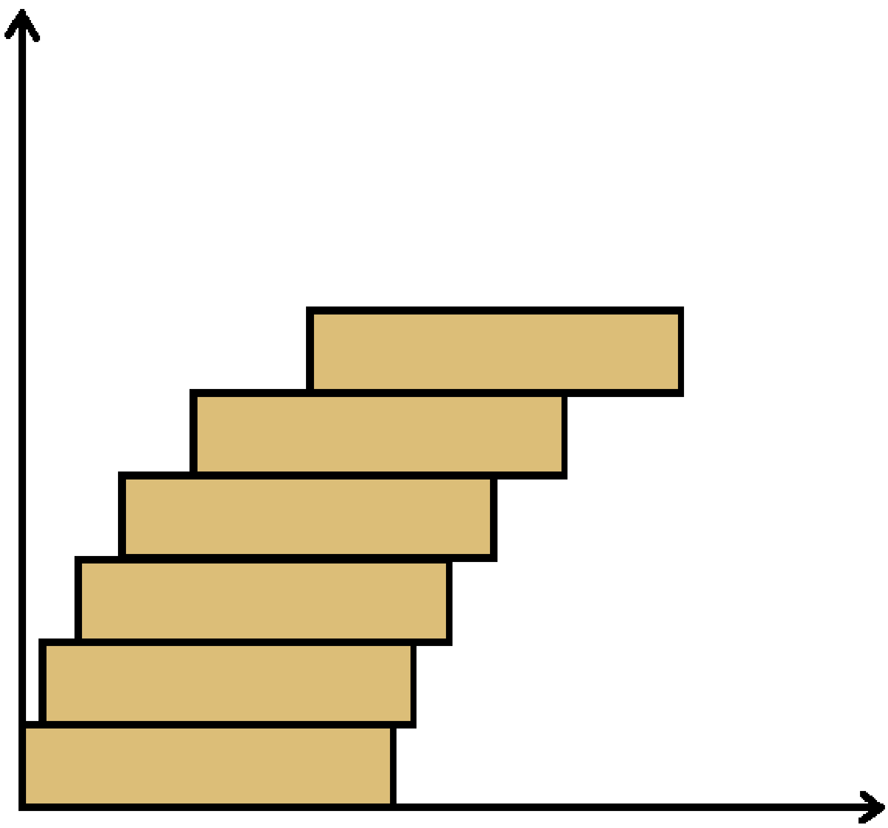
Année 2022-2023 *Lycée Charles Baudelaire*

Preuve de la possibilité théorique/mathématique d'un escalier en kapla de longueur infinie dans un espace idéalisé



Introduction :

Les raisonnements et calculs qui suivent ne sont que la conclusion d'un travail en lui même bien plus large.
Ils ne sont que la preuve finale et ne représente pas à la perfection l'intégralité du cheminement de pensée et d'idées qui a permis d'y parvenir.

Ces pages ont pour but de démontrer la possibilité mathématique de construire un escalier de kapla de longueur infinie quand certaines conditions sont respectées.
Il est cependant à noter que les règles mathématiques qui régissent ces raisonnement ne s'appliquent pas forcément à un environnement obéissant aux lois physique de l'univers, aussi idéalisées soient-elles, et sont donc à aborder avec un point de vue purement théorique.

Sur ce,
Bonne lecture.

<u>Définition :</u>

En tout premier lieu, il nous faut préciser la nature des kaplas utilisés, partons du principe que nous avons un modèle de kapla idéalisé avec une masse et un volume qui ne change pas d'un kapla à un autre.

<u>Avancement :</u> distance entre un kapla à un autre, cette distance est prédéfinie pour la construction de l'escalier et peut varier ou non entre chaque kapla, il est à noter que la distance maximale possible pour l'avancement est de 1/2 longueur de kapla (Cf : preuve en fin d'article).

<u>Centre de gravité :</u> le centre de gravité d'un kapla unique est un point toujours situé au croisement de ses diagonales, soit en plein milieu du kapla.

<u>Barycentre :</u> centre de gravité de l'ensemble des kaplas composant l'escalier.

Pour les définitions qui suivent, il nous est nécessaire d'établir certaines choses :

Prenons un plan orthonormé d'origine O et avec pour valeur unitaire une longueur de kapla, donc 1 unité dans le plan équivaut à 1 longueur de kapla. Maintenant, supposons que nous placions le premier kapla de notre escalier collé à droite de l'axe des ordonnées à une coordonnée y infinie (cela aide pour le confort visuel et la modélisation), nous rajoutons les kaplas composant l'escalier par le dessous du premier kapla en respectant l'avancement prédéfini et numérotons chaque kapla en fonction de son rang d'apparition dans l'escalier. En dessous de notre escalier se trouvera toujours un kapla dit « fantôme », qui est placé en respectant l'avancement défini mais dont la présence n'impacte en rien la structure, son centre de gravité n'entre pas en compte, il est placé ici uniquement pour faciliter les calculs (on peut considérer qu'il est le kapla en contact avec la surface sur laquelle repose notre escalier).

A partir de là notre objectif est de déterminer pour tout rang de l'escalier le centre de gravité de l'ensemble de la structure et de l'optimiser pour que l'escalier soit le plus long possible.

Définissons pour cela les objets suivants :

$b_k = coordonnéeenabscissedubarycentredelastructure.$ $b_{k+1} = coordonné$

L_k*=terme dont la signification est comparable à celle de l'avancement, il représente l'écart entre le kapla k et le kapla k+1. On rappelle que chaque kapla est numéroté en fonction de son rang d'apparition dans l'escalier, donc,* L_1 *correspond à l'écart entre le premier kapla de l'escalier et le kapla 2 situé juste en dessous.*

Maintenant, il nous faut définir la notion de contrainte, en effet, il est logique que l'abscisse du barycentre ne puisse dépasser une certaine valeur sans que l'escalier ne s'effondre.
Prenons un escalier de kapla quelconque avec un nombre de kapla k et une coordonnée en abscisse du barycentre de valeur x_k *, pour que la structure soit stable il faut impérativement que la valeur* x_k *soit inférieure ou égale à l'abscisse du bord du kapla fantôme, en d'autres termes le projeté orthogonal du barycentre sur l'axe des abscisses ne doit pas dépasser le bord du kapla à la base de la structure. On peut rapidement en déduire que* $b_{k+1} \leqslant x_{k+1} + 0.5$ *mais nous y reviendrons plus tard.*

$c_k = coordonnéeenabscissedelacontrainte.$ $c_{k+1} = coordonnéeenabscissed$

Les termes du sujet étant maintenant définis, il nous reste, avant de pouvoir passer à la preuve en elle-même, définir les formules qui se rattachent à chacun de ces termes.

<u>Définition des formules :</u>

Premièrement, la formule de l'abscisse du barycentre que l'on peut mettre sous forme de suite de récurrence une fois appliquée à notre escalier de kaplas, cette dernière correspond à une moyenne pondérée des centres de gravité individuel de chacun de nos kaplas :

$$b_1 = x_1 = 0.5\ b_{k+1} = \frac{k \cdot b_k + x_{k+1}}{k+1}$$

$$La formule de x_{k+1} est assez facile à déterminer car x_{k+1}\ correspond à l'abscisse$$

Il nous faut maintenant définir les formules concernant la contrainte de la structure à chaque rang. Cette dernière correspondant à l'abscisse du bord droit du kapla à la base de la structure, elle peut être calculé en prenant l'abscisse du centre de gravité de ce même kapla (soit la formule de x_{k+1}) et en lui ajoutant 0.5.
On définit donc c_{k+1}, la contrainte au rang suivant et c_k la contrainte au rang actuel.

$$c_{k+1} = 0.5 - \sum_{n=1}^{k+1} L_k + 0.5\ c_k = 0.5 - \sum_{n=1}^{k} L_k$$

Nous avons à présent toutes les cartes en main pour passer à la résolution du problème en lui même.

<u>Résolution du problème :</u>

Pour rappel, notre objectif est de construire l'escalier de kapla le plus long possible, il nous faut donc déterminer un avancement optimal permettant à la structure d'avancer sans s'effondrer, cependant cet avancement prédéfini se doit de respecter quelques conditions pour en faire l'avancement idéal :

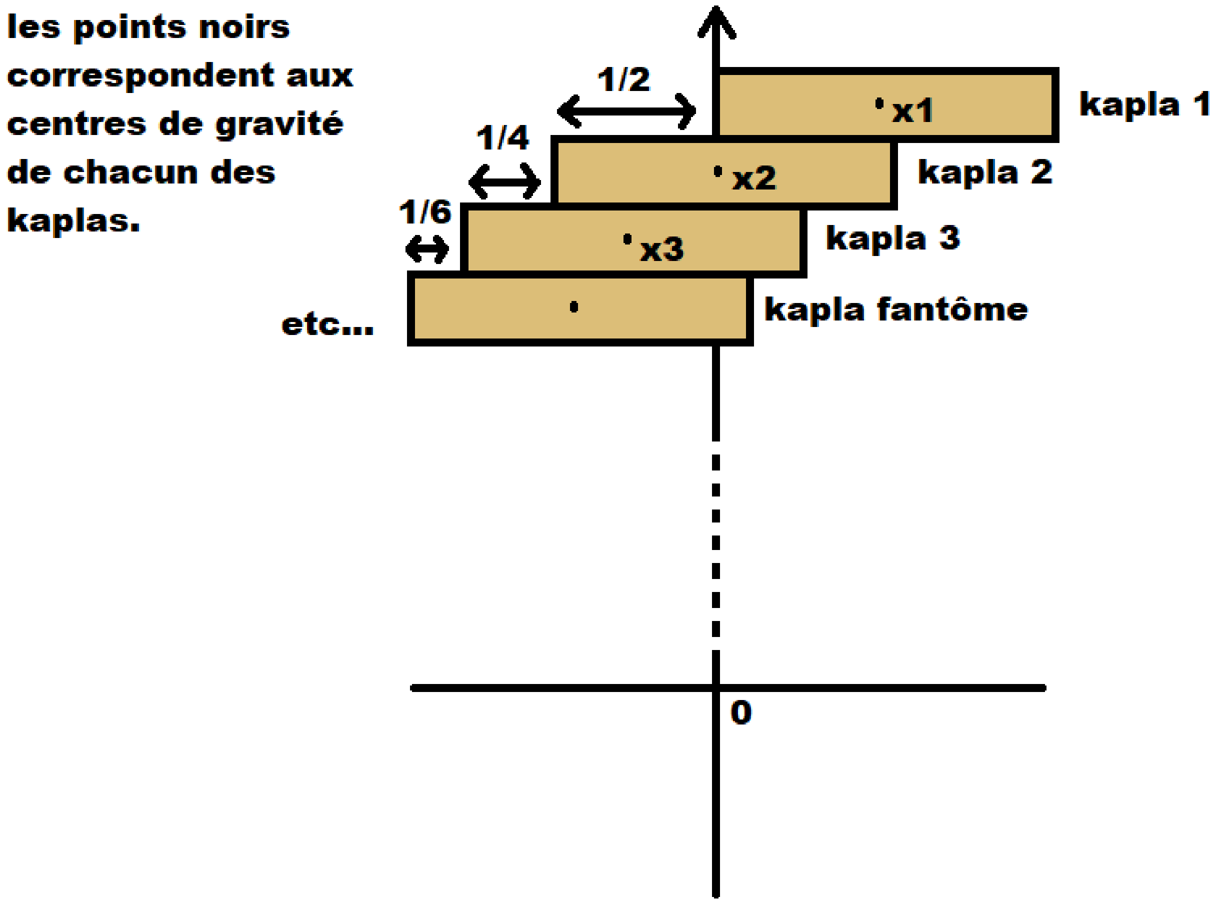
- 1/2 longueur de kapla étant l'écart maximal d'un kapla à un autre, notre avancement prédéfini se doit d'avoir 1/2 comme premier terme.

- chaque écart doit être plus petit que le précédent, sans le respect de cette règle évidente, l'escalier ne pourra pas être stable.

- l'avancement le plus optimisé nous donnerait logiquement un barycentre toujours égal à la contrainte.

- d'un point de vue plus spéculatif, s'il existe un avancement qui permettrait à notre escalier d'atteindre une longueur infinie, alors ce dernier se doit de diverger.

Après réflexion, une série de termes semble respecter chacune de ces contraintes : la série harmonique alternée, soit la somme de l'inverse des entiers naturels pairs notée $0.5 \cdot S_n$*. En effet cette série diverge, commence par 1/2, a des termes décroissants et semble être toujours égale à la valeur du barycentre quand on l'applique à la contrainte.*
On note qu'avec cette série l'écart situé derrière un kapla k peut se calculer simplement avec la formule suivante :



$L_k = \frac{1}{2 \cdot k}$ on en déduit : $L_{k+1} = \frac{1}{2 \cdot (k+1)} L_{k+1} = \frac{1}{2 \cdot (k+1)}$

On cherche donc à prouver que pour tout k avec la série harmonique alternée comme avancement prédéfini, la contrainte est toujours égale au barycentre.
Cela revient à conjecturer que $b_{k+1} = c_{k+1}$ et en conséquence que $b_k = c_k$.

Cela peut être démonter en utilisant le raisonnement par récurrence :

On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$ la propriété $H\left(b_{k+1} = c_{k+1}\right)$.

<u>Initialisation :</u>

On a déjà posé précédemment $b_1 = 0.5$, il nous reste à le vérifier pour la contrainte :

$$c_1 = 0.5 - \frac{1}{2\cdot 1} + 0.5\, c_1 = 0.5$$

Donc l'initialisation est vérifiée et H est vraie au premier rang.

<u>Hérédité :</u>

On suppose que la propriété H est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, cela implique que $b_k = c_k$ est aussi vrai.
Ce qui nous permet de remplacer $b_k par c_k$ dans la formule du barycentre (puisqu'on avait pas de formule pour b_k).
On pose aussi le changement de variable suivant :

$$X = 0.5 - \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{2k}\right)$$

on se retrouve donc avec les formules suivantes :

$b_{k+1} = frack \cdot (X + 0.5) + Xk + 1$
et
$c_{k+1} = X - (frac12 \cdot (k + 1)) + 0.5$

développons les deux formules :
$b_{k+1} = frackX + 0.5k + Xk + 1\; b_{k+1} = (kX + frac12k + X) \cdot frac1k + 1$

et pour c_{k+1}:
$c_{k+1} = X - (frac12 \cdot (k + 1)) + 0.5\; c_{k+1} = (fracX(2k + 2) - 12k + 2) +$

On a donc la preuve de l'hérédité, on en conclue que pour tout $n \in \mathbb{N}$ si l'avancement prédéfini est la somme de l'inverse des entiers naturels $0.5 \cdot S_n$, alors la contrainte est toujours respectée, *et mieux, elle est saturée, notre escalier de kaplas peut donc avoir une longueur infinie au dessus du vide en plus d'être optimisé.*

Preuves annexes :

Démonstration de la divergence de $\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{2 \cdot k}$ ***avec*** $k \in N$

Les variables définies au préalable ne s'appliquent pas à la démonstration qui suit :

On pose $\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{2 \cdot k} = 0.5 \cdot \left(\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{k} \right)$

Intéressons-nous d'abord à la fonction $\frac{1}{k}$ *avec* $k \in N$*:*

Image : rectangle sup. et inf.

Si on a des rectangles de largeur 1 et de longueur $\frac{1}{k}$ *en fonction de l'antécédent k alors :*

- *L'ensemble des carrés qui vont au-delà de la courbe correspondent à :*

$$\sum_{k=2}^{K} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{k}$$

- *L'ensemble des carrés qui sont en dessous de la courbe correspondent à :*

$$\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} +\ldots+ \frac{1}{k-1}$$

Ainsi l'aire A en dessous de la courbe est compris entre ces 2 sommes

$$\sum_{k=2}^{K}\frac{1}{k} \leq A \quad \leq \sum_{k=1}^{K}\frac{1}{k}$$

Or $A = \int_{1}^{K}\frac{1}{k}dx$ *et* $\int_{1}^{K}\frac{1}{k}dx = lnK - ln1$

On sait que $ln1 = 0$ *donc* $\sum_{k=2}^{K}\frac{1}{k} \leq lnK \leq \sum_{k=1}^{K}\frac{1}{k}$

On s'intéresse à la partie droite soit :

$lnK \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} +\ldots+ \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k}$ *mais il nous manque* $\frac{1}{k}$ *pour avoir la somme qui nous intéresse.*

Ainsi $lnK + \frac{1}{k} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} +\ldots+ \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k}$ *or nous cherchons à savoir son évolution en +∞ :*

$$ln\ k =+ \infty \text{ et } \frac{1}{k} = 0 \text{ donc } ln\ k + \frac{1}{k} =+ \infty$$

Ainsi en +∞ la somme des inverses des entier naturel est supérieure à $lnK + \frac{1}{k}$ *or* $lnK + \frac{1}{k}$ *diverge en +∞ donc notre somme diverge aussi en +∞.*

On avait posé au préalable :

$$\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{2\cdot k} = 0.5 \cdot \left(\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{k}\right)$$

Nous avons la preuve que la deuxième série (la série harmonique) diverge, or, on sait que le produit d'une série divergente est aussi divergent, donc la série harmonique alternée $\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{2\cdot k}$ *diverge elle aussi.*

Preuve de l'avancement maximal d'un kapla à un autre

Prenons notre configuration basique du premier rang de l'escalier, nous avons le kapla 1 collé à droite de l'axe des ordonnées et le kapla « fantôme » situé juste en dessous. Le centre de gravité du kapla 1 est donc à une abscisse de 0.5.

Comme la structure n'est composée que d'un seul centre de gravité influant, (puisque celui du kapla fantôme ne compte pas) il suffit que la contrainte ait la même abscisse que ce centre de gravité pour que cette dernière soit saturée. Au rang 1 de l'escalier $b_1 = x_1 = 0.5$*, donc il suffit de mettre le bord droit du kapla fantôme à une abscisse de 0.5.*

Cela revient à placer le bord du kapla fantôme sous le centre de gravité x_1*, pour ce faire il faut donc que le centre de gravité du kapla fantôme se trouve à une abscisse de 0, et donc que l'écart entre les deux kaplas soit de 1/2.*