群论

chapter 0. 绪论

• 《物理学中的群论》 北大《群论》. 《群论及其在物理学中的应用》

成绩计算 平时:20%~40% 签到.笔记.作业.回答问题. 期末:20%~80%

• 群论的主题是对称性

→系统的对称性 (电动力学洛伦兹变换.洛伦兹对称性)

一个物理定律适用的物理系统 $\xrightarrow{\text{一定变换操作}}$ 系统的物理规律不变.

常见的变换操作:平移.旋转.洛伦兹变换.镜面反射.时间反演.超对称(费米子和玻色子的变换)···

某种对称性 → 某种守恒量. 守恒定律

规范场论.统一场论.固体物理.粒子物理.....

chapter 1. 群的基本知识 §1.1 群的定义 定义.定理(群的性质).群的结构(分类).群之间的区别和联系.

• 群的定义(集合.有一定要求(约束)):规定了元素的"乘积"法则之后.满足以下四个条件的集合G称为群.

(1)封闭性 对于 $\forall f,g\in G$, 都有 $fg\in G$

(2)结合律 $\forall f,g,h\in G$ $(fg)h=f(gh)$

(3)存在恒元 $\exists e\in G$, 对于 $\forall f\in G$ 都有 $ef=fe=f$

(4)存在逆元 对于 $\forall g\in G$, $\exists g^{-1}\in G$, 使得 $gg^{-1}=g^{-1}g=e$

e 称为群G的恒元, g^{-1} 称为元素g的逆元.

• 若集合G不满足条件(4),则称为"半群"

• 群元可以是任何客体. 数.矩阵.操作.算子.集合

• "乘积"法则不限于乘法.也可以是其他运算和操作. 例如加法.矩阵乘法.相续的两次操作等.

群的简单性质

(1). 恒元是唯一的: 假设存在另一恒元 $e'\in G$. 则 $e'=ee'=e$

(2) $\forall g\in G$ 的逆元 g^{-1} 是唯一的: 假设存在另一逆元 g'. $gg'=g'g=e$ → 两边右乘 g^{-1} $g'gg^{-1}=g^{-1}$ $g'=g$

(3) 恒元的逆元是自身: 假设恒元有另一逆元 e' 则 $e'=ee'=e$

(4) $(g^{-1})^{-1}=g$: $(g^{-1})^{-1}=(g^{-1})^{-1}\cdot e=(g^{-1})^{-1}g^{-1}g=g$

(5) $(gf)^{-1}=f^{-1}g^{-1}$ $(gf\cdots h)^{-1}=h^{-1}\cdots f^{-1}g^{-1}$ $(gf)(gf)^{-1}=e$ 左乘 g^{-1} 再左乘 f^{-1} $(gf\cdots h)(gf\cdots h)^{-1}=e$, 左乘 g^{-1} 左乘 f^{-1} ··· 左乘 h^{-1}

几个概念: (1) 群元的个数(n_G)可以是有限的也可以是无限的(点群).(有限群.无限群, n_G 称为有限群G的阶) → 有限群的阶和无限群的阶定义不相同

(2) 群元素无限时,分离散.连续. 离散无限群 连续无限群(李群) (不存在连续有限群).

i.e 群的阶是由独立的群参数个数决定的.

(3) 群元的阶. 若 $g^m=e$. 则最小的m则称为群元g的阶.

(4) Abel群(可交换群) 若 $\forall g,f\in G$. 有 $gf=fg$ 则群G可称为可交换群.

例1: $G=\{1,-1,i,-i\}$, 乘法定义为数乘. 且群为4阶Abel群.

群的乘法表

右乘 →

左乘 ↓

	g_1	g_2	g_3	g_4
g_1	g_1	g_2	g_3	g_4
g_2	g_2	g_1	g_4	g_3
g_3	g_3	g_4	g_2	g_1
g_4	g_4	g_3	g_1	g_2

乘法表相同代表群的结果相同.

例2 $g_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ $g_2\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ $g_3=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$ $g_4=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$ 也构成一个群（乘法定义为矩阵乘法）．乘法表和例1相同

例3. 由数构成的群：定义"乘法"为加法 ……

例4. n阶有限循环群：$C_n=\{C_n^1, C_n^2, \cdots, C_n^n=e\}$ 群的阶/群元的阶

群元可以是在平面内转动一个角度的操作．"乘法"表示两个操作相继进行，$C_n^m=\frac{2m\pi}{n}$，n阶循环群也是Abel群．

任意群中都包含若干循环群的子集．例1中提到的四阶群也是一个循环群．

$C_4^1=e^{i2\pi/4}=i=g_3$，$C_4^2=e^{i\pi}=-1=g_2$ …… 代表复平面内一个矢量沿逆时针方向转 $\frac{\pi}{2}$. π. $\frac{3\pi}{2}$. 2π.

例5. SO(2)群（二维平面旋转群）．群元是连续的．

在二维平面中，将一个矢量沿逆时针方向转θ角度． $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ $g(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{bmatrix}$ → 旋转矩阵

$G=SO(2)=\{g(\theta)\,|\,\theta\in[0,2\pi]\}$，定义乘法法则为矩阵乘法

在二维平面内一个矢量 $z=x+iy$，逆时针旋转α角度 $z'=x'+iy'$． $z'=e^{i\alpha}\cdot z$ ⇒ $z'=(x\cos\alpha-y\sin\alpha)+i(x\sin\alpha+y\cos\alpha)$

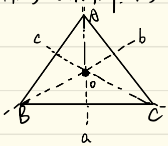
$(x'+iy')=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(x+iy)$

· $\begin{bmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\beta&-\sin\beta\\\sin\beta&\cos\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta&-\cos\alpha\sin\beta-\cos\beta\sin\alpha\\\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta&-\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\alpha+\beta)&-\sin(\alpha+\beta)\\\sin(\alpha+\beta)&\cos(\alpha+\beta)\end{bmatrix}$ $g(\alpha)g(\beta)=g(\alpha+\beta)\in G$

· 有在恒元．$e=g(0)=I$．逆元：$g^{-1}(\alpha)=g(2\pi-\alpha)$

· SO(2)群也是Abel群．还是一个1阶Lie群，而且是紧致的．（只有一个独立实参数α）

例6. 正三角形对称群 D_3群 （正三角形的对称操作为群元．操作保证正三角形保持不变）



e：绕O逆时针旋转360° d：……120°． f……240°． $d^3=e$． $f^3=e$ $fd=df=e$

其次是绕a.b.c三个轴旋转180°也能保持三角形不变．

保持正三角形变换不变的操作构成了D_3群． $D_3=\{e.d.f.a.b.c\}$

$ab(ABC)\to a(CBA)\to(CAB)$，$d(ABC)=(CAB)$ $ab=d$ $d^{-1}=(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}=ba=f$.

$ba(ABC)\to b(ACB)\to(BCA)$，$f(ABC)=(BCA)$ $ba=f$ $d^3=f^3=e$. $df=fd=e$ $d^2=f$. $f^2=d$

D_3群乘法表 （C_3群）

$ba=cb=ac=f$. $af=aac=a^2c=c$ ……，$ab=bc=ca=d$ $ad=aab=a^2b=b$ ……

	e	d	f	a	b	c
e	e	d	f	a	b	c
d	d	f	e	c	a	b
f	f	e	d	b	c	a
a	a	b	c	e	d	f
b	b	c	a	f	e	d
c	c	a	b	d	f	e

由乘法表可知．$\{a,d\}$，$\{a,f\}$，$\{b,d\}$等为D_3群的生成元．

各群元的阶：

g	e	d	f	a	b	c
n_g	1	3	3	2	2	2

习题：求D_4群的乘法表及生成元 $D_4=\{e_4, C_4^1, C_4^2, C_4^3, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_1, \sigma_2\}$

例7：一维空间连续平移群 T_1.　　一阶非紧致 Abel 李群.

群元是平移操作. $T_1=\{T(a)|a\in R\}$, 可表示为. $T(a): x\to x+a$ 或 $T(a)x=x+a$.

可以写成矩阵形式：$T(a)=\begin{bmatrix}1&a\\0&1\end{bmatrix}$

扩展到n维平移群：

$$T(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\begin{bmatrix}1&&&a_1\\&\ddots&&\vdots\\&&1&a_n\\&&&1\end{bmatrix}$$

α可以是离散指标. 连续指标. 可以是多重指标.

§1.2 群的重排定理.

重排定理：假设 $G=\{g_\alpha\}$ 为群. f 为 G 中一个确定的元素. 则当 α 取遍所有可能值时, fg_α 给出且仅仅给出一次 G 的所有值 即：$G=\{g_\alpha\}=\{fg_\alpha\}$. 同理 $\{g_\alpha f\}$ 也一样

Pf: ① 由于群的封闭性. $\{fg_\alpha\}\subseteq G$

② 对于 $\forall g_\beta\in G$, 由群的封闭性可知：

$f^{-1}g_\beta\in G$, 或 $f^{-1}g_\beta=g_\alpha\in G$

$g_\beta=fg_\alpha\in\{fg_\alpha\}$, 即 $G\subseteq\{fg_\alpha\}$

① + ② $\longrightarrow$ $G=\{fg_\alpha\}$

③. 假设 $\alpha'\neq\alpha$, $g_{\alpha'}\neq g_\alpha$, 但 $fg_\alpha=fg_{\alpha'}$, 此时左乘 f^{-1}, $g_\alpha=g_{\alpha'}$ 矛盾, 故无重复元素

$\{g_\alpha f\}\to$ 乘法表中的一列. $\{fg_\alpha\}\to$ 乘法表中的一行 $\longrightarrow$ 乘法表中每行每列都是群中元素的重新排列, 且无重复.

习题：写出2阶群. 3阶群. 4阶群的乘法表：

二阶：

	e	a
e	e	a
a	a	e

三阶

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

四阶

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

§1.3. 子群和陪集

1. 子群的定义：若 G 群的非空子集 (→H) 在同样的乘法法则下也构成一个群, 则 H 称为群 G 的一个子群.

充要条件：①. 封闭性. ②. 存在逆元.

每一个非平庸群 G 最少有 2 个子群. $\{e\}$ 和自身 (平庸子群) 其他为固有子群.

2. 一些结论：

(1) 子群 H 的恒元就是群 G 的恒元 (习题)

(2) $HH=H$ (习题)

Pf: ①. 设子群H的恒元为 e_1, 群G的恒元为 e_2 且 $e_1\neq e_2$, 则由子群定义, $e_1\in G$, $e_1e_2=e_2=e_1$, 矛盾

②.

习题：求 D_3 群和 D_4 群的所有子群

3. 陪群的定义：假设H为群G的一个子群，有一元素$f \in G$但$f \notin H$，则$fH = \{fh_\alpha\}$称为H关于f的左陪集

$Hf = \{h_\alpha f\}$ ······ 右陪集

若H为有限集 则 $n_{fH} = n_H$，注意 $e \notin fH$，所以陪集不是群

Pf：假设 $e \in fH$，则$\exists h_\alpha \in H$使得，$fh_\alpha = e$，即 $h_\alpha^{-1} = f \in H$，与陪集定义矛盾.

陪集定理：子群H的两个左陪集(右陪集)要么完全重合，要么没有公共元素.（不同左(右)陪集）

Pf：假设 $f_1, f_2 \in G$，且 $f_1, f_2 \notin H$，假设f_1H和f_2H有一个公共元素

$$f_1 h_\alpha = f_2 h_\beta$$

两端先左乘 f_2^{-1} 再右乘 h_α^{-1}，可得

$$f_2^{-1} f_1 = h_\beta h_\alpha^{-1} \in H$$

由重排定理 $f_2^{-1} f_1 H = h_\beta h_\alpha^{-1} H = H$

两边左乘 f_2 可得 $f_1 H = f_2 H$，证毕.

同一个子群关于同一个元素的左右陪集必有交集：$ef = fe = f$

一个群有非平庸子群的条件是什么？拉格朗日定理.

有限群的子群的阶等于阶的因子.

Pf. 设G为n_G阶有限群，H为G的n_H阶子群，取$f_1 \in H$且$f_1 \notin H$，则f_1H为子群H的一个左陪集，且f_1H与H无重复元素.

若f_1H没有穷尽G，取$f_2 \in G$且$f_2 \notin H$，$f_2 \notin f_1H$，又可以作一个左陪集f_2H，且H、f_1H、f_2H无重复元素.

依上方法，一直作下去，直到穷尽G为止，最终总可以得到包括H在内的集合串

$H, f_1H, \cdots, f_{k-1}H$ 集合串中无重复元素，但却穷尽了G

作业：证明 $\quad n_H \cdot k = n_G$

阶为素数的群没有非平庸子群，这种群只能是循环群. 但循环群可能有非平庸子群

§1.4 共轭元素和类

(相似矩阵)

1. 共轭元素定义：设 $g_\alpha, g_\beta \in G$，若 $\exists f \in G$ 使得 $g_\alpha = f g_\beta f^{-1}$，则称 g_α 与 g_β 互为共轭元素，记作 $g_\alpha \sim g_\beta$

2. 共轭元素的性质：若 $g_\alpha \sim g_\gamma$ 且 $g_\beta \sim g_\gamma$，则 $g_\alpha \sim g_\beta$ (传递性)

Pf：由已知 $\exists f_1 \in G$，使得 $g_\alpha = f_1 g_\gamma f_1^{-1}$，且 $\exists f_2 \in G$ 使得 $g_\beta = f_2 g_\gamma f_2^{-1}$ 故 $g_\alpha = f_1 f_2^{-1}(f_2 g_\gamma f_2^{-1}) f_2 f_1^{-1} = (f_1 f_2^{-1}) g_\beta (f_1 f_2^{-1})^{-1}$ 即 $g_\alpha \sim g_\beta$

3. 类的定义：设 $\forall a \in G$，则 G 中与 a 共轭的所有元素组成子集 C_a 称为 a 的类：

$$C_a = \{g_\alpha a g_\alpha^{-1} \mid g_\alpha \in G\}$$

任意一个群中，恒元 e 的类为 $C_e = \{e\}$

由共轭中的传递性可知，C_a 中元的元素互相共轭

D_3 群中的类：$C_e = \{e\}$　$C_d = C_f = \{d, f\}$　$C_a = C_b = C_c = \{a, b, c\}$

4. 类的性质：

(1). 恒元自成一类，与恒元共轭的元素只有他自身

(2) Abel 的每个元素自成一类，n阶循环群是 Abel 群，所以 n 阶循环群中的每个元素自成一类

(3) $g_\alpha g_\beta \sim g_\beta g_\alpha$，他们在同一个类中 → 乘法表中对称位置的元素在一个类中

D_4 群的类：$\{e\}$ $\{C_4,\ \ , C_4\}$ $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_x, \sigma_y\}$

(4). 同类元素的阶必定相同：

Pf：若 $a^m = e$，则 $(g_\alpha a g_\alpha^{-1})^m = g_\alpha a^m g_\alpha^{-1} = e$

(5). 两个不同的类没有公共元素，除了 $\{e\}$ 以外，类不是子群

(6) 有限群的类的元素个数为群阶的因子

§1.5 不变子群和商群：

1. 不变子群的定义(群论中非常重要的概念)：

在群H内这个条件是平庸的

① 假设H为群G的一个子群，若对于$\forall g \in G$，都有$g_\alpha H = H g_\alpha$，则H称为G的不变子群。 右乘一个g_α^{-1}

② 假设————————————。若H中任意元素的共轭元素也在H中，即对于$\forall g_\alpha \in G$，$h_\beta \in H$，都有$g_\alpha h_\beta g_\alpha^{-1} = h_\gamma \in H$，则…… } 两种定义等价

注：指数为2的子群，该子群必为不变子群。 指数 $= \dfrac{n_G}{n_H}$

如果一个子群由多个类构成，该子群必为不变子群。(不变子群由多个类构成)

如果G的一个子群是Abel子群，则该子群必为G的不变子群 → 自身对易且和G中元素也对易

例：6阶循环群$\{C_6, C_6^2, C_6^3, C_6^4, C_6^5, C_6^6 = e\}$有2个不变子群

$C_2 = \{C_6^3, C_6^6\}$ $C_3 = \{C_6^2, C_6^4, C_6^6\}$

2. 商群的定义：

设H为G的不变子群，则H及其陪集串$\{\phi_0 = H, \phi_1 = S_1 H, \cdots, \phi_{k-1} = S_{k-1} H \mid S_i \in G\}$，构成一个新的群，称为群G关于不变子群的商群，记为G/H。商群的乘法由G的乘法来确定：

集合为元素

$$\phi_i \phi_j \equiv \{(S_i h_\alpha)(S_j h_\beta) \mid h_\alpha \in H, h_\beta \in H\}$$

$$\phi_i \phi_j = S_i H S_j H = \underbrace{S_i S_j H H}_{\text{不变子群}} = S_i S_j H = g_\alpha H$$

在陪集串中满足封闭性

下面证明商群满足群的定义

① 封闭性：

② 恒元：H $H(S_i H) = S_i H H = S_i H$

③ 逆元：$(S_i H)(S_i^{-1} H) = S_i S_i^{-1} H H = H$

④ 结合律：作业。

例：C_6群有两个不变子群，所以有两个商群：C_6/C_2，C_6/C_3

(1) $C_6/C_3 = \{\phi_0 = C_3 = \{e, C_6^2, C_6^4\}, \phi_1 = \{C_6, C_6^3, C_6^5\}\}$

乘法表：

	ϕ_0	ϕ_1
ϕ_0	ϕ_0	ϕ_1
ϕ_1	ϕ_1	ϕ_0

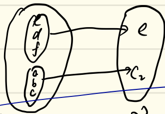
$C_6 C_6 = C_6^2$，$C_6 C_6^3 = C_6^4$，$C_6 C_6^5 = e$，$C_6^3 C_6 = C_6^4$，$C_6^3 C_6^3 = e$，$C_6^3 C_6^5 = C_6^2$，
$C_6^5 C_6 = e$，$C_6^5 C_6^3 = C_6^2$，$C_6^5 C_6^5 = C_6^4$
$\phi_1 \phi_1 = \{e, C_6^2, C_6^4\} = \phi_0$

(2) $C_6/C_2 = \{\phi_0 = C_2 = \{C_6^3, e\}, \phi_1 = C_6 C_2 = \{C_6^4, C_6\}, \phi_2 = C_6^2 C_2 = \{C_6^5, C_6^2\}\}$

乘法表：(作业)

	ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2
ϕ_0	ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2
ϕ_1	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_0
ϕ_2	ϕ_2	ϕ_0	ϕ_1

§1.6. 同构与同态



$D_3/C_3 \cong C_2$

1. 同构：设 $G=\{g_\alpha\}$, $G'=\{g'_\alpha\}$ 为两个群，群之间一一映射且为满射 $g_\alpha \leftrightarrow g'_\alpha$，且G中任意两个元素的乘积也按相同的对应关系对应G'中相应两个元素的乘积，则称G和G'两个群是同构的. 记作 $G \cong G'$ → 乘法表相同

① $g_\alpha \leftrightarrow g'_\alpha$ ② 若 $g_\alpha \leftrightarrow g'_\alpha$, $g_\beta \leftrightarrow g'_\beta$，则 $g_\alpha g_\beta \leftrightarrow g'_\alpha g'_\beta$.

由前面讨论过的 lagrange 定理，不难得出：

- 阶为同一素数的两个群同构（都为循环群）
- 无限群也存在同构 如 $SO(2) \cong U(1)$
- 第二章介绍群的线性表示，群和某一矩阵群的同构与同态关系

$U(1)$群的群元 $g'(\theta)=e^{i\theta}$ 可以作为$SO(2)$群的一维表示.

$SO(2) \cong U(1)$. Proof: $SO(2): g(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $U(1): g'(\theta)=e^{i\theta}$

建立一一对应关系： $g(\theta) \leftrightarrow g'(\theta) \Rightarrow g(\theta_1+\theta_2) \leftrightarrow g'(\theta_1+\theta_2)$, $g(\theta_1)\leftrightarrow g'(\theta_1)$, $g(\theta_2)\leftrightarrow g'(\theta_2)$

$$g(\theta_1)g(\theta_2) = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix} = g(\theta_1+\theta_2)$$

$$g'(\theta_1)g'(\theta_2) = e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)} = g'(\theta_1+\theta_2)$$

故 $g(\theta_1)g(\theta_2) \longleftrightarrow g'(\theta_1)g'(\theta_2)$. 证毕. $SO(2)\cong U(1)$

D_3群和C_2群 → 不同阶. 不同构. → 但是 D_3/C_3 与 C_2 同构.

$D_3/C_3 = \{C_3=\{e,d,f\},\ aC_3=\{a,b,c\}\}$ → 两个元素、二阶循环群. $C_2=\{e,\ c_2\}$ $C_3 \leftrightarrow e$, $aC_3 \leftrightarrow c_2$

不满足同构的例子：4阶循环群C_4和时空反演群 $V_4=\{e,\tau,\sigma,\rho\}$

V_4群包含四维时空的反演变换：e为恒元，τ为时间反演、σ为空间反演，ρ为时空反演， → 四维线性表示.

$$e=\begin{pmatrix} + &&& \\ & + && \\ && + & \\ &&& + \end{pmatrix} \quad \tau=\begin{pmatrix} - &&& \\ & + && \\ && + & \\ &&& + \end{pmatrix} \quad \sigma=\begin{pmatrix} + &&& \\ & - && \\ && - & \\ &&& - \end{pmatrix} \quad \rho=\begin{pmatrix} - &&& \\ & - && \\ && - & \\ &&& - \end{pmatrix}$$

→ 四阶对称群

对比群元的阶

	e	c_4	c_4^2	c_4^3
n_g	1	4	2	4

	e	τ	σ	ρ
n_g	1	2	2	2

群元的阶不同 → 乘法表不同.
两个群不可能同构.

2. 同态的定义（同构条件的放宽）：将同构中的一一对应，改为多一对应，同构是同态的一种特殊情况，同态包含更广泛的意义。

设 $G=\{g_{im}\}$ 与 $G'=\{g'_i\}$ 之间有多一对应关系，且为满射. 群G中任意两元素的乘积也按相同的对应关系对应于G'中两个元素的乘积，符号表达为：① $g_{im}\to g'_i$ ② 若 $g_{im}\to g'_i$, $g_{jn}\to g'_j$，则 $g_{im}g_{jn}\to g'_i g'_j$（注意箭头是单向的）

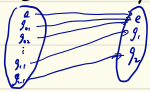
则称G与G'同态. 记作 $G \simeq G'$（等号改为一横）

几点性质：①若两个群同态，则 恒元与恒元对应，逆元与逆元对应

若 $G\simeq G'$，则：$e\to e'$，$g^{-1}\to g'^{-1}$

用反证法证明：假设 $g_{im}\to g_i'$，$e\to f'\in G$. 由同态的定义 $g_{im}e\to g_i'f'$. 由此可知 $g_i'f'=g_i'$. 故 $f'=e'$，$e\to e'$

逆元对应逆元的证明方法同理：设 $G\simeq G'$，$e\to e'$，$g\to g'$，$g^{-1}\to h'$，则 $gg^{-1}=e\to e'$，即 $g'h'=e'$，$h'=g'^{-1}$



3. 同态核（同态中很重要的概念）

假设 $G\simeq G'$，则 G 中所有与 e' 对应的元素的集合，称为该同态关系的同态核

同态核定理：假设 $G\simeq G'$，I 为同态核，则 I 为群 G 的不变子群.

Proof：①先证 I 为子群：(1) 封闭性. 设 $i_1\in I$，$i_2\in I$，则 $i_1i_2\to e'e'=e'$，故 $i_1i_2\in I$. 封闭性满足

(2) 存在逆元. 用反证法：假设 i 的逆元 $i^{-1}\not\to e'$，设 $i^{-1}\to g'$. 则 $ii^{-1}=e\to e'g'=g'$ 由于同态的性质 $g'=e'$

or $i\to e'$，$i^{-1}\to e'^{-1}=e'$. 故 $i^{-1}\in I$，证毕

②再证 I 为不变子群：$i_i\to e'$，对于 $\forall g_{im}\to g_i'$，有 $g_{im}^{-1}\to g_i'^{-1}$

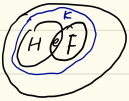
则由 $g_{im}i_ig_{im}^{-1}\to g_i'e'g_i'^{-1}=e'$，可知 $g_{im}i_ig_{im}^{-1}\in I$（共轭元素在群中）

定理1：设 H 为 G 的不变子群，则 $G\simeq G/H$

定理2：设 $G\simeq G'$，则 $G/I\cong G'$，I 为同态核

§1.7 直积群

1. 定义：假设 $H=\{h_\alpha\}$，$F=\{f_\beta\}$ 为 G 的两个子群，且满足：



① 除恒元以外，H 和 F 无公共元素

② 两个子群的元素乘积可对易 $h_\alpha f_\beta = f_\beta h_\alpha$

则 $K=\{h_\alpha f_\beta \mid h_\alpha \in H,\ f_\beta \in F\}$ 构成一个群，这个群称为 H 和 F 的直积群，记为 $K=H\otimes F$，也称 K 是 H 和 F 的直积，H 和 F 是 K 的直积因子。

注：·不要求 H、F、G 其中任何一个群为 Abel 群

·若 H 和 F 为有限群，则直积群 K 的阶 $n_K = n_H \times n_F$

·K 中无重复元素

例子：6 阶循环群 $C_6=\{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$

$C_2=\{e, a^3\}$　　$C_3=\{a, a^2, a^4\}$

$C_2\otimes C_3=\{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}=C_6$

2. 相关定理：

① 若 $K=H\otimes F$，则 H 和 F 均为 K 的不变子群

Pf：①. H 和 F 是 K 的子群

②. 对 $\forall f_\beta \in F$，有 $(h_\alpha f_\gamma) f_\beta (h_\alpha f_\gamma)^{-1} = f_\gamma f_\beta f_\gamma^{-1} \in F$，其他元素在子群内，证毕。

物理学中，弱相互作用有 $SU(2)$ 对称性，电磁相互作用有 $U(1)$ 对称性，弱电统一理论有 $SU(2)\otimes U(1)$ 对称性

3. 直积群的类

设 $K=H\otimes F$，则 K 关于 hf 的类可以根据定义来计算

$$C_{hf}=\{(h_\alpha f_\beta)hf(h_\alpha f_\beta)^{-1} \mid h_\alpha \in H, f_\beta \in F\}=\{(h_\alpha h h_\alpha^{-1})(f_\beta f f_\beta^{-1})\}=C_h C_f$$

即：K 关于 hf 的类是 H 关于 h 的类和 F 关于 f 的类的集合乘积

chapter 2. 群的线性表示理论

§2.1 群的线性表示：

什么叫做群的表示：一个抽象群 G 的表示为另外一个群 G'，且 $G\simeq G'$。

群的线性表示：对应的表示群是矩阵群。

1. 群的线性表示的定义：设 $G=\{g_i\}$ 为一个抽象群，$D(G)$ 是一个矩阵群，群元为 m 阶方阵，且 $G\simeq D(G)$

则称 $D(G)=\{D(g_i)\}$ 为群 G 的一个 m 维线性表示，$D(g_i)$ 称为群元 g_i 在该表示中的表示矩阵。

如果 $G\cong D(G)$，则这个表示称为群 G 的真实表示.

～～～～非同构～～～～ 非真实表示。

非真实表示描写了群 G 关于同态核的商群的性质：

$$G/I \cong D(G)$$

两种简单表示：矩阵群是自身的一个表示：自身表示 ＞ 平庸表示.

$D(G)=\{E\}$ 恒等表示

特征标：某一群元的表示矩阵的迹 $TrD(g_i)$ 称为该群元在该表示中的特征标。

$$\chi(g_i)=TrD(g_i)$$

幺正表示：对于 $\forall g_i$，都有 $D(g_i)^\dagger D(g_i)=E$。

正交表示：对于 $\forall g_i$，都有 $D(g_i)^T D(g_i)=E$.

矩阵群中群元矩阵的性质决定了表示的类型

2. 线性表示的性质

1. 恒元的表示矩阵是单位矩阵：$D(e)=E$

2. 由同态的定义，不难得出：$D(g_i)D(g_j)=D(g_ig_j)$

3. 逆元的表示矩阵是逆元对应的原来的群元的表示矩阵的逆矩阵.

3. 等价表示：

设 $D(G)$ 为群 G 的一个 m 维表示，设 X 为一个 $m\times m$ 的非奇异矩阵（$\det X\neq 0$），则

$$\bar{D}(G)=\{XD(g_i)X^{-1}\mid g_i\in G\}$$

也构成一个群，且 $D(G)\cong\bar{D}(G)$，则称 $\bar{D}(G)$ 和 $D(G)$ 为群 G 的等价表示，或者说两个群等价

$D(G)\cong\bar{D}(G)$ Proof：

先证 $D(G)\simeq\bar{D}(G)$：

定义对应关系：若 $X^{-1}D(g_i)X=\bar{D}(g_i)$，则 $D(g_i)\to\bar{D}(g_i)$

根据等价表示的定义：

$$X^{-1}D(g_i)X=\bar{D}(g_i) \quad 且 \quad X^{-1}D(g_j)X=\bar{D}(g_j)$$

$$X^{-1}D(g_i)D(g_j)X = X^{-1}D(g_i)XX^{-1}D(g_j)X = \bar{D}(g_i)\bar{D}(g_j)$$

即 $D(g_i)D(g_j)\longrightarrow \bar{D}(g_i)\bar{D}(g_j)$，所以：$D(G)\simeq \bar{D}(G)$

再证此对应关系是一一对应：

设$D(g_i)\neq D(g_j)$，根据等价表示的定义以及我们所建立的对应关系：

$$X^{-1}D(g_i)X=\bar{D}(g_i),\quad X^{-1}D(g_j)X=\bar{D}(g_j)$$

若$D(g_i)$和$D(g_j)$对应到同一个元上，即$\bar{D}(g_i)=\bar{D}(g_j)$，即$X^{-1}D(g_i)X=X^{-1}D(g_j)X$，由此可推出$D(g_i)=D(g_j)$与原假设矛盾.

综上：$D(G)\cong\bar{D}(G)$

另一方面，等价表示的定义本身也可以判断两个表示是否等价. 对于一维表示，不相等就不等价

4.可约表示和不可约表示：

可约表示和不可约表示的定义：

假设$D(G)$是群G的一个m维表示，若存在一个行列式不为零的矩阵X，使得 $\bar{D}(G)=X^{-1}D(G)X$

其中，$\bar{D}(G)=\begin{bmatrix}D_1(G)&0\\0&D_2(G)\end{bmatrix}$ 或者对于 $\forall g_i\in G$，都有 $\bar{D}(g_i)=X^{-1}D(g_i)X=\begin{bmatrix}D_1(g_i)_{k\times k}&0\\0&D_2(g_i)_{l\times l}\end{bmatrix}$

则称$D(G)$为群G的一个可约表示，否则称为不可约表示.

① 一维表示相当于一个1×1的矩阵，一定是不可约表示.

② 可约表示的等价表示依然是可约表示；不可约表示的等价表示依然是不可约表示.

可以证明：准对角元$D_\alpha(G)$的集合也会构成群，并且每一个$D_\alpha(G)$都是群G的一个表示. 根据群的线性表示的定义，我们只需要证明$G\simeq D_\alpha(G)$

Proof：建立如下对应关系：若

$$\bar{D}(g_i)=X^{-1}D(g_i)X=\begin{bmatrix}D_1(g_i)&0\\0&D_2(g_i)\end{bmatrix},\quad 则\ g_i\to D_1(g_i)$$

于是 $$X^{-1}D(g_ig_j)X=X^{-1}D(g_i)D(g_j)X=X^{-1}D(g_i)XX^{-1}D(g_j)X=\begin{bmatrix}D_1(g_i)&0\\0&D_2(g_i)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_1(g_j)&0\\0&D_2(g_j)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}D_1(g_i)D_1(g_j)&0\\0&D_2(g_i)D_2(g_j)\end{bmatrix}$$

即：$g_ig_j\longrightarrow D_1(g_i)D_1(g_j)$，因此$G\simeq D_\alpha(G)$

即：约化后的准对角元构成的矩阵群都会是G的表示.

5.可约表示的约化.

约化后对对角元进行约化，反复进行，直到最后得到的每个对角元为止，得到一个对角元都是不可约表示的表示.

如果$\hat{D}_k(G)$是G的第k个不等价，不可约表示，我们将$D(G)$的约化记为：

$$X^{-1}D(G)X=\bigoplus_{k=1}^{\alpha} m_k\hat{D}_k(G)$$

$\boxed{\text{不可约表示，是基元}}$

在约化过程中，可能会出现相同的准对角元，通过相似变换把相同的放在一起

例1：SO(2)群的表示：

一维表示：$D_1(g(\theta))=D_1(\theta)=e^{i\theta}$ 不可约表示，相当于表述了复平面上一个复矢量的转动

二维表示：$D_2(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\ \sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$

三维表示：在二维表示的基础上构建，在三维空间中，可以写出绕某一坐标轴，在与之垂直的平面上转动的矩阵。这三个表示是可约的

$$R_{\vec{k}}(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad R_{\vec{j}}(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin(\theta)\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}\qquad R_{\vec{i}}(\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

例2：平移群：$T(a)$群：

$D_1(a)=1$（恒等表示）　$D_2(a)=e^{a}$ or $D_3(a)=e^{ca}$

$c\neq 0$且为实数时，真实表示。c是纯虚数时是非真实表示　　$D_4(a)=e^{a+ia}$，真实表示

以上都是一维表示，都不可约，不等价，下面看二维表示

$$D_5(a)=\begin{bmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+a\\ 1\end{bmatrix}$$

同样的方法可以写出n维表示（见绪论）

证明：$\{P_R\} \simeq \{D(R)\}$

对应关系 $P \to D(R)$ 定义为上式，假设

$$P_S \to D(S) \quad , \quad P_R \to D(R)$$

交换和指.

则对任意基矢 ψ_μ，有，$P_S P_R \psi_\mu = P_S \sum_\nu \psi_\nu D(R)_{\nu\mu} = \sum_\nu P_S\psi_\nu D(R)_{\nu\mu} = \sum_\nu\sum_\rho \psi_\rho D(S)_{\rho\nu} D(R)_{\nu\mu} = \sum_\rho \psi_\rho \sum_\nu D(S)_{\rho\nu} D(R)_{\nu\mu} = \sum_\rho \psi_\rho (D(S)D(R))_{\rho\mu}$

不难看出 $P_SP_R \to D(S)D(R)$，有 $\{P_R\}\simeq\{D(R)\}$.

若考虑前面的 $P_SP_R = P_{SR}$，那么：$P_SP_R\psi_\mu = P_{SR}\psi_\mu = \sum_\nu \psi_\nu D(SR)_{\nu\mu} = \sum_\nu \psi_\nu (D(S)D(R))_{\nu\mu}$

因此 $D(S)D(R)=D(SR)$

- 表示的维数就是函数空间中完备基矢个数
- 函数空间满足 $P_R\psi_\mu \in$ 函数空间 $\{\psi_\mu\}$，所以是不变空间

作用于一个子空间

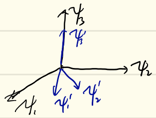
$$D(R) = \left[\begin{array}{c|c} D_1 & 0 \\ \hline 0 & D_2\end{array}\right]$$

作用于补空间

对于这个函数空间的子空间：

- 如果子空间和其补空间都是不变子空间，则对应的表示是完全可约表示.
- ———— 是不变空间，补空间不是不变空间，则对应的表示是不完全可约的

不变子空间的示意图.



例：线性表示的构造.

例1. D_4群的表示，表示空间为 R^3，基矢是三个坐标轴的单位矢量，群元的作用是把一个矢量变成另一个矢量.

即 $g_\alpha: \vec r \to \vec r'$, $\vec r' = g_\alpha \vec r$ 或写为 $g_\alpha \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$

恒元 e 对应的表示矩阵是单位矩阵，再来看 C_4 的元素

$$C_4^1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C_4^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C_4^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C_4^4 = e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

另外四个二阶的循环群.

$$\sigma_x: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x \\ -y \\ -z \end{bmatrix} \quad \sigma_x = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \quad \sigma_2: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} y \\ x \\ -z \end{bmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

若满足 $\sum_{\alpha=1}^{n} |\chi(D(g_\alpha))|^2 = n$，则表示是不可约表示.

二阶循环群

对于 D_4 群，先考虑它的所有一维不等价不可约表示。群 G 的一维表示的构造可以取它的指数为 2 的不变子群，由商群 G/H 来构造

对于 $H_1 = C_4$，建立如下对应关系：

$$D^{(1)}(e) = D^{(1)}(C_4) = D^{(1)}(C_4^2) = D^{(1)}(C_4^3) = 1$$

$$D^{(1)}(\sigma_x) = D^{(1)}(\sigma_y) = D^{(1)}(\sigma_1) = D^{(1)}(\sigma_2) = 1$$

同态核是不变子群 H，而 $D_4 \simeq C_2$，$D_4/C_4 \cong C_2$，由此构造了一个一维非恒等不可约表示。

D_4 群的指数为 2 的不变子群不止一个

$H_2 = \{e, C_4^2, \sigma_x, \sigma_y\}$　　$H_3 = \{e, C_4^2, \sigma_1, \sigma_2\}$

再考虑一个恒等表示，则有了一共 4 种不等价不可约一维表示

二维表示也有一种不可约表示（作业），于是我们得到了 D_4 群的不等价不可约表示

定理：有限群的不等价不可约表示的个数等于类的个数

D_4 群有 5 个类：$\{e\}$　$\{C_4^2\}$　$\{\sigma_x, \sigma_y\}$　$\{\sigma_1, \sigma_2\}$　$\{C_4\ C_4^3\}$　共有 5 个不等价不可约表示

$D^{(n_u)}(n) \longrightarrow n_u$　　$\sum_{u=1}^{r} n_u^2 = n$

D_3 群有 3 个类　$1^2+1^2+2^2=6$　$D_4: 1^2+1^2+1^2+1^2+2^2=8$

求 D_4 群的所有不等价不可约表示，表示空间为 R^3 空间。

例 2. D_4 群的表示，表示空间是函数空间，基矢如下所示。　P_R 作用于函数，R 作用于坐标

$\psi_1 = x^2,\ \psi_2 = y^2,\ \psi_3 = z^2,\ \psi_4 = yz,\ \psi_5 = zx,\ \psi_6 = xy$，有：

$P_R\psi_u(\vec r) = \psi_u(R^{-1}\vec r) = \sum \psi_v(\vec r) D_{vu}(R)$　　$P_R\psi = \psi D(R)$

以 C_4 为例 $C_4^{-1} = C_4^3$，对应变换为 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} y \\ -x \\ z \end{bmatrix}$，$P_{C_4}\psi_1 = \psi_1(C_4^{-1}\vec r) = \psi_1(C_4^3\vec r) = y^2 = \psi_2$ $= 0\psi_1 + 1\times\psi_2 + \cdots + 0\psi_6$

同理有：$P_{C_4}\psi_2 = x^2 = \psi_1$，$P_{C_4}\psi_3 = z^2 = \psi_3$，$P_{C_4}\psi_4 = -xz = -\psi_5$，$P_{C_4}\psi_6 = -\psi_6$　$P_{C_4}\psi_5 = \psi_4$

$$D(C_4) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} & 1 & & & & \\ 1 & & & & & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & & 1 & \\ & & & -1 & & \\ & & & & & -1 \end{array}\right]$$

同理可求得其他群元的表示

例 3. 求 D_3 群的表示，表示空间如下：

$\psi_1 = \cos^2\theta$，$\psi_2 = \sin^2\theta$，$\psi_3 = \sqrt{2}\cos\theta\sin\theta$，$\theta$ 是极坐标的极角

由几何关系和 D_4 群的乘法表。

$e\theta = \theta$　　$a\theta = -\theta$　　$d\theta = \theta + 120°$　　$f\theta = \theta + 240°$　　$b\theta = fa\theta = -\theta + 240°$　　$c\theta = da\theta = -\theta + 120°$

$D(e) = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$，$D(a) = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$，$D(b) = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & \sqrt{6}/4 \\ 3/4 & 1/4 & \sqrt{6}/4 \\ -\sqrt{6}/4 & -\sqrt{6}/4 & -1 \end{bmatrix}$　$D(f) = D(b)D(a)$ ……

$P_a\psi_2(\theta) = \psi_2(a^{-1}\theta) = \psi_2(a\theta) = \psi_2(-\theta)$　　$P_d\psi_2 = \psi(d^{-1}\theta) = \psi(f\theta) = \psi(\theta+240°)$　　$P_b\psi_2(\theta) = \psi_2(b^{-1}\theta) = \psi_2(b\theta) = \psi(-\theta+240°)$

例 4. 新基矢下 D_3 的表示矩阵，基于例 3 的基矢，我们可以构造一组新的基矢

$\psi_1' = \frac{1}{2}\psi_1 - \frac{1}{2}\psi_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_3$

$\psi_2' = -\frac{1}{2}\psi_1 + \frac{1}{2}\psi_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_3$　$\longrightarrow$ 基矢的变换，变换矩阵为　$S = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$

$\psi_3' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + \psi_2)$

$(\psi_1', \psi_2', \psi_3') = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)S$

表示矩阵先进行相似变换得到

$D'(R) = S^{-1}D(R)S$，由此可得新的变换：

$$D'(e)=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}\quad D'(a)=\begin{bmatrix}&-1&\\-1&&\\&&1\end{bmatrix}\quad D'(d)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&\sqrt{3}&\\-\sqrt{3}&-1&\\&&1\end{bmatrix}\quad D'(b)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{3}&1&\\1&-\sqrt{3}&\\&&1\end{bmatrix}$$

$$D'(f)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&-\sqrt{3}&\\\sqrt{3}&-1&\\&&1\end{bmatrix}\quad D'(c)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-\sqrt{3}&1&\\1&\sqrt{3}&\\&&1\end{bmatrix}$$

$$D'(D_3)=\begin{pmatrix}A(D_3)&0\\0&B(D_3)\end{pmatrix}$$

作业：证明$A(D_3)$是二维不可约表示.

D_3群一共有3个不等价.不可约表示.
- 一维恒等表示
- 一维非恒等表示 $e,d,f\to 1$ $a,b,c\to -1$
- 二维表示 $A(D_3)$

§2.3 有限群表示理论的基本定理

• 定理1：有限群的线性表示等价于幺正表示.

即：$X^{-1}D(G)X=\bar{D}(G)$ $\bar{D}(g_\alpha)^{\dagger}\bar{D}(g_\alpha)=E$，对于$g_\alpha$都成立.

可以通过构造如下H矩阵来证明：

$$H=\sum_{\alpha}^{n_G}D(g_\alpha)D(g_\alpha)^{\dagger}$$

• 定理2：假设$D(G)$和$\bar{D}(G)$为群G的等价的幺正表示.则一定存在一个幺正矩阵U将两者关联起来

$$\bar{D}(G)=U^{-1}D(G)U$$

• 定理3：舒尔(Schur)定理

(1) 设$D(G)$为群G的不可约表示，且

$$D(G)M=MD(G)$$ (所有表示矩阵都与一个矩阵M对易)

则M必定为常数矩阵.即：$M=CE$

(2) 设$D_1(G)$.$D_2(G)$是群G的两个不等价不可约表示.且

$$D_1(G)M=MD_2(G)$$

则M必须为零矩阵. 即：$M=0\longrightarrow$不一定是方阵

• 定理4：正交性定理.

设群G有r个不等价不可约表示$D^{(u)}(G)$ $(u=1,\cdots,r)$则

$$\sum_{\alpha=1}^{n_G}D^{(u)}(g_\alpha)^{*}_{r\eta}D^{(v)}(g_\alpha)_{\lambda\rho}=\frac{n_G}{n_u}\delta_{r\lambda}\delta_{\eta\rho}\delta^{uv}$$

其中n_G为群G的阶，n_u表示第u个不可约表示$D^{(u)}(G)$的维数

• 定理5：有限群的不等价不可约表示的个数等于群的类的个数.

§2.4 群的正则表示：

1. 群空间：

如果用有限群 G 的所有群元 $\{g_\alpha\}$ 作为基矢，则由基矢 $V=(g_1, g_2, \cdots\cdots, g_n)$ 所形成的线性空间则称为群空间.

群空间内的矢量可以用这组基矢的线性叠加表示出来：

$$f=\sum_{i=1}^{n} x_i g_i=(g_1, \cdots g_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=V\cdot x$$

2. 群的正则表示：

以群空间为表示空间的表示称为正则表示！

对于空间内任意矢量 f： $g_\alpha: f\to f'$

$$f'=g_\alpha f=g_\alpha V\cdot x=\sum_{i=1}^{n} x_i g_\alpha g_i=V\cdot D(g_\alpha)x=V'\cdot x=V\cdot x'$$

上面的式子有两种理解 (1) $V'=VD(g_\alpha)$ (2) $x'=xD(g_\alpha)$ 基矢变换/坐标变换.

例：求群 $G=\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ 的正则表示，其乘法表如下：

	g_1	g_2	g_3	g_4
g_1	g_1	g_2	g_3	g_4
g_2	g_2	g_1	g_4	g_3
g_3	g_3	g_4	g_2	g_1
g_4	g_4	g_3	g_1	g_2

首先：$f=x_1g_1+x_2g_2+x_3g_3+x_4g_4$

(1) 从坐标变换：$x'=D(g_\alpha)x$ 以 g_2 为例：

$$f'=g_2f=x_1g_2g_1+x_2g_2g_2+x_3g_2g_3+x_4g_2g_4$$
$$=x_1g_2+x_2g_1+x_3g_4+x_4g_3$$
$$=x_2g_1+x_1g_2+x_4g_3+x_3g_4$$

故：
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\longrightarrow x'=\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_4 \\ x_3 \end{pmatrix}=D(g_2)x=\begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}$$

同理有：
$$D(g_1)=\begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}\quad \cdots\cdots$$

(2) 从基矢变换的角度看，同样以 g_2 为例： $V'=VD(g_\alpha)$

$$f'=g_2f=x_1g_2+x_2g_1+x_3g_4+x_4g_3$$

$$(g_2\ g_1\ g_4\ g_3)=(g_1\ g_2\ g_3\ g_4)D(g_2)$$

$$D(g_2)=\begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}$$

3. 正则表示的几个特点

(1) 除恒元外，其余群元的表示矩阵的对角元都为零

$$\chi(g_\alpha)=\begin{cases} n_G & g_\alpha=e \\ 0 & g_\alpha\neq e \end{cases}$$

(2) 正则表示的维数为群 G 的阶数

(3) $G \cong D(G)$

(4) 任何有限群都有正则表示.

§2.5 特征标相关理论

1. 特征标

群的线性表示建立了抽象群和矩阵群之间的一个同态关系，群元表示矩阵的迹定义为该群元的特征标：

$$\chi(g_\alpha)=\mathrm{Tr}\,D(g_\alpha)=\sum_{i=1}^{n_D}D(g_\alpha)_{ii}$$

对于与 g_α 共轭的元素

$$\chi(f^{-1}g_\alpha f)=\mathrm{Tr}\,D(f^{-1}g_\alpha f)=\mathrm{Tr}\left(D(f^{-1})D(g_\alpha)D(f)\right)$$
$$=\mathrm{Tr}\left(D(g_\alpha)\right)=\chi(g_\alpha)$$

即：同类元素在表示 $D(G)$ 中的特征标相同，特征标是类的函数.

2. 定理 1：如果两个表示等价，则特征标相同

Proof：设两个表示等价，即对任意 g_α 均有

$$\bar{D}(g_\alpha)=X^{-1}D(g_\alpha)X$$

则：

$$\bar{\chi}(g_\alpha)=\mathrm{Tr}(\bar{D}(g_\alpha))=\mathrm{Tr}(X^{-1}D(g_\alpha)X)=\mathrm{Tr}(D(g_\alpha))=\chi(g_\alpha)$$

证毕

§2.5 特征标相关理论

3. 定理2. 特征标正交关系定理

假设群 G 有 r 个不等价不可约表示 $D^{(u)}(G)$，$(u=1,\cdots,r)$ 则

$$\sum_{\alpha=1}^{n_G} \chi^{(u)}(g_\alpha)^* \chi^{(v)}(g_\alpha) = \boxed{n_G \delta^{uv}}$$

Proof. 利用 §2.3 中的正交性定理：

$$\sum_{\alpha=1}^{n_G} D^{(u)}(g_\alpha)^*_{\sigma\delta} D^{(v)}(g_\alpha)_{\lambda\rho} = \frac{n_G}{n_u}\delta^{uv}\delta_{\sigma\lambda}\delta_{\delta\rho}.$$

令 $\delta=\sigma$，$\rho=\lambda$，并对 σ 和 λ 进行求和，则

$$\sum_{\alpha=1}^{n_G}\Big(\sum_\sigma D^{(u)}(g_\alpha)^*_{\sigma\sigma}\Big)\Big(\sum_\lambda D^{(v)}(g_\alpha)_{\lambda\lambda}\Big) = \frac{n_G}{n_u}\sum_{\sigma\lambda}\delta_{\sigma\lambda}\delta_{\sigma\lambda}\,\delta^{uv}$$

$$\text{“}\sum^{n_u}\delta_{\sigma\sigma}\text{ or }\sum^{n_v}\delta_{\lambda\lambda}$$

即

$$\sum_\alpha \chi^{(u)}(g_\alpha)^* \chi^{(v)}(g_\alpha) = n_G\delta^{uv}，\text{证毕}.$$

为了更好地理解特征标的正交定理，引入特征标表

	g_1	g_2	……	g_n
$D^{(1)}$	$\chi^{(1)}(g_1)$	$\chi^{(1)}(g_2)$	---	$\chi^{(1)}(g_n)$
$D^{(2)}$	$\chi^{(2)}(g_1)$	------	---	—
···	-----	·····	·····	---
$D^{(r)}$	$\chi^{(r)}(g_1)$	------	---	$\chi^{(r)}(g_n)$

某一行表示固定，某一列，群元固定　特征标表中任意不同的两行正交

对于同一行，行矢量的模长为 n_G

$$\sum_{\alpha=1}^{n_G} |\chi^{(u)}(g_\alpha)|^2 = n_G$$

不可约表示必须满足的条件.

4. 唯一分解定理.

设 $D(G)$ 为群 G 的一个表示，$D^{(u)}(G)$ 为 G 的所有 r 个不等价不可约表示，则由表示的约化：

$$X^{-1}D(G)X = \bigoplus_{u=1}^{r} a_u D^{(u)}G \quad (*)$$

其中 a_u 是唯一确定的.

$$a_u = \frac{1}{n_G}\sum_{\alpha=1}^{n_G} \chi(g_\alpha)^* \chi^{(u)}(g_\alpha)$$

证明：对(*)式两端求迹：

$$\chi(g_\alpha) = \sum_{u=1}^{r} a_u \chi^{(u)}(g_\alpha)$$

利用特征标正交定理，两端乘 $\chi^{v}(g_\alpha)^*$，并对 α 求和

实数.

$$\sum_{\alpha=1}^{n_G}\chi^{(v)}(g_\alpha)^*\chi(g_\alpha) = \sum_{u=1}^{r} a_u \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{n_G}\chi^{(v)}(g_\alpha)^*\chi^{(u)}(g_\alpha)}_{n_G\delta^{uv}} = \sum_{u=1}^{r} a_u n_G \delta^{uv} = a_v n_G$$

将上式两边同除 n_G 即证明完毕

对于正则表示：

$$a_u = \frac{1}{n_G}\sum_{\alpha=1}^{n_G} \chi(g_\alpha)^* \chi^{(u)}(g_\alpha) = \frac{1}{n_G}\overset{n_G}{\chi(e)^*}\chi^{(u)}(e) = n_u$$

即 正则表示，即第u个不可约表示出现的次数是不可约表示的维数

$$X^{-1} D_{regular}(g_\alpha) X = \bigoplus_{u=1}^{r} n_u D^{(u)}(g_\alpha)$$

对上式两边求迹

$$\chi(g_\alpha) = \sum_{u=1}^{r} n_u \chi^{(u)}(g_\alpha)$$

若取 $g_\alpha = e$，则

$$\boxed{n_G = \sum_{u=1}^{r} n_u^2}$$

群的不等价不可约表示的维数的平方和等于群的阶.

若取 g_α 为非恒元：

$$0 = \sum_{u=1}^{r} n_u \chi^{(u)}(g_\alpha)$$

$$\sum_{u=1}^{r} \chi^{(u)}(e)^* \chi^{(u)}(g_\alpha) = 0$$

即特征表中任意一列都与第一列正交.

因为同类元素的特征标相同. 所以为了书写简便. 可以把同一类的元素合并

	C_1	C_2	$\cdots$	C_r
$D^{(1)}$	1	1	$\cdots$	1
$D^{(2)}$	$\chi^{(2)}(C_1)$	$\chi^{(2)}(C_2)$	$\cdots$	$\chi^{(2)}(C_r)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$D^{(r)}$				

→ 一维恒等表示

例 以 D_3 群为例

	e	d,f	a,b,c
$D^{(1)}$	1	1	1
$D^{(2)}$	1	1	-1
$D^{(3)}$	2	-1	0

$0 = 1\times 1 + 2(1\times 1) + 3(1\times -1)$ 1,2行

$0 = 1\times 2 + 2(1\times -1) + 3(-1\times 0)$ 2,3行

$0 = 1\times 2 + 2(1\times -1) + 3(1\times 0)$ 1,3行

正交

此外，也可以证明以类为表头的特征标表的任意两列正交

$$\sum_{\mu=1}^{r} \chi^{(\mu)}(g_\alpha)^* \chi^{\mu}(g_\beta) = \frac{n_G}{n_{C_\alpha}} \delta_{\alpha\beta}.$$

任意两行正交也可写为

$$\sum_{\alpha=1}^{r} n_{C_\alpha} \chi^{(\mu)}(C_\alpha)^* \chi^{\nu}(C_\beta) = n_G \delta^{\mu\nu}$$

§4.1 李群的定义和线性表示

李群的结构函数. $r=f(\alpha,\beta)$ 是解析函数. 通常取 $\alpha_0=0$ 作为恒元对应的群参数的取值.

2. n维空间中带r个实参数的线性坐标变换

考虑n维空间带r个实参数的线性变换, 变换后的坐标为变换前的坐标以变换参数的函数

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = g(\alpha) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

满足上条. 则 $g(\alpha)$ 为李群.

3. 李群的线性表示:

李群的线性表示是一种将群元对应到矩阵的同态关系:

$$G=\{g(\alpha)\} \to D(G)=\{D(g_\alpha)\equiv D(\alpha)\}$$

$D(\alpha)$ 称为 α 的函数矩阵. 同时要求 $D(\alpha)$ 是2阶光滑. 此外. 结构函数不依赖于矩阵表示.

4. 李群的线性表示的生成元:

假设在恒元附近. α 与恒元附近的群元的表示矩阵存在一一对应关系, 则可将 $D(\alpha)$ 在 $D(\alpha_0)$ 附近展开.

$$D(\alpha)=D(\alpha_0)+\frac{\partial D(\alpha)}{\partial\alpha_k}\bigg|_{\alpha=\alpha_0}(\alpha_k-\alpha_{0k})=E+(\alpha_k-\alpha_{0k})I_k$$

定义 $I_k=\frac{\partial D(\alpha)}{\partial\alpha_k}\Big|_{\alpha=\alpha_0}$ 为李群线性表示的无穷小生成元. 为简单起见, 令 $\alpha_0=0$, 则上式简化为:

$$D(\alpha)=E+\alpha_k I_k$$

令 $\tilde{I}_k=iI_k$, 则

$$D(\alpha)=E-i\alpha_k\tilde{I}_k$$

5. 生成元的线性无关性: r阶李群的生成元是线性无关的.

Proof: 假设不是线性无关: 则存在一组不全为零的系数 C_k:

$$C_kI_k=0$$

引入一个小量 λ, $\lambda\ll1$, 则有

$$\lambda C_kI_k=0$$

记 $\alpha_k=\lambda C_k\ll1$, 即 $\alpha=\lambda C\neq0$, 有

$$D(\alpha)=D(\lambda C)=E+\lambda C_kI_k=E=D(0)$$

所以 $\alpha=0$, 又 $\lambda\neq0$, 故 $C=0$ 与假设矛盾. 证毕.

6. 几个例子.

(1) SO(2)群: SO(2)群只有一个独立的参数, 所以是一阶李群 $g(\theta)=e^{i\theta}$, $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ $\theta\in[0,2\pi]$

因为群参有界, 所以 SO(2) 群是紧致的

当 $\omega=0$ 时, $D(0)=E$, 因此 $\omega_0=0$ 是恒元对应的群参数取值.

根据生成元的定义: $I_w = \frac{\partial D(w)}{\partial w}\Big|_{w=w_0}$

$$= \begin{bmatrix} -\sin w & -\cos w \\ \cos w & -\sin w \end{bmatrix}\Big|_{w=0} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

当 $w \ll 1$ 时:

$$D(w) = E + wI = \begin{bmatrix} 1 & -w \\ w & 1 \end{bmatrix}$$

(2) $GL(2,R)$群: 2维空间实线性变换群.

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}}_{\text{表示矩阵.}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \alpha_0 = (1,0,0,1)$$

$$I_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad I_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3) $GL(n,R)$群. n维 .... n^2个群参数.

$$[I_{ij}]_{pq} = \delta_{ip}\delta_{jq}.$$

生成元之间的对易关系

$$[I_{ij}, I_{kl}]_{pq} = (I_{ij}I_{kl} - I_{kl}I_{ij})_{pq} = (I_{ij}I_{kl})_{pq} - (I_{kl}I_{ij})_{pq}$$

$$= (I_{ij})_{pm}(I_{kl})_{mq} - (I_{kl})_{pm}(I_{ij})_{mq} = \delta_{ip}\delta_{jm}\delta_{km}\delta_{lq} - \delta_{kp}\delta_{lm}\delta_{im}\delta_{jq} = \delta_{jk}\delta_{ip}\delta_{lq} - \delta_{li}\delta_{kp}\delta_{jq}$$

$$= \delta_{jk}(I_{il})_{pq} - \delta_{il}(I_{kj})_{pq} = \delta_{jk}I_{il} - \delta_{il}I_{kj}$$

(4) $SL(2,R)$. 二维实特殊 —— (3阶非紧致李群)

$$D(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix} \qquad \alpha_4 = \frac{1+\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1} \qquad \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & (1+\alpha_2\alpha_3)/\alpha_1 \end{bmatrix} \qquad \alpha_0 = (1,0,0)$$

$$I_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(5) $SO(3)$群 (3阶紧致李群) ☆

$\varphi, \theta, w \longrightarrow$ 不能求生成元.(有缺陷)

$$\begin{cases} w_1 = w\sin\theta\cos\varphi \\ w_2 = w\sin\theta\sin\varphi \\ w_3 = w\cos\theta \end{cases}$$

① 指数表示: $D(w) = C_{\hat{n}(\theta,\varphi)}(w) = e^{-iw_iT_i}$, 当$(w_1,w_2,w_3) = (0,0,0)$时 $D(w) = E$

$$I_1 = \frac{\partial D(w)}{\partial w_1}\Big|_{w=w_0} = -iT_1$$

$$I_2 = -iT_2$$

$$I_3 = -iT_3$$

$$I_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[I_i, I_j] = \varepsilon_{ijk}I_k$$

② $g = E + \underbrace{\varepsilon}_{\text{小矩阵}}$ $\qquad g^Tg = E$

$$(E+\varepsilon)^T(E+\varepsilon) = E$$

$$E + \varepsilon^T + \varepsilon + \underbrace{\varepsilon^T\varepsilon}_{\text{二阶小量.忽略.}} = E \qquad \varepsilon^T = -\varepsilon \qquad \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$$

(6). 二维特殊幺正群: $SU(2)$群. (3阶紧致李群)

$$D(\alpha)=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad D^{+}D=E \quad \det D(\alpha)=1$$

算上4个复矩阵元的实部和虚部，共有8个参数。 $\underset{4个条件}{D^{+}D=E}$ · $\underset{1个条件}{\det D(\alpha)=1}$

$$D^{-1}(\alpha)=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^{*} & c^{*} \\ b^{*} & d^{*} \end{bmatrix}$$

$D(\alpha)=\begin{bmatrix} a & b \\ -b^{*} & a^{*} \end{bmatrix}$ 再由 $|a|^2+|b|^2=1$ 令

$$a=\cos\alpha_1 e^{i\alpha_2}, \quad b=\sin\alpha_1 e^{i\alpha_3}$$

$$D(\alpha)\begin{bmatrix} e^{i\alpha_2}\cos\alpha_1 , & e^{i\alpha_3}\sin\alpha_1 \\ -e^{i\alpha_3}\sin\alpha_1 , & e^{-i\alpha_2}\cos\alpha_1 \end{bmatrix}$$

$\alpha_1=0$，$\alpha_2=0$ 时，α_3 不论取何值，都为单位矩阵。
有缺陷，必须换一组参数。

$$1=\cos^2\alpha_1+\sin^2\alpha_1=\cos^2\alpha_1\cdot 1+\sin^2\alpha_1\cdot 1=\cos^2\alpha_1(\cos^2\alpha_2+\sin^2\alpha_2)+\sin^2\alpha_1(\cos^2\alpha_2+\sin^2\alpha_2)=|a|^2+|b|^2$$

$$\begin{cases} a=e^{i\alpha_3}(\cos\alpha_1\cos\alpha_2+i\sin\alpha_1\sin\alpha_2) \\ b=\cos\alpha_1\sin\alpha_2+i\sin\alpha_1\cos\alpha_2 \end{cases}$$

只有 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(0,0,0)$ 时才对应恒元

$$I_1=\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}=i\sigma_1 \qquad I_2=\begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix}=i\sigma_2 \qquad I_3=\begin{bmatrix} i & \\ & -i \end{bmatrix}=i\sigma_3$$

$$[I_i, I_j]=\ominus 2\varepsilon_{ijk}I_k$$

7. 有限群元的生成：

设 $D(0)=E$，$\alpha\ll 1$，生成元为 I_k，在前面的讨论中，我们可以将表示矩阵在恒元附近展开：

$$D(\alpha)=E+\alpha_k I_k$$

以 $SO(2)$ 群为例，看一看如何由生成元生成有限群元

$SO(2)$ 群只有一个独立参数 θ，与恒元对应的 $\theta=0$，取 $\delta\theta\to 0$，有：

$$D(\delta\theta)=E+\delta\theta I$$

如果通过以下方式定义 $\delta\theta$，一个有限的转动分解为多个无穷小转动的叠加：

$$\delta\theta=\frac{\theta}{N}, \quad N\gg 1$$

于是：

$$D(\theta)=(D(\delta\theta))^N\doteq(E+I\delta\theta)^N$$

上式右边在 $N\to\infty$ 时取等号，即：

$$D(\theta)=\lim_{N\to\infty}\left(E+\frac{\theta}{N}I\right)^N=e^{\theta I}$$

同理，当李群中有多个独立的群参数时：

$$D(\alpha)=e^{\alpha_i I_i}$$

对于 $SO(2)$ 群：

$$D(\theta)=e^{\theta I}=\exp\left(\theta\begin{bmatrix} & -1 \\ 1 & \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

补充：SO(3,1)群（洛伦兹群）

$x^2+y^2+z^2-c^2t^2 = x'^2+y'^2+z'^2+c^2t'^2$

间格不变，有六个独立实参，有六个生成元

时间不变：$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} SO(3) & \\ \hline & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

时间变化：洛伦兹变换

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad ct' = \frac{ct - v/c\, x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

令 $c=1$： $x' = \gamma(x - vt)$ $\quad t' = \gamma(t - vx)$ $\quad \gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$

三个方向的洛伦兹变换，三个 boosts． $\beta = (v_x, v_y, v_z)$

$g(\alpha,\beta)$． $\alpha \to SO(3)$ $\quad \beta \to$ 三个 boosts

$$N_1 = \frac{g(\alpha,\beta)}{\partial\beta_1}\bigg|_{\alpha=\beta=0} = \frac{\partial g(0,0,0,\beta,0,0)}{\partial\beta_1}\bigg|_{\beta_1=0} = \left[\partial\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma v_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma v_1 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \Big/ \partial\beta_1\right]_{\beta_1=0} = \begin{pmatrix} & & & -1 \\ & & & \\ & & & \\ -1 & & & \end{pmatrix}$$

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad N_3 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & -1 \\ & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

剩下三个 SO(3)群的生成元

$M_1 = \left(\begin{array}{c|c} SO(3) & \\ \hline & 0 \end{array}\right)$ $\qquad M_2 = \cdots\cdots$ $\qquad M_3 = \cdots\cdots$

对易关系：$[M_i, M_j] = \varepsilon_{ijk} M_k$ $\quad [N_i, N_j] = -\varepsilon_{ijk} M_k$ $\quad [M_i, N_j] = \varepsilon_{ijk} N_k$

重新线性组合：

$$J_i = \frac{M_i + iN_i}{2} \qquad K_i = \frac{M_i - iN_i}{2}$$

新的对易关系：

$$[J_i, J_k] = \varepsilon_{ijk} J_k \qquad [K_i, K_j] = \varepsilon_{ijk} K_k \qquad [J_i, K_j] = 0$$

重要的李群：SO(2)群． $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ $\quad w = z$ $\quad U(1): r$

SO(3)群．SO(4)群 $\quad$ SU(2)群 $\quad$ SU(3)群．八个生成元每个代表一种胶子

SO(n)：$\frac{n(n-1)}{2}$．SO(3,1)

E_2．E_3．$GL(n,R)$ $\quad SL(2,R)$

再如 SO(3) 群：

$$D(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = e^{\omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \omega_3 I_3}$$

O(3) 群的生成元与 SO(3) 一样，只不过对 O(3) 群中行列式为 −1 的群元，还需要乘上空间反演矩阵。

$$D(\omega) = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} e^{\omega_i I_i}$$

§4.2 李群三定理：

1. 定理 1：李群的线性表示完全由生成元决定：

Proof：设李群的表示矩阵为 $D(\alpha)$，则：

$$D(\alpha) D(\beta) = D(r)，其中 \ r = f(\alpha, \beta)$$

两端右乘 $D(\beta)^{-1}$，有：

$$D(\alpha) = D(r) D(\beta)^{-1}$$

两端对 α_i 求导：

$$\frac{\partial D(\alpha)}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial D(r)}{\partial r_j} \frac{\partial f_j}{\partial \alpha_i} D(\beta^{-1})，\quad 相同指标求和$$

取 $\beta = \bar{a}$，$f(a, \bar{a}) = a_0$，有：

$$\frac{\partial D(\alpha)}{\partial \alpha_i} = \underbrace{\frac{\partial D(r)}{\partial r_j}\bigg|_{r=a_0}}_{生成元} \underbrace{\frac{\partial f_j(\alpha, \beta)}{\partial \alpha_i}\bigg|}_{S_{ji}}$$

令：$S_{ji}(\alpha) = \dfrac{\partial f_j(\alpha, \beta)}{\partial \alpha_i}$ ……无关

$$\begin{cases} \dfrac{\partial D(\alpha)}{\partial \alpha_i} \quad I_j S_{ji}(\alpha) D(\alpha) \\ D(\alpha_0) = E \quad 初始条件 \end{cases}$$

若令 $\alpha = \alpha_0$，有 $I_i = ?$ …… $I_j S_{ji}(\alpha_0)$

→ $D(\alpha)$ 的一阶偏微 ……

因此 $D(\alpha)$ 完全由生成元 I_j 决定，证毕

2. 定理二：李群的线性表示的生成元满足如下关系：

$$[I_j, I_k] = C^i_{jk} I_i \quad 相同指标求和$$

其中 C^i_{jk} 为结构常数：$C^i_{jk} = \left(\dfrac{\partial S_{ik}(\alpha)}{\partial \alpha_j} - \dfrac{\partial S_{ij}(\alpha)}{\partial \alpha_k} \right) \bigg|_{\alpha = \alpha_0}$

证明：

定理1中：

$$\frac{\partial D(\alpha)}{\partial \alpha_i} = I_j S_{ji}(\alpha) D(\alpha)$$

上式再对 α_k 求偏微商，再令 $\alpha=\alpha_0$，有

$$\left.\frac{\partial^2 D(\alpha)}{\partial \alpha_i \partial \alpha_k}\right|_{\alpha=\alpha_0} = I_j \left.\frac{\partial S_{ji}(\alpha)}{\partial \alpha_k}\right|_{\alpha=\alpha_0} D(\alpha_0) + I_j S_{ji}(\alpha_0) \left.\frac{\partial D(\alpha)}{\partial \alpha_k}\right|_{\alpha=\alpha_0}$$

$$= I_j \left.\frac{\partial S_{ji}(\alpha)}{\partial \alpha_k}\right|_{\alpha=\alpha_0} + I_j \delta_{ji} I_k = I_j \frac{\partial S_{ji}}{\partial \alpha_k} + I_i I_k$$

交换 i, k 有 $\frac{\partial^2 D(\alpha)}{\partial \alpha_k \alpha_i} = I_j \left.\frac{\partial S_{jk}(\alpha)}{\partial \alpha_i}\right|_{\alpha=0} + I_k I_i$

两式相减即可得证

$$(I_i I_k - I_k I_i) = I_j \left[\frac{\partial S_{jk}(\alpha)}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial S_{ji}(\alpha)}{\partial \alpha_k}\right]\Bigg|_{\alpha=\alpha_0}$$

由上式不难看出：$C^j_{ik} = -C^j_{ki}$

3. 定理三：李群的结构常数满足以下关系：

$$C^m_{ij} C^n_{km} + C^m_{jk} C^n_{im} + C^m_{ki} C^n_{jm} = 0 \quad \text{m求和.}$$

作业：证明上式：

$[[I_{\{i}, I_j], I_{k\}}] = 0$ 展开可证

代入定理2：$[(C^m_{\{ij} I_m), I_{k\}}] = C^m_{\{ij}[I_m, I_{k\}}] = \underline{C^m_{\{ij} C^n_{mk\}}} I_n = 0$ 　传性无关，只能系数为0.

§4.3 李群的无穷小算子

n维空间中带r个实参数的坐标变换，变换后的坐标是变换前坐标及实参数的函数，因此可以表示为：

$$x' = \varphi(x, \alpha) \quad 或 \quad x'^{\mu} = \varphi^{\mu}(x, \alpha)$$

其中 $\mu = 1, 2, \cdots, n$；$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_r)$，矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi^1(x,\alpha) \\ \varphi^2(x,\alpha) \\ \vdots \\ \varphi^3(x,\alpha) \end{bmatrix} = g(\alpha) \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$$

若 $g(\alpha)$ 满足李群的定义，则坐标变换构成一个r阶李群.

考虑一个无穷小的坐标变换：

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + dx^\mu = \varphi^\mu(x,\alpha) \qquad (\alpha \ll 1)$$

$$= \underbrace{\varphi^\mu(x,0)}_{x^\mu} + \left.\frac{\partial \varphi^\mu(x,\alpha)}{\partial \alpha_i}\right|_{\alpha=\alpha_0} \alpha_i$$

故：

$$dx^\mu = \left.\frac{\partial \varphi^\mu(x,\alpha)}{\partial \alpha_i}\right|_{\alpha=\alpha_0} \alpha_i$$

在这无穷小坐标变换下，n维空间的标量函数 $F(x)$ 作如下变换：

$$S(\alpha):\ F(x) \longrightarrow F(x) + dF(x)$$

其中：

$$dF(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x^\mu} dx^\mu = \frac{\partial F(x)}{\partial x^\mu} \left.\frac{\partial \varphi^\mu(x)}{\partial \alpha_i}\right|_{\alpha=\alpha_0} \alpha_i$$

$$dF(x) = \alpha_i \left.\frac{\partial \varphi^\mu(x,\alpha)}{\partial \alpha_i}\right|_{\alpha=\alpha_0} \partial_\mu F(x)$$

定义李群的无穷小算子：

$$X_i = \left.\frac{\partial \varphi^\mu}{\partial \alpha_i}\right|_{\alpha=0} \partial_\mu \qquad \text{则：} dF = \alpha_i X_i F$$

$$S(\alpha):\ F(x) \longrightarrow F(x) + dF(x) = (1 + \alpha_i X_i) F(x) = S F(x)$$

故无穷小的坐标变换引出标量函数的无穷小变换算符为：

$$S = (1 + \alpha_i X_i)$$

对李群的线性表示，有：

$$D(\alpha) = E + \alpha_k I_k \qquad \text{无穷小群元}$$

$$D(\alpha) = e^{\alpha_k I_k}$$

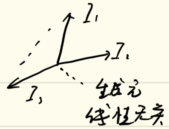
同样，对坐标变换（李群的无穷小算子），我们也有

$$S(\alpha) = 1 + \alpha_k X_k$$

$$S(\alpha) = e^{\alpha_k X_k} \qquad \text{有限变换} \quad \text{证明方法同有限群元}$$

$\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_r)$

$[I_i, I_j] = C_{ij}^k I_k$



§4.4.1 李代数：（用无限小生成元作为基底）

设群G为r阶李群，则它的r个生成元 I_i ($\bar{I}_i$)，作为基底张成一个r维线性空间g，如果{I_i}满足：

$$[I_i, I_j] = C_{ij}^k I_k$$

则称g是群G对应的李代数

$$\text{集合} \xrightarrow{+\text{结构}} \text{群}$$

$$\text{流形} \leftarrow \text{集合} \xrightarrow{+\text{结构}} \text{线性空间} \xrightarrow{+\text{结构}} \text{代数}.$$

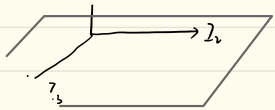
说明：通过对易关系将 I_j 映射到空间中的一个矢量.

$$[\quad, I_j]: \quad I_i \to I_i' = C_{ij}^k I_k$$

这个矢量可以用基矢的线性组合表示出来，对易关系相当于定义了这个线性空间的矢量乘积，这种乘积叫做李乘积，g关于李乘积是封闭的。

§4.4.2 子代数.

设A为一···



$[\bar{I}_i, \bar{I}_j] = C_{ij}^k \bar{I}_k$ （只用B的基矢展开就够了）

或写为： $[B, B] = R$

则称B是A的····

小生成元 ···

···个，因此李···

对易关系：

SO(3)群有3个实参数.

$$D(\vec{\omega}) = e^{-i\omega_i \bar{I}_i}, \quad I_1 = -i\bar{I}_1, \quad I_2 = -i\bar{I}_2, \quad I_3 = -i\bar{I}_3$$

对易关系： $[I_i, I_j] = \varepsilon_{ijk} I_k$

子空间： $\{I_1\}$, $\{I_2\}$, $\{I_3\}$, $\{I_2, I_3\}$ $\{I_1, I_3\}$ $\{I_1, I_2\}$ $\{I_1, I_2, I_3\}$ 全集？

子代数：4个子代数，三个生成元自身构成的子代数是三个不同坐标平面上SO(2)群的李代数so(2)

SO(4)群：6个实参数（x, y, z, w）构成六个二维平面 $C_4^2 = 6$

SO(n)群有 C_n^2 个二维平面，有6个实参数。 $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$

一个l维的李代数，至少有(l+1)/l个子代数，l个基矢，1个李代数自身

SO(4)群的对易关系：

$$[M_i, M_j] = -\varepsilon_{ijk} M_k$$

$$[N_i, N_j] = -\varepsilon_{ijk} M_k$$

$$[M_i, N_j] = -\varepsilon_{ijk} N_k$$

做如下线性变换

$$P_k = \frac{M_k + N_k}{2} \qquad Q_k = \frac{M_k - N_k}{2}$$

新得到的无穷下算子的对易关系：

$$[P_i, P_j] = -\varepsilon_{ijk} P_k \quad SO(3)$$

$$[Q_i, Q_j] = -\varepsilon_{ijk} Q_k \quad SO(3)$$

$$[P_i, Q_j] = 0$$

得到两组对易的 so(3) 子代数，新基矢 $\{P_i\}$，$\{Q_i\}$ 分别构成封闭的线性空间。

§4.4.3 不变子代数（理想） $\bar{I}_i \in B$，$I_j \in A$

设 B 为 A 的子代数，且满足：$[\bar{I}_i, I_j] = C_{ij}^k \bar{I}_k$，或写为 $[B, A] = B$

则称 B 为 A 的不变子代数或理想。

例：so(4) 李代数有两个非平庸的理想：so(3)

$[P_i, P_j] = -\varepsilon_{ijk} P_k$，$[Q_i, Q_j] = -\varepsilon_{ijk} Q_k$ $\quad [P_i, Q_j] = 0$

E_3 群的李代数有一个非平庸的理想：I_3 $\quad L \rightarrow$ 不变子代数（三维平移群）

$[I_i, I_j] = -\varepsilon_{ijk} I_k$，$[L_i, L_j] = 0$，$[I_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} L_k$

角动量（旋转） $\qquad$ 动量（平移）

so(3) 李代数没有非平庸理想

$$[I_i, I_j] = \varepsilon_{ijk} I_k$$

§4.4.4 中心

设 B 是 A 的子代数，$\bar{I}_i \in B$，如果 $\forall I_j \in A$，都有 $[\bar{I}_i, I_j] = 0$ 或 $[B, A] = 0$

则称 B 为 A 的中心，中心是理想的一种特殊情况（n 维平移群）

§4.4.5 直和

设李代数 A 有两个理想 A_1 和 A_2，如果它们满足：

$$A = A_1 \cup A_2 \quad 且 \quad A_1 \cap A_2 = 0$$

则称 A 为 A_1 和 A_2 的直和，记作：

$$A = A_1 \oplus A_2$$

直和的性质：

(1) A_1 和 A_2 为 A 的理想 $[A_1, A] = A_1 \quad [A_2, A] = A_2$

(2) $A_1 \cap A_2 = 0$

(3) A 的基矢为 A_1 和 A_2 基矢之并

例：

$$SO(4) = SO(3) \oplus SO(3)$$

§4.4.6 半直和

设A_1为李代数A的理想，A_2为A的子代数，并满足：

$$A = A_1 \cup A_2 \quad 且 \quad A_1 \cap A_2 = 0$$

则称A为A_1和A_2的半直积：$A = A_1 \oplus_s A_2$

例如前面讨论过的E_3群.（E_n群都是）

$$E_n = T_n \oplus_s SO(n)$$

§4.4.7 单纯李代数，半单纯李代数

单纯李代数：

不含有非平庸理想的李代数称为单纯李代数.

如：$SO(3)$，$SO(2)$，$SO(2,1)$

半单纯李代数：

不含有Abel理想的李代数称为半单纯李代数.

比如：$SO(4) = SO(3) \oplus SO(3)$，两个理想都是非Abel

再例如E_3有Abel理想，故不是半单纯的.

Chapter 3. 点群

§ 3.1 实正交点群 $O(3)$

1. 实正交变换矩阵(操作)

R^3 空间中的矢量：$\vec{r} = x_i\vec{e}_i = Vx = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

引入正交变换 g，使得

$$g: \vec{r} \to \vec{r}' \quad , \quad g^T g = E$$

写成矩阵为：

$$x \to x' = gx$$

实正交变换前后：

$$x'^T x' = x^T \boxed{g^T g} x = x^T x$$

即实正交变换前后，矢量的模长保持不变. $|x'| = |x|$ 　$O(n)$ 群

闵氏时空. 洛伦兹变换. 保持 $c^2t^2 - (x^2+y^2+z^2)$ 不变 Lorentz $O(1,3)$ 群

推广：$O(m,n)$ 群

又由于 $g^T g = E$, $g^{-1} = g^T$.

两边同时取行列式：

$$\det(g)\det(g^T) = \det(E) = 1$$

$$\longrightarrow \quad \det(g) = \pm 1 \text{ —— 两叶.}$$

2. 实正交矩阵群：$O(3)$

$$O(3) = \{g \mid g \text{ 为 } 3\times 3 \text{ 矩阵}, g^T g = E\}$$

3. 实特殊(幺模)正交群 $SO(3)$

$$SO(3) = \{g \mid g \in O(3), \text{且} \det(g) = 1\}$$

$SO(3)$ 群中的任意矩阵都可以通过参数的连续变化变换到恒元，双连通的.

进一步来看 $O(3)$ 群的特点：

设 $\forall g \in SO(3)$，$\forall f \in O(3)$，则 g 的共轭元素：

$$\det(fgf^{-1}) = \det(gff^{-1}) = \det(g) = 1$$

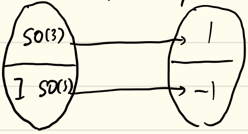
故 fgf^{-1} 也在 $SO(3)$ 群中. 因此 $SO(3)$ 群是 $O(3)$ 群的不变子群.

$O(3)$ 群另一个不变子群是空间反演变换群 $V_2 = \{E, I\}$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$$

作业.

以SO(3)为同态核，可以构造商群：



$O(3) \simeq C_2 \qquad O(3)/SO(3) \cong C_2$

$O(3)/SO(3) = \{SO(3), ISO(3)\} \cong \{E, I\}$

$O(3) = SO(3) \cup ISO(3) = SO_3\{E, I\}$

SO(3)群和$\{E, I\} = V_2$

①. 两群除恒元以外无公共元素

②. 两个群的元素可对易

$O(3) = SO(3) \otimes V_2$

以上我们讨论的是3阶实正交群，对任意维n阶实正交群O(n)，V_2的定义会有所不同

4. 定理：对于$\forall g \in SO(3)$，总存在一个矢量$\vec{k}$，使得：

$$g\vec{k} = \vec{k}$$

Proof：证明矢量$\vec{k}$的存在：

即证明：$(g-E)\vec{k} = 0$ 有解存在．

$\det(g-E) = 0$ $\quad O(3) \quad \det(g)=0$

因 $\det(g-E) = \det(g - gg^T) = \det[g(E-g^T)] = \det[E-g^T] = \det[E-g]$

$= (-1)^3\det[g-E] = -\det[g-E]$

故 $\det(g-E) = 0$

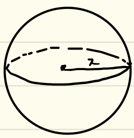
注：SO(n) n为偶数时该定理不成立．

因此总存在满足条件的矢量$\vec{k}$

该定理表明：SO(3)中的任意元素g都可表为绕某一转动轴k转动ω的操作：$g_k = C_k(\omega)$

常用k的方位角θ,φ来标记$\vec{k}$，$\vec{k} = \vec{k}(\theta, \varphi)$

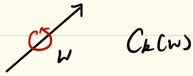
$0 \le \theta \le \pi$， $0 \le \varphi \le 2\pi$， $0 \le \omega \le \pi$



三个参数组成一个半径为π的球

球内不同的点，代表不同的操作，球面上中心对称的点是相同的操作．

转动轴和ω的关系如下图所示：



需要注意的是，以上讨论都是在R^3空间中，在高维空间中，通常不讨论"转动轴"的概念，这时转动轴已不是基本概念，一般讨论在哪个平面转动：在R^3空间中，绕z轴转动即在xy平面内转动：

$$C_k(w) = \begin{bmatrix} \cos w & -\sin w & \\ \sin w & \cos w & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

5. SO(3)群的共轭类：

对于 $\forall f = C_k(w) \in SO(3)$，与f共轭的元素为：

$$\boxed{g C_k(w) g^{-1}}$$

该元素：$(g C_k(w) g^{-1})(gk) = gk$

故共轭元素 $g C_k(w) g^{-1}$ 的转动轴是 gk，

可把共轭元素记为：

$$g C_k(w) g^{-1} = C_{gk}(w')$$

可以证明（作业）：

$$w = w'$$

提示：转动矩阵的迹给出转动角度的一个单调函数 $2\cos w+1$ 定值

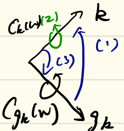
因此：SO(3)群中，转动角度相同的元素在同一类中.

若 $f C_{k_1}(w) f^{-1} = C_{k_2}(w)$

则 $f k_1 = k_2 \longrightarrow$ 知道k_1、k_2可求f

也可以理解为：将 $C_{k_2}(w)$ 分解为3个步骤.

$$C_{gk}(w) = g C_k(w) g^{-1}$$



由此可见：SO(3)的有限群G中两个群元 $C_{k_1}(w_1)$ 和 $C_{k_2}(w_2)$ 的共轭有以下条件

(1) 转动角相同

(2) $\exists g \in G$，使得 $k_2 = g k_1$

D_n群类的个数.

例1：n阶循环群：$C_n = \{C_n, C_n^2, \cdots, e\}$

$C_n = C_k(\frac{2\pi}{n})$，转动轴不变的情况下，每一个元素对应的转动角度都不同.

$$C_n^{n-1} = C_{\vec k}\left(\frac{2\pi}{n}(n-1)\right) = C_{-\vec k}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

但是C_n群中不存在一个群元将$\vec k$变换到$-\vec k$，综上可知，C_n群每个元素自成一类。

例2. D_3群：$D_3=\{e, d, f, a, b, c\}$

$$d = C_{\vec k}\left(\tfrac{2}{3}\pi\right) \qquad f = C_{\vec k}\left(\tfrac{4}{3}\pi\right) = C_{-\vec k}\left(\tfrac{2}{3}\pi\right) \qquad \vec k \xrightarrow{a,b,c} -\vec k$$

所以，d, f在同一个类中，同理可证 a, b, c 在同一个类中。

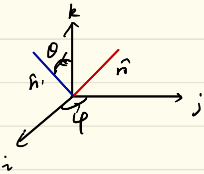
例3. D_4群 $\{\sigma_x, \sigma_y\}$, $\{\sigma_1, \sigma_2\}$, $\{C_4, C_4^3\}$ $\{C_4^2\}$ $\{e\}$

作业：求D_n群的类的个数。$\frac{n}{2}+3$ / $\frac{n+3}{2}$

下面讨论三维欧氏空间中绕任意转动轴的转动：

$$C_{\vec k}(\omega) = \begin{bmatrix} \cos\omega & -\sin\omega & \\ \sin\omega & \cos\omega & \\ & & 1 \end{bmatrix} \qquad C_{\vec j}(\omega) = \begin{bmatrix} \cos\omega & & \sin\omega \\ & 1 & \\ -\sin\omega & & \cos\omega \end{bmatrix} \qquad C_{\vec i}(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \cos\omega & -\sin\omega \\ & \sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix}$$

为了方便起见，我们使用球坐标系 $C_{\hat n(\theta,\varphi)}(\omega)$，$\hat n(\theta,\varphi)$是转动轴，$\theta, \varphi$是极角和方位角。



可以找到一个角度变换：

$$\hat n = g\vec k \qquad C_{\hat n(\theta,\varphi)} = g\, C_{\vec k}(\omega)\, g^{-1}$$

由上图，先把$\vec k$转到$\hat n'$，再把$\hat n'$转到$\hat n$

$$\vec k \xrightarrow{C_{\vec j}(\theta)} \hat n' \qquad \hat n' \xrightarrow{C_{\vec k}(\varphi)} \hat n$$

因此 $g = C_{\vec k}(\varphi)\, C_{\vec j}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & \\ \sin\varphi & \cos\varphi & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & & \sin\theta \\ & 1 & \\ -\sin\theta & & \cos\theta \end{bmatrix} = S(\varphi, \theta)$

$S(\varphi,\theta)\vec k = \hat n$

$$S\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}$$

从而得到$C_{\hat n(\theta,\varphi)}(\omega)$的明确表达式：

$$C_{\hat n(\theta,\varphi)}(\omega) = S(\varphi,\theta)\, C_{\vec k}(\omega)\, S(\varphi,\theta)^{-1}$$

6. $C_{\hat n(\theta,\varphi)}(\omega)$的指数表示：

引入Pauli矩阵。

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

加上单位矩阵E，作为2×2厄米矩阵构成的复Hilbert空间四个基矢.

Pauli矩阵的特点：

(1) $Tr\,\sigma_i = 0$ （无迹），$\det \sigma_i = -1$

(2) $\sigma_i \sigma_j = E\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$

(3) $Tr(\sigma_i\sigma_j) = 2\delta_{ij}$

我们知道：$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$，规定 $A^0 = E$

如果将 $e^{-iw\sigma_2}$ 按级数展开：

$$e^{-iw\sigma_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-iw\sigma_2)^n$$

$$= E\left(1 - \frac{w^2}{2!} + \frac{w^4}{4!} - \cdots\right) + i\sigma_2\left(-w + \frac{w^3}{3!} - \frac{w^5}{5!}\right)$$

$$= E\cos w - i\sigma_2 \sin w$$

$$= \begin{pmatrix} \cos w & -\sin w \\ \sin w & \cos w \end{pmatrix}$$

转换到3维：在Pauli矩阵的基础上补0

$$\sigma_2 \longrightarrow T_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & \\ i & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

将 e^{-iwT_3} 展开，可得：

$$e^{-iwT_3} = \begin{bmatrix} \cos w & \sin w\text{--} & \\ \sin w & \cos w & \\ & & 1 \end{bmatrix} = C_k(w)$$

同理：

$$T_2 = \begin{bmatrix} 0 & & i \\ & 0 & \\ -i & & 0 \end{bmatrix}, \quad e^{-iwT_2} = \begin{bmatrix} \cos w & 0 & \sin w \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin w & 0 & \cos w \end{bmatrix} = C_j(w)$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & -i \\ & i & 0 \end{bmatrix}, \quad e^{-iwT_1} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \cos w & -\sin w \\ & \sin w & \cos w \end{bmatrix} = C_i(w)$$

作业：证明 $e^{-iwT_1} = C_i(w)$

另外可以证明：

$$S T_3 S^{-1} = n_1 T_1 + n_2 T_2 + n_3 T_3 = \vec{n} \cdot \vec{T}$$ （作业）

前面已经提到 $C_{\vec{n}(\theta,\varphi)}(\omega) = S(\varphi,\theta) C_k(\omega) S(\varphi,\theta)^{-1}$

$$= S e^{-i\omega T_3} S^{-1}$$

$$= S\left(\sum_n \frac{(-i\omega T_3)^n}{n!}\right) S^{-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{S(-i\omega T_3) S^{-1} S(-i\omega T_3) S^{-1} S \cdots\cdots}_{n个相乘}$$

$$= e^{-i\omega S T_3 S^{-1}} = e^{-i\omega n_i T_i}$$

定义 $\omega_i = \omega n_i$ 则：

$$C_{\vec{n}(\theta,\varphi)}(\omega) = e^{-i\omega_i T_i} \qquad \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

可把 i 乘进 T_i 矩阵：$C_{\vec{n}}(\omega) = e^{\vec{\omega}\cdot\vec{I}}$

三个参数 θ, φ, ω 的取值范围上面已提过，构成一个半径为 π 的球

参数空间中每一点代表一组 $(\omega, \theta, \varphi)$ 的值 代表一个转动操作．

§3.2 点群：

1. 点群的定义：

点群：$O(3)$ 群中的有限子群称为点群．

$O(3)$ 群中既包含转动群，即 $SO(3)$ 群，也包含转动反演群．因此我们将点群划分为两类：

第一类只包含转动元素 $\det(R) = 1$

第二类点群除了转动元素还包含反演元素．$\det(R) = \pm 1$

2. 对称操作和对称元素：

在 R^3 空间中，对称操作指的是那些使系统保持不变的操作，即 $O(3)$ 的群元

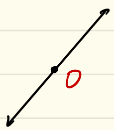
对称元素是与对称操作对应的三维空间的子集．

(1) 反演操作：

$$I = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} = -E$$

当 I 作用在三维空间上的矢量：$I\vec{r} = -\vec{r}$

反演操作的对称元素即反演中心 O



(2) 关于某一平面反射操作: $\sigma_{\vec{k}}$

反射操作对应的对称元素是对称平面.

$$\sigma_{\vec{k}}\vec{k} = -\vec{k} \qquad \sigma_{\vec{k}}\vec{r} = \vec{r}\,'$$

(3) 转动操作: $C_{\vec{n}}(\frac{2\pi}{n})$

对称元素是转动轴 $\vec{m}$

(4) 转动反演操作: $I\,C_{\vec{n}}(\frac{2\pi}{n})$

在转动基础上再进行反演操作, 对称元素是转动反演轴.

3. 第一类点群:

(1) n阶循环群: $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$

为Albel群. 每个元素自成一类, 有n个不等价不可约一维表示. $D^k(C_n^m) = e^{i\frac{2\pi}{n}km}$

(2) 二面体群: D_n (正n边形对称群) 2n阶群.

D_2群: $D_2 = \{e, C_{2z}, C_{2x}, C_{2y}\}$ 有四个群元

D_2群是Albel群.

特征标表:

	e	C_{2z}	C_{2x}	C_{2y}
D^1	1	1	1	1
D^2	1	1	-1	-1
D^3	1	-1	1	-1
D^4	1	-1	-1	1

D_6群 (正六边形对称群):

6个类: 恒元自成一类 $\{e\}$; C_6^3 自成一类 $\{C_6^3\}$

$\{C_6, C_6^5\}$, $\{C_6^2, C_6^4\}$, $\{C_2^{(1)}, C_2^{(2)}, C_2^{(3)}\}$, $\{C_2^{(2)}, C_2^{(4)}, C_2^{(6)}\}$

$H_1 = C_6$, $H_2 = \{D_3^{(1)}\}$, $H_3 = \{D_3^{(2)}\}$

加上恒等表示, 有4个一维不等价不可约表示. $1^2+1^2+1^2+1^2+2^2+2^2=12$

4个一维 2个二维

	e	$3C_2^{(1)}$	$3C_2^{(2)}$	$2C_6$	$2C_6^2$	C_6^3
D_0	1	1	1	1	1	1
D_1	1	-1	-1	1	1	1
D_2	1	1	-1	-1	1	-1
D_3	1	-1	1	-1	1	-1
D_4	2	0	0	1	-1	-2
D_5	2	0	0	-1	-1	2

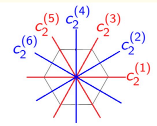
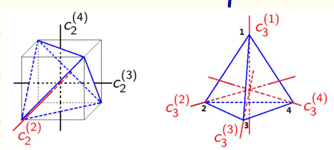


Figure 6: D_6群的c_2轴

(3) 正四面体对称群 T: (12阶群)



4个C_3轴. 4个C_3^2轴. 3个C_2轴. 恒元

$\{C_3^{(1)}, C_3^{(2)}, C_3^{(4)}, C_3^{(3)}\}\{C_3^{2(1)}, C_3^{2(2)}, C_3^{2(3)}, C_3^{2(4)}\}$

$\underbrace{\{e\}\ \{C_2^{(4)}, C_2^{(1)}, C_2^{(3)}\}}_{D_2群}$ 4个类,

$T/D_2 \cong C_3$，特征标表

	D_2	$C_3^{(1)}D_2$	$C_3^{(1)2}D_2$
E	1	1	1
E'	1	$\exp(i\frac{2}{3}\pi)$	$\exp(-\frac{2}{3}\pi)$
E''	1	$\exp(-i\frac{2}{3}\pi)$	$\exp(i\frac{2}{3})$

T群的特征标表

	e	$4C_3$	$4C_3^2$	$3C_2$
D_1	1	1	1	1
D_2	1	$\exp(i\frac{2}{3}\pi)$	$\exp(-i\frac{2}{3}\pi)$	1
D_3	1	$\exp(-i\frac{2}{3}\pi)$	$\exp(i\frac{2}{3}\pi)$	1
D_4	3	0	0	-1

§3.3 晶体点群

1.理想晶体的概念

指的是全同的结构单元在空间中无限次重复构成，其结构用晶格描述

晶构中的点可以用三个线性无关的矢量构成的基矢 $\vec{v}=(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)$ 来描述

$$\vec{r}=x_1\vec{v}_1+x_2\vec{v}_2+x_3\vec{v}_3$$

晶体点群 G，就把晶格 L 映射为自身的晶群

群元操作在晶格上，该变换即是基矢的变换

$$g:\vec{v}_i\to\vec{v}_i'=\vec{v}_k g_{ki},\quad g\in G$$

其中矩阵元 g_{ki} 必须为整数（变换后依然在晶格上），写成矩阵形式：

$$\vec{v}'=\vec{v}g,\quad (\vec{v}_1',\vec{v}_2',\vec{v}_3')=(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)g$$

2.晶体制约定理

设 L 为晶格，G 为 L 的晶体点群，则 G 的转动元素只可能由 C_2,C_3,C_4,C_6,E 生成。

转动反演元素只能由 I,IC_2,IC_3,IC_4,IC_6 生成。

证明：设 $g\in G$，则 $g:\vec{v}\to\vec{v}'=\vec{v}g$，$\vec{v}_i'=\vec{v}_k g_{ki}$，$g_{ki}$ 为整数。

$\mathrm{Tr}\,g=g_{ii}$，只能是整数。

$g\in O(3)$，故 $\mathrm{Tr}(g)=\mathrm{Tr}(C_k(\omega))$ 或 $\mathrm{Tr}(IC_k(\omega))=\pm(2\cos\omega+1)$

$=0,\pm1,\pm2,\pm3$

对应转动转动反演元素 $\cos\omega=0,\pm\frac{1}{2},\pm1$

3. 32种晶体点群:

在第一类点群加上晶体制约定理和适当的转动反演

第一类晶体点群有11种:

$C_1, C_2, C_3, C_4, C_6, D_2, D_3, D_4, D_6, T, O$

第二类晶体点群有21种.

1. C_{nh}群 $(n=1,2,3,4,6)$

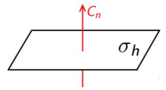


Figure: C_{nh}群

由C_n与水平镜面$\sigma_h = IC_2$生成，包含n个转动和n个转动反演.

生成元对易.

$$C_2 \otimes C_i \quad \| $$

$$C_{1h} = \{E, \sigma_h\} = \{E, IC_2\}$$

$$C_{2h} = \{E, C_2, \sigma_h, C_2\sigma_h\} = \{E, C_2\} \otimes \{E, \sigma_h\} = C_2 \otimes C_{1h} = \{E, C_2\} \otimes \{E, I\}$$

$$C_{3h} = \{E, C_3, C_3^2, \sigma_h, C_3\sigma_h, C_3^2\sigma_h\} = C_3 \otimes C_{1h} \neq C_3 \otimes C_i$$

$$C_{4h} = C_4 \otimes C_{1h} = C_4 \times C_i, \quad C_6 = C_6 \otimes C_{1h} = C_6 \otimes C_i$$

2. C_{nv}群 $(n=2,3,4,6)$ 由C_n与过此轴的垂直镜面σ_v生成，为$2n$阶群.

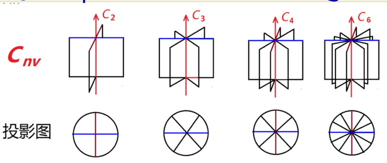


Figure: C_{nv}

$$C_{1v} \cong C_{1h}$$

$$C_{2v} = \{E, C_2, \sigma_v, C_2\sigma_v\} = C_2 \otimes C_{1v}$$

3. S_{2n}群 $(n=2,4,6)$: 仅包含偶数阶转动反演，是$2n$阶群.

$$S_m \equiv S_k\left(\frac{2\pi}{m}\right) = \sigma_h C_m = \sigma_h C_k\left(\frac{2\pi}{m}\right) = IC_2 C_k\left(\frac{2\pi}{m}\right) = IC_k\left(\frac{2\pi}{m} + \pi\right)$$

从而有 $S_{2n} = \sigma_h C_{2n} = IC_2 C_{2n} = IC_{2n}^{n+1}$

S_2: $S_2 = IC_2^2 = I$ $\quad S_2 = \{E, I\}$ 为空间反演群.

S_4: $S_4 = IC_4^3$ $\quad S_4 = \{E, IC_4, C_4^2, IC_4^3\}$

S_6: $S_6 = IC_6^4 = IC_3^2$ $\quad S_6 = \{E, C_3, C_3^2, I, IC_3, IC_3^2\} = C_3 \otimes C_i$

4. D_{nh}群 $(n=2,3,4,6)$