Projet pour le cours *Risk Management*

À rendre le 15 mars 2021 à minuit

L'objectif du projet est de sélectionner un portefeuille d'actions en intégrant progressivement divers indicateurs de risque dans le critère de sélection. On commence ainsi avec une sélection naïve utilisant uniquement une espérance de rendement. Puis ce rendement est ajusté pour prendre en compte successivement un risque de modèle, le risque de marché et le risque de liquidité.

Pour commencer, vous devez sélectionner 20 actions. Pour chaque titre, vous devez avoir un historique de valeurs quotidiennes sur une durée d'environ 3 ans. Vous pouvez par exemple importer ces données dans un fichier csv grâce à Yahoo finance. vous ferez en sorte que tous vos historiques soient synchronisés. Sur le même site, vous pourrez trouver un autre indicateur qui sera utile à ce projet : la capitalisation de chacune des 20 entreprises.

Ces 20 actions constituent l'univers sur lequel vous pouvez investir. Vous devez respecter un contrainte de poids maximal de 10% par titre dans votre portefeuille (et de 0% minimum) au moment de la constitution du portefeuille (c'est-à-dire à la date la plus récente de votre historique). Le but **ne** sera **pas** de voir l'évolution de la valeur du portefeuille dans le temps.

What I expect from you is a report as a sole pdf file (either in English or in French) with all your detailed answers (do not hesitate to include graphs if it is relevant). In addition, provide me with the files you used for the calculations and display your code in the appendix of your report. Moreover, everything you want me to see must be in your pdf (do not ask me to look at your answer in another file, for example).

Groups of three or four students.

1 Rendement espéré

Dans un premier temps, le seul critère de sélection est le rendement espéré. Celui-ci peut être estimé de manières différentes. Pour commencer, on suppose que la dynamique de chaque titre est décrite par un mouvement brownien géométrique avec une tendance :

$$X(t) = X(0) \exp\left(\sigma B(t) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t\right),$$

où X est le prix de l'action, σ sa volatilité, μ sa tendance et B un mouvement brownien classique.

Question 1. *A partir d'un historique d'observations, comment peut-on déterminer le paramètre de tendance le plus vraisemblable ?*

Question 2. *Quel est le paramètre de tendance de chacune des 20 actions ? Indiquez par ailleurs la significativité de chacun de ces paramètres (l'hypothèse nulle du test statistique demandé est une* *tendance nulle ; vous pouvez estimer la p-value de chaque tendance trouvée à l'aide d'un test bien choisi et dont vous justifierez le choix, ou bien à l'aide d'un bootstrap).*

Question 3. *Déduisez-en le portefeuille maximisant le rendement espéré, en supposant que la même dynamique décrit aussi ce qui se passera dans l'avenir et en veillant à bien respecter la contrainte énoncée au début du projet (*10% *maximum par titre).*

Jusqu'à présent nous avons travaillé avec un modèle particulier mais qui ne représente peut-être pas au mieux la dynamique réelle des prix. Ainsi cette méthode est-elle soumise à un risque de modèle. On va tenter de limiter celui-ci en proposant un autre modèle.

Question 4. *D'une manière générale, hormis la mauvaise spécification d'un modèle, quelle peuvent être les différentes natures de risque de modèle ?*

Le nouveau modèle que nous voulons utiliser est un mouvement brownien fractionnaire géométrique sans paramètre de tendance (ce qui signifie que le logarithme des prix suit un mouvement brownien fractionnaire (mBf)). Ainsi, pour chaque titre, deux paramètres suffisent à la modélisation : un paramètre d'échelle et un exposant de Hurst.

Question 5. *Quel est l'exposant de Hurst de chacune des 20 actions ? (utilisez l'estimateur vu en cours) Indiquez par ailleurs la significativité de chacun de ces exposants de Hurst (l'hypothèse nulle du test statistique demandé est un exposant de Hurst égal à 0.5, ce qui correspond au cas d'un mouvement brownien classique ; vous pouvez estimer la p-value de chaque tendance trouvée à l'aide d'un test bien choisi et dont vous justifierez le choix, ou bien à l'aide d'un bootstrap paramétrique).*

Un exposant de Hurst n'est pas interprétable comme un rendement espéré, contrairement au paramètre de tendance du premier modèle. Néanmoins, c'est une information qui peut être utilisée pour construire un indicateur proche d'un rendement espéré.

Question 6. *Comment peut-on interpréter la valeur d'un exposant de Hurst ? Commentez les valeurs obtenues pour les 20 actions.*

Question 7. *Proposez un indicateur proche d'un rendement espéré (dans le sens où vous pouvez le voir comme un estimateur de rendement espéré, estimateur dont les propriétés de convergence ne nous intéresseront pas ici) et utilisant l'exposant de Hurst.*

Question 8. *Déduisez-en le portefeuille maximisant ce nouvel estimateur de rendement espéré, en supposant que la même dynamique décrit aussi ce qui se passera dans l'avenir et en veillant à bien respecter la contrainte énoncée au début du projet (*10% *maximum par titre). Comparez ce portefeuille avec celui obtenu dans la première méthode.*

2 Ajustement au risque de marché

Dans la section précédente, on a optimisé un portefeuille prenant uniquement en compte un critère de rendement. Il s'agissait d'un problème linéaire. Toutefois, on peut estimer qu'on a intérêt à ne pas mettre trop de poids dans un titre ayant un rendement espéré correct mais un risque de marché élevé, ce risque de marché étant représenté dans un premier temps par sa volatilité puis par une value-at-risk (VaR).

2.1 Volatilité comme mesure du risque

Nous cherchons alors à maximiser

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{20}\omega_i r_i\right) - \lambda\sqrt{Var\left(\sum_{i=1}^{20}\omega_i r_i\right)}, \tag{1}$$

où ω_i est le poids du titre i (les mêmes contraintes que précédemment s'appliquent : $\omega_i \in [0\%, 10\%]$, $\sum_{i=1}^{20}\omega_i = 1$), r_i la variable aléatoire de son rendement à un certain horizon h, Var est la variance et λ est l'aversion au risque. Ce problème de maximisation est un problème non-linéaire (mais qui peut être résolu dans Excel si vous avez choisi d'utiliser Excel, grâce au *solver*). Nous pourrions représenter une frontière efficiente avec plusieurs niveaux d'aversion au risque. Néanmoins, nous allons nous concentrer sur un choix arbitraire d'aversion au risque.

Question 9. *Comment interpréter la valeur de λ ? Choisissez alors un λ pour la suite du projet et justifiez votre choix.*

Choisissez ensuite un horizon d'investissement, h, par exemple égal à un jour, ou un mois. Le modèle que l'on utilise est le modèle gaussien standard avec tendance introduit au début du projet.

Question 10. *Le résultat de l'optimisation va-t-il dépendre de h ? Justifiez.*

Question 11. *Après avoir estimé la matrice de covariance de votre univers d'investissement, déduisez-en le portefeuille maximisant le rendement ajusté défini à l'équation* (1). *Comparez ce portefeuille avec celui obtenu sans ajustement au risque de marché.*

On veut maintenant utiliser le deuxième modèle de dynamique, à savoir le mouvement brownien fractionnaire géométrique. On a déjà déterminé le rendement espéré correspondant à ce modèle. Il faut maintenant déterminer la matrice de covariance. Celle-ci doit-être cohérente avec le choix du modèle. En l'occurrence, ce ne sera pas la matrice de covariance des rendements logarithmiques, car dans le modèle du mouvement brownien fractionnaire, les rendements sont auto-corrélés et donc une partie de ceux-ci est prévisible. Ce qui nous intéresse, comme mesure de risque, concerne uniquement la partie incertaine des rendements. Pour un seul titre, il s'agit du paramètre d'échelle. Pour plusieurs titres, il faut d'abord définir un modèle de mouvement brownien fractionnaire multivarié. Les processus $\ln(x_i)$ et $\ln(x_j)$ sont deux mouvements browniens fractionnaires (x_i et x_j sont les processus de prix des titres i et j ; le prix à l'instant t du titre i est donc $x_i(t)$) liés par la relation suivante :

$$\mathbb{E}[\ln(x_i(s))\ln(x_j(t))] = \frac{\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j}{2}\left(|s|^{H_i+H_j} + |t|^{H_i+H_j} - |t-s|^{H_i+H_j}\right), \tag{2}$$

où σ_i est le facteur d'échelle du titre i, H_i sont exposant de Hurst, ρ_{ij} le paramètre de corrélation entre i et j.

Question 12. *Vous avez déjà déterminé l'exposant de Hurst de chacun des titres. Utilisez les estimateurs de l'exposant de Hurst vus en cours pour déterminer le paramètre d'échelle de chacun des titres (ce paramètre d'échelle n'est pas affecté par le fait que l'on a un mBf multivarié : chaque série peut être considérée indépendamment des autres).*

Question 13. *À l'aide de l'équation 2, proposez un estimateur pour ρ_{ij}, sachant que σ_i, σ_j, H_i et H_j sont déjà estimés. Comparez les valeurs obtenues pour votre univers d'investissement à celles du cas d'un mouvement brownien standard géométrique.*

Vous pouvez alors construire une matrice de covariance Σ, définie par $\Sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$.

Question 14. *Avec la même aversion au risque* λ *que précédemment, déterminez le portefeuille qui maximise l'estimateur de rendement espéré (selon la méthode du mBf) sous contrainte de risque :* $\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{20}\omega_i R_i\right) - \lambda\sqrt{\Omega'\Sigma\Omega}$*, où* R_i *est l'estimateur mBf de rendement pour le titre* i *et* Ω *est le vecteur* $(\omega_1, ..., \omega_{20})'$*. Comparez avec le portefeuille précédent.*

Question 15. *Le résultat de l'optimisation va-t-il dépendre de* h *? Justifiez.*

2.2 VaR comme mesure du risque

L'utilisation de la volatilité comme mesure du risque est intrinsèque au choix d'un modèle. Une mesure de risque indépendante de tout modèle de dynamique de prix permet de réduire le risque de modèle. On propose donc d'utiliser une VaR dans laquelle aucune hypothèse n'est faite sur la dynamique. Cette VaR est obtenue par l'estimateur présenté en cours qui utilise une GPD, dont vous devrez estimer les paramètres pour chaque titre.

Question 16. *À l'aide de l'estimateur de Hill ou de Pickands, vus en cours, estimez les paramètres de la GPD de chacun des titres. Comment interprétez-vous ces paramètres ?*

Question 17. *Quelles sont les hypothèses sur les rendements qui permettent d'utiliser la théorie des valeurs extrêmes ?*

Ces hypothèses ne sont peut-être pas vérifiées dans notre projet, mais pour simplifier on passera ce point sous silence et on s'autorisera à utiliser la structure paramétrique de la loi limite du maximum comme une approximation de la réalité (c'est une approximation car le non-respect des hypothèses de la théorie des valeurs extrêmes ne garantit pas l'exactitude).

La VaR du portefeuille dépend de la distribution du rendement de chaque titre et d'une structure de dépendance. Celle-ci peut être décrite par des copules mais, dans ce projet, pour simplifier (beaucoup), on va faire une hypothèse de comonotonie de toutes les variables aléatoires représentant le rendement de chaque titre. Ainsi, la VaR du portefeuille, pour un horizon et une probabilité donnés, sera égale à la somme pondérée des VaR de tous les titres du portefeuille, pour le même horizon et la même probabilité.

Question 18. *Déterminez le portefeuille optimal en remplaçant la volatilité par la VaR, pour les deux types de rendements calculés. La VaR sera calculée pour une probabilité de* 90%, 95%, 99%, 99.9% *et* 99.99% *et un horizon d'un jour. Expliquez l'évolution de votre portefeuille en fonction du niveau de probabilité, notamment à partir des paramètres de la GPD de chaque titre.*

Question 19. *Changez l'horizon de la VaR (testez 5 jours, 1 mois) et redéterminez-la de deux manières : en réestimant les paramètres de la GPD sur des rendements hebdomadaires ou mensuels (au lieu de quotidiens), en annualisant la VaR quotidienne à l'aide de l'exposant de Hurst. Laquelle de ces deux méthodes vous semble la plus pertinente en fonction de l'horizon ? Jusifiez.*

3 Ajustement au risque de liquidité

Supposons que le portefeuille que vous avez optimisé (n'importe lequel) corresponde à un portefeuille dans lequel vous allez investir aujourd'hui et que vous allez revendre dans un certain horizon de temps. En fonction de la quantité que vous investissez, ces transactions (achat puis vente) vont avoir un impact. On suppose que celui-ci est transitoire et décrit par le modèle de Bouchaud vu en cours. Ainsi, pour une transaction de taille V à l'instant t, l'impact de cette transaction à l'instant

$s > t$ est $G(s-t)\varepsilon_t S_t (V_t/K_t)^r$, où ε_t vaut 1 pour un achat, -1 sinon, S_t est le spread bid-ask pris constant égal pour tous les titres à 0.1% du prix, K_t est la capitalisation, supposée constante dans le temps mais différente pour chaque titre, r est compris entre 0 et 1 (prenez par exemple 0.5) et G est une fonction décroissante, par exemple $x \mapsto 1/x$. Ce modèle décrit ce qui arrive **après** l'instant de transaction. Pour l'impact lors de la transaction, vous prendrez simplement la moitié du spread bid-ask.

Cet impact va augmenter le prix d'achat et diminuer le prix de vente et donc réduire le rendement espéré.

Question 20. *Déterminez le portefeuille optimal, qui maximise le rendement espéré du portefeuille tout en contrôlant le risque de liquidité (pour simplifier, limitez-vous à la volatilité gaussienne). Faites-le pour un portefeuille de taille d'une million d'euros puis de taille d'un milliard d'euros, pour un horizon d'un jour, une semaine et un mois. Commentez la différence entre tous ces résultats. Détaillez l'effet du coût imputé au moment des transactions et représenté par la moitié de la fourchette bid-ask ainsi que l'effet de l'impact transitoire sur le prix de revente créé par l'achat.*

Travaillez bien !