TAS TD 1 - Lambda-Calcul Pur

Le λ-calcul *fort* est défini par la syntaxe :

$$M ::= x \mid \lambda x.M \mid MN \quad \text{ou } x \text{ est une variable}$$

et par les règles de sémantique opérationnelle à petit pas :

$$\frac{}{(\lambda x.M)N \to M[N/x]}\,\beta \qquad \frac{M \to M'}{MN \to M'N}\,\mu_l \qquad \frac{N \to N'}{MN \to MN'}\,\mu_r \qquad \frac{M \to M'}{\lambda x.M \to \lambda x.M'}\,\xi$$

Notations

— L'application est *associative à gauche* : $(MN)P = MNP$.
— Le corps d'une abstraction s'etend le plus à droite possible : $\lambda x.(MN) = \lambda x.MN$.
— Les suites d'abstractions sont contractées : $\lambda a.\lambda b.M = \lambda ab.M$.
— La clôture réflexive transitive de la rèduction est notée $\to^*$.
— Sa clôture réflexive transitive symétrique est notée $=_\beta$.

1 Réductions

Réduire, quand c'est possible, les λ-termes suivants :

1. $I = \lambda x.x$
2. $I\ I$
3. $I\ I\ I$
4. $K = \lambda xy.x$
5. $K\ I\ I$
6. $S = \lambda xyz.(xz)\ (yz)$
7. $S\ I\ I\ I$
8. $S\ K\ K$

2 Graphes de réduction

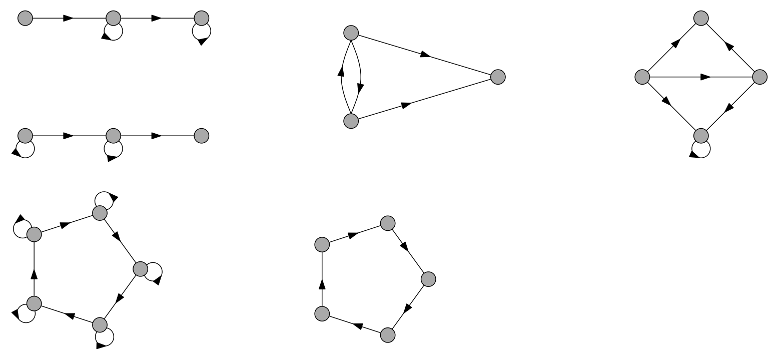
Le *graphe de réduction* d'un λ-terme a pour noeuds les réduits de M et une arrÃªte entre ces réduits pour chaque pas de réduction possible.

1. Donner les graphes de réduction des termes suivants en étiquetant les noeuds par les termes ($\delta = \lambda x.xx$).

$$Ix \qquad I(Ix) \qquad II(III) \qquad \delta = \delta\delta \qquad (\lambda x.\delta x)(\lambda x.\delta x) \qquad (\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx)$$

$$(\lambda x.I)((\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx))$$

2. Question inverse :
Indice : on pourra utiliser les λ-termes $I, \delta, \Omega, F = \lambda x.I$ et $A = \lambda xy.yxy$.



3 Entiers de Church

L'interprétation de Church d'un entier n est le λ-terme $[\![n]\!] = \lambda fx.f^n x$, c'est à dire n itérations de la fonction f appliquées à x.

1. Ecrire $[\![0]\!]$ et $[\![3]\!]$
2. Ecrire les λ-termes interprétant les fonctions successeur, addition, multiplication et puissance.
On interprète les booléens par $T = K = \lambda xy.x$ et $\bot = 0 = \lambda xy.y$.
3. Donner une interprétation de `if then else`.
4. Comment interpréter les couples ?
5. Proposer un λ-terme décidant si un étudiant peut accéder au campus en fonction de son numéro étudiant.
6. Proposer un λ-terme interprétant la fonction prédécesseur .

4 Listes

On peut représenter la liste $[e_1, e_2, \ldots, e_k]$ par le terme $\lambda cn.c\,e_1\,(c\,e_2\,\ldots\,(c\,e_k\,n)\ldots)$

1. Donner deux termes réalisant la liste vide et la construction d'une liste (à partir d'une liste et d'un élément).
2. Donner un λ-terme réalisant la concaténation de deux listes.
3. Donner un λ-terme réalisant l'extraction de la tête.
4. Donner un λ-terme réalisant un *map* sur une liste.
5. Donner un λ-terme réalisant un *reduce/fold* sur une liste.
6. Donner un λ-terme calculant la longueur d'une liste.
7. Donner un λ-terme réalisant l'extraction de la queue.
8. Donner un λ-terme réalisant un *filter* sur une liste.
9. Expliquer comment représenter un arbre binaire en λ-calcul.

5 Indices de De Bruijn

Pour de nombreuses raisons, il peut être pratique de se débarrasser de l'α-conversion en ayant une représentation unique des λ-termes. La syntaxe du λ-calcul en indice de De Bruijn est définie par la grammaire :

$$M ::= n \mid MM \mid \lambda.M$$

où n est un entier naturel. Intuitivement n représente la variable liée par le $(n+1)$-ème λ obtenu en remontant le terme. Ainsi $\lambda\lambda.(10)(\lambda.20)$ désigne le λ-terme $\lambda xy.(xy)(\lambda z.xz)$.

1. Ecrire les règles décrivant la sémantique opérationnelle à petits pas du λ-calcul en indice de De Bruijn.
2. Ecrire la multiplication en indice de De Bruijn.
3. Donner la traduction du λ-calcul dans celui en indice de De Bruijn, et la traduction inverse.

6 Stratégies

Une stratégie de réduction pour le λ-calcul est une relation $\rightarrow_s \subseteq \rightarrow$ qui est déterministe.

1. Que signifie "$\rightarrow_s$ est déterministe" ?

6.1 Call-by-value

On définit le λ-calcul en appel par valeur en définissant (x est une variable) :

— les termes : $M ::= x \mid \lambda x.M \mid MN$

— les valeurs : $V ::= x \mid \lambda x.M$

— la sémantique opérationnelle à petits pas :

$$\frac{}{(\lambda x.M)V \rightarrow_v M[V/x]}\,\beta \qquad \frac{M \rightarrow_v M'}{MN \rightarrow_v M'N}\,\mu_l \qquad \frac{N \rightarrow_v N'}{VN \rightarrow_v VN'}\,\mu_r$$

1. Réduisez les termes $\delta(I\delta I)$ et $I(F\delta I)$ avec la relation $\rightarrow_v$.
2. Prouvez que $\rightarrow_v$ est déterministe.
3. Cette présentation est appelée "left-to-right", quelle est la présentation "right-to-left" ?

6.2 Call-by-name

La sémantique du λ-calcul en appel par nom est :

$$\frac{}{(\lambda x.M)N \rightarrow_n M[N/x]}\,\beta \qquad \frac{M \rightarrow_n M'}{MN \rightarrow_n M'N}\,\mu_l$$

1. Répondez aux questions prècèdentes pour l'appel par nom.

7 Combinateurs de point fixe

Un λ-terme M est un *point-fixe* d'un λ-terme F si $M =_\beta FM$. Un terme C est un *combinateur de point fixe* si pour tout terme F, CF est un point fixe de F.

On définit les termes suivants :

$$p = \lambda fx.f(xx) \qquad \mathbf{Y} = \lambda f.pf(pf) \qquad q = \lambda xy.y(xxy) \qquad \mathbf{Theta} = qq$$

1. Montrer que $\mathbf{Y}$ et $\mathbf{Theta}$ sont des combinateurs de point fixe.