מטריצות עם פרמטר

1) נדרג את המטריצה עד שהיא קנונית כולל הפתרונות.
2) נשווה כל אחד מהאיברים המובילים לאפס, ⇐ נמצא פתרון למערכת.
3) נבדוק כל פרמטר בהצבה במטריצה ⇐
- פתרון יחיד
- אינסוף פתרונות
- אין פתרון.

דטרמיננטה

1) נזכור מינורים - דטרמיננטה של תת מטריצה ע"י מחיקת שורה (i) ועמודה (j)

* תמיד נקבע סימן ע"י האיבר המוביל כ(+) ואחריו והבאים כ(-)

פעולות שניתן לבצע על דטרמיננטות:
- החלפת שורה אחת בשורה אחרת, היפוך סימן.
- כפל שורה בסקלר.
- הוספת/החסרת שורה לשורה אחרת.
- אפשר לבצע פעולות גם על עמודות

* אם בדטרמיננטה יש 2 שורות או עמודות זהות כל הדטרמיננטה שווה ל-0.

Adj

$Adj(A)=A^{-1}\cdot|A|$ ← כך נחשב מטריצת Adj

$|Adj(A)|=|A|^{n-1}$ ← כך נחשב דטרמיננטה של $Adj(A)$ = דטרמיננטה של A בחזקת הסדר של המטריצה פחות 1.

צרוף לינארי - צ"ל

1) נבנה מטריצה מורכבת שבה כל וקטור הוא בעמודה ← נדרג ונפתור.
2) אוסף הפתרונות הקיימים הם מספר הפתרונות למשוואה.
- אם יש איבר חופשי ← אינסוף פתרונות.
- אם אין פתרון הביטוי <u>אינו</u> צ"ל.

3) נפתור באמצעות T במקום האיבר החופשי.

תלות לינארית בוקטורים

וקטורים ת"ל אם מתקיים הביטוי $\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2 \dots \alpha_k v_k=0$ (שלא כולם אפסים)
- הפתרון הטריוויאלי תמיד מתקיים.

אחרת נגיד שהם בת"ל (אם רק נמצא פתרון טריוויאלי).

1) נסדר את הוקטורים במטריצה ונשווה ל-0.
2) נדרג ← נחפש איבר חופשי.
- אם יש יותר נעלמים ממספר השורות ← אינסוף פתרונות ⇐ הוקטורים ת"ל.
- 2 וקטורים ת"ל אמ"מ אחד מהם הוא מכפלה בסקלר של השני.

תת מרחבים

הקבוצה $U \in \mathbb{R}^n$ תקרא תת מרחב אם היא מקיימת:

1. $\underline{0} \in U$.
2. U סגורה תחת כפל בסקלר.
3. U סגורה תחת חיבור.

בדיקת $\underline{0} \in U$ -

נציב וקטור $(0,0,0)$ ונבדוק אם המשוואה שווה להתנייה.

בדיקת סגירות תחת כפל בסקלר -

נקראת הוקטור (רפאו) כל אובר ב-α ונציב במשוואה ⇐ ונבדוק את מקיימות התנייה.

* בכפל נבדוק כל תנאי ג"ע אם מונוס וגם בלי של α ואם אחד מהם לא מקיים את התנאי הוא נשלל על כולם ולכן אין סגירות תחת כפל בסקלר ⇐ לא תת מרחב.

בדיקת סגירות תחת חיבור -

נחבר בין 2 וקטורים ונציב במשוואה ← נבדוק אם מקיימת התנייה.

סיכום:

אם יאמר בפסוק של תנאי השייכות לא מרקבל משוואה ליניארית שווה ל-0.
אז כנראה $\bar{0}$ לא שייך.

אם תנאי השייכות כולל מספר תנאים עם "או" בניהם. ייתכן של-U לא סגורה תחת חיבור.

אם תנאי השייכות הוא משוואה לא ליניארית ייתכן שלא תהיה סגורה תחת חיבור.

גם תנאי השייכות הוא אי שוויון, ייתכן שאין סגירות תחת כפל בסקלר.

בסיס לתת מרחב

קבוצה פורשת - קבוצה סופית של וקטורים שבאמצעותם ניתן להציג כל וקטור אחר ברחב מרחב. (קבוצה פורשת = יש פתרון)

בסיס לתת מרחב -
- אם כל וקטור ב-U הוא צ"ל שלהם (יש פתרון למערכת)
- אם כל וקטורים ב-U הם בת"ל (פתרון יחיד)
- ואם כל הוקטורים $\in V$.

המימד של תת המרחב ב-U, הוא מספר הוקטורים בבסיס של V ($\dim(\mathbb{R}^2)=2$) או מספר הנעלמים החופשיים

1) נבדוק אם n וקטורים הם בסיס ל-$\mathbb{R}^n$ ← נבנה מטריצה מכל הוקטורים ונבדוק אם היא הפיכה.

* אם A הפיכה למשוואה $A\cdot x=b$ יש תמיד פתרון יחיד!

לכסון

מטריצה לכסינה אם מתקיים:

ו"ע - וקטור עצמי של A.

ע"ע - ערך עצמי של A (λ סקלר)

- אם מתקיים $V\neq 0$ ← $A\cdot V=\lambda\cdot V$

V הוא ו"ע שמתאים לע"ע λ.

1) $A-\lambda\cdot I$ (A מטריצה ריבועית)
2) נעשה דטרמיננטה
3) את התוצאה נשווה ל-0 ⇐ ע"ע
4) ניקח כל ע"ע ונציב למטריצה ⇐ ו"ע שמתאימים לכל ע"ע(λ)
5) P - מטריצה ו"ע שמתאימים ל-λ. D - מטריצה ע"ע אלכסונית. P^{-1} - מטריצה הפיכה של P.

$A=P\cdot D\cdot P^{-1}$

<u>ריבוי אלגברי</u> (ר"א) - החזקה של λ. $(\lambda-4)^2 \rightarrow$ ר"א $= 2$

<u>ריבוי גאומטרי</u> - מס' הוקטורים בבסיס מרחב הפתרונות של $(A - \lambda I \mid 0)$

ממד מרחב הפתרונות = מס' הנעלמים החופשיים

- אחד האיברים המובילים מופיע בעמודת המקדמים החופשיים

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \underline{3} & 2 & 4 \\ 0 & 0 & \underline{5} & 10 \\ 0 & 0 & \underline{0} & -3 \end{array}\right)$$

$$3x_2 + 2x_3 = 4$$
$$5x_3 = 10$$
$$0 = -3$$

אין פתרון למערכת

- כל האיברים המובילים נמצאים בעמודות של הנעלמים
בכל עמודה של נעלמים יש איבר מוביל.

למערכת יש פתרון יחיד.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right)$$

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 = -3$$
$$x_2 - 2x_3 = 5$$
$$3x_3 = 9$$

$$2x_1 - 11 + 4\cdot 3 = -3 \qquad x_2 - 2\cdot 3 = 5 \qquad x_3 = 3$$
$$x_1 = -2 \qquad x_2 = 11$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- כל האיברים המובילים נמצאים בעמודות של הנעלמים ויש לפחות עמודה של נעלם אחד ללא איבר מוביל.

במקרה זה - נציג את הפתרון ע"י בחירת משתנים חופשיים בעמודות ללא איברים מובילים, ונפתור מהסוף להתחלה.

למערכת אינסוף פתרונות

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 8 \end{array}\right)$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 5$$
$$2x_3 - x_4 = 8$$

$$x_2 = T \qquad x_4 = S$$

$$2x_3 - S = 8$$
$$\boxed{x_3 = \frac{8+S}{2}}$$
$$x_1 - 2T + \frac{8+S}{2} + S = 5$$
$$x_1 - 2T + 4 + 0.5S + S = 5$$
$$\boxed{x_1 = 1 + 2T - 1.5S}$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 + 2T - 1.5S \\ T \\ \frac{8+S}{2} \\ S \end{pmatrix}$$

rank מספר השורות השונות מאפס.

למערכת יש פתרון אמ"מ ⇐ $r(A|b)=r(A)$

• כאשר יש פתרון מספר הנעלמים החופשיים $n-r(A)$

מס' הנעלמים

אם $n>rank$ ⇐ אינסוף פתרונות

אם $n=rank$ ⇐ פתרון יחיד

• מטריצה קנונית - מדורגת, כל האיברים המובילים הם 1 וכל עמודה של איבר מוביל שאר האיברים הם 0.

• 2 מערכות נקראות שקולות אם יש להן אותם פתרונות

• אם A מטריצה ו-B מתקבלת מ-A ע"י פעולות אלמנטריות על השורות, נאמר כי A ו-B שקולות שורה.

• מערכת הומוגנית - כל האיברים החופשיים הם אפס.

- למערכת הומוגנית יש תמיד לפחות פתרון אחד (פתרון טריוויאלי)

משוואות $m<n$ נעלמים אז יש אינסוף פתרונות.

• מטריצה ריבועית A נקראת הפיכה אם קיימת מטריצה B שמקיימת $A\cdot B=I$

וגם $B\cdot A=I$

בדטרמיננטות מותר לבצע פעולות אלמנטריות על עמודות.

כאשר יש שתי שורות זהות או עמודות זהות כל הדטרמיננטה שווה ל-0.

$\mathbb{R}^n$ - קבוצת הוקטורים מסדר n.

בדיקה אם V הוא צ"ל של $v_1, v_2 \dots v_k$?

(בונה מטריצה מורחבת שבה כל וקטור רשום כעמודה.

ואז: * V הוא צ"ל אמ"מ יש למערכת פתרון.

* מס' הפתרונות = מס' הדרכים השונות בהן ניתן להציג את V כצ"ל של $v_1 \dots v_k$

הוקטורים $v_1 \dots v_k$ ב-$\mathbb{R}^n$ תלויים לינארית אם קיימים סקלרים $\alpha_1 \dots \alpha_k$ שלא כולם אפסים, כך ש- $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \dots \alpha_k v_k = 0$

אחרת נגיד שהם בלתי תלויים לינארית, כלומר $v_1 \dots v_k$ בת"ל אמ"מ הדרך היחידה לקבל את 0 כצ"ל שלהם היא $0\cdot v_1 + 0 v_2 \dots 0\cdot v_k$

בדיקה: נשווה את כל הוקטורים ל-0, אם נקבל פתרון לא טריוויאלי ⇐ ת"ל.

אם נקבל פתרון יחיד ⇐ בת"ל.

• וקטורים $k>n$ אז הם ת"ל

• אם אחד הוקטורים 0 אז הם ת"ל

• אם חלק ת"ל ⇐ כולם ת"ל

• אם הכל בת"ל ⇐ כל חלק בת"ל.

לכסינות

סגירות תחת כפל בסקלר - נאמר שקבוצה U, היא סגורה תחת כפל בסקלר אם מתקיים לכל וקטור $V\in U$ ולכל סקלר α, גם αv שייך ל-U.

סגורה תחת חיבור - נאמר שקבוצה U היא סגורה תחת חיבור אם מתקיים לכל 2 וקטורים $V_1,V_2\in U$ גם $V_1+V_2\in U$

הקבוצה תקרא תת מרחב אם היא
* $\bar{0}\in U$
* U סגורה תחת כפל בסקלר
* U סגורה תחת חיבור

תתי מרחבים - קבוצה U נקראת תת מרחב של אם ורק אם $\bar{0}\in U$ וגם U סגורה תחת כפל בסקלר וסגורה תחת חיבור

קבוצת וקטורים תקרא בסיס לתת מרחב אם כל הוקטורים ב-U הם בת"ל שלהם.

ע"ע - ערך עצמי - כל λ שיוצאים לנו בפתרון.
ו"ע - וקטור עצמי - כל הוקטורים שיוצאים לנו שמתאימים ל-λ.
לכל ע"ע מוצאים ו"ע שמתאימים לו. ע"ע מוצאים ע"י $|\lambda\cdot I-A|=0$
ולכל ע"ע מוצאים בסיס למרחב הפתרונות של $(\lambda I-A|0)$
$|\lambda\cdot I-A|$ - פולינום ממעלה n, הפולינום זה נקרא הפולינום האופייני של A.
(שורשי הפ"א הם הע"ע של A)

ריבוי אלגברי - הדרגה של $(\lambda-\lambda_i)$ ⇐ $(\lambda-4)^2 \Rightarrow$ ר"א $=2 \Leftarrow \lambda=4$.
ריבוי גיאומטרי - מס' הוקטורים בבסיס מרחב הפתרונות של $(\lambda I-A|0)$
(ממד מרחב הפתרונות = מס' הנעלמים החופשיים) ⇐ ר"ג של $\lambda=4 \Leftarrow 1$

A לכסינה אמ"מ סכום הריבויים הגיאומטריים $=n$.
• לכל ע"ע של A ר"א $\geq$ ר"ג ≥ 1.

מטריצה A לכסינה אמ"מ מתקיימים 2 התנאים: • סכום הריבויים האלגבריים של כל ע"ע $=n$
• לכל ע"ע ר"א = ר"ג

מחשבון

בסיס ודרגת מרחב:

1) נזין במחשבון את הוקטורים בתור מטריצה A.

2) menu (4)

↓

OPTN (2)

↓

נבחר בדטרמיננטה

↓

נבחר את המטריצה שהזנו.

⇓

אם התוצאה לא יוצאת 0, אז היא הפיכה ולכן הם גם בסיס לכל מרחב.

חישוב פעולות על מטריצות:

menu (4)

↓

AC

↓

OPTN (1)

↓

מכניסים מטריצה

↓

AC

↓

matrix   מכניסים פעולה.

משוואות:

menu (-)

↓

Simul Equation

↓

בוחרים כמה נעלמים יש.

מרחב וקטורי:

המרחב הוקטורי R^3 - אוסף כל הוקטורים ממימד 3.

$$R^3=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in R\}$$

מרחב וקטורי - דרישות:

על הקבוצה הוקטורים צריכות להיות מוגדרות שתי פעולות חשבון:

1. חיבור $(a,b,c)+(A,B,C)=(a+A,b+B,c+C)$
2. כפל בסקלר $k(a,b,c)=(ka,kb,kc)$

הפעולות של חיבור וקטורים והכפל בסקלר חייבות למלא דרישות מסויימות שנקראות אקסיומות

אקסיומות החיבור:

1. לכל שלושה וקטורים u,v,w מתקיים $(u+v)+w=u+(v+w)$
2. לכל שני וקטורים u,v מתקיים $u+v=v+u$
3. קיים וקטור שמסומן כ-0 ונקרא וקטור האפס שעבורו $v+0=v$ לכל וקטור v
4. לכל וקטור v קיים וקטור נגדי $v-$ שעבורו $v+(-v)=0$

אקסיומות הכפל בסקלר:

5. לכל סקלר k ולכל שני וקטורים u,v מתקיים $k(u+v)=ku+kv$
6. לכל שני סקלרים a,b ולכל וקטור v מתקיים $(a+b)v=av+bv$
7. לכל שני סקלרים a,b ולכל וקטור v מתקיים $(ab)v=a(bv)$
8. לכל וקטור v קיים סקלר יחידה 1 כך שמתקיים $1v=v$

סימטרית x סימטרית = אנטי סמטרית

$סימטרית^2$ = סימטרית

אנטי סימטרית + אנטי סימטרית = אנטי סמטרית

סימטרית + סימטרית = סימטרית

$\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ סימטרי

$\begin{pmatrix} 0 & d \\ -d & 0 \end{pmatrix}$ אנטי סמטרית

rank = דרגה (מספר השורות השונות מאפס)

n>rank אינסוף ← ת״ל

n = rank פתרון יחיד.

n-rank(A) = דרגת חופש

A+B מספר שורות ועמודות שווה

A·B עמודות A = שורות B

"אי" ← לא תת מרחב (לא סגורה תחת חיבור)

אי שוויון ← לא תת מרחב (לא סגור תחת כפל)

A·B=C

אותם שורות בA היו שורות ב-C

אותם עמודות בB היו עמודות ב-C

שקילות שורה = אותו פתרון

קבוצה פורשת = יש פתרון.

מטריצה עם פרמטר ונתון וקטור שייך לנורמה ושואלים על הפרמטר נציב את התשובה במשוואה. סכום ה-ה והוה שווה לדטרמיננטה של הפרמטר.

A לכסינה אמ״מ סכום הריבויים ~~הגאומטרים~~ האלגבריים של ע״ע = n

מ״ז = יש פתרון

ת״ל = פתרון לא טריוויאלי, אינסוף, אחת n<k

בת״ל = פתרון טריוויאלי.

• ר״א ≥ ר״ג ≥ 1

• לכל ע״ע ← ר״א = ר״ג (הדרך היחידה האולכסון כ-ס)

* בדיקת ~~[illegible]~~ בסיס להחליף את המטריצה ולבדוק אם היא הפיכה. אם כן ⇐ יש פתרון

ש״ש

בסיס.

יותר נעלמים משורות ⇐ אינסוף פתרונות ⇐ וקטורים ת״ל