Outils mathématiques	Thème n°5 : Equations différentielles linéaires
	Cas des équations d'ordres 1 et 2

1. Introduction

Définition

Une **équation différentielle linéaire d'ordre *n*** est sous la forme :

$$a_0 y + a_1 y' + a_2 y'' + \ldots + a_n y^{(n)} = b \qquad \text{(E)}$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n, b$ sont des fonctions de la variable t.

Remarque

Si $b = 0$ et si y_1 et y_2 sont des solutions de l'équation (E), alors toute combinaison linéaire $\alpha\, y_1 + \beta\, y_2$ (α et β réels), des deux solutions y_1 et y_2 est aussi une solution de (E).

On s'intéressera dans la suite à ces équations pour les cas $n = 1$ et $n = 2$

2. Résolution des équations différentielles linéaires d'ordres 1

On écrit une **équation différentielle linéaire d'ordre 1** sous la forme :

$$\textbf{(E}_\mathbf{1}\textbf{)} \quad \boldsymbol{y' = ay + b}$$

où $\boldsymbol{a : t \to a(t)}$ ***et*** $\boldsymbol{b : t \to b(t)}$ sont deux fonctions de la variable t, qu'on suppose **continues** sur un intervalle (non vide) I de R.

Si $b = 0$, l'équation **(E$_H$)** : $\boldsymbol{y' = ay}$ est dite **l'équation homogène associée à (E$_1$)**.

Remarque

Résoudre de telles équations, c'est donner l'ensemble des fonctions $y : t \to y(t)$, dérivables sur I , vérifiant l'équation différentielle (E$_1$) sur I

• Résolution de l'équation homogène (E$_H$)

Les solutions de l'équation $y' = ay$ sont les fonctions $y : t \to y(t)$ définies sur I par :

$$\boldsymbol{y(t) = C\, e^{A(t)}},$$

où C est une constante réelle et $t \to A(t)$ est l'une des primitives de la fonction a.

Vérification :

En effet, pour toute constante réelle C, la fonction $t \to C\,e^{A}$ est bien une solution de l'équation : $y' = C\,a\,e^{A} = a\,y$.

D'autre part, pour toute solution $y : t \to y(t)$ de (E_H) sur I :

$$(E_H) \iff (y' - ay)e^{-A} = 0 \iff (y\,e^{-A})' = 0 \iff y\,e^{-A} = const = C \iff y = C\,e^{A}$$

D'où le résultat.

Exemple

Déterminons la solution de l'équation homogène (E_H) $y' = \dfrac{2t}{1-t^2}y$ sur] -1,1[.

Une primitive de $a(t) = \dfrac{2t}{1-t^2}$ est $A(t) = -\ln(1-t^2) = \ln\dfrac{1}{(1-t^2)}$, $(t \in]-1,1[)$,

donc la solution de l'équation est sous la forme : $y_H(t) = Ce^{\ln\frac{1}{1-t^2}} = \dfrac{C}{1-t^2}$, $(t \in]-1,1[)$.

• ***Problème de Cauchy***

Pour $t_0 \in I$ et $y_0 \in R$, le problème suivant (dit **problème de Cauchy**) :

$\boldsymbol{y' = ay}$, $\boldsymbol{y(t_0) = y_0}$, admet une <u>unique</u> solution $y : t \to y(t)$ sur I .

Vérification : En effet, l'égalité $y(t_0) = y_0$ dit que $C = y_0 e^{-A(t_0)}$ et C est alors fixé.

Remarque

On en déduit que le problème $\{\ y' = ay\ ,\ \ y(t_0) = 0\ \}$ admet la fonction nulle comme l'unique solution.

Alors, toute solution de l'équation $y' = ay$ est ou bien identiquement nulle sur I ou bien elle ne s'annule jamais sur I (et garde donc, par continuité, un signe constant sur I).

• **<u>Résolution de l'équation non homogène (E_1)</u>**

Si $y_p : t \to y_1(t)$ est l'une des solutions sur I de l'équation (E_1) $y' = ay + b$, alors toute solution $y : t \to y(t)$ sur I s'écrit : $y(t) = C\,e^{A(t)} + y_p$, où C est une constante réelle et $t \to A(t)$ est l'une des primitives de la fonction a.

Autrement dit, **chaque solution de l'équation (E_1) est la somme de la solution de l'équation homogène (E_H) et d'une solution particulière de (E_1) :**

$$\boldsymbol{y(t) = y_H(t) + y_p(t)}$$

Vérification : En effet, la fonction $t \to y(t) = C\,e^{A(t)} + y_1$ vérifie bien l'équation (E1).
D'autre part, pour toute solution y de (E1), la fonction $y - y_1$ est une solution de l'équation (e1). D'où le résultat.

Recherche d'une solution particulière à l'aide de la méthode de variation de la constante

On considère C de la solution de (E_H) comme une fonction de t ; on cherche à déterminer une fonction $C : t \to C(t)$ telle que $y_1(t) = C(t)\, e^{A(t)}$ soit solution de (E_1). On remplace y_1 dans (E_1) :

$$y_1' = ay_1 + b \quad \Leftrightarrow \quad C'(t)e^{A(t)} + C(t)\,a\,e^{A(t)} = a\,C(t)e^{A(t)} + b \quad \Leftrightarrow \quad C'(t) = b\,e^{-A(t)}$$

On calcule une primitive de $C'(t)$ et on obtient la solution particulière $y_1(t) = C(t)\,e^{A(t)}$ de (E_1).

Exemple

Déterminons la solution de l'équation non homogène (E_1)

$$y' = \frac{2t}{1-t^2}\,y + \frac{t^2}{1-t^2} \quad \text{sur} \quad]-1,1[.$$

La solution de l'équation homogène est $y_H(t) = \dfrac{C}{1-t^2}$, donc à l'aide de la méthode de variation de la constante on obtient : $C'(t) = b(t)\,e^{-A(t)} = \dfrac{t^2}{1-t^2}\,e^{\ln(1-t^2)} = t^2$.

D'où, on peut prendre une primitive $C(t) = \dfrac{t^3}{3}$ puis obtenir une solution particulière de (E_1) sur] -1,1[: $y_p(t) = \dfrac{t^3}{3(1-t^2)}$.

Alors la solution générale de (E_1) sur] -1,1[est sous la forme :

$$y(t) = y_H(t) + y_p(t) = \frac{C}{(1-t^2)} + \frac{t^3}{3(1-t^2)}, \quad C \in R$$

3. Equations différentielles linéaires d'ordres 2

Une équation différentielle linéaire du second ordre s'écrit :

$$(E_2) \quad \boldsymbol{y'' + p\,y' + q\,y = b}$$

où $\boldsymbol{p, q, b : t \to p(t), q(t), b(t)}$ sont **des fonctions continues** sur un intervalle (non vide) I de R.

Si $b = 0$, l'équation $\boldsymbol{y'' + p\,y' + q\,y} = 0$ est dite **l'équation homogène associée à (E_2).**

Définition

Deux solutions y_1, y_2 de l'équation homogène seront dites linéairement indépendantes si l'égalité (sur I) $\alpha\,y_1 + \beta\,y_2 = 0$ conduit à : $\alpha = \beta = 0$ (c'est à dire que y_1, y_2 sont non proportionnelles). On dit dans ce cas que $\{y_1, y_2\}$ est un **système fondamental de solutions de l'équation homogène associé à (E_2)** .

Résultat 1 : Solution de l'équation homogène

Si $\{y_1, y_2\}$ est un système fondamental de solutions de l'équation $\boldsymbol{y''+p\,y'+q\,y=0}$, alors **toute solution y_H de l'équation homogène s'écrit :**

$$\boldsymbol{y_H = \alpha\, y_1 + \beta\, y_2},$$

où α, β sont deux constantes réelles.

Autrement dit, l'ensemble des solutions de l'équation $y''+p\,y'+q\,y=0$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur R ;

Résultat 2 : Solution de l'équation non homogène

Soit l'équation non homogène (E_2) : $y''+p\,y'+q\,y=b$. Alors toute solution y de cette équation est une **somme de la solution de l'équation homogène et l'une des solutions particulières** de (E_2) :

$$\boldsymbol{y = \alpha\, y_1 + \beta\, y_2 + y_p},$$

où α, β sont deux constantes réelles, $\{y_1, y_2\}$ est un système fondamental des solutions de l'équation homogène associé à (E_2) , et y_p est l'une des solutions particulières de l'équation complète (E_2).

Remarque

On ne dispose pas dans le cas général de méthode permettant de construire explicitement $\{y_1, y_2\}$. Des outils mathématiques comme la transformée de Laplace ou la transformée de Fourier permettant de résoudre certains modèles d'équations (E_2). Dans la suite, on donnera la méthode de résolution dans le cas particulier des équations $y''+p\,y'+q\,y=b$ où p et q sont des constantes.

4. Résolution des équations différentielles linéaires d'ordres 2 à coefficients constants

Soit $y''+p\,y'+q\,y=b$ où p et q sont des constantes (indépendantes de t) et $b : t \to b(t)$ est une fonction continue sur un intervalle I de R.

.

- ***Résolution de l'équation homogène à coefficients constants***

Soit l'équation homogène associé à (E_2) : $y''+p\,y'+q\,y=0$ où p, q sont des constantes réelles. En cherchant des solutions de cette équation parmi les fonctions $y=e^{rt}, r \in R$, on aboutit à ce que r soit une solution de l'équation du second degré, dite **équation caractéristique de (E_2)** :

$$\boldsymbol{r^2 + pr + q = 0}.$$

La construction d'un système fondamental de solutions de (E_2) va dépendre du signe du **discriminant** $\boldsymbol{\Delta = p^2 - 4q}$ de cette équation.

Cas 1 *:* $\Delta > 0$

On a deux solutions réelles distinctes r_1, r_2 de l'équation caractéristique de (E_2). On vérifie alors que $\{\boldsymbol{y_1(t) = e^{r_1 t}, y_2(t) = e^{r_2 t}}\}$ constitue bien un système fondamental de solutions de l'équation homogène associé à (E_2).

Cas 2 *:* $\Delta = 0$

On a une solution réelle double r de l'équation caractéristique de (E_2). On vérifie alors que $\{\boldsymbol{y_1(t) = e^{rt},\ y_2(t) = t\, e^{rt}}\}$ est un système fondamental de solutions de l'équation homogène associé à (E_2).

Cas 3 *:* $\Delta < 0$

On a deux solutions complexes <u>conjuguées</u> $r_1 + ir_2$ et $r_1 - ir_2$ de l'équation caractéristique de (E_2). On vérifie alors que le système des deux fonctions $\{\boldsymbol{y_1(t) = e^{r_1 t}\cos(r_2 t),\ y_2(t) = e^{r_1 t}\sin(r_2 t)}\}$ est bien un système fondamental de solutions de l'équation homogène associé à (E_2).

Exemples

- L'équation $y''-2y'-8\,y = 0$ admet $\{y_1(t) = e^{4t},\ y_2(t) = e^{-2t}\}$ comme système fondamental de solutions
- L'équation $y''-6y'+9y = 0$ admet $\{y_1(t) = e^{3t},\ y_2(t) = t\, e^{3t}\}$ comme système fondamental de solutions
- L'équation $y''-6y'+13\,y = 0$ admet $\{y_1(t) = e^{3t}\cos(2t),\ y_2(t) = e^{3t}\sin(2t)\}$ comme système fondamental de solutions

Remarque

La solution de l'équation homogène associée à (E_2) est sous la forme :

$$y_H(t) = \alpha\, y_1(t) + \beta\, y_2(t), \quad \alpha,\beta \in R$$

• ***Solution particulière : Méthode de variation des constantes***

On cherche ici à déterminer une solution particulière de l'équation (E_2) : $y'' + p\, y' + q\, y = b$. La méthode de variation des constantes pour la résolution d'une telle équation s'organise comme suite :

1) On détermine un système fondamental de solutions $\{y_1, y_2\}$ de (E_2) $y'' + p\, y' + q\, y = 0$ et la solution de l'équation homogène associé à (E_2) : $y_H(t) = \alpha\, y_1(t) + \beta\, y_2(t)$

2) On considère α,β comme de fonctions et on cherche la solution particulière sous la forme $y_p(t) = \alpha(t) y_1(t) + \beta(t)\, y_2(t)$. On détermine un couple (α, β) sachant que il vérifie sur I les conditions suivantes :

(C1) : $\alpha'(t) y'_1(t) + \beta'(t) y'_2(t) = b(t)$

(C2) : $\alpha'(t) y_1(t) + \beta'(t) y_2(t) = 0$

A partir de ce système on obtient $\alpha'(t), \beta'(t)$ puis en calculant leurs primitives, on obtient une solution particulière $y_p(t) = \alpha(t) y_1(t) + \beta(t)\, y_2(t)$.

Remarque

La solution générale de l'équation (E_2) est la somme de la solution de l'équation homogène (E_H) et d'une solution particulière de (E_2) :

$$\boldsymbol{y(t) = y_H(t) + y_p(t)}$$

Exemple

Soit à résoudre l'équation (E_2) : $y''+2y'+y = te^{-t}$, $I = R$;

- On détermine d'abord un système fondamental $\{y_1, y_2\}$ de (E_2).
  Pour cela, on détermine les racines de l'équation caractéristique :
  $r^2 + 2r + 1 = 0$, qui admet la racine double $r = -1$, on en déduit que, pour t réel : $y_1(t) = e^{-t}$ et $y_2(t) = te^{-t}$

- On écrit ensuite $y_p(t) = \alpha(t) y_1(t) + \beta(t)\, y_2(t)$ et on résout le système (pour t réel) :

  $\alpha'(\mathrm{t}) y_1'(t) + \beta'(t)\, y_2'(t) = te^{-t}$ et $\alpha'(\mathrm{t}) y_1(t) + \beta'(t)\, y_2(t) = 0$

  Ce qui conduit au système suivant, avec les inconnues $\alpha'(t), \beta'(t)$:

$$\begin{cases} \alpha'(t) + (1-t)\beta'(t) = t \\ \alpha'(t) + t\beta'(t) = 0 \end{cases}$$

D'où $\begin{cases} -t\beta'(t) + (1-t)\beta'(t) = t \\ \alpha'(t) = -t\beta'(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta'(t) = t \\ \alpha'(t) = -t^2 \end{cases}$

On prend alors $\alpha(t) = -\dfrac{t^3}{3}, \beta(t) = \dfrac{t^2}{2}$ et on obtient une solution particulière :

$$y_p(t) = \alpha(t) y_1(t) + \beta(t)\, y_2(t) = \frac{1}{6} t^3 e^{-t}$$

Finalement, les solutions de l'équation (E_2) sont les fonctions sous la forme :

$$y = (\frac{t^3}{6} + \alpha + \beta\, t)\, e^{-t}\,, \quad \text{où } \alpha, \beta \text{ sont deux constantes réelles arbitraires}$$

Un complément théorique

- ***Réduction de l'ordre d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2***

Soit l'équation (E_2) : $y'' + p\, y' + q\, y = b$, définie sur un intervalle I de R et soit $y : t \to y(t)$ une solution de (E_2). On pose :

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix},\ A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{pmatrix},\ B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

On obtient le système différentiel : (S) $Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$

Réciproquement, si $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ est une solution de ce système différentiel, alors $y = z_1$ est solution de l'équation (E_2).

Autrement dit, la résolution de l'équation linéaire d'ordre 2 est équivalente à la résolution d'un système différentiel linéaire d'ordre 1 mais avec des données matricielles

- ***A propos de la méthode de variation des constantes***

Soit $\{y_1, y_2\}$ un système fondamental de solutions de l'équation homogène associé à (E_2). Les couples $U(t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix}$ et $V(t) = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_2' \end{pmatrix}$ sont alors solutions du système homogène associé à (S): $W'(t) = A(t).W(t)$.

Cherchons une solution du système (S) $Z'(t) = A(t)Z(t) + B(t)$, sous la forme :

$$Z(t) = \alpha(t).U(t) + \beta(t).V(t)$$

avec $\alpha(t), \beta(t)$ deux fonctions scalaires et $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}, A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix}$.

L'abscisse $z(t) = \alpha(t)y_1(t) + \beta(t)y_2(t)$ de $Z(t)$ serait alors solution de l'équation (E_2).

On a : $A(t)Z(t) + B(t) = Z'(t) = \alpha(t)U'(t) + \alpha'(t)U(t) + \beta(t)V'(t) + \beta'(t)V(t)$

D'où $A(t)\big(\alpha(t).U(t) + \beta(t).V(t)\big) + B(t) = \alpha(t)U'(t) + \alpha'(t)U(t) + \beta(t)V'(t) + \beta'(t)V(t)$

Or $U'(t) = A(t)U(t)$ et $V'(t) = A(t)V(t)$

On en déduit : $\alpha'(t)U(t) + \beta'(t)V(t) = B(t)$

Ou encore, au système (S0) : $\begin{cases} \alpha'(t)y_1(t) + \beta'(t)y_2(t) = 0 \\ \alpha'(t)y_1'(t) + \beta'(t)y_2'(t) = b(t), t \in I \end{cases}$

Le fait que $\{y_1, y_2\}$ soit un système fondamental assure que (S0) admet, pour chaque $t \in I$ fixé, une et une seule solution $\alpha'(t), \beta'(t)$. La fonction $z(t) = \alpha(t)y_1(t) + \beta(t)y_2(t)$ constiue bien une solution de (E_2)

<u>**Quelques références**</u>

http://www.crest.fr/ckfinder/userfiles/files/pageperso/mandre/edl1.pdf

http://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00165.pdf

https://www.youtube.com/watch?v=6SfAvnaFhFM

https://www.youtube.com/watch?v=vUon9Q7-SZA

Fiche de travail

A. Exercices d'apprentissage

Exercice 1

Soit l'équation différentielle (E) : $y'(t) = y(t) + t$.
Répondre par Vrai/Faux en justifiant :

a) L'équation (E) admet une fonction constante $y(t) = C$ comme solution

b) La fonction $y(t) = 3e^t - t - 1$ est une solution de (E)

c) La fonction $y(t) = e^t - t - 1$ est une solution de (E) telle que : $y(0) = 0$

Exercice 2

Soit $N(t)$ l'effectif d'une population au temps t et N_0 sa valeur en $t = 0$. Les taux (fixes) de natalité et de mortalité sont respectivement n et m et sont considérés comme les nombres de naissance et de décès par unité de temps et par habitant. On fait l'hypothèse que la loi de $t \to N(t)$ est donnée par l'équation différentielle :

(E) $N'(t) = (n - m)N(t),$ pour $t \geq 0$

a) Résoudre l'équation (E)

b) Discuter, suivant n et m, la limite : $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t)$.

Exercice 3

a) Résoudre l'équation (E_H) : $y'(t) = (\frac{2}{t} - \frac{1}{t^2})y(t),\ t > 0$

b) Soit l'équation (E_1) : $y'(t) = (\frac{2}{t} - \frac{1}{t^2})y(t) + 1,\ t > 0$. Déterminer à l'aide de la méthode de variation de la constante la solution particulière de l'équation (E_1) et en déduire la solution générale de (E_1).

c) Donner une solution $y : t \to y(t),\ t > 0$, de (E1) telle que : $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} y(t)$ soit finie.

Exercice 4

Répondre par Vraie ou Faux aux propositions suivantes, justifiez vos réponses

a) L'équation $z''(t) = -z(t)[z'(t) - t^2],\ t$ réel, est une équation différentielle linéaire

b) L'équation $z''(t) = -z(t)[z'(t) - t^2],\ t$ réel, est une équation différentielle d'ordre 2

c) L'équation $y''(t) + y'(t) - 6y(t) = 1$ admet une fonction constante comme solution

d) L'équation $y''(t) + y'(t) - 6y(t) = 0$ admet la fonction $y(t) = e^{2t}$ comme solution telle que $y(0) = 1$

e) Pour l'équation $y''(t) + y'(t) - 6y(t) = 0$, la fonction $y(t) = \frac{1}{3}e^{2t}$ est l'unique solution telle que : $y(0) = \frac{1}{3}$.

Exercice 5

a) Résoudre l'équation différentielle (E_H) : $y''(t)-7y'(t)+6y(t)=0,\ t$ réel.

b) Soit l'équation différentielle (E2) : $y''(t)-7y'(t)+6y(t)=\sin t,\ t$ réel
Donnez deux constantes a,b pour que la fonction $z(t)=a\cos t+b\sin t$ soit une solution de (E2).

c) Résoudre l'équation (E2).

d) Donnez la solution $t\to y(t)$ de (E2) telle que : $y(0)=0$ et $y'(0)=0$.

Exercice 6

Soit l'équation différentielle (E) : $y''(t)-y'(t)-2y(t)=e^{2t},\ t$ réel.

a) En appliquant la méthode des variations des constantes, donnez une solution de l'équation (E)

b) Résoudre l'équation (E) puis donner la solution $t\to y(t)$ de (E2) telle que : $y(0)=0$ et $y'(0)=0$

B. Exercices complémentaires

Exercice 1

Soit l'équation différentielle : $(1+e^t)y''(t)+2e^t y'(t)+(2e^t+1)y(t)=0$ (E2)

a) Soit $z(t)=(1+e^t)y(t)$. Montrer que $y=y(t)$ est solution de (E2) si et seulement si $z=z(t)$ est une solution de l'équation (E) : $z''(t)+z(t)=0$

b) Résoudre l'équation (E), puis donner les solutions de (E2)

Exercice 2

On repique des plants de 10 cm de haut sous une serre. On sait que la taille maximale de ces plantes est de 1 m. On note $y:t\to y(t)$ la taille, en m, d'un plant après t jours. (On a donc $y(0)=0.1$)

Le modèle de Verhulst consiste à considérer que la vitesse de croissance de la plante évolue suivant la relation: $y'(t)=ay(t)[1-y(t)]$, a est une constante dépendant des conditions expérimentales

a) On pose, pour tout $t\geq 0$, $z(t)=\dfrac{1}{y(t)}$. Déterminer une équation différentielle satisfaite par z, puis la résoudre (pour $t\geq 0$)

b) En déduire que pour tout $t\geq 0$: $y(t)=\dfrac{1}{9e^{-at}+1}$

c) On observe qu'au bout de 15 jours, la plante mesure 19 cm. Calculer a (à 10^{-4} près).

d) Étudier la limite $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$ et préciser son sens de variation.

e) Au bout de combien de jours, la plante dépassera-t-elle 90 cm de haut?

Exercice 3

A l'instant $t = 0$, on isole N_0 atomes de thorium. Le thorium est un corps radioactif qui donne, par désintégration, un autre corps radioactif, le radium. On se propose d'étudier l'évolution au cours du temps des quantités de thorium et de radium.
Le temps t est compté en jours ($t \in R_+$). Soit $t \to N(t) =$ le nombre d'atomes de thorium à l'instant t et $t \to n(t) =$ le nombre d'atomes de radium à l'instant t. On a pour t réel positif :

$$N'(t) = -\lambda_1 N(t) \qquad (E_1)$$

$$n'(t) = \lambda_1 N(t) - \lambda_2 n(t) \qquad (E_2)$$

où λ_1, λ_2 sont les constantes radioactives (non nulles) du thorium et du radium, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$

a) Déterminer N en fonction de λ_1, t et N_0

b) On appelle période ou demi-vie d'un corps radioactif le temps T au bout duquel le nombre d'atomes de ce corps a diminué de moitié. Calculer λ_1 (à 10^{-4} près) si la période T_τ du thorium est de 18 jours.

c) Déterminer, en fonction de λ_1, λ_2 et N_0, une constante a pour que $t \to a\, e^{-\lambda_1 t}$ soit une solution de (E_2)

d) En déduire l'expression de n en fonction de λ_1, λ_2, t et N_0