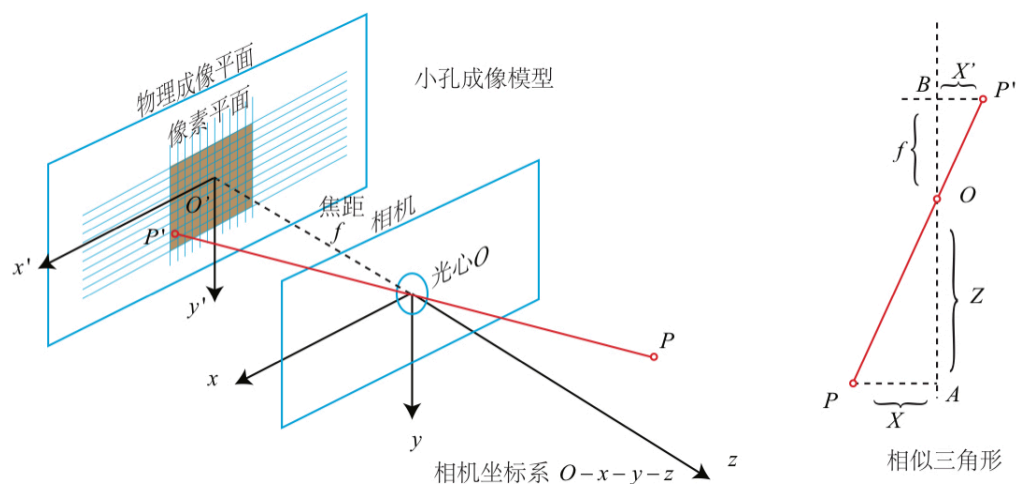


一文带你搞懂相机内参外参

Yanjie Ze, July 14 2021

1 相机内参



在左图中，我们把相机看作是针孔，现实世界中的点 P 经过相机的光心 O ，投影到物理成像平面上，变为点 P' 。

在右图中，对这个模型进行了一个简化，将其看作是一个相似三角形。

下面我们来对这个模型进行建模。

设 $O-x-y-z$ 为相机坐标系，习惯上我们把 z 轴指向相机前方， x 向右， y 向下。 O 为摄像机的光心，也是针孔模型中的针孔。

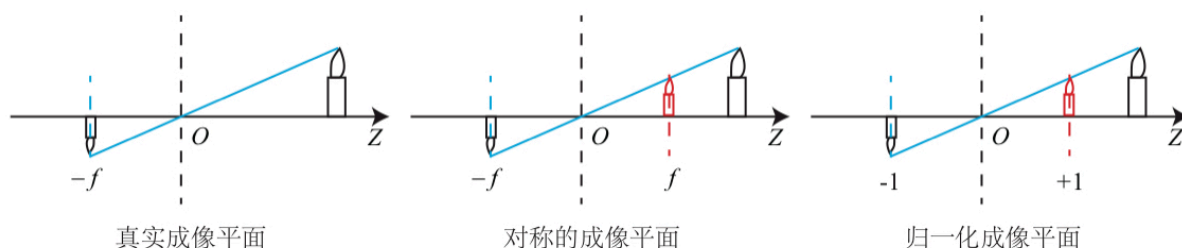
设真实世界点中的 P 的坐标为 $[X, Y, Z]^T$ ，成像的点 P' 的坐标为 $[X', Y', Z']^T$ ，物理成像平面和光心的距离为 f （即为焦距）。

根据右图中的三角形相似关系，有：

$$\frac{Z}{f} = -\frac{X}{X'} = -\frac{Y}{Y'}$$

其中，有负号是因为坐标轴方向，也就表示了成的像是倒立的。

为了表示起来更方便，我们把成像平面从相机的后面对称到前面去，如下图所示。这样，负号就没有了。



在对称后，有：

$$\frac{Z}{f} = \frac{X}{X'} = \frac{Y}{Y'}$$

整理解出 P' 的坐标：

$$X' = f \frac{X}{Z}$$

$$Y' = f \frac{Y}{Z}$$

上面两个式子就描述了 P 点与它所成像的坐标关系，可以看到， X 对应的 X' 与焦距 f 有关，与距离 Z 有关。

映射到成像平面上还不够，我们还需要将这个像给放到像素坐标系内。

我们设在物理成像平面上固定着像素平面 $o - u - v$ 。

设 P' 在像素平面坐标系上的坐标是 $[u, v]^T$ 。

像素坐标系通常定义方式是：原点 o' 位于图像的左上角， u 轴向右与 x 轴平行， v 轴向下与 y 轴平行。

我们设像素坐标在 u 轴上缩放 α 倍，在 v 轴上缩放了 β 倍。同时，原点平移了 $[c_x, c_y]^T$ 。

因此可以得到 P' 与像素坐标的关系：

$$u = \alpha X' + c_x$$

$$v = \beta Y' + c_y$$

代入P与P'的关系式可得：

$$u = \alpha f \frac{X}{Z} + c_x = f_x \frac{X}{Z} + c_x$$

$$v = \beta f \frac{Y}{Z} + c_y = f_y \frac{Y}{Z} + c_y$$

其中，我们用 f_x, f_y 替换了 αf 和 βf 。 f_x, f_y 的单位是像素。

用齐次坐标，把上式写出矩阵的形式：

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \frac{1}{Z} \mathbf{K} \mathbf{P}$$

也可以把Z写到等式左边去，就变成了：

$$Z \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \mathbf{K} \mathbf{P}$$

上式中， \mathbf{K} 即为相机的内参矩阵(Intrinsics)。通常来说，相机的内参在出厂之后就是固定的了。

2 相机外参

在上面的推导中，我们用的是P在相机坐标系的坐标（也就是以相机为O点），所以我们应该先将世界坐标系中的 P_w 给变换到相机坐标系中的P。

相机的位姿由旋转矩阵 \mathbf{R} 和平移向量 \mathbf{t} 来描述，因此：

$$\mathbf{P} = \mathbf{R} \mathbf{P}_w + \mathbf{t}$$

再代入之前的内参的式子，得到：

$$Z \mathbf{P}_{uv} = \mathbf{K}(\mathbf{R} \mathbf{P}_w + \mathbf{t}) = \mathbf{K} \mathbf{T} \mathbf{R}_w$$

后面一个等号蕴含了一个齐次坐标到非齐次坐标的转换。

其中， \mathbf{R}, \mathbf{t} 为相机的外参(Extrinsics)。

3 总结

本文介绍了：

1. 从相机坐标系转换到像素坐标系中，相机内参的作用
2. 从世界坐标系转换到相机坐标系中，相机外参的作用

相机内参是这样的一个矩阵：

$$\begin{pmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

里面的参数一般都是相机出厂就定下来的，可以通过相机标定的方式人为计算出来。

相机外参是旋转矩阵 R 和平移向量 t 构成,一般来说写成：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

这个矩阵决定了相机的位姿。