מתמטיקה דיסקרטית II ־ דף נוסחאות

לוגיקה

תחשיב הפסוקים

- תחביר: כל אטום הוא פסוק.
  אם α ו־ β הם פסוקים, אז $\neg\alpha$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \to \beta$ ו־ $\alpha \leftrightarrow \beta$ הם פסוקים.
- לוחות האמת של הקשרים הלוגיים:

α	β	$\alpha \leftrightarrow \beta$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

α	β	$\alpha \to \beta$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

α	β	$\alpha \vee \beta$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

α	β	$\alpha \wedge \beta$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

α	$\neg\alpha$
F	T
T	F

- השמה בתחשיב הפסוקים היא בחירת ערכי אמת לכל הפסוקים האטומיים.
- α הוא טאוטולוגיה אם ערך האמת של α הוא T בכל השמה.
- α הוא סתירה אם ערך האמת של α הוא F בכל השמה.
- α ו־ β הם פסוקים שקולים לוגית (סימון: $\alpha \equiv \beta$) אם הם מקבלים בכל השמה אותם ערכי אמת; אםם לוחות האמת שלהם זהים.
- β נובע לוגית מ־ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ (הטיעון $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \models \beta$ הוא תקף) אם בכל השמה שבה ערכי האמת של כל הפסוקים $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ הם T גם ערך האמת של β הוא T, כלומר: לא קיימת השמה שבה ערכי האמת של $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ כולם T וערך האמת של β הוא F.
- α הוא בצורת DNF אם $\alpha = \alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_k$, כאשר כל α_i הוא מהצורה $\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_m$, כאשר כל β_j הוא פסוק אטומי או שלילה של פסוק אטומי.
- α הוא בצורת CNF אם $\alpha = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k$, כאשר כל α_i הוא מהצורה $\beta_1 \vee \ldots \vee \beta_m$, כאשר כל β_j הוא פסוק אטומי או שלילה של פסוק אטומי.
- מערכת קשרים היא שלמה אם כל לוח אמת ניתן למימוש על־ידי פסוק בקשרי המערכת בלבד.
- מערכות קשרים שהוכחו כשלמות: $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \to\}$; וכן $\{\uparrow\}$ (NAND), $\{\downarrow\}$ (NOR)
- שקילויות שימושיות:

$$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma) \qquad \neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta \qquad \alpha \to \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$$

$$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma) \qquad \neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta \qquad \alpha \to \beta \equiv \neg\beta \to \neg\alpha$$

- מערכת ההיסק L

  <u>אקסיומות</u>

  אקסיומה I : $\alpha \to (\beta \to \alpha)$

  אקסיומה II : $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$

  אקסיומה III: $((\neg\beta) \to (\neg\alpha)) \to (\alpha \to \beta)$

  <u>כלל היסק</u>

  $$\text{MP} \quad \frac{\alpha \to \beta, \alpha}{\beta}$$

- משפטים במערכת ההיסק (ניתן להשתמש בהם בהוכחות)

  1. $\alpha \to \alpha$
  2. $\vdash (\neg(\neg\alpha)) \to \alpha$
  3. $\vdash (\neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$
  4. $\{(\alpha \to \beta), (\beta \to \gamma)\} \vdash (\alpha \to \gamma)$
  5. $\vdash (\alpha \to \beta) \to ((\neg\beta) \to (\neg\alpha))$

- הוכחה של פסוק α היא סדרת פסוקים $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ שבה כל פסוק הוא אקסיומה, או נובע מקודמים לו על ידי כלל־היסק ו־ $\alpha_n = \alpha$. סימון: $\vdash \alpha$. מינוח: α הוא משפט פורמלי ב־ L או: α יכיח ב־ L.
- מערכת היסק היא נאותה אם כל פסוק יכיח בה הוא טאוטולוגיה.
- מערכת היסק היא שלמה אם כל טאוטולוגיה היא יכיחה בה.
- משפט הנאותות: L היא מערכת היסק נאותה.
- משפט השלמות: L היא שלמה.
- משפט: מערכת היסק שבה כל אקסיומה היא טאוטולוגיה וכל כלל היסק מייצג נביעה לוגית היא נאותה.

תחשיב היחסים

- תחביר: כל משתנה וכל קבוע הוא שם עצם; פונקציה שהוצבו בה שמות עצם היא שם עצם.
נוסחה אטומית היא יחס שהוצבו בו שמות עצם;
אם α ו־ β הן נוסחאות, אז $\neg\alpha$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \to \beta$ ו־ $\alpha \leftrightarrow \beta$ הן נוסחאות;
אם α נוסחה, אז $\forall x\alpha$ ו־ $\exists x\alpha$ הן נוסחאות (x משתנה כלשהו);
משתנה שנמצא בטווח הפעולה של כמת ($\forall =$ לכל, $\exists =$ קיים) הוא קשור. אחרת המשתנה חופשי.
נוסחה שאין בה משתנים חופשיים היא פסוק.
- מבנה M הוא פירוש לכל מרכיבי השפה, כולל הגדרת עולם (תחום D^M), קבועים מתוך העולם, יחסים על העולם, פונקציות על העולם שערכיהן בעולם.
- השמה (במבנה M) היא הצבת ערכים מתוך עולם המבנה D^M במקום משתנים (חפשיים).
- נוסחה היא אמיתית במבנה M אם ערך האמת שלה הוא T בכל השמה.
נוסחה היא שקרית במבנה M אם ערך האמת שלה הוא F בכל השמה.
- נוסחה היא אמיתית לוגית אם היא אמיתית בכל מבנה.
נוסחה היא שקרית לוגית אם היא שקרית בכל מבנה.
- דה מורגן בתחשיב היחסים: $\neg(\forall x\alpha) \equiv \exists x(\neg\alpha)$, $\neg(\exists x\alpha) \equiv \forall x(\neg\alpha)$.

גרפים

- גרף: $G = (V, E)$, V היא קבוצת הקודקודים, E היא קבוצת הצלעות;
בגרף פשוט כל צלע היא זוג לא סדור של קודקודים, אין לולאות ואין צלעות מקבילות.
- הסדר של G הוא מספר הקודקודים $|V|$.
- אם צלע $e = \{u, v\}$, אז u (v) חל ב־ e, e חלה ב־ u (וב־ v).
- שכן של קודקוד u הוא קודקוד v שקשור ל־ u בצלע; קבוצת השכנים של u היא $\Gamma(u)$.
- הדרגה (או הערכיות) של קודקוד v היא מספר הצלעות החלות ב־ v, $|\Gamma(v)|$.
- קודקוד v הוא מבודד אם $d(v) = 0$.
- מסילה היא סדרת קודקודים $v_0 v_1 \ldots v_k$ כך שבין כל שני קודקודים עוקבים יש צלע, והצלעות שונות זו מזו.
- מעגל הוא מסילה שקודקוד ההתחלה וקודקוד הסיום שלו שווים.
- מסילה פשוטה היא מסילה שאין בה קודקוד שמופיע פעמיים.
- מעגל פשוט הוא מעגל שאין בו קודקוד שמופיע פעמיים (למעט לראשון והאחרון).
- אורך של מסלול הוא מספר הצלעות במסילה.
- מרחק בין שני קודקודים בגרף הוא אורך המסלול הקצר ביניהם.

- קוטר הגרף הוא המרחק הגדול ביותר בין שני קודקודים בגרף.
- גרף הוא קשיר אם בין כל שני קודקודים קיימת מסילה.
- תת־גרף של $G=(V,E)$ הוא גרף $G'=(V',E')$ כך ש־ $V'\subseteq V$ ו־ $E'\subseteq E$.
- מרכיב קשיר של גרף הוא תת־גרף קשיר מקסימלי.
- המשלים של גרף $G=(V,E)$ הוא גרף $\bar{G}=(V,\bar{E})$ בעל אותם קודקודים כמו G, וכל הצלעות שאינן צלעות של G.

גרפים מיוחדים

- $K_n=$ הגרף השלם מסדר n: כל שני קודקודים מחוברים בצלע.
- גרף k־רגולרי: דרגת כל קודקוד היא k.
- גרף דו־צדדי: ניתן לחלק את קבוצת הקודקודים לשתי קבוצות זרות, כך שכל שני קודקודים באותה קבוצה אינם שכנים.
- $K_{m,k}=$ גרף דו־צדדי שלם, m קודקודים בקבוצה אחת ו־ k קודקודים בשניה, וכולל כל צלע אפשרית בין שתי הקבוצות.
- יער: גרף ללא מעגלים.
- עץ: גרף קשיר ללא מעגלים.
- גרף מישורי: ניתן לשרטוט במישור כך שאין שתי צלעות שנחתכות.
- גרף אוילר: גרף שיש בו מעגל אוילר – מעגל שעובר דרך כל צלע בגרף בדיוק פעם אחת.
- גרף סמי־אוילר: גרף שבו יש מסלול אוילר– מסילה שעוברת דרך כל צלע בגרף בדיוק פעם אחת.
- גרף המילטוני: גרף שיש בו מעגל המילטון – שעובר דרך כל קדקוד בגרף בדיוק פעם אחת.

משפטים

לגבי גרף $G=(V,E)$:

- למת לחיצות הידיים: $\sum_{v\in V} d(v)=2|E|$.
- אם $|E|\ge|V|\ge 3$ אז יש ב־ G מעגל.
- גרף שבו דרגת כל קודקוד היא לפחות 2 מכיל מעגל.
- G עץ אם ורק אם G קשיר ו־ $|E|=|V|-1$.
- לכל עץ יש לפחות שני עלים.
- גרף הוא דו־צדדי אם ורק אם אין בו מעגלים מאורך אי־זוגי.
- בגרף מישורי קשיר בעל 3 קודקודים לפחות, $|E|\le 3(|V|-2)$.
- בגרף מישורי קשיר מסדר n בעל m צלעות ו־ f פאות מתקיים: $f+n-m=2$.
- גרף אינו מישורי אם ורק אם הוא מכיל חלוקה של K_5 או $K_{3,3}$.
- גרף קשיר הוא גרף אוילר אם ורק אם הוא קשיר ודרגת כל קודקוד היא זוגית.
- גרף קשיר הוא גרף סמי־אוילר אם ורק אם הוא קשיר ומספר הקודקודים שלו בעלי דרגה אי־זוגית הוא 0 או 2.

שמות קבוצות

- $\mathbb{N}=$ המספרים הטבעיים; $\mathbb{Z}=$ המספרים השלמים; $\mathbb{Q}=$ המספרים הרציונליים; $\mathbb{R}=$ המספרים הממשיים.
- אם A קבוצה, $P(A)$ היא קבוצת החזקה של A (קבוצת כל התת־קבוצות של A).