

Risk Management :

4/5 - Risque multifréquentiel

Matthieu Garcin

26 août 2019

- 1 Annualisation des mesures de risque
- 2 Corrélation multirésolution
 - Construction des ondelettes
 - Application des ondelettes aux mesures de risque
- 3 Dynamiques fractales
 - Mouvement brownien fractionnaire
 - Markov switching multifractal
 - Application aux mesures de risque

- 1 Annualisation des mesures de risque
- 2 Corrélation multirésolution
 - Construction des ondelettes
 - Application des ondelettes aux mesures de risque
- 3 Dynamiques fractales
 - Mouvement brownien fractionnaire
 - Markov switching multifractal
 - Application aux mesures de risque

Introduction - Annualiser une Vol

Quelques questions :

- Qu'est-ce qu'une volatilité ?
- Pourquoi a-t-on coutume de l'annualiser avec une racine carrée du rapport des fréquences d'échantillonnage ?

Introduction - Annualiser une Vol

Première approche : écart-type d'un échantillon de rendements

- On observe des prix à basse fréquence (e.g. annuelle), P_0, P_1, \dots, P_T . On a donc T log-rendements **basse fréquence** $\log(P_i/P_{i-1})_{i \in \{1, \dots, T\}}$. Pour une moyenne nulle, la variance de l'échantillon est alors :

$$Var^{BF} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \log \left(\frac{P_i}{P_{i-1}} \right)^2.$$

- On observe les mêmes prix à fréquence plus élevée (e.g. quotidienne), $P_0, P_{1/n}, P_{2/n}, \dots, P_T$. On a donc $n \times T$ log-rendements **haute fréquence** $\log(P_{i/n}/P_{(i-1)/n})_{i \in \{1, \dots, nT\}}$. Pour une moyenne nulle, la variance de l'échantillon est alors :

$$Var^{HF} = \frac{1}{nT} \sum_{i=1}^{nT} \log \left(\frac{P_{i/n}}{P_{(i-1)/n}} \right)^2.$$

Introduction - Annualiser une Vol

Pour un mouvement brownien géométrique sans dérive $dP_t = \sigma P_t dW_t$, on a :

$$\mathbb{E}(\text{Var}^{BF}) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \sigma^2 \mathbb{E}([W_i - W_{i-1}]^2) = \sigma^2$$

et

$$\mathbb{E}(\text{Var}^{HF}) = \frac{1}{nT} \sum_{i=1}^{nT} \sigma^2 \mathbb{E}([W_{i/n} - W_{(i-1)/n}]^2) = \frac{1}{nT} \sum_{i=1}^{nT} \sigma^2 \frac{1}{n} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Donc, si (de manière un peu abusive, cf inégalité de Jensen, mais la volatilité est-elle un écart type ou la racine carrée d'une variance ?) $\text{Vol} = \sqrt{\mathbb{E} \text{Var}}$:

$$\boxed{\text{Vol}^{BF} = \text{Vol}^{HF} \sqrt{n}}.$$

Introduction - Annualiser une Vol

Deuxième approche : estimation de la variation quadratique

Pour un mouvement brownien géométrique $dP_t = \mu P_t dt + \sigma P_t dW_t$, la variation quadratique $d[\log P]$ peut s'écrire comme une limite (au sens d'une convergence en probabilité), si elle existe :

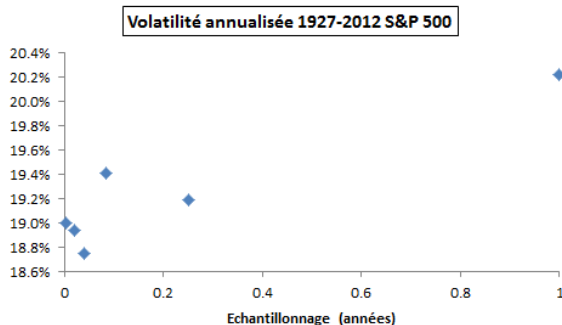
$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{mT} \log \left(\frac{P_{i/m}}{P_{(i-1)/m}} \right)^2 = d[\log P]_T = \sigma^2 d[W]_T = \sigma^2 T.$$

Prendre $m = 1$ et $m = n$ fournit deux estimateurs de σ , notés $\hat{\sigma}_{BF}$ et $\hat{\sigma}_{HF}$:

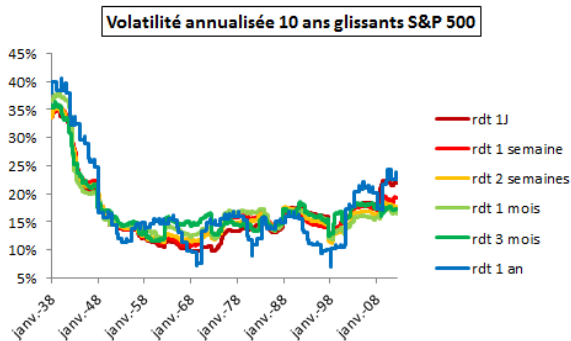
$$\boxed{Vol^{BF} = \hat{\sigma}_{BF}} \text{ et } \boxed{Vol^{HF} \sqrt{n} = \hat{\sigma}_{HF}}.$$

Il n'y a plus qu'à espérer que $\hat{\sigma}_{BF}$ et $\hat{\sigma}_{HF}$ soient proches !

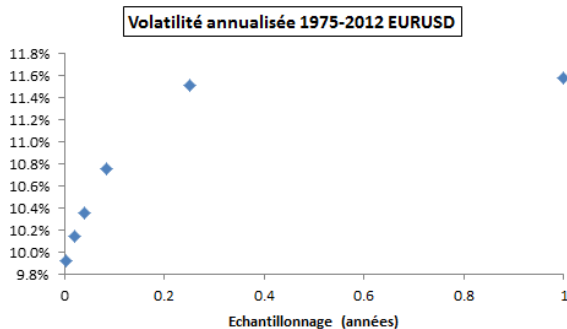
Introduction - Annualiser une Vol



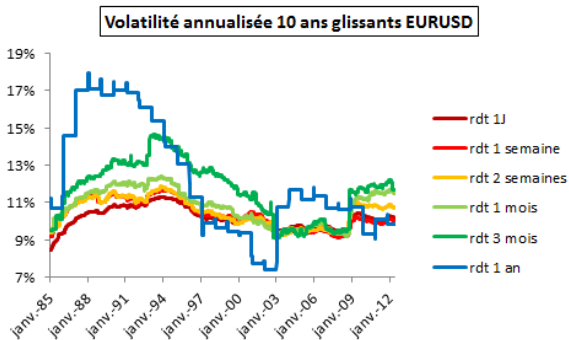
Introduction - Annualiser une Vol



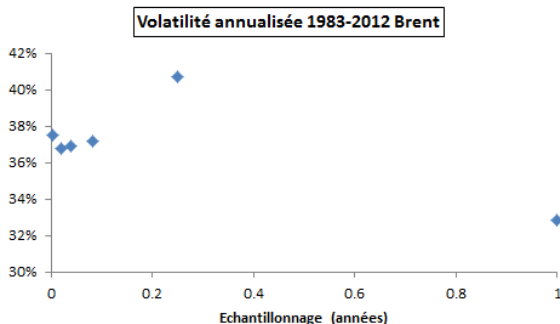
Introduction - Annualiser une Vol



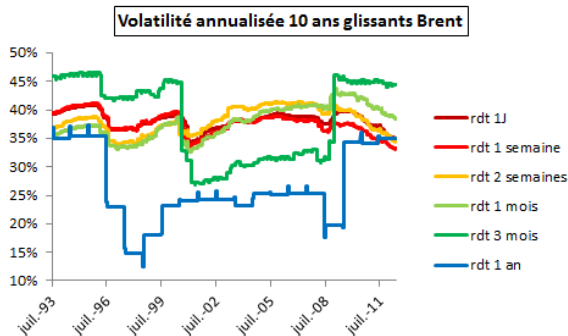
Introduction - Annualiser une Vol



Introduction - Annualiser une Vol



Introduction - Annualiser une Vol



Introduction - Annualiser une Vol - Intervalle de confiance

La volatilité est donc estimée à partir de données discrète ; on peut donner un intervalle de confiance.

- Pour la tendance μ , l'intervalle de confiance est donné par une loi de Student.
- Pour σ^2 , on utilise plutôt un théorème limite (théorème central limite), qui, pour un nombre fini de données, donne donc une approximation de l'intervalle de confiance.

Théorème

Théorème central limite *Si l'espérance et la variance de variables aléatoires iid $(X_i)_i$ sont finies, alors, on a la loi des écarts à $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$:*

$$\frac{\frac{1}{n} S_n - \mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{\text{Var}(X_1)/n}} \xrightarrow{\text{loi}, n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0, 1),$$

où $\mathcal{N}(m, s^2)$ est la loi normale d'espérance m et de variance s^2 .

Introduction - Annualiser une Vol - Intervalle de confiance

Si $X_{i/\tau} = \log(P_{i/\tau}/P_{(i-1)/\tau})^2$ est un rendement quadratique, avec un échantillonnage de τ observations par unité de temps, avec $dP_t = \sigma P_t dW_t$, alors, pour un nombre d'observations n assez grand, l'estimateur $\hat{\sigma}_{n,\tau}^2 = \frac{\tau}{n} \sum_{i=1}^n X_{i/\tau}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(\sigma^2, s^2)$, avec :

$$\begin{aligned} s^2 &= \text{Var}(X_{1/\tau})/n \\ &= \tau^2 \text{Var}((\sigma W_{1/\tau})^2)/n \\ &= \sigma^4 \text{Var}(W_1^2)/n \\ &= \sigma^4 \mathbb{E}((W_1^2 - \mathbb{E}(W_1^2))^2)/n \\ &= \sigma^4 \mathbb{E}((W_1^2 - 1)^2)/n \\ &= \sigma^4 [\mathbb{E}(W_1^4) - 2\mathbb{E}(W_1^2) + 1]/n \\ &= \sigma^4 [\kappa - 1]/n \\ &= \boxed{2\sigma^4/n}, \end{aligned}$$

où la kurtosis d'une variable Y de moyenne m_Y et écart-type s_Y , $\kappa = \mathbb{E}[((Y - m_Y)/s_Y)^4]$, vaut 3 pour une v.a. gaussienne.

Introduction - Annualiser une Vol - Intervalle de confiance

- La variance de l'estimateur de la volatilité au carré ne dépend pas de l'échantillonnage! ... pour peu que le nombre d'observations n soit égal pour tous les échantillonnages et soit assez grand pour valider le TCL.
- En pratique, pour un échantillon de durée T années, on estime la volatilité à partir de $n = T \times \tau$ observations. Alors la variance de l'estimateur de la volatilité au carré, $2\sigma^4/(T\tau)$, décroît en l'inverse de l'échantillonnage τ .
- Sous l'hypothèse de cette dynamique gaussienne, l'estimateur à la fréquence la plus haute est donc le plus fiable.

Introduction - Annualiser une Vol - Intervalle de confiance

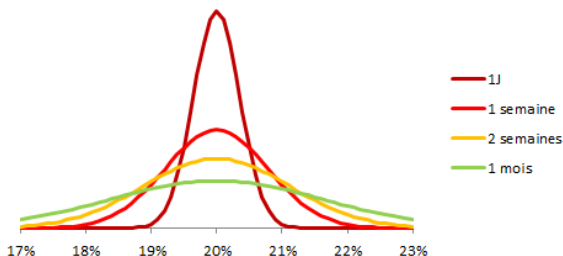
- L'estimateur $\hat{\sigma}_{n,\tau}$ de la volatilité converge en loi, mais pas vers une loi normale.
- Intervalle de confiance fourni par :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\hat{\sigma}_{n,\tau} \in [\sigma - \varepsilon, \sigma + \varepsilon]) &= \mathbb{P}(\hat{\sigma}_{n,\tau} \leq \sigma + \varepsilon) - \mathbb{P}(\hat{\sigma}_{n,\tau} < \sigma - \varepsilon) \\ &= \mathbb{P}(\hat{\sigma}_{n,\tau}^2 \leq (\sigma + \varepsilon)^2) - \mathbb{P}(\hat{\sigma}_{n,\tau}^2 < (\sigma - \varepsilon)^2) \\ &= \Phi_{\sigma^2, 2\sigma^4/n}((\sigma + \varepsilon)^2) - \Phi_{\sigma^2, 2\sigma^4/n}((\sigma - \varepsilon)^2),\end{aligned}$$

pour $\varepsilon \geq 0$ et $\Phi_{\sigma^2, 2\sigma^4/n}$ fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(\sigma^2, 2\sigma^4/n)$.

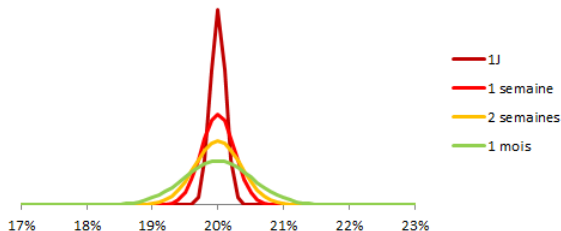
Introduction - Annualiser une Vol - Intervalle de confiance

Distribution de l'estimateur d'une vol de 20% pour une année d'observations de log-rendements gaussiens



Introduction - Annualiser une Vol - Intervalle de confiance

Distribution de l'estimateur d'une vol de 20% pour dix ans d'observations de log-rendements gaussiens

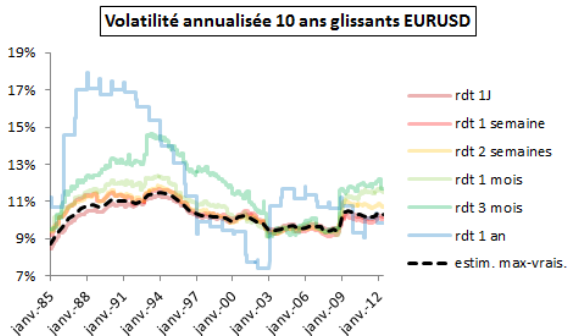


Introduction - Annualiser une Vol - Intervalle de confiance

tableau intervalles de confiance

Introduction - Annualiser une Vol - Intervalle de confiance

Idée : estimer la volatilité de la diffusion par maximum de vraisemblance des volatilités calculées sur différents échantillonnages.



Introduction - Annualiser une Vol - Intervalle de confiance

EURUSD, volatilité annualisée 1975-2012 : **10.05%** d'après estimation par max-vraisemblance.

Échantillonnage	Vol annualisée	\mathbb{P} int. confiance symétrique
1 jour	9.92%	92.7%
1 semaine	10.14%	43.1%
2 semaine	10.36%	81.7%
1 mois	10.76%	96.6%
3 mois	11.51%	98.7%
12 mois	11.57%	80.5%

L'intervalle de confiance est calculé pour une volatilité de la diffusion log-normale égale à la volatilité estimée par max-vraisemblance.

Introduction - Annualiser une Vol - Intervalle de confiance

Exemple simulé de diffusion log-normale (avec volatilité de 20%), volatilité annualisée sur un échantillon de 35 années : **19.88%** d'après estimation par max-vraisemblance.

Échantillonnage	Vol annualisée	\mathbb{P} int. confiance symétrique
1 jour	19.96%	37.8%
1 semaine	19.81%	17.3%
2 semaine	19.76%	21.1%
1 mois	19.29%	63.4%
3 mois	19.33%	37.3%
12 mois	20.24%	12.1%

Introduction - Annualiser une Vol - Intervalle de confiance

S&P 500, volatilité annualisée 1927-2012 : **18.99%** d'après estimation par max-vraisemblance.

Échantillonnage	Vol annualisée	\mathbb{P} int. confiance symétrique
1 jour	19.00%	8.3%
1 semaine	18.93%	13.2%
2 semaine	18.75%	41.0%
1 mois	19.41%	50.3%
3 mois	19.19%	15.0%
12 mois	20.22%	42.3%

Introduction - Annualiser une Vol - Intervalle de confiance

Brent, volatilité annualisée 1983-2012 : **37.35%** d'après estimation par max-vraisemblance.

Échantillonnage	Vol annualisée	\mathbb{P} int. confiance symétrique
1 jour	37.49%	34.4%
1 semaine	36.77%	60.3%
2 semaine	36.92%	34.3%
1 mois	37.19%	9.1%
3 mois	40.72%	83.0%
12 mois	32.83%	63.5%

- 1 Annualisation des mesures de risque
- 2 **Corrélation multirésolution**
 - Construction des ondelettes
 - Application des ondelettes aux mesures de risque
- 3 Dynamiques fractales
 - Mouvement brownien fractionnaire
 - Markov switching multifractal
 - Application aux mesures de risque

Quelle utilité des ondelettes ?

Décomposition d'un signal en plusieurs composantes de diverses fréquences.

Utile en ingénierie mais aussi en finance pour :

- repérer des schémas à certaines fréquences, des changements de régime ;
- enlever du bruit ;
- représentation parcimonieuse et compression (jpeg, mp3...).

Pourquoi pas une autre méthode ?

Du plus lissant au plus local : transformée de Fourier, puis Fourier à fenêtres, puis ondelettes.

Fourier transform

$$\hat{z}^\varepsilon(\omega) = \int_{\mathbb{R}} z^\varepsilon(x) e^{-2i\pi\omega x} dx.$$

- Inverse transform (if \hat{z}^ε integrable) : $f(x) = \sum_{\omega \in \mathbb{N}} \hat{z}^\varepsilon(\omega) e^{2i\pi\omega x}$ almost everywhere.
- Riemann-Lebesgue lemma : $\hat{z}^\varepsilon(\omega) \rightarrow 0$ as $|\omega| \rightarrow 0$.
- Parseval-Plancherel theorem : $\int_{\mathbb{R}} |z^\varepsilon(x)|^2 = \sum_{\omega \in \mathbb{N}} |\hat{z}^\varepsilon(\omega)|^2$.
- For a finite discrete-time signal, the coefficient is $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2i\pi\omega n/N}$ for the same inverse transform than in continuous time.

Fourier transform

Proposition

Effet par transformation de Fourier de :

- *relation linéaire : $f(x) + \lambda g(x)$ est transformé en $\hat{f}(\omega) + \lambda g(\omega)$;*
- *contraction : $f(ax)$ est transformé en $\hat{f}(\omega/a)/|a|$;*
- *translation : $f(x + T)$ est transformé en $\hat{f}(\omega)e^{2i\pi\omega T}$;*
- *produit de convolution : $(f \star g)(x)$ est transformé en $\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$;*
- *dérivation : $f'(x)$ est transformé en $2i\pi\omega\hat{f}(\omega)$;*
- *dérivation dans le domaine fréquentiel : $d\hat{f}(\omega)/d\omega$ est la transformée de $-2i\pi xf(x)$.*

Windowed Fourier transform

$$\hat{z}^\varepsilon(\omega, k) = \int_{\mathbb{R}} z^\varepsilon(x) e^{-2i\pi\omega x} \delta_{[k-\Delta k, k+\Delta k]}(x) dx.$$

Wavelet transform

$$\hat{z}_{j,k}^\varepsilon = \int_{\mathbb{R}} z^\varepsilon(x) \psi_{j,k}(x) dx.$$

- The wavelet function (dilatation and translation of the mother wavelet) :
 $\psi_{j,k} : t \in \mathbb{R} \mapsto 2^{j/2} \Psi(2^j t - k).$
- Empirical wavelet coefficients : $\langle z^\varepsilon, \psi_{j,k} V \rangle = \sum_{n=1}^N z^\varepsilon(u_n) \psi_{j,k}(u_n) V_n.$

Prophet is a procedure for forecasting time series data based on an additive model where non-linear trends are fit with yearly, weekly, and daily seasonality, plus holiday effects.

Accurate and fast.

Prophet is used in many applications across Facebook for producing reliable forecasts for planning and goal setting. We've found it to perform better than any other approach in the majority of cases. We fit models in [Stan](#) so that you get forecasts in just a few seconds.

Fully automatic.

Get a reasonable forecast on messy data with no manual effort. Prophet is robust to outliers, missing data, and dramatic changes in your time series.

FIGURE – Application of Fourier analysis to time series predictions by Facebook (source : medium.com, The math of prophet).

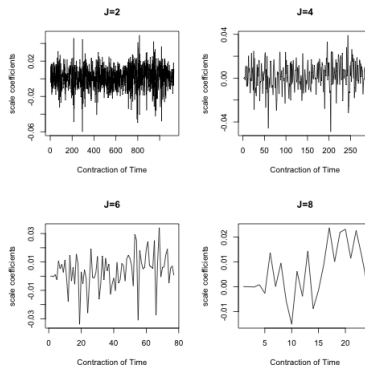


FIGURE – Example of projection on a wavelet basis. Scale coefficients of a signal for different resolution dimensions.

- 1 Annualisation des mesures de risque
- 2 **Corrélation multirésolution**
 - Construction des ondelettes
 - Application des ondelettes aux mesures de risque
- 3 Dynamiques fractales
 - Mouvement brownien fractionnaire
 - Markov switching multifractal
 - Application aux mesures de risque

Comment définir une ondelette ?

We choose a mother wavelet as a function Ψ from the space $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$:

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}} |\Psi(t)| dt < \infty \\ \int_{\mathbb{R}} |\Psi(t)|^2 dt < \infty. \end{cases}$$

Moreover, this function is chosen with zero mean and square norm one :

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}} \Psi(t) dt = 0 \\ \int_{\mathbb{R}} |\Psi(t)|^2 dt = 1. \end{cases}$$

From a mother wavelet, one can derive wavelet functions :

$$\psi_{j,k} : t \in \mathbb{R} \mapsto 2^{j/2} \Psi(2^j t - k),$$

where $j \in \mathbb{R}$ is the resolution level and $k \in \mathbb{R}$ is the translation parameter. For a discrete wavelet analysis, we restrict to integer parameters : $j \in \mathbb{Z}$ and $k \in \mathbb{Z}$.

The wavelet is said to be orthogonal if the corresponding discrete wavelet basis is orthogonal :

$$\forall (j, j', k, k') \in \mathbb{R}^4, \int_{\mathbb{R}} \psi_{j,k}(t) \psi_{j',k'}(t) dt = \mathbf{1}_{j=j'} \mathbf{1}_{k=k'}.$$

In our work, we are mostly interested in orthogonal wavelets defined on a compact support, the Daubechies wavelets. The number of vanishing moments allows to define various types of Daubechies mother wavelets : it is defined as the maximal integer m such that

$$\int_{\mathbb{R}} t^m \Psi(t) dt = 0.$$

For example, the Haar wavelet corresponds to the Daubechies wavelet with zero vanishing moments :

$$\psi^{Haar} : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{1}_{[0,1/2)}(t) - \mathbf{1}_{[1/2,1)}(t).$$

More generally, for Daubechies wavelets, we define first a scaling function¹ ϕ by successive dyadic interpolations in a cascade algorithm :

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{2N-1} a_k \phi(2x - k),$$

for a well-chosen sequence of coefficients a_k and N the number of vanishing moments. Then, the mother wavelet can also be interpolated using the scaling function :

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{2N-1} (-1)^k a_{1-k} \phi(2x - k).$$

1. Also called father wavelet.

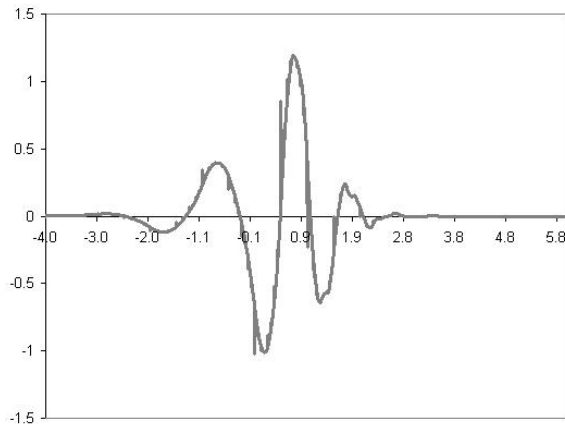


FIGURE – Daubechies mother wavelet with 5 vanishing moments (more parsimonious representation when this number increases).

Transformée en ondelettes

Let z be a squared-integrable function : $z \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. It is the input signal. We decompose it into a discrete dyadic real wavelet basis. Such a wavelet basis is a countable subset of the function space $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

The discrete wavelet analysis consists in decomposing the function z in the discrete wavelet basis. For $j, k \in \mathbb{Z}$, the projection of z on the subspace generated by the vector basis $\psi_{j,k}$ is the wavelet coefficient $\hat{z}_{j,k}$ of resolution level j and translation parameter k :

$$\hat{z}_{j,k} = \int_{\mathbb{R}} z(t) \psi_{j,k}(t) dt.$$

In most cases, we are only able to calculate an empirical wavelet coefficient, that is with an empirical integral defined on a discrete grid $u_0 < u_1 < \dots < u_N$:

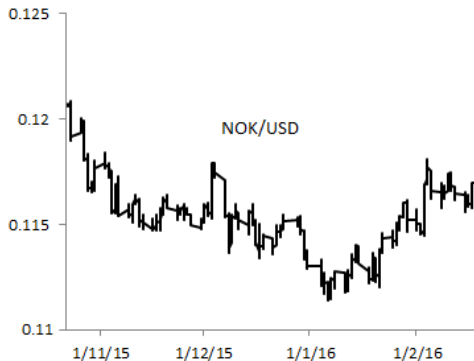
$$\hat{z}_{j,k}^{empirical} = \sum_{n=1}^N z(u_n) \psi_{j,k}(u_n) (u_n - u_{n-1}).$$

Interprétation des coefficients

- Autocorrélogramme : autocorrélation (axe Y) en fonction du nombre de retards (axe X) ; pics indiquent une sorte de cycle moyen.
- Spectrogramme 2D : coefficients de Fourier (axe Y) en fonction de la fréquence (axe X) ; pics indiquent aussi saisonnalité (mais pas moyenne : projection d'un signal sur une saisonnalité, fait donc abstraction de ce qui relève d'autres fréquences), mais attention, car somme de sinusôïde de fréquences différentes peut conduire à des signaux peu saisonniers.
- Spectrogramme 3D : coefficients de Fourier à fenêtre (représentés par couleur), donc ajout d'une composante temporelle (axe X) à la fréquence (axe Y) : c'est un spectrogramme dynamique et peut donc dépeindre des variations de saisonnalité si celles-ci ont une période inférieure à la taille de la fenêtre.
- Scalogramme : coefficients d'ondelette (représentés par couleur) en fonction du temps (axe X) et de l'échelle (axe Y) ; pas vraiment saisonnalité (une seule oscillation de l'ondelette, contrairement à Fourier par fenêtres), mais projection du signal à différentes échelles de temps (rendements mensuels, hebdomadaires, quotidiens, horaires...) ; forts coefficients donnent plutôt idée de points de rupture (perte de différentiabilité du signal).

Interprétation des coefficients

Exemple autocorrélogramme, spectrogramme 2D et 3D et scalogramme pour le taux de change NOK/USD, observations horaires entre le 22 octobre 2015 et le 19 février 2016.



Interprétation des coefficients

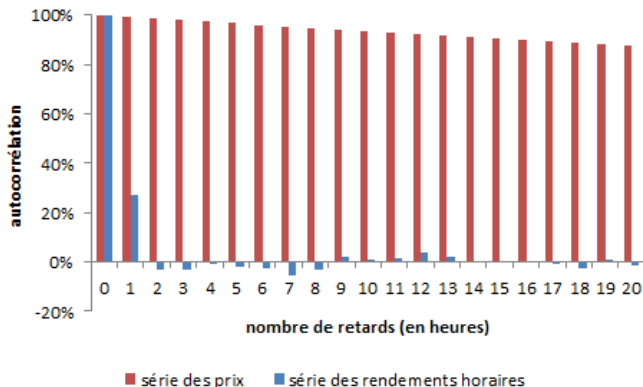


FIGURE – Autocorrélogramme simple (autocorrélogramme partiel si on remplace la corrélation entre X_t et X_{t-h} par celle entre $X_t - \mathcal{X}_{t,t-1}$ et $X_{t-h} - \mathcal{X}_{t-h,t-1}$, où $\mathcal{X}_{t,t-1}$ [resp. $\mathcal{X}_{t-h,t-1}$] est la régression linéaire de X_t [resp. X_{t-h}] sur $X_{t-1}, \dots, X_{t-h+1}$) des prix et rendements horaires du NOKUSD.

Interprétation des coefficients

- La densité spectrale de puissance de x_t associée à une fréquence ω le carré du module du coefficient de Fourier $\hat{x}(\omega)$. On note $\Gamma(\omega) = |\hat{X}(\omega)|^2$.
- Par le théorème de Wiener-Khinchine, $\Gamma(\omega)$ est la transformée de Fourier de l'autocorrélation $\gamma(h)$ à la fréquence ω .
- La transformée de Fourier de l'autocorrélogramme est appelée périodogramme. Dans un cadre réaliste où l'on n'intègre pas les signaux sur \mathbb{R} entier, c'est (seulement) un estimateur de la densité spectrale de puissance.
- En effet, en notant x^* le complexe conjugué :

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} \gamma(h) e^{-i\omega h} dh \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x^*(t) x(t+h) e^{-i\omega h} dh dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} x(u) e^{-i\omega u} du \right) x^*(t) e^{+i\omega t} dt \\ &= \hat{x}(\omega) \int_{\mathbb{R}} x^*(-v) e^{-i\omega v} dv = \hat{x}(\omega) \hat{x}(\omega)^* = \Gamma(\omega).\end{aligned}$$

avec deux changements de variables successifs.

Interprétation des coefficients

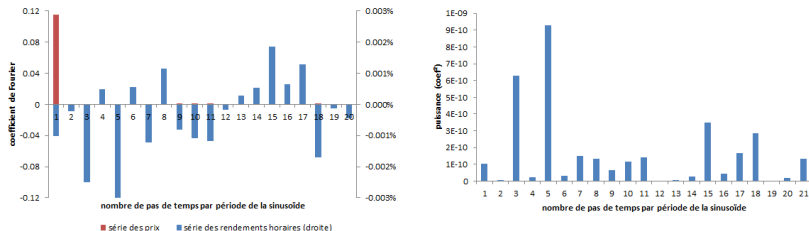


FIGURE – Spectre pour NOKUSD. Un bruit blanc a un spectre plat : toutes les fréquences contribuent de la même manière au signal. Pics correspondent à saisonnalité.

Interprétation des coefficients

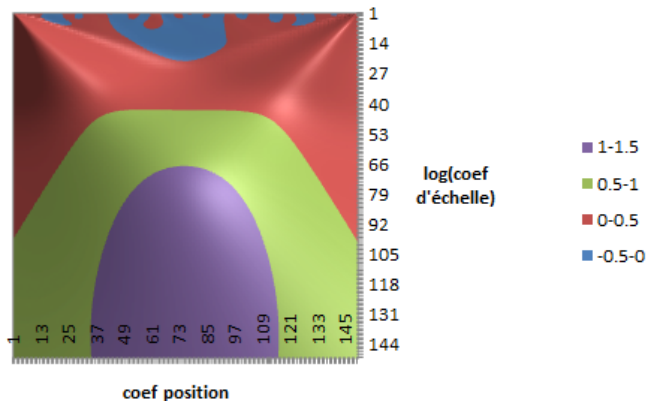


FIGURE – Scalogramme sur les 150 premières dates de NOKUSD (environ 10% de l'échantillon).

Interprétation des coefficients

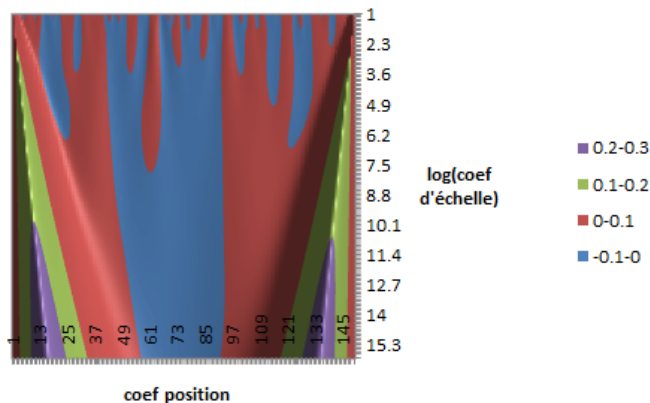


FIGURE – Scalogramme, détail. Les lignes de maxima correspondent à des singularités.

Interprétation des coefficients

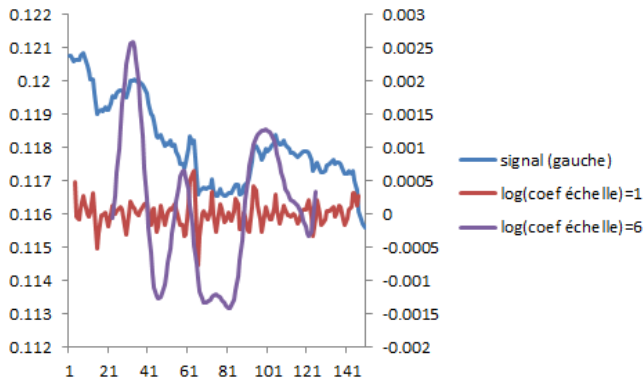


FIGURE – Scalogramme, pour deux échelles sélectionnées (effets de bord éliminés) et signal NOKUSD.

Transformée inverse

The wavelet inverse transform consists in reconstructing the observed signal, z , according to each translation and resolution level. The reconstructed signal for a given resolution level $j \in \mathbb{Z}$ is called the detail signal :

$$D_j : t \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{z}_{j,k} \psi_{j,k}(t).$$

The whole reconstructed signal is the sum of all the details :

$$z = \sum_{j \in \mathbb{Z}} D_j,$$

in which the details with a higher j correspond to a finer resolution. The finer details can also be reduced to a finite sum thanks to the scaling function :

$$z = \sum_{j \leq j_0} D_j + \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j_0,k} \phi_{j_0,k},$$

where

$$c_{j_0,k} = \int_{\mathbb{R}} z(t) \phi_{j_0,k}(t).$$

Quelles limitations ?

- Limitations sur le nombre de données ? Seulement pour les algorithmes rapides.
- L'interprétation des coefficients se distingue de celle des coefficients de Fourier.
- Effets de bord (diminués par miroir, mais selon un choix arbitraire).
- N'offre pas un modèle de prévision (en revanche, peut permettre d'estimer modèles prédictifs du genre $y_{t+1} = z(y_t) + \varepsilon_t$).

Quelles limitations ?

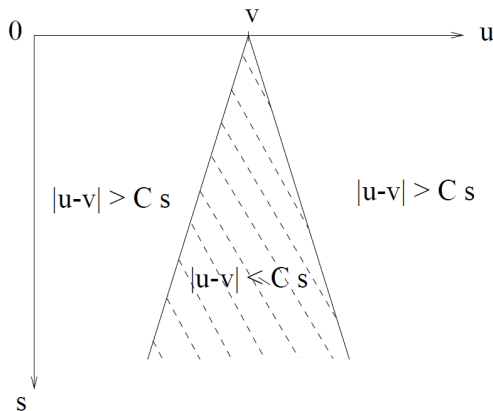


Figure 6.2: The cone of influence of an abscissa v consists of the scale-space points (u, s) for which the support of $\psi_{v,s}^b$ intersects $t = v$.

FIGURE – Impact à travers les échelles d'un effet de bord : il est contenu dans le cône d'influence. Source : Stéphane Mallat.

- 1 Annualisation des mesures de risque
- 2 **Corrélation multirésolution**
 - Construction des ondelettes
 - Application des ondelettes aux mesures de risque
- 3 Dynamiques fractales
 - Mouvement brownien fractionnaire
 - Markov switching multifractal
 - Application aux mesures de risque

Analyse multirésolution

La projection orthogonale, $P_{V_j}f$, sur l'ensemble des fonctions d'échelle, $(\phi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$, de résolution 2^{-j} fournit une approximation d'un signal f à l'échelle 2^j . Le résidu de la projection est la décomposition sur les ondelettes, $(\psi_{i,k})_{i \leq j, k \in \mathbb{Z}}$, d'échelle inférieure ou égale à 2^j . C'est ce que l'on appelle **l'analyse multirésolution**.

V_j est l'ensemble des approximations possibles à l'échelle 2^j . $(\phi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ en est une base. $(\psi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base de W_j défini par la somme directe orthogonale (tout élément de V_{j-1} s'écrit comme unique somme de deux éléments orthogonaux de V_j et W_j) :

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j.$$

Autres propriétés :

- $V_{j+1} \subset V_j$;
- $\lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = \bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = \{0\}$;
- $\lim_{j \rightarrow -\infty} V_j = \text{Adhérence} \left(\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} V_j \right) = L^2(\mathbb{R})$.

Analyse multirésolution

Utilité en finance pour calculer la corrélation entre deux cours de bourse, sans le bruit que représentent les variations à faible échelle. On verra plus tard que le détail, i.e. ce qui est contenu dans les faibles échelles, peut aussi révéler des singularités et pas seulement du bruit ; il faudra alors enlever le bruit d'une autre manière qu'en tronquant la série des ondelettes comme on le fait par la projection sur V_j .

Pourquoi pas simplement des rendements de divers horizons ?

Calculer des corrélations (ou des volatilités) à différentes échelles est déjà à notre portée sans ondelettes en considérant des rendements mensuels, quotidiens, etc. Mais :

- Comment gérer les chevauchements d'intervalle ? (quel est le rendement mensuel au milieu du mois ? cf. introduction du cours) Cela est difficile sans une base.
- Comment avoir une approximation régulière, sans les sauts des rendements d'échelle grossière ?
- Comment définir le résidu ou ce qui est propre à l'ajout d'information en changeant d'échelle (W_j), sans les ondelettes ?

Les ondelettes répondent pour nous à toutes ces questions.

Analyse multirésolution

L'ondelette de Haar permet une compréhension intuitive des ondelettes :

- C'est une ondelette de Daubechies à un seul moment nul, donc très rudimentaire pour approcher des fonctions régulières.
- La fonction d'échelle est $\phi = \mathbf{1}_{[0,1]}$ et l'ondelette :

$$\psi(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } 0 \leq t < 1/2 \\ 1 & \text{si } 1/2 \leq t < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- La décomposition sur ϕ et ψ d'une fonction $a\mathbf{1}_{[0,1/2]} + b\mathbf{1}_{[1/2,1]}$ permet de comprendre l'analyse multirésolution.
- L'approximation des rendements quotidiens r_t à l'échelle 2^j , soit $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle r, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k}(t)$, s'appuie donc sur des rendements d'horizon 2^j calculés chaque jour, avec chevauchement.
- Le détail se calcule aisément en une date comme différence de rendements. C'est nul si les rendements suivent une tendance, non-nul si oscillations autour d'une moyenne.

Covariance multirésolution

- 1 On calcule les coefficients d'échelle pour plusieurs échelles discrètes adjacentes $j \in J$ pour deux séries, en traitant ou éliminant les effets de bord : $(c_{j,k}^1)_{j \in J, k \in [0, T]}$ et $(c_{j,k}^2)_{j \in J, k \in [0, T]}$
- 2 On calcule la covariance des coefficients d'échelles pour une échelle j donnée :

$$\text{Cov}(j) = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T \left(c_{j,k}^1 - \frac{1}{T} \sum_{l=1}^T c_{j,l}^1 \right) \left(c_{j,k}^2 - \frac{1}{T} \sum_{l=1}^T c_{j,l}^2 \right).$$

Remarque

- Si l'on peut calculer des covariances, on peut aussi calculer des variances.
- Il y a un biais dans ces covariance puisque leur amplitude décroît avec l'échelle. On peut la corriger :
 - en normalisant avec $2^{j/2}$ (ce qui revient à calculer la covariance des séries reconstruites à cette échelle $\sum_{k=1}^T c_{j,k}^1 \psi_{j,k}$ et $\sum_{k=1}^T c_{j,k}^2 \psi_{j,k}$) ;
 - en se limitant à des corrélation, et donc en normalisant avec les variances.

Covariance multirésolution

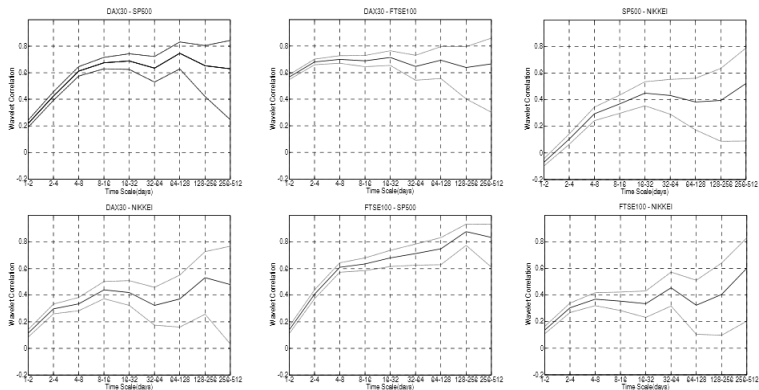


FIGURE – Wavelet correl, mai 1988-janvier 2007, avec intervalle de confiance à 95%. Source : Mikko Ranta.

Covariance multirésolution

Table 3. Correlation diversification ranking on four different time scales. Time scales used are a day(scale 1, 1-2 days), a week(scale 3, 4-8 days), a month(scale 5, 16-32 days) and a year(scale 9, 256-512 days). Ranking is formed on the basis of portfolio diversification efficiency. Correlations are in the parentheses. 5% significance level is marked with *.

Rank	Day	Week	Month	Year
1	SP500 - NIKKEI (-0,071*)	SP500 - NIKKEI (0,294*)	FTSE100 - NIKKEI (0,334*)	DAX30 - NIKKEI (0,480*)
2	DAX30 - NIKKEI (0,114*)	DAX30 - NIKKEI (0,334*)	DAX30 - NIKKEI (0,420*)	SP500 - NIKKEI (0,521*)
3	FTSE100 - NIKKEI (0,135*)	FTSE100 - NIKKEI (0,369*)	SP500 - NIKKEI (0,449*)	FTSE100 - NIKKEI (0,602*)
4	FTSE100 - SP500 (0,139*)	FTSE100 - SP500 (0,609*)	FTSE100 - SP500 (0,681*)	DAX30 - SP500 (0,630*)
5	DAX30 - SP500 (0,218*)	DAX30 - SP500 (0,612*)	DAX30 - SP500 (0,689*)	DAX30 - FTSE100 (0,665*)
6	DAX30 - FTSE100 (0,567*)	DAX30 - FTSE100 (0,701*)	DAX30 - FTSE100 (0,714*)	FTSE100 - SP500 (0,834*)

FIGURE – Idées pour stratégie en fonction de l'horizon. Source : Mikko Ranta.

Covariance multirésolution

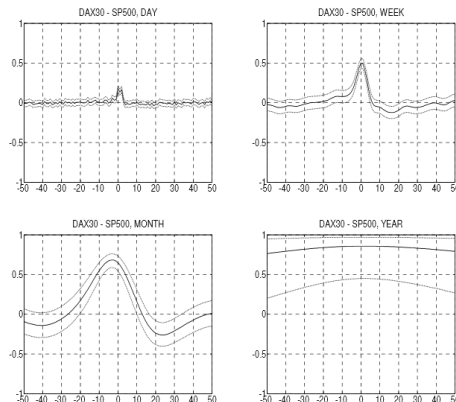


FIGURE – Lag en jour en abscisse, correl à plusieurs échelles en ordonnée. Skew à gauche : leading DAX30. Skew à droite : leading SP500. A l'échelle du jour, SP500 leader, mais à l'échelle du mois c'est le DAX30. Source : Mikko Ranta.

Covariance multirésolution

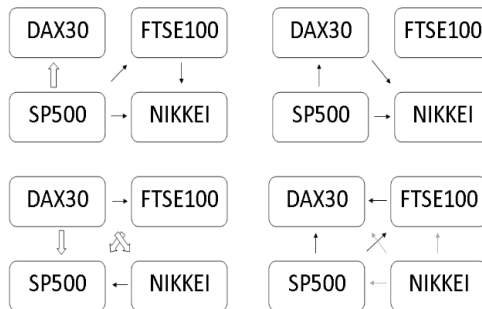


Figure 5. Volatility spillover flow charts for four different time scales. Flows have been visually estimated using the wavelet cross-correlation functions. From the upper-left corner the time scales are a day(1-2 days), a week(4-8 days), a month(16-32 days) and a year(256-512 days). Black arrows were statistically significant at a 5% level, while grey arrows were not. Big arrows describe a very strong volatility spillover.

FIGURE – Lead-lag effect à plusieurs échelles. Idées de stratégies ? Source : Mikko Ranta.

- 1 Annualisation des mesures de risque
- 2 Corrélation multirésolution
 - Construction des ondelettes
 - Application des ondelettes aux mesures de risque
- 3 **Dynamiques fractales**
 - Mouvement brownien fractionnaire
 - Markov switching multifractal
 - Application aux mesures de risque

Propriétés des données financières

- **Taux de change**

- Queues épaisses
- Persistance de la volatilité
- Volatilité stochastique
- Corrélation entre marchés

- **Actions**

- Skewness
- Les hausses de volatilité sont corrélées à une baisse des prix (feedback de volatilité)

- **Options**

- Smile, queues épaisses et asymétrie de volatilité
- Structure par terme de la volatilité (impact multifréquentiel ?)

Les solutions classiques

- Rendements conditionnels à queue épaisse (résidus selon loi de Student, sauts, etc.) ; mais les chocs haute-fréquence sont imprévisibles.
- ARCH/GARCH : prévision à un pas de temps, HF ou quotidien, mais pas multirésolution.
- vol stochastique : chocs imprévisibles sur la volatilité.
- Modèles de long terme : Markov-switching, Fractional Integrated ARCH

Chaque fait traité indépendamment, avec une course au nombre de paramètres et de l'overfitting.

Dynamiques fractales

- 1 Mouvement brownien fractionnaire
- 2 *Markov switching multifractal* (MSM)

Mouvement brownien fractionnaire

Définition

Un mouvement brownien fractionnaire B_H d'exposant de Hurst $0 < H < 1$ est un processus gaussien tel que $B_H(0) = 0$, $\mathbb{E}\{B_H(t)\} = 0$ et

$$\mathbb{E}\{(B_H(t) - B_H(s))^2\} = \sigma^2 |t - s|^{2H}.$$

Définition intégrale :

$$B_H(t) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \int_{-\infty}^{\infty} \left((t-s)_+^{H-1/2} - (-s)_+^{H-1/2} \right) dW_s.$$

Mouvement brownien fractionnaire

Proposition

- $|B_H(t) - B_H(s)|$ est proportionnel à $|t - s|^H$, ce qui correspond à la définition d'une fonction singulière partout (c'est donc une fractale homogène) d'exposant de Hölder (uniforme) H .
- Le MBf est statistiquement autosimilaire puisque $B_H(t)$ et $c^{-H}B_H(ct)$ ont la même distribution.^a
- Le MBf n'est pas stationnaire car sa covariance ne dépend pas que de $(t - s)$:

$$\mathbb{E}\{B_H(t)B_H(s)\} = \frac{\sigma^2}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H}).$$

- Les incréments du MBf sont stationnaires : $B_H(t) - B_H(s)$ a même distribution que $B_H(t - s) - B_H(0)$.
- Avec probabilité 1, le graphe de B_H a une dimension fractale de $2 - H$.

a. Ce sont des gaussiennes, et on montre qu'elles ont même espérance (0) et même variance.

Mouvement brownien fractionnaire

Un mouvement brownien classique est d'exposant de Hurst $H = 1/2$. Plus H est faible, plus le MBf est singulier. Le MBf a des propriétés dépendant de la valeur de H :

- Si $H = 1/2$, le MBf est un mouvement brownien classique, incréments **indépendants**.
- Si $H > 1/2$, les incréments sont **positivement corrélés** (efface singularités) ; c'est une primitive fractionnaire du mouvement brownien classique.
- Si $H < 1/2$, les incréments sont **négativement corrélés** (crée singularités) ; c'est une dérivée fractionnaire du mouvement brownien classique.

$$\begin{aligned}
 & \text{Correl}(B_H(n+1) - B_H(n), B_H(1) - B_H(0)) \\
 = & \frac{\mathbb{E}\{(B_H(n+1) - B_H(n))B_H(1)\}}{\sqrt{\mathbb{E}\{(B_H(n+1) - B_H(n))^2\}\mathbb{E}\{B_H(1)^2\}}} \\
 = & \frac{[\mathbb{E}\{B_H(n+1)B_H(1)\} - \mathbb{E}\{B_H(n)B_H(1)\}]/\sigma^2}{[(n+1)^{2H} - 2n^{2H} + (n-1)^{2H}]/2} \\
 = & \frac{H(2H-1)}{n^{2(1-H)}} + o_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^{2(1-H)}} \right) .
 \end{aligned}$$

Mouvement brownien fractionnaire

- L'autocorrélation décroît d'autant plus vite avec n que H est faible.
- L'autocorrélation pour $H > 1/2$ est plus forte à mesure que H monte.
- Pour $H < 1/2$, le H le plus faible n'implique pas l'autocorrélation la plus forte en valeur absolue. Cela dépend de n .
- Il y a une longue dépendance pour $H > 1/2$, ce qui signifie que

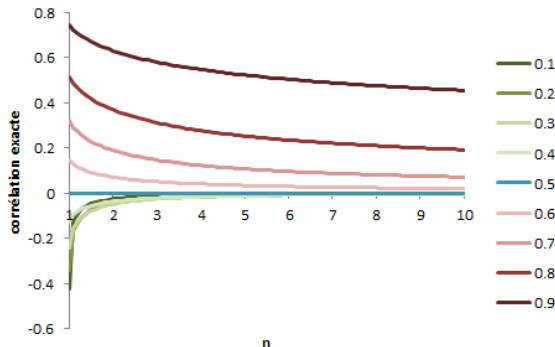
$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Correl}(B_H(n+1) - B_H(n), B_H(1) - B_H(0)) = +\infty :$$

l'autocorrélation devient proche de zéro quand n est grand, mais pas négligeable pour autant.

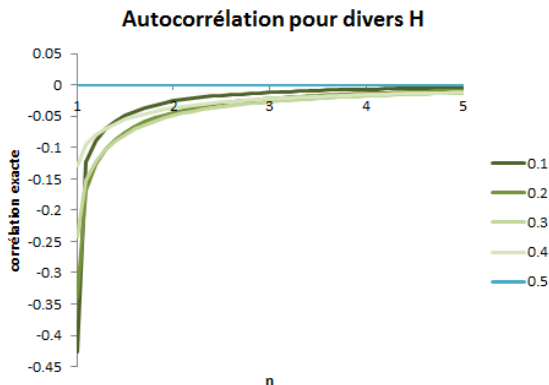
$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \text{Correl}(B_H(n+1) - B_H(n), B_H(1) - B_H(0)) \\ = & \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{N+1} n^{2H} - \sum_{n=1}^{N+1} n^{2H} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} n^{2H} \\ \sim & -\frac{1}{2} + HN^{2H-1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty. \end{aligned}$$

Mouvement brownien fractionnaire

Autocorrélation pour divers H



Mouvement brownien fractionnaire



Mouvement brownien fractionnaire - Estimation

$$\mathbb{E}\{(B_H(t) - B_H(s))^2\} = \sigma^2 |t - s|^{2H},$$

donc, si on observe le signal sur $[0, 1]$, pour une discrétisation $(0/N, 1/N, 2/N, \dots, N/N)$, $B_H((i+1)/N) - B_H(i/N)$ a pour variance empirique une valeur tendant vers $\sigma^2 N^{-2H}$. Donc :

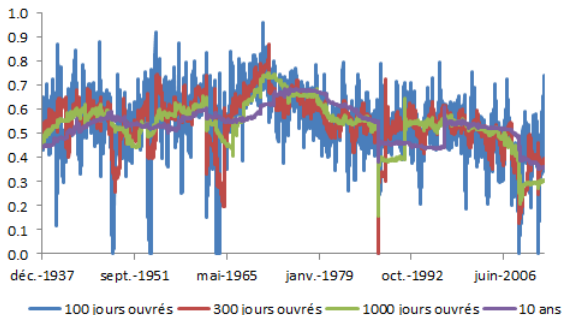
$$\hat{H} = \frac{\log(\sigma^2) - \log\left(\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (B_H((i+1)/N) - B_H(i/N))^2\right)}{2 \log(N)} \rightarrow_{p.s.} H.$$

Si σ est inconnu, il faut estimer H et σ . Pour cela, soit on estime d'abord σ , qui est la vol un jour, soit on fait le même calcul avec un pas de temps de $2/N$ au lieu de $1/N$ et on obtient cet autre estimateur de H (ici pour N pair) :

$$\hat{H} = -\frac{1}{2 \log(2)} \log \left(\frac{\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} (B_H((i+1)/N) - B_H(i/N))^2}{\sum_{i=0}^{(N/2)-1} (B_H(2(i+1)/N) - B_H(2i/N))^2} \right).$$

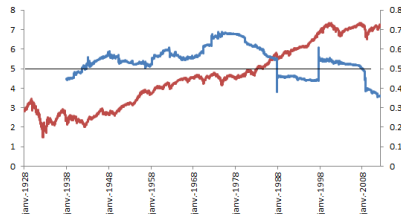
Mouvement brownien fractionnaire - Estimation

Exposant de Hurst, plusieurs tailles de fenêtres

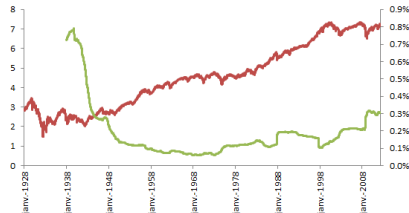


Estimation pour le logarithme népérien du prix pour S&P500, avec fenêtre glissante 10 ans, comme volatilité. Les deux pics sont le fait de la crise du 19/10/1987 (pire journée sur un marché action après krach de la bourse islandaise en 2008, et qui est à l'origine de l'instauration à Wall Street de coupe-circuits pour éviter les baisses trop importantes).

Mouvement brownien fractionnaire - Estimation



— ln-prix (axe gauche) — exposant de Hurst (axe droit)



— ln-prix (axe gauche) — volatilité 1 jour annualisée (axe droit)

Mouvement brownien fractionnaire - Estimation

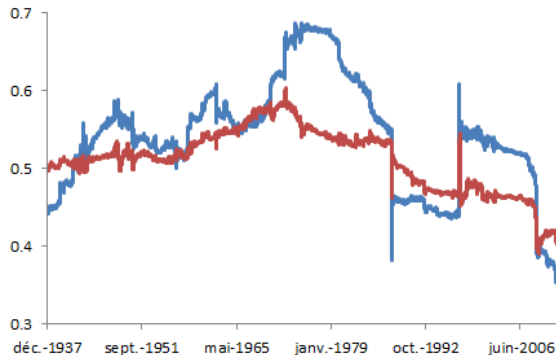


FIGURE – Estimateur avec pas de 2 jours et 1 jour (en bleu) vs estimateur avec pas de 10 jours et 1 jour (en rouge) : changer ces pas de temps permet de comparer directement plusieurs échelles et fournit donc des informations complémentaires.

Mouvement brownien fractionnaire - Simulation

- 1 Soit Γ la matrice de covariance définie par $\Gamma_{ij} = (i^{2H} + j^{2H} - |i - j|^{2H})\sigma^2/2$.
- 2 Obtenir Σ , la matrice "écart type", i.e. telle que $\Sigma^2 = \Gamma$ par décomposition de Choleski (André-Louis Choleski : si A est symétrique définie positive, il existe L triangulaire inférieure telle que $A = LL^t$).
- 3 Construire un vecteur X de variables aléatoires gaussiennes standard.
- 4 $Y = \Sigma X$ est un tirage de MBf.

Si $H = 1/2$, alors :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \sigma^2 & \sigma^2 & \dots \\ \sigma^2 & 2\sigma^2 & 2\sigma^2 & \dots \\ \sigma^2 & 2\sigma^2 & 3\sigma^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \text{ et } \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \sigma & \dots & \dots & \sigma \end{pmatrix}$$

Mouvement brownien fractionnaire - Simulation

Décomposition de Choleski, pour $A = LL^t$, on calcule dans l'ordre des équations suivantes, la première colonne :

$$\begin{cases} l_{11} = \sqrt{a_{11}} \\ l_{j1} = a_{1j}/l_{11} \end{cases} \quad \text{pour } j \geq 2$$

puis la colonne $i \geq 2$:

$$\begin{cases} l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2} \\ l_{ji} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} l_{jk}}{l_{ii}} \end{cases} \quad \text{pour } j \geq i + 1.$$

Mouvement brownien fractionnaire - Simulation

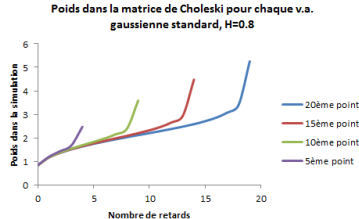
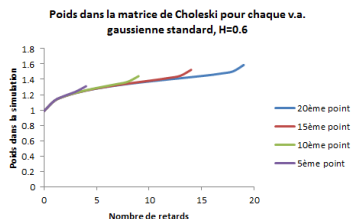
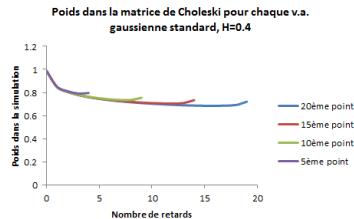
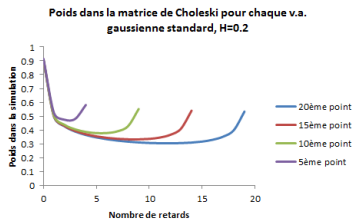


FIGURE – $\sigma = 1$. Comprendre, pour $H = 0.8$, le 20ème point simulé attribue un poids de 0.83 au 20ème tirage de v.a. gaussienne standard, puis 1.17 au 19ème, etc. jusqu'à 5.25 au premier : il s'agit d'un cas de mémoire longue.

Mouvement brownien fractionnaire - Simulation

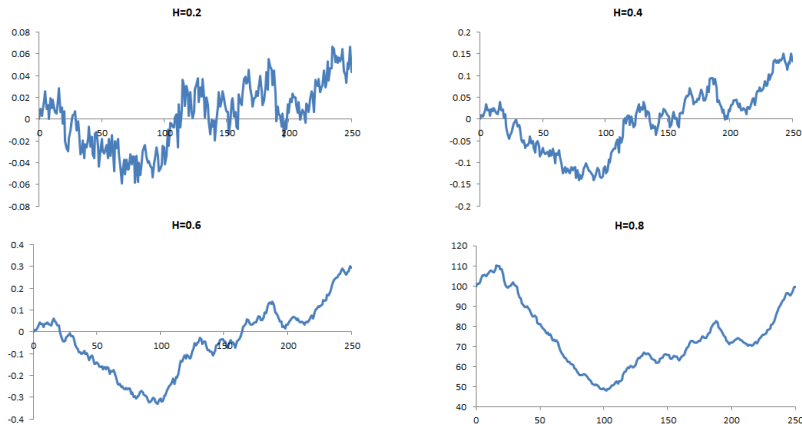


FIGURE – MBf. σ correspond à une vol annuelle de 20%. La mémoire longue, lorsque H est grand, favorise une plus grande amplitude du signal (mais avec moins d'oscillations).

Mouvement brownien fractionnaire - Simulation

Pour une simulation de prix d'action par exemple, on utilise d'habitude le mouvement brownien géométrique :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_{1/2}(t),$$

dont la solution s'obtient en appliquant la formule d'Itô

$$d(f(X_t, t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(X_t, t)dt + \frac{\partial f}{\partial X}(X_t, t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(X_t, t)\sigma_t^2 dt$$

à $f(S_t) = \ln(S_t)$:

$$S_t = S_0 \exp \left(\mu t + \sigma B_{1/2}(t) - \frac{\sigma^2}{2} t \right).$$

Mouvement brownien fractionnaire - Simulation

Dans le cas général, c'est-à-dire fractal, la formule d'Itô devient :

$$d(f(X_t, t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(X_t, t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t, t)\sigma_t^2(dt)^{2H}$$

et l'équation du MBf géométrique

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_H(t)$$

a pour solution

$$S_t = S_0 \exp \left(\mu t + \sigma B_H(t) - \frac{\sigma^2}{2} t^{2H} \right).$$

Attention !

Si vous voulez estimer un MBf géométrique, il faut bien estimer H sur le logarithme népérien du prix et non le prix directement.

Mouvement brownien fractionnaire - Simulation

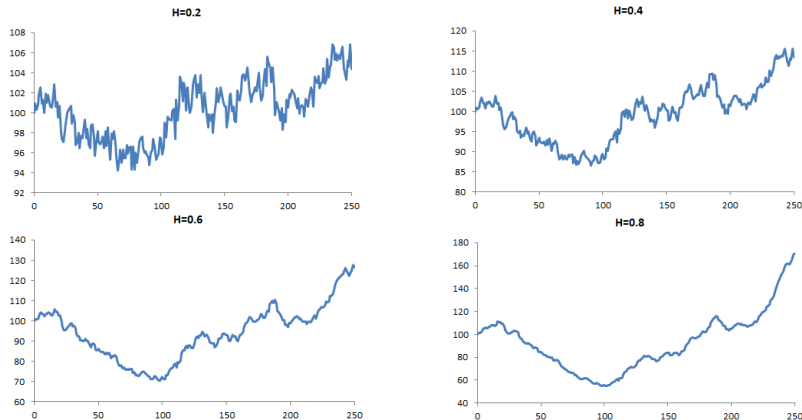


FIGURE – Mouvement brownien fractionnaire géométrique (si $H = 1/2$, mouvement brownien géométrique utilisé en finance) avec même suite de variables pseudo-aléatoires. σ correspond à une vol annuelle de 20%.

Mouvement brownien fractionnaire

Quelle utilité ?

- Généralise mouvement brownien et étend le calcul stochastique (applications au pricing d'options par exemple : d'où la nécessité de savoir simuler un MBf).
- Une dynamique plus riche que le mouvement brownien : mémoire longue, singularités.

Limites du MBf en finance

- On a vu que l'exposant de Hurst diminue les années précédant une singularité prononcée (1987, 2008), contrairement à la volatilité qui n'anticipe pas. Mais le MBf suppose une fractale homogène, i.e. avec des singularités partout de même exposant de Hölder égal à l'exposant de Hurst. Il faudrait donc plutôt une distribution d'exposants plutôt qu'une seule valeur (solution : processus localement autosimilaire : mouvement brownien multifractionnaire).
- Estimation sensible au pas de temps : la dynamique des In-prix ne doit pas être un MBf.
- Processus non stationnaire (solution : transformée de Lamperti).

Mouvement brownien multifractionnaire

Si l'exposant de Hurst dépend du temps selon une fonction höldérienne d'exposant strictement positif, $H : \mathbb{R}^+ \rightarrow (0, 1)$, alors on définit un mouvement brownien multifractionnaire $B_{H(t)}(t)$, qui généralise le MBf. La covariance est :

$$\begin{cases} \mathbb{E}\{B_H(t)B_H(s)\} = \frac{\sigma^2}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}) & \text{si MBf} \\ \mathbb{E}\{B_{H(t)}(t)B_{H(s)}(s)\} = \frac{\sigma^2}{2}(|t|^{H(t)+H(s)} + |s|^{H(t)+H(s)} - |t-s|^{H(t)+H(s)}) & \text{si MBm.} \end{cases}$$

Pour son estimation, on peut :

- conserver l'estimation par fenêtres glissantes comme précédemment ;
- estimer une approximation de la densité beaucoup plus précise (locale et non moyenne sur petite fenêtre) grâce aux ondelettes, comme on le verra plus tard.

Markov switching multifractal

L'idée : les chocs économiques ont des impacts de durée hétérogène (liquidité, business cycle, technologie, démographie, politique).

$$\begin{cases} r_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \sigma^2 \times \prod_{k=1}^{\bar{k}} M_{k,t}, \end{cases}$$

où r_t est le rendement et $M_t = (M_{1,t}, \dots, M_{\bar{k},t}) \in \mathbb{R}_+^{\bar{k}}$ est un vecteur de Markov. La transition de t à $t+1$ a lieu ainsi :

- avec probabilité $1 - \gamma_k$, $M_{k,t+1} = M_{k,t}$,
- avec probabilité γ_k , $M_{k,t+1}$ est tirée selon une variable aléatoire \mathcal{M} , positive, d'espérance 1.

Par exemple, \mathcal{M} peut être une loi binomiale valant m avec probabilité 0.5 et $2 - m$ sinon.

Markov switching multifractal

La fréquence de chaque composante $M_{k,t}$ est fixée par γ_k , modélisé ainsi :

$$\gamma_k = 1 - (1 - \gamma_{\bar{k}})^{b^{k-\bar{k}}} \simeq \gamma_{\bar{k}} b^{k-\bar{k}}.$$

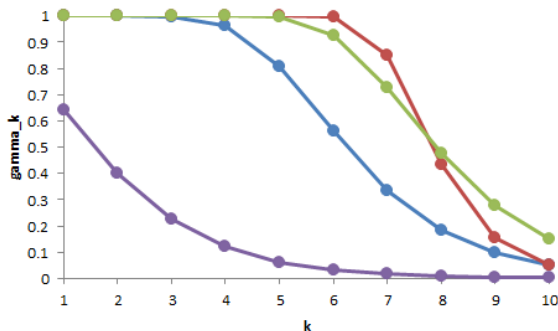


FIGURE – Pour $\bar{k} = 10$. Violet : $\gamma_{\bar{k}} = 0.2\%$, $b = 0.5$. Bleu : 5%, 0.5. Vert : 15%, 0.5. Rouge : 5%, 0.3.

Markov switching multifractal

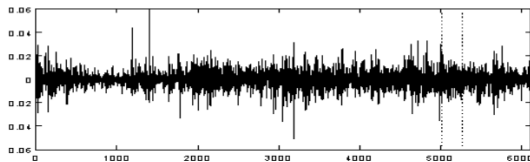
Quelques propriétés :

- Plusieurs fréquences
- Modèles à peu de paramètres (en principe facile à estimer, pas d'overfitting) : m , σ , $\gamma_{\bar{k}}$, b et \bar{k} .
- Permet des queues épaisses, de la persistance.

Markov switching multifractal

Simulation et comparaison avec le GARCH

Dollar-Mark (1973-1996)



Multifrequency Model

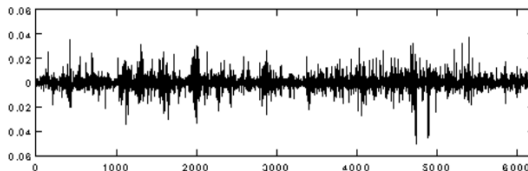
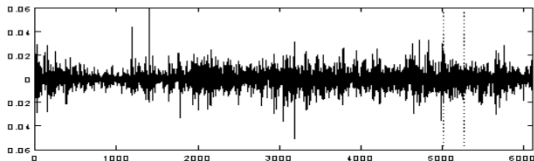


FIGURE – Source : Laurent Calvet.

Markov switching multifractal

Dollar-Mark (1973-1996)



GARCH

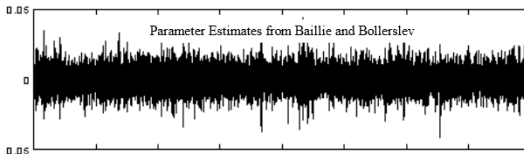


FIGURE – Source : Laurent Calvet.

- 1 Annualisation des mesures de risque
- 2 Corrélation multirésolution
 - Construction des ondelettes
 - Application des ondelettes aux mesures de risque
- 3 **Dynamiques fractales**
 - Mouvement brownien fractionnaire
 - Markov switching multifractal
 - Application aux mesures de risque

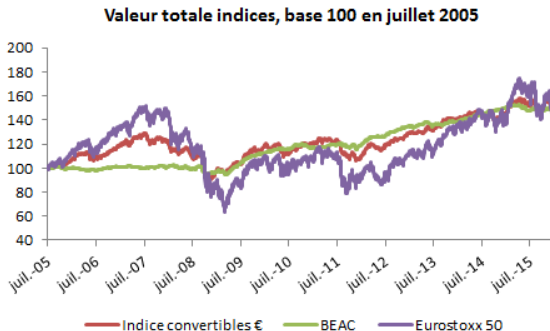
Mesures de risque

Quel rapport avec les mesures de risque ?

- Pour calculer VaR, on peut estimer une dynamique et faire des projections à l'horizon de risque. Des dynamiques fractales, plus générales que les dynamiques browniennes, offrent une estimation plus précise.
- L'exposant de Hurst est un indicateur d'un certain type de risque. Il est intéressant de comparer les spectres de singularité pour différents titres.
- Permet d'annualiser les volatilités avec le bon facteur d'annualisation.

Mesures de risque - exposants de Hurst

Exemple de comparaison des singularités pour la valeur d'un indice de convertibles, d'un indice actions et d'un indice d'obligations d'entreprises, considérés comme des mouvements browniens multifractionnaires.



Mesures de risque - exposants de Hurst

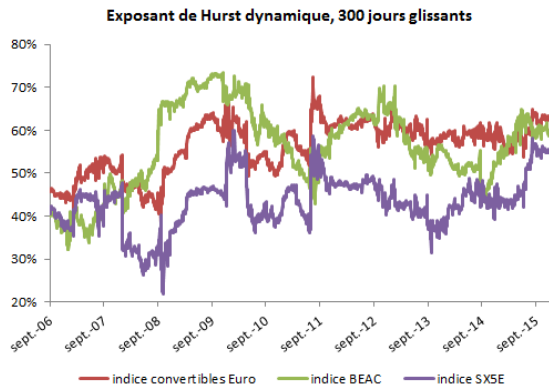


FIGURE – Estimateur avec pas de 2 jours et 1 jour.

Mesures de risque - exposants de Hurst

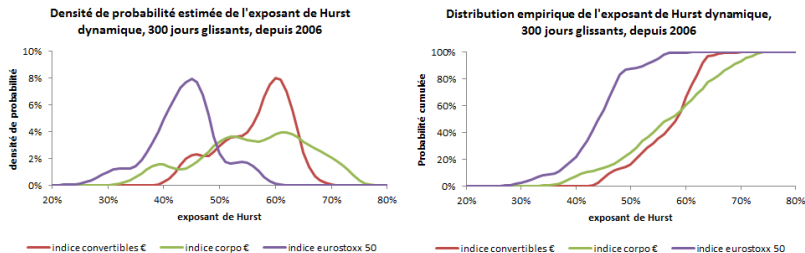


FIGURE – Densité estimée avec kernel gaussien, fonction de répartition empirique. Les actions présentent plus de singularités, le spectre de singularités des convertibles est plus resserré que celui des obligations.

Mesures de risque - exposants de Hurst

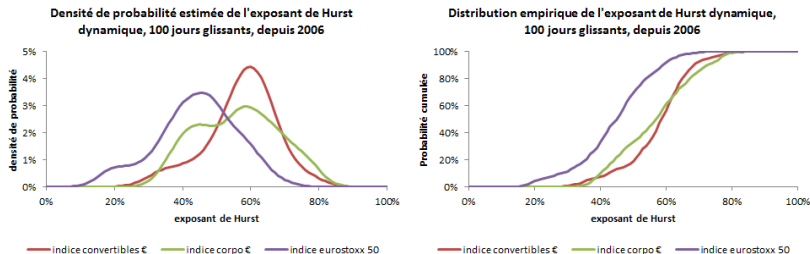


FIGURE – On diminue la taille de la fenêtre de 300 à 100 : distributions plus étalées mais interprétation identique.

Mesures de risque - exposants de Hurst

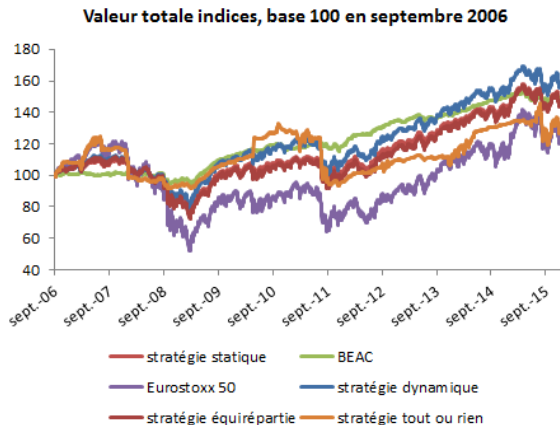


FIGURE – Stratégie où l'on investit poids $H_{oblig}/(H_{oblig} + H_{actions})$ dans l'indice obligataires et le reste en action, ou bien dans poids constant égal à ce rapport moyen, ou 1/2, ou bien tout dans l'indice avec le plus grand exposant de Hurst.