MA238 离散数学

连炎杰，2021年6月

MA238 离散数学 由两部分组成：

- 数理逻辑与集合论
- 图论与代数结构

Part1 数理逻辑与集合论

2.5 对偶式

将合取和析取反一下，把T和F反一下。

2.6 范式（命题逻辑部分）

主析取范式和主合取范式互相转换：

- 这一部分只可意会，注意极小项和极大项的性质

5.3 范式（谓词逻辑部分）

前束范式：量词都在前面

Skolem标准形：

- 一种是存在量词都在全称量词的右边(这种也叫存在前束范式)
- 另一种是直接消去存在量词

5.5 推理演算

1. 全称量词消去规则
2. 全称量词引入规则
3. 存在量词消去规则
4. 存在量词引入规则

9.3 集合的运算

广义并：就是把一个集合的元素拿出来求并

广义交：类似广义并。

幂集：

$$P(A) = \{x | x \subseteq A\}$$

10.4 关系的性质

存在非空集合，既不是自反的，又不是非自反的。但是不存在非空集合，既是自反的，又不是非自反的。

对称性和反对称性，既可以同时满足，也可以同时不满足。

10.5 关系的闭包

自反，对称，传递

定理10.5.12： 对非空集合A上的关系R，有

1. rs(R)=sr(R)
2. rt(R)=tr(R)
3. st(R)⊆ts(R)

速记方法：有自反的可以交换，st属于ts

10.6 等价关系和划分

自反、对称、传递的关系。

求等价关系的步骤：

- 先求有多少种划分
- 有一种划分就是一种等价关系

10.8 偏序关系

线性序： 也称全序。

全序： 任何两个元素都有关系。

良序：对偏序集$< A, \leq >$，如果A的任何非空子集都有最小元，则称$\leq$为良序关系，称该集为良序集。

定理10.8.6: 一个良序集一定是一个全序集。（反之不一定）

定理10.8.7: 一个有限的全序集一定是良序集。

Part2 图论与代数结构

2.3 欧拉道路与回路

欧拉回路的充要条件

G中各结点的度数为偶数。

欧拉道路的充要条件

只有2个度数为奇数的点。

2.3 哈密尔顿道路与回路

H道路充分条件

1.

$$\forall v_i, v_j \in G, d(v_i) + d(v_j) \geq n - 1$$

H回路充分条件

1.

$$\forall v_i, v_j \in G, d(v_i) + d(v_j) \geq n$$

2.

$$\forall v_i \in G, d(v_i) \geq \frac{n}{2}$$

3.

$$G: \forall v_i, v_j(\text{不相邻}), d(v_i) + d(v_j) \geq n$$

$$\text{则}G\text{存在}H\text{回路的充要条件为}G + (v_i, v_j)\text{有}H\text{回路。}$$

3.6 Huffman树

3.7 最短树

Kruskal算法

过程：

1. 初始化一个空的树
2. 挑一个全局最短的边
3. 如果加上这条边没有回路，就加上吧。顺便在原图中去掉
4. 重复2和3，直到树的边为n-1。

Prim算法

基本思想：利用树的邻边进行扩展而不是全局最小。

8.2 群、群的基本性质

群：

- 结合律
- 单位元
- 幺元

阿贝尔群：

- 满足交换律的群

群G的子群的充要条件：

- 运算封闭
- 有单位元，且等于G的单位元
- 任意元素有逆元，且等于G中的逆元

子群判断定理：

- 对于G的非空子集H，H是G的子群的充要条件是：任意a，b属于H，ab^{-1}也属于H。

8.3 循环群 群的同构

循环群：

$$G =< a >= \{a^k | k \in Z\}$$

a称为G的生成元。

定理8.3.1:

- 若$O<a>=\infty$， 生成元只有a或a^{-1}
- 若$O<a>=n$，生成元有$\varphi(n)$个（欧拉函数，小于n且与n互素的元素个数）。

同构:

$$f(ab)=f(a)*f(b)$$

8.4 变换群和置换群

变换群：非空集合A的所有一一变换关于变换的乘法所作成的群叫做A的一一变换群，用E(A)表示，E(A)的子群叫做变换群。

置换群：当A是一个有限集合时，例如A={1,2,...,n}，A中的一个一一变换称为一个n元置换，由置换构成的群叫置换群。

我们用S_n来表示这n!个n元置换的集合。

n元置换群和n次对称群：S_n对于置换乘法构成群，称为n次对称群。S_n的子群称为n元置换群。

轮换：$\sigma(i_j)=i_{j+1}$

定理：任何置换都可以表示为不相交轮换的乘积。

定理：任何一个轮换都可以表示为对换的乘积。

将一个置换表示称对换的乘积后，它所含的对换数：

$$N(\sigma) = \sum_{j=1}^{k}(l_i - 1)$$

Caley定理：任意群G与一个变换群同构。

交错群：n次对称群S_n中所有偶置换的集合，对于S_n中的置换乘法构成子群，记为A_n，称为交错群。$|A_n| = \frac{1}{2}n!$

8.5 陪集和群的陪集分解

左陪集：设H是群G的一个子群，对任意的$a \in G$，集合

$$aH = \{ah|h \in H\}$$

称为子群H在G中的一个左陪集。

定理：G是有限群，H是G的一个子群，$G = a_1H \cup a_2H \cup ... \cup a_kH$，且他们不相交。

Lagrange定理：

$$|G| = \sum |Ag_i| = \sum |A| = |A| \cdot |I|$$

元素的阶：$a \in G, n$为使得$a^n = 1$的最小正整数，$o(a) = n$。

引理：任意g属于G，o(g)=2，则G为阿贝尔群。

引理：任何素数阶群都是阿贝尔群。

8.6 正规子群与商群

正规子群：aH=Ha

商群：$< \frac{G}{N}, * >$