Risk Management : 5/5 - Théorie des valeurs extrêmes

Matthieu Garcin

ESILV

2 avril 2019

Convergence de variables aléatoires

Définition

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge $\mathbb{P}$-presque sûrement** *vers X signifie qu'il existe un sous-ensemble $N \in \Omega$ de mesure nulle sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ tel que :*

$$\forall \omega \in \Omega \setminus N, lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega).$$

Définition

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en $\mathbb{P}$-probabilité** *vers X signifie que :*

$$\forall \epsilon > 0, lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \epsilon\right) = 0.$$

Définition

Pour, $p \in [1, \infty]$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge selon la norme L^p** *vers X signifie que :*

$$lim_{n\to\infty} \|X_n - X\|^p = 0,$$

et, si $p < \infty$:

$$lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(|X_n - X|^p\right) = 0.$$

Convergence de variables aléatoires

Proposition

1. *La convergence presque sûre, la convergence en probabilité et la convergence selon la norme L^p sont stables par combinaisons linéaires.*
2. *La convergence presque sûre et la convergence en probabilité sont stables par multiplication.*

Convergence de variables aléatoires

Proposition

1. *Si* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en* $\mathbb{P}$*-probabilité vers* X*, alors il existe une sous-suite de* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergeant vers* X $\mathbb{P}$*-presque sûrement.*
2. *Si* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge selon la norme* L^p *vers* X*, alors il existe une sous-suite de* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergeant vers* X $\mathbb{P}$*-presque sûrement.*

Proposition

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* $\mathbb{P}$*-presque sûrement ou en espérance vers* X*, alors* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* X *en* $\mathbb{P}$*-probabilité.*

Convergence de variables aléatoires

Définition

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en loi** *vers* X *signifie que, pour tout fonction* f *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*,continue et bornée :*

$$lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[f\left(X_n\right)\right]=\mathbb{E}\left[f\left(X\right)\right].$$

Convergence de variables aléatoires

Théorème

Il y a équivalence entre les assertions suivantes :

1. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en loi vers* X.
2. *Pour tout fermé* F *de* $\mathbb{R}$, $\mathit{limsup}_{n\to\infty}\mathbb{P}(X_n \in F) \leq \mathbb{P}(X \in F)$.
3. *Pour tout ouvert* O *de* $\mathbb{R}$, $\mathit{liminf}_{n\to\infty}\mathbb{P}(X_n \in O) \geq \mathbb{P}(X \in O)$.

Théorème

Pour tout entier n, *soit* F_{X_n} *et* F_X *les fonctions de répartition de* X_n *et de* X :
$F_{X_n}(x) = \mathbb{P}(X_n \leq x)$ *et* $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.
On a alors équivalence entre les deux assertions suivantes :

1. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en loi vers* X.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, *tel que* F_X *est continue en* x, $F_{X_n}(x)$ *converge vers* $F_X(x)$.

Indépendance de lois

Définition

Les événements $A, B \in \mathcal{F}$ *sont indépendants signifie que* $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Définition

La famille d'événements $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{F}^I$, *où* $I \subseteq \mathbb{N}$, *est indépendante signifie que pour tout sous-ensemble* J *de* I *comprenant un nombre fini d'éléments,* $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} \mathbb{P}(A_i)$.

Indépendance de lois

Définition

Les variables aléatoires $X_1 : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E_1, \mathcal{E}_1)$ *et* $X_2 : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E_2, \mathcal{E}_2)$ *sont indépendants signifie que* $\forall A_1 \in \mathcal{E}_1,\ A_2 \in \mathcal{E}_2$, $\mathbb{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) = \mathbb{P}(X_1 \in A_1)\mathbb{P}(X_2 \in A_2)$.

Définition

La famille de variables aléatoires $(X_i)_{i\in I}$, *où* $\forall i \in I, X_i : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E_i, \mathcal{E}_i)$ *et* $I \subseteq \mathbb{N}$, *est indépendante signifie que pour tout sous-ensemble* J *de* I *comprenant un nombre fini d'éléments,* $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J} X_i \in A_i\right) = \prod_{i\in J} \mathbb{P}(X_i \in A_i)$.

Indépendance de lois

Proposition

On a équivalence entre les deux assertions suivantes :

1. *Les variables aléatoires $X_1 : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E_1, \mathcal{E}_1)$ et $X_2 : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E_2, \mathcal{E}_2)$ sont indépendantes pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.*
2. - *$\forall f_1 : E_1 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{E}_1$-mesurables bornée, ou positive ;*
   - *et $\forall f_2 : E_2 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{E}_2$-mesurables bornée, ou positive ;*

   on a l'égalité $\mathbb{E}\left(f_1(X_1)f_2(X_2)\right) = \mathbb{E}\left(f_1(X_1)\right)\mathbb{E}\left(f_2(X_2)\right)$.

Fonction caractéristique

Définition

La **fonction caractéristique** *de la variable aléatoire réelle X est la fonction ϕ_X, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par la relation :*

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right].$$

Proposition

L'application $F_X \mapsto \phi_X$, où F_X est la fonction de répartition de la variable alétoire X est injective. Ainsi, la fonction caractéristique caractérise la loi d'une variable aléatoire : si deux variables aléatoires ont la même fonction caractéristique, alors elles sont de même loi.

Fonction caractéristique

Définition

La **transformée de Laplace** *de la variable aléatoire réelle* X *est la fonction* L_X*, définie de* $\mathbb{C}$ *dans* $\mathbb{C}$ *par la relation :*

$$L_X(a) = \mathbb{E}\left[e^{aX}\right].$$

Quelques inégalités

Théorème

Inégalité de Jensen

Soit f une fonction convexe sur $]a,b[$ et X une variable aléatoire d'espérance finie, à valeurs dans $]a,b[$. Alors :

$$f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X)).$$

Quelques inégalités

Théorème

Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire réelle presque sûrement positive ou nulle, et a un réel strictement positif. Alors :

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Quelques inégalités

Théorème

Inégalité de Bienaymé-Tchébychev

Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance σ^2 finie – par l'inégalité de Jensen, la variance finie implique l'espérance finie. Alors, pour tout $\alpha > 0$, on a :

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2}.$$

La loi de la somme

Théorème

Loi faible des grands nombres *Si l'espérance et la variance de la variable aléatoire* X_1 *sont finies, alors, on a la convergence en probabilité de la moyenne arithmétique des* X_i *vers l'espérance de* X_1*, donc :*

$$\frac{S_n - n\mathbb{E}(X_1)}{n} \longrightarrow_{\mathbb{P}, n \to \infty} 0.$$

La loi de la somme

Théorème

Loi forte des grands nombres de Kolmogorov

Si l'espérance de la variable aléatoire X_1 est finie, alors, on a la convergence presque sûre de la moyenne arithmétique des X_i vers l'espérance de X_1, donc :

$$\frac{S_n - n\mathbb{E}(X_1)}{n} \longrightarrow_{p.s., n \to \infty} 0.$$

Théorème

Théorème central limite

Si l'espérance et la variance de la variable aléatoire X_1 sont finies, alors, on a la loi des écarts à la moyenne de S_n :

$$\frac{S_n - n\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{nVar(X_1)}} \longrightarrow_{loi, n \to \infty} \mathcal{N}(0, 1),$$

où $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ est la loi normale d'espérance μ et de variance σ^2.

La loi de la somme

Définition

Une loi de probabilité F est **stable** *signifie que pour toutes variables aléatoire X, Y et Z de fonction de répartition F et pour tout $\alpha, \beta \geq 0$, il existe γ et δ tels que :*

$$\alpha X + \beta Y =_{loi} \gamma Z + \delta.$$

La loi de la somme

Théorème

Soit a_n *et* $b_n > 0$ *les termes d'une suite telle que :*

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \longrightarrow_{loi, n \to \infty} G,$$

où G *est une fonction de répartition non-dégénérée.*
Alors G *est du même type qu'une loi stable.*

La loi de la somme

Proposition

La fonction caractéristique d'une loi stable de paramètres α, β, μ, γ (avec $\gamma > 0$) est nécessairement de la forme suivante :

- *pour une loi 2-stable (cas particulier du cas suivant) on trouve une loi gaussienne, avec γ la moitié de la variance :*

$$\phi_X(t) = \exp(-\gamma t^2)\ ;$$

- *pour $\alpha \in [0,2]$ mais non-entier et $\beta \in [-1,1]$:*

$$\phi_X(t) = \exp\left(i\mu t - \gamma|t|^\alpha \left[1 - i\beta signe(t) tan\left[\frac{\pi\alpha}{2}\right]\right]\right)\ ;$$

- *pour $\alpha = 1$ et $\beta \in [-1,1]$, on retrouve une loi de Cauchy :*

$$\phi_X(t) = \exp\left(i\mu t - \gamma|t|\left[1 + i\beta signe(t)\frac{2}{\pi}\log|t|\right]\right).$$

Type de loi limite

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^+}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, avec F comme fonction de répartition. Pour un échantillon composé des n premiers termes de cette suite, où $n \in \mathbb{N}$, on définit la **statistique d'ordre** $(X_{i:n})_{i\in\mathbb{N}^+\cap[1,n]}$ par :

$$\min\{X_1, ..., X_n\} = X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq ... \leq X_{n-1:n} \leq X_{n:n} = \max\{X_1, ..., X_n\} \;\; ;$$

c'est un réordonnement de l'échantillon.

Définition

Les variables aléatoires X et Y sont dites de même type s'l existe $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$, tel que :

$$X =_{loi} bY + a.$$

Type de loi limite

Proposition

Soit F une fonction de répartition, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles, et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles strictement positives, G et G' des fonctions de répartition non-dégénérées, avec les convergences suivantes :

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} F^n(a_n + b_n x) = G(x) \\ \lim_{n\to\infty} F^n(a'_n + b'_n x) = G'(x) \end{cases},$$

en tout point de continuité x.
Alors, il existe a et b réels, avec $b > 0$, tels que :

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} \frac{b'_n}{b_n} = b \\ \lim_{n\to\infty} \frac{a'_n}{a_n} = a \end{cases},$$

et G et G' sont de même type.

Type de loi limite

Proposition

L'équation fonctionnelle suivante :

$$\forall x, y > 0, \; h(xy) = h(x)h(y)$$

admet la solution générale :

$$\exists \theta \in \mathbb{R}, \forall x > 0, \; h(x) = x^{\theta}.$$

Type de loi limite

Théorème

Théorème de Fischer-Tippett

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^+}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, avec F comme fonction de répartition. Supposons qu'il existe une suite de normalisation (a_n, b_n) telle que $b_n^{-1}(X_{n:n} - a_n)$ converge en loi vers une loi non-dégénérée de fonction de répartition G. Alors, G est du même type que l'une des trois lois suivantes :

1. *La loi de Fréchet, de fonction de répartition, pour $\xi > 0$:*

$$\Phi_\xi(x) = \begin{cases} 0, \; si \; x \leq 0 \\ e^{-x^{-\xi}}, \; sinon. \end{cases}$$

2. *La loi de Weibull, de fonction de répartition, pour $\xi > 0$:*

$$\Psi_\xi(x) = \begin{cases} e^{-(-x)^{\xi}}, \; si \; x \leq 0 \\ 1, \; sinon. \end{cases}$$

3. *La loi de Gumbel, de fonction de répartition :*

$$\Lambda(x) = e^{-e^{-x}}.$$

Type de loi limite

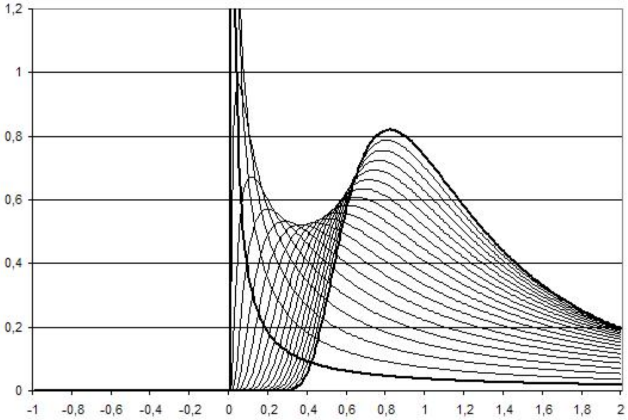

FIGURE – Densité de la loi de Fréchet pour diverses valeurs de ξ, de 0,1 à 2.

Type de loi limite

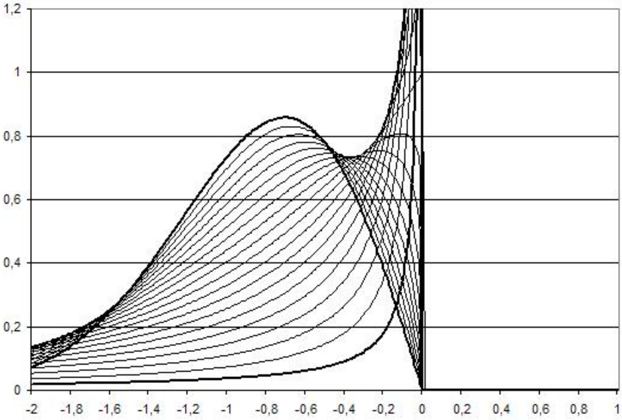

FIGURE – Densité de la loi de Weibull pour diverses valeurs de ξ, de 0,1 à 2.

Type de loi limite

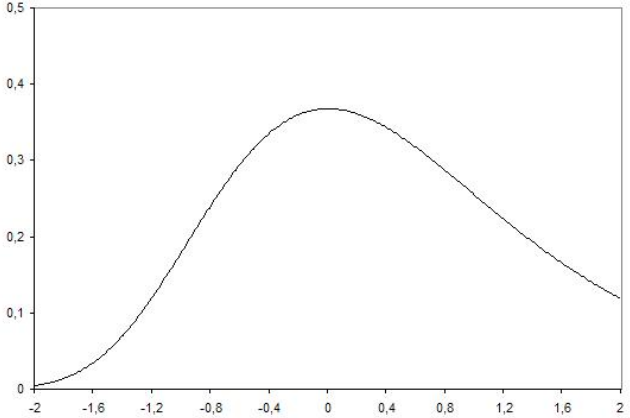

FIGURE – Densité de la loi de Gumbel.

Type de loi limite

Notons que l'on peut remplacer les trois lois limites que nous avons mentionnées par une seule loi, appelée loi générale des extrêmes – GEV : *generalized extreme values* –, introduite par Jenkinson et von Mises, que nous écrivons sous la forme simplifiée qui suit :

$$G_\xi(x) = \begin{cases} \exp\left(-(1+\xi x)_+^{-1/\xi}\right) & si\ \xi \neq 0 \\ \exp\left(-e^{-x}\right) & si\ \xi = 0. \end{cases}$$

Remarque

Alors :

- *si* $\xi > 0$, *la GEV est de type Fréchet ;*
- *si* $\xi = 0$, *la GEV est de type Gumbel ;*
- *si* $\xi < 0$, *la GEV est de type Weibull.*

Type de loi limite

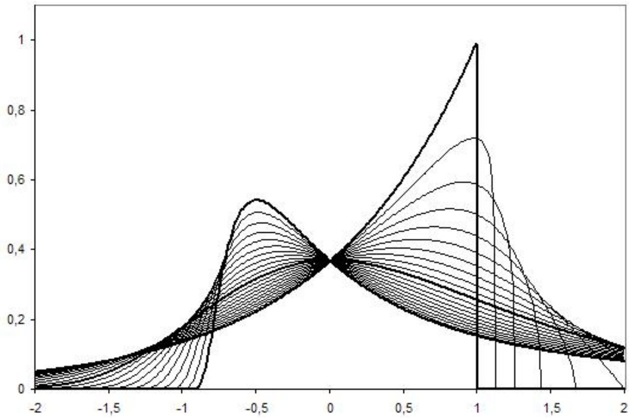

FIGURE – Densité de la loi GEV pour diverses valeurs du paramètre ξ, entre -1 et 1.

Existence de la loi limite

Définition

Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Si G_ξ est la loi limite du maximum pour une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ indépendantes et identiquement distribuées selon la fonction de répartition F, alors on dit que F appartient au **(max-)domaine d'attraction** *d'une loi GEV de paramètre ξ. On écrit aussi :*

$$F \in MDA(G_\xi).$$

Définition

Soit X une variable aléatoire ayant une fonction de densité absolument continue f et une fonction de répartition F. On nomme **fonction de hasard réciproque** *la fonction h définie en tout x par :*

$$h(x) = \frac{1-F(x)}{f(x)}.$$

Existence de la loi limite

Théorème

Théorème de von Mises

Si pour $x^M = \sup\{x|F(x) < 1\}$, *borne supérieure du support de* F, *il existe* $\xi \in \mathbb{R}$ *:*

$$\lim_{x \to x^M} h'(x) = \xi,$$

alors F *appartient au max-domaine d'attraction de la loi GEV de paramètre* ξ. *De plus, les paramètres* a_n *et* b_n *du théorème 3.1 sont définis par :*

$$\begin{cases} 1 - F(a_n) = \frac{1}{n} \\ b_n = h(a_n). \end{cases}$$

Existence de la loi limite

Théorème

Une fonction de répartition F appartient au domaine d'attraction de la GEV de paramètre $\xi \in \mathbb{R}$ si et seulement si, pour tout $x, y > 0$ avec $y \neq 1$, on a :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(tx) - U(t)}{U(ty) - U(t)} = \begin{cases} \frac{x^\xi - 1}{y^\xi - 1} & \text{si } \xi \neq 0 \\ \frac{\log(x)}{\log(y)} & \text{si } \xi = 0, \end{cases}$$

où U est défini, pour $t > 1$, par :

$$U(t) = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{t}\right),$$

avec F^{-1} l'inverse généralisée de F.

Existence de la loi limite

- Le max-domaine d'attraction de Fréchet regroupe les lois à queue épaisse, souvent polynomiale, mais aussi les lois de Cauchy, de Student, etc.
- Le max-domaine d'attraction de Gumbel regroupe les lois à queue fine, comme l'exponentielle et d'autres lois proches : normale, log-normale, gamma, etc.
- Le max-domaine d'attraction de Weibull regroupe les lois à support fini, comme la loi uniforme ou la loi beta.

Existence de la loi limite

Définition

Une fonction $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *est dite à* **variation régulière (à l'infini)** *s'il existe une fonction* v *telle que, pour tout* $x > 0$ *:*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{u(tx)}{u(t)} = v(x).$$

Définition

Une fonction positive $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *est dite à* **variation régulière d'indice** α *si, pour tout* $x > 0$ *:*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{u(tx)}{u(t)} = x^\alpha.$$

En particulier, si $\alpha = 0$*, on parle de fonction à* **variation lente***.*

Définition

Une fonction à variation lente $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *est dite à* **variation régulière au second ordre** *s'il existe une fonction positive* ρ *telle que, pour tout* $x > 0$ *:*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{u(t+x\rho(t))}{u(t)} = e^x.$$

Existence de la loi limite

Théorème

Théorème de Fréchet-Gnedenko
Une fonction de répartition F appartient au max-domaine d'attraction de **Fréchet** *de paramètre de GEV $\xi > 0$ si et seulement si $1 - F$ est à variation régulière d'indice $-1/\xi$.*

Théorème

Théorème de Gnedenko
Une fonction de répartition F appartient au max-domaine d'attraction de **Weibull** *de paramètre de GEV $\xi < 0$ si et seulement si $x^M = \sup\{x|F(x) < 1\} < \infty$ et $x \mapsto 1 - F\left(x^M - \frac{1}{x}\right)$ est à variation régulière d'indice $1/\xi$.*

Théorème

Une fonction de répartition F appartient au max-domaine d'attraction de **Gumbel** *si et seulement si la fonction $1 - F$ est à variation lente au second ordre.*

Exemples théoriques

1. Loi uniforme : pour $x \in [0, \tau]$, $F(x) = x/\tau$;
2. Loi exponentielle : pour tout $x \geq 0$, $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.

Type de loi limite

Définition

La **loi de Pareto généralisée (GPD)** *est définie par la fonction de répartition :*

$$H_\xi(x) = \begin{cases} 1 - (1+\xi x)^{-1/\xi} & \textit{si } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp(-x) & \textit{sinon}, \end{cases}$$

pour $x \geq 0$ *si* $\xi \geq 0$, *et* $0 \leq x < -1/\xi$ *si* $\xi \leq 0$. *Le cas* $\xi = 0$ *est obtenu en prolongeant par continuité.*

On peut aussi généraliser notre forme standard en remplaçant x par $(x-\mu)/\sigma$.

Type de loi limite

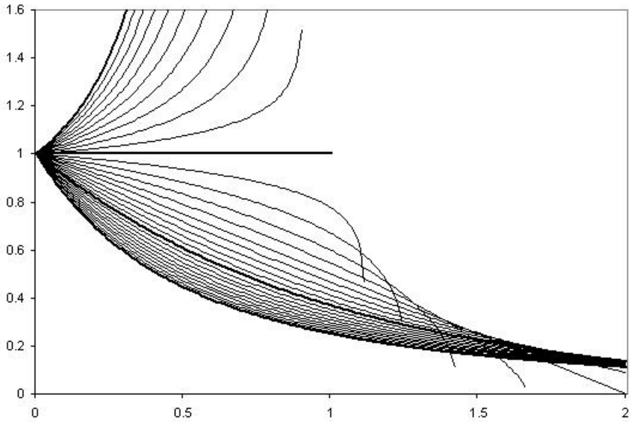

FIGURE – Densité de la loi GPD pour diverses valeurs du paramètre ξ, entre -2 et 1.

Type de loi limite

Définition

La **fonction d'excès moyen** *d'une variable aléatoire est la fonction définie par la relation :*

$$e(u) = \mathbb{E}(X - u | X > u).$$

Type de loi limite

Théorème

Théorème de Pickands-Balkema-de Haan *Soit F un fonction de répartition. On a équivalence entre*

1. *F appartient au max-domaine d'attraction d'un loi GEV.*
2. *la loi des excès est de type GPD de paramètre ξ, c'est-à-dire :*

$$\lim_{u \to x^M} \sup_{0<x<x^M-u} |\mathbb{P}(X-u \leq x | X > u) - H_\xi(x/\sigma(u))| = 0,$$

avec σ une fonction positive du seuil u.

Exemples théoriques

1. Loi uniforme : pour $x \in [0, \tau]$, $F(x) = x/\tau$;
2. Loi exponentielle : pour tout $x \geq 0$, $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.

Estimateur de Pickands

Théorème

Soit (X_n) *une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, de fonction de répartition* F *appartenant au max-domaine d'attraction d'une loi GEV de paramètre* $\xi \in \mathbb{R}$. *Soit* k *une fonction de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$. *Si*

$$\lim_{n\to\infty} k(n) = \infty$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k(n)}{n} = 0,$$

alors, **l'estimateur de Pickands**, *défini par :*

$$\xi^P_{k(n),n} = \frac{1}{\log(2)} \log\left(\frac{X_{n-k(n)+1:n} - X_{n-2k(n)+1:n}}{X_{n-2k(n)+1:n} - X_{n-4k(n)+1:n}}\right)$$

converge **en probabilité** *vers* ξ.
De plus, si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k(n)}{\log(\log(n))} = \infty,$$

alors la convergence de $\xi^P_{k(n),n}$ *vers* ξ *se fait* **presque sûrement** *et non pas seulement en probabilité.*

Estimateur de Hill

Théorème

Soit (X_n) *une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, de fonction de répartition* F *appartenant au max-domaine d'attraction d'une loi GEV de paramètre* $\xi > 0$*. Soit* k *une fonction de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$*. Si*

$$\lim_{n\to\infty} k(n) = \infty$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k(n)}{n} = 0,$$

alors, **l'estimateur de Hill***, défini par :*

$$\xi^H_{k(n),n} = \frac{1}{k(n)} \sum_{i=n-k(n)+1}^{n} \log\left(\frac{X_{i:n}}{X_{n-k(n)+1:n}}\right)$$

converge **en probabilité** *vers* ξ*.*
De plus, si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k(n)}{\log(\log(n))} = \infty,$$

alors la convergence de $\xi^H_{k(n),n}$ *vers* ξ *se fait* **presque sûrement** *et non pas seulement en probabilité.*

Valeur à risque – théorie

Définition

Soit X une variable aléatoire (un gain) de fonction de répartition F. La valeur à risque (VaR) sur $[0,1]$ est la fonction définie par :

$$VaR(\alpha) = -F^{-1}(1-\alpha) = -\inf\{x|F(x) \geq 1-\alpha\}.$$

Notons qu'on a un majorant de la VaR grâce à l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev, à partir de laquelle on obtient (si $VaR(\alpha) + \mu \geq 0$) :

$$VaR(\alpha) \leq \frac{\sigma}{\sqrt{1-\alpha}} - \mu,$$

où σ^2 est la variance de X et μ son espérance.

Valeur à risque – empirique

Théorème

Théorème de Lindeberg-Lévy *Soit $p \in [0,1]$. Pour une perte X, $X_{n-\lfloor np \rfloor+1:n}$ converge en probabilité vers $VaR(p)$.*

Proposition 2.1.11. *Soit $p \in]0,1[$. Supposons que la loi de X_1 possède une densité, f continue en x_p et telle que $f(x_p) > 0$. On suppose de plus que $k(n) = np + o\left(\sqrt{n}\right)$. On a la convergence en loi suivante :*

$$\boxed{\sqrt{n}\left(X_{(k(n),n)} - x_p\right) \xrightarrow[n\to\infty]{Loi} \mathcal{N}\left(0, \frac{p(1-p)}{f(x_p)^2}\right).}$$

Soit $\alpha > 0$. L'intervalle aléatoire $\left[X_{(k(n),n)} \pm \frac{a_\alpha \sqrt{p(1-p)}}{f(X_{(k(n),n)})\sqrt{n}}\right]$, où a_α est le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$, est un intervalle de confiance pour x_p, de niveau asymptotique $1-\alpha$.

FIGURE – Source : Delmas.

Valeur à risque – empirique

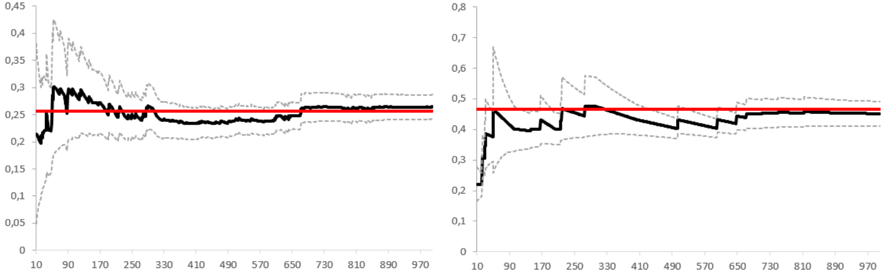

FIGURE – Empirical VaR at 90% (left) and 99% (right), with 95% confidence intervals (grey) and theoretical value (red), as a function of the number of observations. These observations are Gaussian random variables with standard deviation 0.2 (same numbers in the two cases).

Valeur à risque – EVT

Soit M_n le maximum de n variables aléatoires (pertes) indépendantes de fonction de répartition F, tel qu'il existe a_n, b_n tel que $a_n^{-1}(M_n - b_n))$ converge en loi vers une GEV de paramètre ξ. Pour k fixé (vrai en particulier pour $k = 1$) et n grand, on a :

$$\mathbb{P}(a_{n/k}^{-1}(M_{n/k} - b_{n/k})) \leq x) = F(xa_{n/k} + b_{n/k})^{n/k} \approx G_\xi(x).$$

Par conséquent, la VaR de proba p est ici telle que :

$$\begin{array}{rcl} p & = & F(VaR(p)) \\ & \approx & G_\xi\left(\frac{VaR(p)-b_{n/k}}{a_{n/k}}\right)^{k/n} \\ & = & \exp\left\{-\frac{k}{n}\left(1+\xi\frac{VaR(p)-b_{n/k}}{a_{n/k}}\right)^{-1/\xi}\right\} \\ & \approx & 1-\frac{k}{n}\left(1+\xi\frac{VaR(p)-b_{n/k}}{a_{n/k}}\right)^{-1/\xi}. \end{array}$$

La VaR est donc $VaR(p) = \frac{\left(\frac{k}{n(1-p)}\right)^\xi - 1}{\xi} a_{n/k} + b_{n/k}$, où il reste à choisi les $a_{n/k}$ et $b_{n/k}$ en accord avec les estimateurs de ξ (Hill ou Pickands).

Valeur à risque – EVT

En travaillant toujours sur des variables représentant des pertes, on obtient (dépend de k) :

Estimateur de Pickands

$$VaR(p) = \frac{\left(\frac{k}{n(1-p)}\right)^{\xi^P} - 1}{1 - 2^{-\xi^P}} (X_{n-k+1:n} - X_{n-2k+1:n}) + X_{n-k+1:n},$$

où ξ^P est l'estimateur de Pickands du paramètre de la GEV.

Estimateur de Hill

$$VaR(p) = \left(\frac{k}{n(1-p)}\right)^{\xi^H} X_{n-k+1:n},$$

où ξ^H est l'estimateur de Hill du paramètre de la GEV.

Valeur à risque – EVT

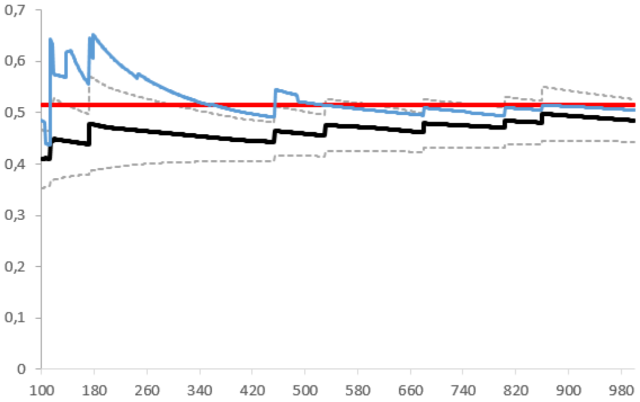

FIGURE – VaR at 99.5%, empirical (black) with its 95% confidence intervals (grey) and theoretical value (red), and EVT VaR (Pickands, blue) as a function of the number of observations. These observations are Cauchy random variables, $F(x) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}$, with scale parameter 0.2. More rapid convergence for EVT-VaR. Relevant when in the confidence interval of the empirical one (more careful to confront them).

Exemples pratiques

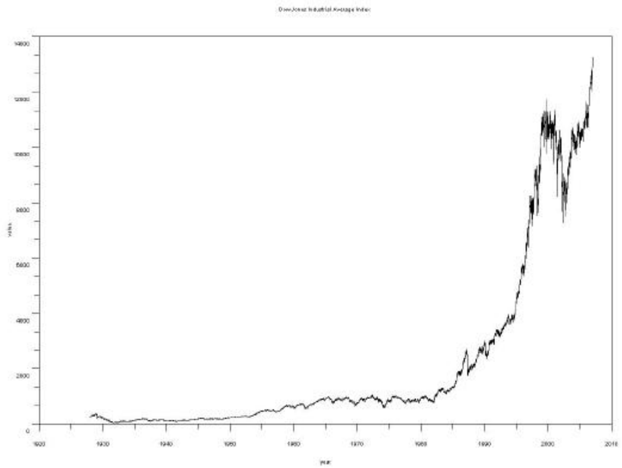

FIGURE – Indice Dow Jones entre 1928 et 2007.

Exemples pratiques

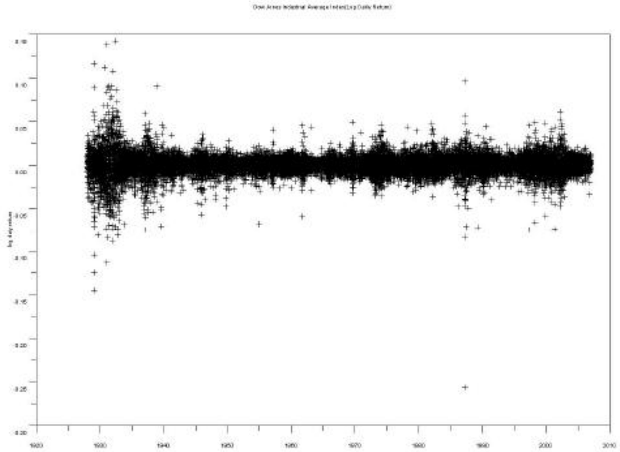

FIGURE – Rendement logarithmique journalier de l'indice Dow Jones entre 1928 et 2007.

Exemples pratiques

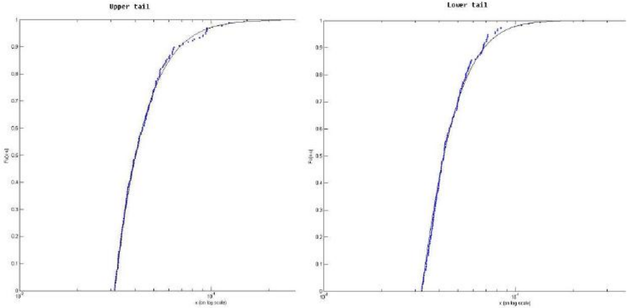

FIGURE – Distribution empirique de la distribution estimée de la queue des gains et de la queue des pertes, pour les rendements logarithmiques journaliers de l'indice Dow Jones entre 1928 et 2007.

Exemples pratiques

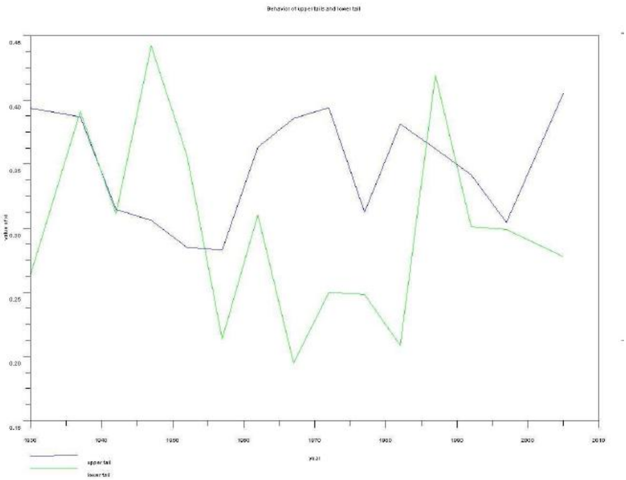

Figure – Estimateurs de Hill pour la queue des gains et de la queue des pertes, pour les rendements logarithmiques journaliers de l'indice Dow Jones entre 1928 et 2007.

Exemples pratiques

Action (indice)	paramètres	Variation des paramètres	Seuil	Probabilité de ne pas franchir le seuil	Max
1.Dow Jones	$\hat{\xi}$ =0.1967 β=0.0114	$\Delta\hat{\xi}$ =0.0693 Δβ=0.0010	0.0257	98.48%	0.1427
2.Nasdaq	0.1300 0.0120	0.0935 0.0015	0.0257	98.25%	0.1325
3.Coca-Cola	0.2153 0.0106	0.1098 0.0016	0.0366	98.12%	0.1796
4.Gen. Elect	0.2499 0.0102	0.1544 0.0018	0.0366	98.08%	0.1174
5.Microsoft	0.1446 0.0155	0.0687 0.0014	0.0366	94.40%	0.1788
6.Morgan Stanley	0.0483 0.0171	0.0684 0.0016	0.0366	93.76%	0.1488

FIGURE – Estimateurs pour la queue des gains.

Exemples pratiques

Action(indice)	Paramètres	Variation des paramètres	Seuil	Probabilité de ne pas franchir le seuil	Max
1	$\hat{\xi}$ =0.1710 β =0.0126	$\Delta\hat{\xi}$ =0.0652 $\Delta\beta$ =0.0011	-0.0288	98.58%	-0.2563
2	0.2213 0.0097	0.0989 0.0012	-0.0289	98.14%	-0.1204
3	0.3902 0.0106	0.1460 0.0018	-0.0336	98.12%	-0.2836
4	0.2038 0.0119	0.1040 0.0016	-0.0336	98.84%	-0.1921
5	0.3341 0.0142	0.0849 0.0015	-0.0336	94.98%	-0.3583
6	0.1297 0,0159	0.0894 0.0018	-0.0335	93.54%	-0.1403

FIGURE – Estimateurs pour la queue des pertes.

Exemples pratiques

Action	p=0.01	P=0.005	p=0.001	p=0.0005
3	-0.0412	-0.0519	-0.0916	-0.1180
4	-0.0436	-0.0539	-0.0844	-0.1010
5	-0.0640	-0.0831	-0.1486	-0.1897
6	-0.0671	-0.0818	-0.1215	-0.1413

FIGURE – Les *VaR* pour certaines probabilités.

Exemples pratiques

Action	s=-0.05	s=-0.10	s=-0.20	s=-0.30
3	0.56%	0.0786%	0.0122%	0.0042%
4	0.64%	0.0520%	0.0029%	0.0005%
5	1.90%	0.3000%	0.0430%	0.0133%
6	2.45%	0.2300%	0.0087%	0.0009%

FIGURE – Les probabilités d'excès pour certains seuils.

Exemples pratiques

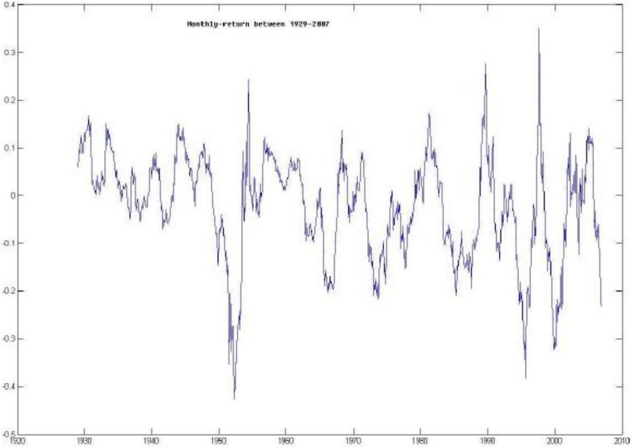

FIGURE – Rendements mensuels pour l'indice Dow Jones entre 1928 et 2007.

Exemples pratiques

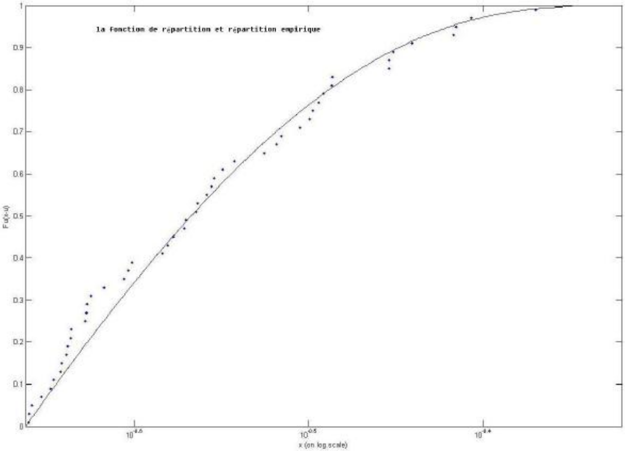

FIGURE – Estimation de la fonction de répartition des rendements mensuels pour l'indice Dow Jones entre 1928 et 2007.

Exemples pratiques

Seuil	-0.10	-0.14	-0.18	-0.20	-0.25	-0.30	-0.50
probabilité	38.52%	26.93%	18.40%	15.13%	9.2%	5.53%	0.76%

FIGURE – Les probabilités d'excès pour certains seuils pour les rendements mensuels pour l'indice Dow Jones entre 1928 et 2007.

Exemples pratiques

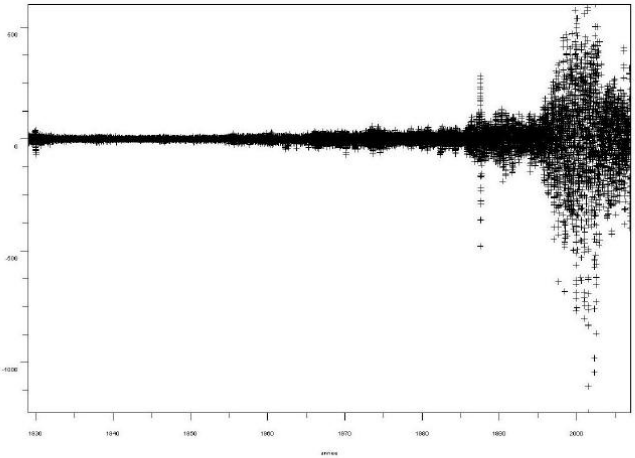

FIGURE – L'indice Dow Jones entre 1928 et 2007, auquel on a enlevé sa tendance.

Exemples pratiques

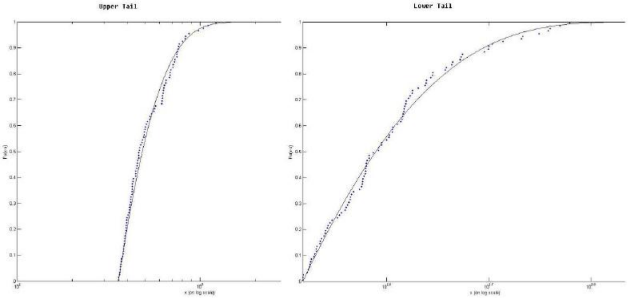

FIGURE – Estimation de la fonction de répartition des gains et des pertes de l'indice Dow Jones entre 1928 et 2007, auquel on a enlevé sa tendance.

Dépendance dans la série

- Hypothèse i.i.d. dans EVT. On veut se débarrasser de l'indépendance, mais pas accepter n'importe quelle dépendance (cas $X_i = X_1$ trivial par exemple, puisque maximum distribué comme X_1, donc n'admet pas de loi limite).
- Contrainte à la dépendance : deux événements extrêmes deviennent approximativement indépendants s'ils sont séparés par suffisamment de temps (pas de dépendance de long terme). C'est une condition de mélangeance faible.
- Cela s'exprime par la condition appelée $D(u_n)$ (Leadbetter, 1983) : pour $n \in \mathbb{N}$, pour un seuil $u_n \in \mathbb{R}$, un écart temporel $l_n \in \mathbb{N}$ et pour des instants $1 \leq i_1 < ... < i_p < j_1 < ... < j_q \leq n$ avec $j_1 - i_p \geq l_n$, la condition s'écrit

$$\left| \begin{array}{l} \mathbb{P}\left(X_{i_1} \leq u_n, ..., X_{i_p} \leq u_n, X_{j_1} \leq u_n, ..., X_{j_q} \leq u_n\right) \\ -\mathbb{P}\left(X_{i_1} \leq u_n, ..., X_{i_p} \leq u_n\right) \mathbb{P}\left(X_{j_1} \leq u_n, ..., X_{j_q} \leq u_n\right) \end{array} \right| < \alpha_{n,l_n},$$

  avec $\alpha_{n,l_n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ si $l_n/n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
- $D(u_n)$ vérifiée pour processus gaussien si corrélation décroît plus vite que le logarithme du lag (donc modèles AR valides puisque décroissance géométrique).

Dépendance dans la série

Théorème (de Leadbetter)

Soit $X_1, ..., X_n$ identiquement distribuées. S'il existe $b_n > 0$ et a_n tel que $b_n^{-1}(X_{n:n} - a_n)$ converge en loi vers G non-dégénérée et **si** $D(u_n)$ **est vrai avec** $u_n = b_n x + a_n$ **pour chaque** x **tel que** $G(x) > 0$, *alors G est comme dans le théorème de Fischer-Tippett (i.e. du même type qu'une loi généralisée des extrêmes).*

Théorème (de l'indice extrêmal de Leadbetter)

Soit $X_1, ..., X_n$ identiquement distribuées. Soit $\hat{X}_1, ..., \hat{X}_n$ distribuées comme X_1 avec en plus une hypothèse d'indépendance entre $\hat{X}_1, ..., \hat{X}_n$. S'il existe $b_n > 0$ et a_n tel que $b_n^{-1}(\hat{X}_{n:n} - a_n)$ converge en loi vers G non-dégénérée et **si** $D(u_n)$ **est vrai pour** $X_1, ..., X_n$ **avec** $u_n = b_n x + a_n$ **pour chaque** x **tel que** $G(x) > 0$, *alors $b_n^{-1}(X_{n:n} - a_n)$ converge en loi vers G^θ, où $\theta \in [0, 1]$.*

Dépendance dans la série

θ est l'indice extrêmal. Il vaut 1 si série indépendante. Plus la dépendance est grande, plus il est faible. Estimation par dé-*clustering*.

- **Blocks declustering** : on choisit des blocs de taille arbitraire b et on partitionne $\{1, ..., n\}$ en $k = \lfloor n/b \rfloor$. On compte le nombre de clusters, donc de blocs pour lesquels on a au moins une variable X au-dessus d'un seuil.
- **Runs declustering** : la même chose avec une fenêtre glissante de taille arbitraire r.

Ainsi, si on note $M_{i,j} = \max\{X_{i+1}, ..., X_j\}$, les deux dé-*clusterings* conduisent aux estimateurs suivants, sachant que θ est lié au rapport du nombre de clusters d'extrêmes sur le nombre d'extrêmes (si les variables sont indépendantes, chaque extrême constitue à lui seul un cluster, donc $\theta = 1$; si chaque extrême est suivi d'un autre extrême, $\theta = 1/2$) :

$$\hat{\theta}_n^B(u; b) = \frac{\sum_{i=1}^{k} \mathbf{1}(M_{(i-1)b,ib} > u)}{\sum_{i=1}^{kb} \mathbf{1}(X_i > u)} \text{ et } \hat{\theta}_n^R(u; r) = \frac{\sum_{i=1}^{n-r} \mathbf{1}(X_i > u, M_{i,i+r} \leq u)}{\sum_{i=1}^{n-r} \mathbf{1}(X_i > u)}.$$