2020-8-19　　Yanjie Ze

习题 4.1 用极大似然估计法推出朴素贝叶斯法中的概率估计公式（4.8）及公式（4.9）

证明：

$$P(Y=c_k)=\theta$$

$$m=\sum_{i=1}^{N} I(y_i=c_k)$$

$$L(\theta)=\binom{N}{m}\theta^m(1-\theta)^{N-m}$$

$$\Rightarrow \ln L(\theta)=\ln\binom{N}{m}+m\ln\theta+(N-m)\ln(1-\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta}=\frac{m}{\theta}+\frac{N-m}{\theta-1}=0$$

$$\Rightarrow \theta=\frac{m}{N}$$

$$\Rightarrow P(Y=c_k)=\theta=\frac{m}{N}=\frac{\sum_{i=1}^{N} I(y_i=c_k)}{N}$$

公式 (4.8) 得证

$$P(X^{(j)}=a_{jl}|Y=c_k)=\beta$$

$$m=\sum_{i=1}^{N} I(y_i=c_k), q=\sum_{i=1}^{N} I(x_i^{(j)}=a_{jl}, y_i=c_k)$$

$$L(\beta)=\binom{m}{q}\beta^q(1-\beta)^{m-q}$$

$$\Rightarrow \ln L(\beta)=\ln\binom{m}{q}+q\ln\beta+(m-q)\ln(1-\beta)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \ln L(\beta)}{\partial\beta}=\frac{q}{\beta}+\frac{m-q}{\beta-1}=0$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{q}{m}$$

$$\Rightarrow P(X^{(j)} = a_{jl}|Y = c_k) = \beta = \frac{q}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{N} I(x_i^{(j)} = a_{jl}, y_i = c_k)}{\sum_{i=1}^{N} I(y_i = c_k)}$$

公式 (4.9) 得证