peut l'inférer à partir de règles de transition.
- Un chemin $P_0 \xrightarrow{+} P_n$ est possible s'il existe $P_1, ..., P_{n-1}, \alpha_1, ..., \alpha_n$ t.q. $P_0 \xrightarrow{\alpha_1} P_1$; $P_i \xrightarrow{\alpha_{i+1}} P_{i+1}$; $P_{n-1} \xrightarrow{\alpha_n} P_n$ sont toutes possibles.
- Un chemin P' $\xrightarrow{*}$ P'' est possible si P' $\equiv$ P'' ou P' $\xrightarrow{+}$ P''

Règles de transition

$$\frac{}{\alpha.P \xrightarrow{\alpha} P}\ (\mathrm{act}) \qquad \frac{P \xrightarrow{\bar{a}} P' \qquad Q \xrightarrow{a} Q'}{P|Q \xrightarrow{\tau} P'|Q'}\ (\mathrm{sync})$$

$$\frac{P \xrightarrow{\alpha} P'}{P|Q \xrightarrow{\alpha} P'|Q}\ (\mathrm{par}) \qquad \frac{P \xrightarrow{\alpha} P'}{P + Q \xrightarrow{\alpha} P'}\ (\mathrm{sum})$$

$$\frac{P \xrightarrow{\alpha} P' \qquad \alpha \notin \{\bar{a}, a\}}{\nu a P \xrightarrow{\alpha} \nu a P'}\ (\mathrm{res}) \qquad \frac{P \xrightarrow{\alpha} P'}{\mathrm{P[a/b]} \xrightarrow{\alpha[a/b]} \mathrm{P'\ [a/b]}}\ (\mathrm{ren})$$

$$\frac{P\{v_1/x_1, \ldots, v_n/x_n\} \xrightarrow{\alpha} P' \qquad \text{avec } D(x_1, .., x_n) = P}{D\langle v_1, .., v_n\rangle \xrightarrow{\alpha} P'}\ (\mathrm{call})$$

$$\frac{P \equiv P' \qquad P \xrightarrow{\alpha} Q \qquad Q \equiv Q'}{P' \xrightarrow{\alpha} Q'}\ (\mathrm{struct})$$

Déduction

Soient :

A $=_{def}$ $a.A'$ A' $=_{def}$ $\overline{b}.A$

B $=_{def}$ $b.B'$ B' $=_{def}$ $\overline{c}.B$

On veut prouver $\nu b(A'|B) \xrightarrow{\tau} \nu b(A|B')$

Déduction

Soient :

A $=_{def}$ $a.A'$ A' $=_{def}$ $\overline{b}.A$

B $=_{def}$ $b.B'$ B' $=_{def}$ $\overline{c}.B$

On veut prouver $\nu b(A'|B) \xrightarrow{\tau} \nu b(A|B')$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\overline{b}.A \xrightarrow{\overline{b}} A}\,\text{(act)}}{\text{A'} \xrightarrow{\overline{b}} \text{A}}\,\text{(call)} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\text{b.B'} \xrightarrow{b} \text{B'}}\,\text{(act)}}{\text{B} \xrightarrow{b} \text{B'}}\,\text{(call)}}{A'|B \xrightarrow{\tau} A|B'}\,\text{(sync)}}{\nu b(A'|B) \xrightarrow{\tau} \nu b(A|B')}\,\text{(res)}$$

Réactions vs Transitions

$a.b \;\mid\; \overline{a}$

Réplication

CCS avec réception répliquée est donné par la syntaxe suivante :
$P ::= O \mid P|P \mid \sum_i \alpha_i.P_i \mid (\nu a)P \mid !a.P$

avec la règle : $(\overline{a}.Q \mid !a.P) \to (Q \mid P \mid !a.P)$

$!a.(\overline{b} \mid \overline{b} \mid \overline{c}) \mid !b.(\overline{c} \mid \overline{c}) \mid \overline{a} \mid \overline{a} \mid \overline{b} \mid c$

Références

Robin Milner
"Communicating and mobile systems : the π-calculus"