作业13

1. 教材178页，练习13。

   证明略。

2. 设A, B是群G的两个子群，试证$A \cup B$是G的子群当且仅当$A \leqslant B$或$B \leqslant A$。利用这个事实证明教材178页的练习26。

   证明：反证。设$A - B$和$A - B$均非空，则存在$a \in A - B, b \in B - A$。因$ab \in A \cup B$，所以 $ab \in A$或$ab \in B$。如果$ab \in A$，则$b \in A$；如果$ab \in B$，则$a \in B$。均mao盾，因此，$A - B$和$A - B$至少有一个为空，即$A \leqslant B$或$B \leqslant A$。

   教材178页的练习26： 设$G = A \cup B$，且A, B为真子群。则由上段证明，$A \leqslant B$或$B \leqslant A$，则$A \cup B$是G的真子群，mao盾。

3. 设$A \leqslant G, B \leqslant G$。如果存在$a, b \in G$，使得$Aa = Bb$， 则$A = B$。

   证明：因为$1 \in A$，存在$h_0 \in B$，使得$a = h_0 b$，所以$ba^{-1} = h_0^{-1} \in B$。对于任意$g \in A$，存在$h \in B$，使得$ga = hb$， 所以$g = hba^{-1} = hh_0^{-1} \in B$，从而有$A \subset B$。类似的可证$B \subset A$。所以$A = B$。

4. 设A, B是群G的两个子群，证明：$AB \leqslant G$当且仅当$AB = BA$。这里$AB \overset{\text{def}}{=} \{ab | a \in A, b \in B\}$，$BA \overset{\text{def}}{=} \{ba | a \in A, b \in B\}$。

   证明：先证必要性。设$AB \leqslant G$，我们将证明$AB \subset BA$和$BA \subset AB$，从而得到$AB = BA$。 第一步，考虑任意$ab \in AB$，由AB是子群，得$(ab)^{-1} \in AB$，则存在$a_1 \in A, b_1 \in B$，使得$(ab)^{-1} = a_1 b_1$，两边求逆， $ab = b_1^{-1} a_1^{-1} \in BA$，从而$AB \subset BA$。

   第二步，证明$BA \leqslant G$。令$b_1 a_1, b_2 a_2$为BA中任意两个元素，我们要证明$b_1 a_1 (b_2 a_2)^{-1} \in BA$。由$b_1 a_1 (b_2 a_2)^{-1} = b_1 a_1 a_2^{-1} b_2^{-1}$，注意到$a_1 a_2^{-1} b_2^{-1} \in AB \subset BA$，因此$b_1 a_1 (b_2 a_2)^{-1} \in b_1 BA = BA$。因此$BA$是子群。

   第三步，当得到$BA \leqslant G$，使用第一步中的方法可类似的证明$BA \subset AB$。

   所以$AB = BA$。

   再证充分性。 设$AB = BA$，令$a_1 b_1, a_2 b_2$为AB中任意两个元素，我们要证$a_1 b_1 (a_2 b_2)^{-1} \in AB$。由 $a_1 b_1 (a_2 b_2)^{-1} = a_1 b_1 b_2^{-1} a_2^{-1} \in a_1 BA = a_1 AB = AB$，所以$AB \leqslant G$。