

流形微分几何学习笔记

内容主要来自于侯伯元 侯伯宇先生所著《物理学家用微分几何（第二版）》

陈炎柯

兰州大学

萃英学院

2016 级物理萃英班

E-mail: chenyk16@lzu.edu.cn

chenyanke@stu.pku.edu.cn

Contents

I	流形微分几何	1
1	流形、微分流形与微分形式	1
1.1	流形、流形的拓扑结构	1
1.2	微分流形、流形的微分结构	2
1.3	切空间与切向量场	3
1.4	余切向量场	4
1.5	张量积、流形上的高阶向量场	6
1.6	Cartan 外积与外微分、微分形式	8
1.7	流形的定向、流形上积分与 Stokes 公式	12
2	流形变换及其可积性、李群变换及李群流形	14
2.1	流形间映射及其诱导映射、正则子流形	14
2.2	局域单参数李变换群、李导数	16
2.3	积分子流形、Frobenius 定理	19
2.4	用微分形式表达的 Frobenius 定理、微分方程的可积条件	20
2.5	李群流形	22
2.6	李变换群、齐性 G 流形	23
2.7	不变向量场、李代数、指数映射	24
3	仿射联络流形	28
3.1	活动坐标架法流形切丛与标架丛	28
3.2	仿射联络与协变微分	29
3.3	曲率形式与曲率张量	31
3.4	测地线方程切丛联络的挠率张量	32
3.5	协变外微分算子	35
4	黎曼流形	37
4.1	黎曼度规与黎曼联络	37
4.2	黎曼流形上微分形式	38
4.3	黎曼曲率张量	39
4.4	等长变换和共形变换 曲率张量的分解	40
4.5	截面曲率 等曲率空间	42
4.6	爱因斯坦引力场方程	42
4.7	测地线 Jacobi 方程	43

5	欧空间中的黎曼子流形	44
5.1	黎曼流形的子流形	44
5.2	欧空间的子流形 正交活动标价法	45
5.3	三维欧空间中的曲线和曲面	47
5.4	用 Cartan 活动标架法计算黎曼曲率	50
5.5	测地线与局域法坐标系	50
6	齐性黎曼流形 对称空间	53
6.1	李群的黎曼几何结构	53
6.2	齐性黎曼流形	54
6.3	对称空间与局域对称空间	56
6.4	对称空间的代数结构	58

流形微分几何

1 流形、微分流形与微分形式

1871 年 Klein 对几何学及其分类做出定义: 存在一个集合 E 及作用在此集合 E 上的变换群 G , 几何就是研究在变换群 G 作用下, 空间 E 的不变性质。比如在欧式几何中, 认为可通过欧氏运动 (不改变两点间欧氏距离的运动) 变得完全重合的两图形相同。微分几何时研究微分流形在同胚变换下的不变性质。

1.1 流形、流形的拓扑结构

物理上会研究很多有确定维数的连续空间, 如普通时空、相空间、规范理论中的内部空间和底空间等。为研究它们, 提出**流形 (manifold)** 概念。首先有几个重要定义:

Definition 1.1. 流形间连续映射 $f: M \rightarrow N$, 如它满足 N 中任意开集的逆像是 M 中的开集, 则此映射为连续映射, 此定义要求保持图形各点的邻近性。

Definition 1.2. 同胚映射 (homeomorphic mapping): 1-1 对应的连续满映射, 且其逆映射也是连续的。即在保持图形各点邻近性的基础上, 进一步要求任两不同点仍映射为不同点。

Definition 1.3. 拓扑性质: 在同胚映射下保持不变的性质, 如开集、收敛序列、紧致性、分离性、连通性等。

Definition 1.4. Hausdorff 空间: 一个空间中, 任意不同两点之间均有不相交的开邻域。该定义是为了强调流形的可分性, 使连接任意两点的连线可无限再分, 即存在开集 U_α, U_β , 使得:

$$a \in U_\alpha, \quad b \in U_\beta, \quad U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$$

Definition 1.5. 实 (复) n 维流形 是这样一个 Hausdorff 空间, 它的每点有开邻域与 $\mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$ 的开集同胚。可想象成流形用橡皮泥做成, 可任意拉伸、弯曲, 但不可撕裂 (一分为二) 或把不同点粘在一起 (合二为一)。

下面举几个例子说明流形的概念:

Example.

1. 如 **Figure 1.1** 中所画的一维图形都不是流形, 它们在结点处的开邻域不与 \mathbb{R}^1 的开集同胚。

2. E^3 中锥面

$$M = \{(x, y, z) \in E^3 | x^2 - y^2 - z^2 = 0\}$$

不是流形, 因为其在原点邻域不与 \mathbb{R}^2 同胚。但如果限制为: $x \geq 0$, 则描述的半个锥面为二维流形。

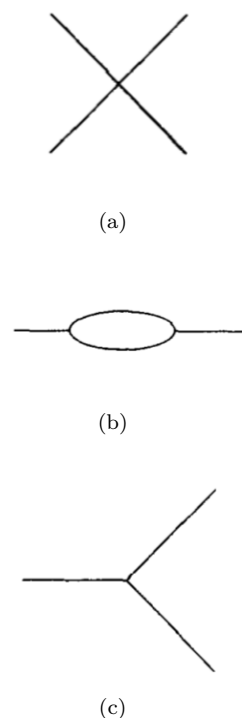


Figure 1.1: 不是一维流形的图形

1.2 微分流形、流形的微分结构

为了对流形上的函数及流形上的张量场进行微分运算，常可以对流形引入坐标系。可以使用流形 M 中任意一点的邻域与 \mathbb{R}^n 的同胚映射来引入局域坐标系，令 φ 为相应的同胚映射：

$$\varphi : U \rightarrow V = \varphi(U)$$

则流形 M 上点 $p \in U$ 的像 $\varphi(p)$ 在 \mathbb{R}^n 中的坐标 (x_1, \dots, x_n) 就叫做 p 点的坐标。这种映射关系 (U, φ) 称为流形 M 上的**局域坐标系**，或者简称**坐标卡 (chart)**。

流形的局域可以使用坐标刻画，同时又随时可以变换坐标。流形某一部局坐标系本身没有几何意义，我们主要研究与坐标变换无关的不变量。

一般而言，无法将整个流形 M 与 \mathbb{R}^n 的开集同胚，需要若干个开集 $\{U_\alpha\}$ 将整个流形覆盖。

$$\bigcup_{\alpha} U_{\alpha} = M$$

开集族 $\{U_\alpha\}$ 称为流形的**开覆盖**。所有坐标卡的集合：

$$\mathcal{A} = \{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$$

称为流形的**坐标卡集 (atlas)**。若开覆盖中有两个开集 U_α, U_β 间， $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ，如 Figure 1.2 所示，则相应的两个坐标卡间还应满足相容条件。 $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ 将交叠区 $U_\alpha \cap U_\beta$ 映射到 \mathbb{R}^n 的两个非空开集，这两个开集间映射相当于流形上的坐标变换：

$$\begin{aligned} f &= \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \\ x^i &\mapsto y^i = f^i(x) \end{aligned}$$

$f^i(x)$ 是 \mathbb{R}^n 空间开集上的 n 个实连续函数，为了能在流形上建立分析运算，要求上述坐标变换是可微的，若上述 n 个连续实函数存在 k 阶连续偏导数，则映射 f 属于 C^k 类，且称这两个坐标卡为 C^k 相容。

当流形 M 上的坐标卡集 $\mathcal{A} = \{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ 满足以下三个条件时，称其为流形 M 的 C^k **微分结构 (differentiable structure)**¹：

1. $\{U_\alpha\}$ 为流形 M 的开覆盖。
2. \mathcal{A} 中任意两个坐标卡都是 C^k 相容。
3. \mathcal{A} 为满足以上两个条件的最大坐标卡集。 \mathcal{A} 中仅满足前两个条件的集合，称为 C^k 微分结构中的一个基，或称为 C^k 坐标卡集。

流形的微分结构是很重要的概念，它表明了流形开覆盖中各开集是如何连接在一起的，表明了流形的整体光滑程度。流形 M 中两个坐标卡集， $\mathcal{A} = \{U_\alpha, \varphi_\alpha\}, \mathcal{A}' = \{U_\beta, \varphi_\beta\}$ ，如果两者并集仍为 C^k 坐标卡集，则称这两个坐标卡集**等价**。每一个 C^k 坐标卡集都包含在一个**唯一的 C^k 微分结构中**，所以构造流形的微分结构时，只要指出它的一个 C^k 相容的坐标卡集就行了。

具有 C^k 微分结构的拓扑流形 M ，称为 C^k 流形。当流形 M 上给定了一个 C^∞ 微分结构，则称流形 M 为光滑流形，或称为**微分流形 (differentiable manifold)**

对于微分流形，可分析其上函数的可微性，定义在流形 M 上的实函数 f 如 Figure 1.3 所示，为：

$$\begin{aligned} f &: M \rightarrow \mathbb{R} \\ M \ni p &\mapsto f(p) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

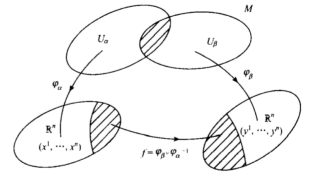


Figure 1.2: 流形的两个有交叠的坐标卡

¹ 或者称为完备的 C^k 相容坐标卡集

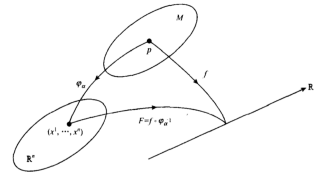


Figure 1.3: 流形上的函数

再设 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 是 p 点容许的一个坐标卡, 则 $F = f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 为定义在 \mathbb{R}^n 开集上的实函数。**函数 f 的可微性与允许坐标卡的选取无关。**

类似的可以分析微分流形间连续映射的可微性。设 f 为从 m 维流形 M 到 n 维流形 N 上的连续映射, 如 **Figure 1.4**所示:

$$\begin{aligned} f: M &\rightarrow N \\ M \ni p &\mapsto f(p) \in N \end{aligned}$$

则存在函数:

$$F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}: x \mapsto y = F(x)$$

$F(x)$ 的可微性决定了映射 f 的可微性, 以后为简单起见, 不区分 f 与 F , p 与其坐标 x , 认为 $f(p)$ 和 $F(x)$ 含义相同。当 M 与 N 具有相同维数, 且映射 f 是可微的同胚映射时, 则称这两个流形为**微分同胚 (diffeomorphism)**。

拓扑是研究连续性的最自然的数学结构, 所有拓扑空间按照是否为同胚分为不同等价类, 而流形的微分结构是研究可微性最自然的数学结构, 同胚的流形按照其是否微分同胚又可进一步分类, 可以说微分结构有独立于拓扑结构的意义。**对于一个可微流形, 如何确定其上的微分结构, 是微分几何最重要最困难的问题之一。**

1.3 切空间与切向量场

对于一个微分流形 M , 在每点附近的性质可以用线性空间 (切空间) 来逼近。切空间由流形 M 中 p 点沿某确定方向上的切向量组成, 切向量可实质的定义, 与该点邻域坐标卡的选择无关。

首先在流形 M 上作一条通过 p 点的光滑曲线 $x(t)$, 利用此曲线来选出过 p 点的一个确定方向。光滑曲线 $x(t)$ 就相当于实轴上的线段 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 到流形 M 上的可微映射。选择 $t = 0$ 点对应 $x(0) = p$ 点, 对于流形 M 上任意可微函数 $f \in \mathcal{F}_p(M)$, 可得到参数 t 的可微函数 $f(x(t))$, 此函数在 p 点曲线改变速度可表示为:

$$X_p f = \left. \frac{d}{dt} f(x(t)) \right|_{t=0}$$

可将作用在流形任意函数上的线性微分算子 X 定义为切于曲线 $x(t)$ 的切向量, 实际上就是 \mathbb{R}^n 空间中方向导数在流形上的推广。在 p 点邻域选择局部坐标系 $x = (x^1, \dots, x^n)$, 上式可表示为:

$$X_p f = \sum_{i=1}^n \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} f \bigg|_p \quad (1.1)$$

由上式可知, 过 X_p 是 $\{\partial_j\}$ 的线性组合, 集合 $\{\partial_j\}$ 称为切向量 X_p 的基矢, dx^j/dt 表明了切向量的分量, 注意**切向量本身与坐标系的选取无关, 但是其分量和坐标系的选取是有关的**。切矢 X_p 对流形上任意函数 $f(x(t))$ 的作用 $Xf|_p$ 的作用就是 f 在点 p 沿着 $x(t)$ 方向的导数。过 p 点所有切向量的集合形成 M 在 p 点的切空间 $T_p(M)$, 且可证明如下定理:

Theorem 1.1. n 维流形 M 在 p 点的切空间 $T_p(M)$ 为实数域上的 n 维线性空间, 当选取局与坐标系后, 基矢 $\{\partial_i\}$ 线性独立且完备。

流形上所有各点切空间的并集

$$T(M) = \bigcup_p T_p(M)$$

称为流形的切丛。在同一点的切向量可以相加, 但不同点的切向量没有关系。切丛的示意图如 **Figure 1.6**所示。流形 M 上每一单有一 n 维切空间, 可用直线表示, 不同点的切空

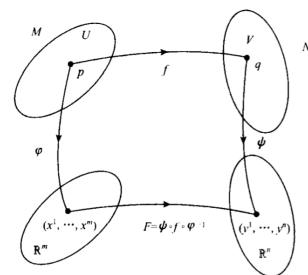


Figure 1.4: 流形间的映射

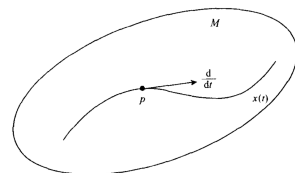


Figure 1.5: 利用曲线选出确定的方向

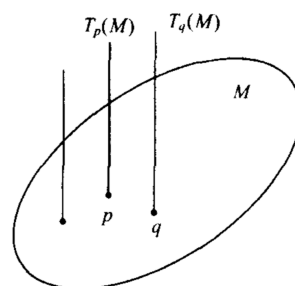


Figure 1.6: 切丛的示意图

间无关, 可用平行直线表示。切丛是 $2n$ 维流形, 在点 p 邻域切丛局域同构与直积流形:

$$T(U) = \bigcup_{p \in U} T_p(M) \simeq U \times \mathbb{R}^n$$

但在整体上切丛不是一个平庸的直积流形。

向量场 $X(x)$ 是流形上切丛 $T(M)$ 的一个截面, 按照一定规则在每点给出一个切向量, 在选取局与坐标系后, 切向量场可表示为:

$$X(x) = \sum_{j=1}^n \xi^j(x) \partial_j \quad (1.2)$$

如果函数 ξ^j 连续、可微, 则称切向量场 $X(x)$ 连续、可微。向量场 $X(x)$ 也可以看作是作用在 \mathcal{F} 上的线性微分算子, 满足线性和 Leibniz 运算法则。

令 $\mathcal{X}(M)$ 为 M 上所有可微向量场集合, 可在其中定义向量场的加法、数乘法, 形成实数域上的无穷维线性空间。进一步可在集合内部定义李括号运算, 形成实数域上的无穷维李代数。

$$X(x) = \sum_{j=1}^n \xi^j(x) \partial_j, \quad Y(x) = \sum_{j=1}^n \eta^j(x) \partial_j \quad (1.3a)$$

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf) = \left(\xi^j \frac{\partial \eta^k}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} \right) \partial_k f \longrightarrow [X, Y] \in \mathcal{X}(M) \quad (1.3b)$$

进一步注意到切场 X 不仅可以与实数相乘, 也可与 M 上任意可微函数相乘, fX 仍为切场。在选定局域坐标卡后, 切场 $X \in \mathcal{X}(M)$ 可表示为:

$$X = \sum_{j=1}^n \xi^j(x) \partial_j, \quad \xi^j(x) \in \mathcal{F}(M)$$

故向量场集合 \mathcal{X} 形成 n 秩 \mathcal{F} 模 (module)。

1.4 余切向量场

任意 n 维向量空间 V , 可利用它对实数的同态线性映射 (实线性函数) 的集合

$$\text{Hom}(V, \mathbb{R}) : V \rightarrow \mathbb{R}$$

得到 V 的**线性对偶空间** V^* , 线性函数之间相加或者线性函数的数乘仍为线型函数, 即 V^* 也是一 n 维向量空间, 称为 V 的对偶空间, 且空间 V, V^* 互为对偶。

对流形 M 过 p 点的切向量空间 $T_p(M)$ 也可类似得定义对偶空间

$$T_p^*(M) = \text{Hom}(T_p(M), \mathbb{R}) : T_p(M) \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.4)$$

其中任意元素 σ_p 称为在 p 点的余切向量。 σ_p 为一线性映射, 使得任意切向量 X_p 映射为数

$$\sigma_p : X_p \mapsto \sigma_p(X_p) \equiv \langle \sigma_p, X_p \rangle \in \mathbb{R} \quad (1.5)$$

σ_p 为线性映射, 保持向量空间的线性结构。所有余切向量的集合 $\{\sigma_p\}$ 形成线性空间, 称为与 $T_p(M)$ 对偶的、流形 M 上 p 点处的**余切向量空间** $T_p^*(M) = \text{Hom}(T_p(M), \mathbb{R})$, 它也是 n 维向量空间, 流形 M 上所有余切向量空间的并集:

$$T^*(M) = \bigcup_p T_p^*(M)$$

称为流形 M 的**余切丛**。余切丛是个 $2n$ 维流形，余切场 σ 为余切丛上的截面，按照一定规则在每点给出一个余切向量。

为选出在点 p 处与切空间对偶的一个余切矢量，可选函数 $f \in \mathcal{F}_p(M)/S_p$ ，即任选一非平稳函数，而定义满足下述条件的映射为 df :

$$\begin{aligned} df : T_p(M) &\rightarrow \mathbb{R} \\ X_p &\mapsto Xf|_p \end{aligned}$$

可记为²:

$$\langle df, X \rangle = Xf \in \mathcal{F}(M) \quad (1.6)$$

² 此即函数全微分 df 沿着切场 X 方向的投射

余切矢量 df 可以称为函数 f 的全微分，它映射 $T_p(M)$ 中任意元素为一实数，选取局域坐标后，切空间选取自然基 $\{\partial_i\}$ ，可选余切空间的基为 $\{dx^i\}$ ，这组基底相互独立、完备，共有 n 个，且

$$\langle dx^i, \partial_i \rangle = \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \delta_i^j \quad (1.7)$$

而函数 f 的全微分可以表示为:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \quad (1.8)$$

df 是一个特殊的余切场，流形上任意余切场可用局域坐标系表示为:

$$\sigma(x) = \sigma_i(x) dx^i, \quad \sigma_i(x) \in \mathcal{F}(M) \quad (1.9)$$

当 $\sigma_i(x)$ 是可微的，则称 $\sigma(x)$ 为可微的余切场，可微余切向量场又称为 **Pfaff 形式或线性微分形式 (1 form)**，它与向量场 $X(x) = \xi^j(x) \partial_j$ 对偶，它将 $X(x)$ 映射到 $\mathcal{F}(M)$:

$$\langle \sigma(x), X(x) \rangle = \sigma_i(x) \xi^j(x) \langle dx^i, \partial_j \rangle = \sigma_i(x) \xi^i(x) \in \mathcal{F}(M) \quad (1.10)$$

令 $\Lambda^1(M)$ 为流形 M 上余切场的集合，类似的，此集合为实数域上的无穷维向量空间。

$$T_p^*(M) = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(T_p(M), \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n \quad (1.11a)$$

$$\Lambda^1(M) = \text{Hom}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X}(M), \mathcal{F}(M)) \quad (1.11b)$$

$\Lambda^1(M)$ 仍为 n 秩 \mathcal{F} 模³。

³ 附带指出，余切空间是切空间的对偶空间，都为 n 维线性空间，从代数结构上来看，两者相同，但是在流形上，切向量场和余切向量场性质不一样，在后面我们会看到这点

流形上的切向场和余切向量场都是流形上的几何量，在坐标系变换下不改变，但是选取局域坐标系后相应的分量会改变。例如做一般的坐标变换:

$$x^i \rightarrow x'^i(x)$$

对于切场和余切场:

$$X(x) = \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} = \xi'^i(x') \frac{\partial}{\partial x'^i}, \quad \sigma(x) = \sigma_i(x') dx^i = \sigma'_i(x) dx'^i \quad (1.12)$$

使得切场分量和余切场分量的变换为:

$$\xi'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \xi^k, \quad \sigma'_i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \sigma_k \quad (1.13)$$

基矢组 $\{\partial_i\}, \{dx^i\}$ 称为**自然标价**，有时采用**活动标架**更为方便。选取 $e_a^i(x) \in \mathcal{F}(M)$ 组成非奇异矩阵:

$$e_a(x) = e_a^i(x) \partial_i, \quad \vartheta^a = (e^{-1})_i^a dx^i \equiv \vartheta_i^a dx^i \quad (1.14)$$

切基矢组保持对偶性:

$$\langle \vartheta^a, e_b \rangle = \delta_b^a \quad (1.15)$$

选取活动标架时, 切场和余切场的分量为:

$$\xi^a = \langle \vartheta^a, X \rangle = \vartheta_j^a \xi^j, \quad \sigma_a = \langle \sigma, e_a \rangle = e_a^i \sigma_i \quad (1.16)$$

当做线性变换时, 变换矩阵 $L(x) = (L_b^a(x))$ 为非奇异矩阵:

$$e'_a = L_a^b e_b, \quad \vartheta'^a = (L^{-1})_b^a \vartheta^b \quad (1.17)$$

切场和余切场的分量变换为:

$$\xi'^a = (L^{-1})_b^a \xi^b, \quad \sigma'_a = L_a^b \sigma_b \quad (1.18)$$

Example.

一个质点力学中的例子来简单说明切场和余切场在物理中的应用。质点运动轨道参数可选为时间 t , 沿轨道的切矢量为:

$$V = \frac{d}{dt} = \frac{dx^i}{dt} \partial_i \quad (1.19)$$

此即速度矢量, 在选定坐标系后, 其分量为 dx^i/dt 。另一方面, 为分析质点运动的动力学性质, 可引入作用量 S , 将它看作全空间的函数:

$$dS = p_i dx^i \quad (1.20)$$

即动量分量可看成余切向量场的分量。**拉氏量是坐标与速度的函数, 即是切丛上的函数, 哈密顿量应表为坐标和动量的函数, 即是余切丛上的函数。**经典力学中定义的 Poisson 括号与选择的坐标系无关, 保持 Poisson 括号不变的余切丛间微分同胚变换称为正则变换。

1.5 张量积、流形上的高阶向量场

这节我们讨论流形上的高阶张量场, 首先我们要区分两线性空间的**张量积** $V \otimes W$ 和**笛卡尔积 (Cartesian product)** $V \times W$ 。

两线性空间的笛卡尔积 $V \times W$ 是 $m+n$ 维线性空间, 其元素可表示为:

$$(a, b) \in V \times W, \quad a \in V, \quad b \in W$$

下面讨论 $V \times W$ 上双线性函数集合, 记为 $\text{Hom}(V \times W, \mathbb{R})$, 对于该集合中的任意元素 h 对 $V \times W$ 中任意元素的作用为:

$$\langle h; a, b \rangle \equiv h(a, b) \in \mathbb{R}$$

很容易得到集合 $\text{Hom}(V \times W, \mathbb{R})$ 仍构成实数域上的线性空间, 称为 V^*, W^* 的张量积空间 $V^* \otimes W^*$ 。对于 $V \times W$ 中的元素

$$(a, b) = (a^1, \dots, a^m, b^1, \dots, b^n) \in V \times W$$

对偶空间 V^*, W^* 中选取对偶基应满足:

$$\vartheta^i(a) = \vartheta^i(a^j e_j) = a^j \delta_j^i = a^i, \quad \sigma^j(b) = \sigma^j(b^k f_k) = b^j$$

双线性函数 h 对 (a, b) 的作用可表示为:

$$\langle h; a, b \rangle = a^i b^j \langle h; e_i, f_j \rangle = a^i b^j h_{ij}$$

$m \times n$ 个实数 h_{ij} 完全确定, 可将上式表示为:

$$h = \sum_{ij} h_{ij} \vartheta^i \otimes \sigma^j$$

$$\langle \vartheta \otimes \sigma; a, b \rangle = \vartheta^i(a) \sigma^j(b) = a^i b^j$$

集合 $\vartheta^i \otimes \sigma^j$ 组成线性空间 $V^* \otimes W^*$ 的一组基矢, $V^* \otimes W^*$ 是实数域上的 $m \times n$ 维线性空间。类似得, 有:

$$V \otimes W = \text{Hom}(V^* \times W^*, \mathbb{R})$$

为实数域上 $m \times n$ 维线性空间。

下面我们要结合流形讨论切空间和余切空间的多重张量积形成的线性空间。 r 阶逆变张量空间 $T^r(p)$ 可以采取以下三种等价定义:

1. $T^r(p) = T_p(M) \otimes \cdots \otimes T_p(M)$, 可选择基底

$$\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r}\}, \quad i_1, \cdots, i_r = 1, \cdots, n$$

共有 n^r 个基底, 任意元素可以表示为

$$K = K^{i_1 \cdots i_r} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \quad (1.21)$$

2. 利用坐标变换下各张量分量的变换性质来定义, 当坐标基矢按照 $e'_i = L^j_i e_j$ 变化时, K 的各分量按照如下形式变换:

$$K'^{i_1 \cdots i_r} = (L^{-1})^{i_1}_{j_1} \cdots (L^{-1})^{i_r}_{j_r} K^{j_1 \cdots j_r}$$

具有上述性质的 n^r 个实数集合, 称为 r 阶逆变张量, 这 n^r 个实数称为该张量的分量。

3. $T^r(p)$ 为余切空间上 r 重线性函数的集合

$$T^r(p) = \text{Hom}(T^*(p), \cdots, T^*(p); \mathbb{R})$$

其成员 K 为 r 重线性映射, 若在余切空间选定基矢 $\{\vartheta^i\}$ 则

$$K(\vartheta^{i_1}, \cdots, \vartheta^{i_r}) = K^{i_1 \cdots i_r}, \quad K = K^{i_1 \cdots i_r} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \quad (1.22)$$

上述三种定义是完全等价的。类似的可以定义 s 阶协变张量空间 $T_s(p)$, 也有类似的三种等价定义, 这里只给出一种:

$$T_s(p) = T_p^*(M) \otimes \cdots \otimes T_p^*(M) = \text{Hom}(T_p(M), \cdots, T_p(M); \mathbb{R}) \quad (1.23)$$

并且可定义张量 $T^r_s(p) = T^r(p) \otimes T_s(p)$, 它是 n^{r+s} 阶线性空间。同型张量之间可以定义数乘和相加, 形成线性空间, 即张量空间⁴, 同时还可以定义张量间的直乘和指标的**缩并**(**contraction**) 运算。

考虑所有不同类型的张量的直和

$$T(p) = \sum_{r,s=0}^{\infty} T^r_s(p) \quad (1.24)$$

⁴ 张量空间也可以看作是向量空间上多重线性映射组成的线性空间, 有些不同的线性映射可以组成同构的张量空间。

$T(p)$ 构成无穷维线性空间, 并且存在张量直积运算, 构成可结合代数, 称为张量代数。张量直积运算和张量缩并运算均与坐标基矢的选取无关

在流形上各点张量空间 $T_s^r(p)$ 的并集

$$T_s^r(M) = \bigcup_p T_s^r(p) \quad (1.25)$$

称为流形 M 上的 (r, s) 型张量丛。 (r, s) 型张量场 $K(x)$ 是张量丛 $T_s^r(M)$ 的一个截面, 按一定规则在流形 M 上 p 点的邻域选出一个张量, 选取自然标价时:

$$K(x) = K_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(x) \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s} \quad (1.26)$$

其中若函数 $K_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(x)$ 为 C^l 类, 则称张量场为 C^l 类, 若 $l = \infty$, 则称张量场为光滑张量场。张量场的可微性与局域坐标系的选取无关。

1.6 Cartan 外积与外微分、微分形式

可以利用因子空间的对称化和反对称化算子, 将流形上的张量空间分解为具有特殊对称类型张量的不变子空间的直和。引入 r 个对象的置换群 $P(r)$, 其中任意元素 $\sigma \in P(r)$ 决定了 r 置张量空间 T^r 的一个自同态, 相当于张量的各因子空间的一个置换, 使 T^r 中任意张量转变为 σK

$$\sigma K(\vartheta^{i_1}, \dots, \vartheta^{i_r}) = K(\vartheta^{i_{\sigma_1}}, \dots, \vartheta^{i_{\sigma_r}}), \quad \text{or} \quad (\sigma K)^{i_1 \dots i_r} = K^{i_{\sigma_1} \dots i_{\sigma_r}} \quad (1.27)$$

由此引入对称化算子 S 和反对称化算子 A :

$$S_r = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in P(r)} \sigma \quad (1.28a)$$

$$A_r = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in P(r)} \text{sign}(\sigma) \sigma \quad (1.28b)$$

S, A 为相互正交的投影算子, 利用它们可将 r 秩逆变张量空间 T^r 分解为相互正交的线性子空间的之和。张量的对称类型与坐标系的选择无关。

下面主要讨论完全反对称协变张量场, 称为微分形式 (differential form)。 r 秩完全反对称协变张量场称为 r 形式, 所有 r 形式的集合组成线性空间, 记为 Λ^r , 且令 Λ^1 为余切向量场空间, 又称为 1 形式空间, 0 形式即流形上的可微函数。引入推广的 δ 符号:

$$\delta_{k_1 \dots k_r}^{i_1 \dots i_r} = \begin{vmatrix} \delta_{k_1}^{i_1} & \dots & \delta_{k_r}^{i_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_{k_1}^{i_r} & \dots & \delta_{k_r}^{i_r} \end{vmatrix} = \begin{cases} +1 & \text{当下指标为上指标的偶置换} \\ -1 & \text{当下指标为上指标的奇置换} \\ 0 & \text{其他情况} \end{cases} \quad (1.29)$$

Λ^r 的维数为

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

选取自然坐标架, 基矢可选为:

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} = \sum_{\sigma \in P(r)} \text{sign}(\sigma) (dx^{i_{\sigma_1}} \otimes \dots \otimes dx^{i_{\sigma_r}}) = \delta_{k_1 \dots k_r}^{i_1 \dots i_r} dx^{k_1} \otimes \dots \otimes dx^{k_r} \quad (1.30)$$

其中任意元素可以表示为:

$$a_r = \frac{1}{r!} f_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \in \Lambda^r \quad (1.31)$$

称为 r 形式, 其中函数 $f_{i_1 \dots i_r}(x)$ 对其下指标完全反对称。

Example. 例如 Λ^2 是 $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$ 维空间, 中基矢为:

$$dx^i \wedge dx^j = (dx^i \otimes dx^j - dx^j \otimes dx^i)$$

任意元素可表达为:

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} f_{ij}(x) dx^i \wedge dx^j = \sum_{i < j} f_{ij}(x) dx^i \wedge dx^j \quad (1.32)$$

进一步引入所有各阶微分形式的直和所组成的线性空间:

$$\Lambda^* = \Lambda^0 \oplus \Lambda^1 \oplus \dots \oplus \Lambda^n = \oplus \sum_{i=0}^n \Lambda^i \quad (1.33)$$

Λ^* 是 2^n 维线性空间, 在其中, 还可引入微分形式的**外积 (wedge product)**

$$\alpha_p \wedge \beta_q = \frac{(p+q)!}{p!q!} \Lambda_{p+q}(\alpha_p \otimes \beta_q) = (-1)^{\alpha q} \beta_q \wedge \alpha_p \quad (1.34)$$

如此定义的外积运算满足结合律, 分配律及斜交换律:

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{\alpha} \beta \wedge \alpha, \quad \alpha \in \Lambda^p, \quad \beta \in \Lambda^q \quad (1.35)$$

2^n 维向量空间 Λ^* 加上外积运算, 构成 **Cartan 代数**, 或简称为**外代数**。

由于斜交换律, 容易知道在一外积多项式中如果含有两个相同的一阶因子, 则该式必然为 0, 且:

Theorem 1.2. $\theta^1, \dots, \theta^r \in \Lambda^1$ 线性无关的充要条件是:

$$\theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^r \neq 0 \quad (1.36)$$

Theorem 1.3. (Cartan 引理) Λ^1 中两组 1 形式 $\{\theta^i, \omega^i, i = 1, \dots, r\}$, 如果满足

$$\sum_{i=1}^r \theta^i \wedge \omega^i = 0 \quad (1.37)$$

且 $\{\theta^i\}$ 线性无关, 那么各 ω^i 可以表示为 $\{\theta^i\}$ 的线性组合:

$$\omega^i = \sum_{j=1}^r c_j^i \theta^j, \quad c_j^i = c_i^j \quad (1.38)$$

Cartan 引理的证明可见《物理学家用微分几何 (第二版)》第 33 页。

在微分形式与切向量场之间同样存在缩并运算, 称为微分形式的求值公式, 由于微分形式本身存在完全反对称, 所以向量场 X 与微分形式缩并时, 仅和微分形式的直积表达式的

最前因子缩并，即可保证 X 与每个因子都进行了缩并。例如：

$$\begin{aligned}\langle dx^i \wedge dx^j; \partial_k, \partial_l \rangle &= \left| \begin{array}{cc} \langle dx^i, \partial_k \rangle & \langle dx^i, \partial_l \rangle \\ \langle dx^j, \partial_k \rangle & \langle dx^j, \partial_l \rangle \end{array} \right| = \delta_{kl}^{ij} \\ \langle dx^i \wedge dx^j, X \rangle &= \langle (dx^i \otimes dx^j - dx^j \otimes dx^i), X \rangle \\ &= \langle dx^i, X \rangle dx^j - \langle dx^j, X \rangle dx^i = \xi^i dx^j - \xi^j dx^i \\ \langle dx^i \wedge dx^j; X, Y \rangle &= \xi^i \eta^j - \xi^j \eta^i\end{aligned}$$

推广至 r 形式的求值公式，有

$$\langle dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}; \partial_{j_1}, \cdots, \partial_{j_r} \rangle = \det (\langle dx^{i_\alpha}, \partial_{j_\beta} \rangle) = \delta_{j_1 \cdots j_r}^{i_1 \cdots i_r} \quad (1.39a)$$

$$\langle dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_n}; X_{(1)}, \cdots, X_{(n)} \rangle = \det (\langle dx^i, X_{(j)} \rangle) \quad (1.39b)$$

微分形式与矢量 X 的运算，也可表示为缩并算子 i_X 对微分形式的作用：

$$i_X \alpha \equiv \underline{X} | \alpha \equiv \langle \alpha, X \rangle \quad (1.40)$$

缩并算子 i_X 是 (-1) 阶奇算子，具有性质：

$$i_X(\alpha_p \wedge \beta_q) = (i_X \alpha_p) \wedge \beta_q + (-1)^p \alpha_p \wedge (i_X \beta_q) \quad (1.41)$$

在缩并的具体运算过程中常用依赖坐标的明显表达式，但是**最后的运算结果应与坐标系的选取无关**。切场的集合组成李代数，余切场无类似运算，但是可定义微分形式间的外积运算形成外代数。 r 形式为流形切丛 $T(M)$ 截面上 r 阶 \mathcal{F} 线性泛函，将 $T(M)$ 上 r 维平行四边形映射到一实函数，例如，2 形式 $\alpha_2 = \frac{1}{2} f_{ij} dx^i \wedge dx^j$ 将两矢量场 X, Y 映射为：

$$\langle \alpha; X, Y \rangle = \frac{1}{2} f_{ij} (\xi^i \eta^j - \xi^j \eta^i) = f_{ij} \xi^i \eta^j$$

当 $X = Y$ 时，上式为 0，使 α_2 保持为切丛截面上的线性泛函，而对称的双线性泛函无此特性。**微分形式 Λ^* 表明了 $T(M)$ 上所有高阶 \mathcal{F} 线性泛函的空间结构，微分形式是流形分析中最重要的张量场。**

下面讨论微分形式上的外微分算子 d ，它是 Cartan 外代数中的微分算子， d 是普通函数的全微分运算：

$$df = f_{,i} dx^i \quad \left(f_{,i} \equiv \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) \quad (1.42)$$

作用在微分形式上：

$$d : \Lambda^r \rightarrow \Lambda^{r+1} \quad (1.43)$$

对 p 形式，可以如下定义外微分：

$$\begin{aligned}\alpha_p &= \frac{1}{p!} f_{i_1 \cdots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \in \Lambda^p(M) \\ d\alpha_p &= \frac{1}{p!} df_{i_1 \cdots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \\ &= \frac{1}{p!} f_{i_1 \cdots i_p, k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \\ &= \frac{1}{p!(p+1)!} \delta_{j_1 \cdots j_{p+1}}^{k, i_1 \cdots i_p} f_{i_1 \cdots i_j, k} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{p+1}}\end{aligned} \quad (1.44)$$

外微分算子有以下特点：

1. 为一阶线性微分算子

$$d(a\sigma + b\tau) = ad\sigma + bd\tau$$

2. 利用一般函数微分的 Leibniz 法则, 可知 d 为斜微分算子

$$d(\alpha_p \wedge \beta_q) = (d\alpha_p) \wedge \beta_q + (-1)^p \alpha_p \wedge (d\beta_q)$$

3. d 是普通函数的全微分运算

4. 对式 (1.42) 再次作用 d 可得

$$d^2 = 0$$

也可由以上四条性质作为外微分算子的定义。若微分形式 α 满足 $d\alpha = 0$ 则称 α 为**闭形式** (**closed form**)。如果 r 形式 α 可整体的表示为某 $(r-1)$ 形式 β 的外微分 $\alpha = d\beta$, 则称 α 为**正合形式** (**exact form**)。正合形式必为闭形式, 闭形式局域可表示为正合形式, 但整体不一定。

微分形式在流形分析中有突出地位, 下面举几个例子, 在三维欧氏空间中的各种微分算子都可用外微分算子表示。

Example. 三维欧氏空间 E^3 中的向量分析。

在 E^3 空间中的一个普通向量场 $\mathbf{A}(x) = (A_1(x), A_2(x), A_3(x))$ 可用 1 形式表示为:

$$A(x) = A_i(x)dx^i$$

一个轴向量 $\mathbf{B}(x) = (B_1(x), B_2(x), B_3(x))$ 可用 2 形式表示为:

$$\begin{aligned} B(x) &= B_1(x)dx^2 \wedge dx^3 + B_2(x)dx^3 \wedge dx^1 + B_3(x)dx^1 \wedge dx^2 \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}B_i dx^j \wedge dx^k \end{aligned}$$

对 0 形式, 即光滑函数 $f(x)$ 的外微分决定函数的梯度:

$$df = f_{,i}dx^i \equiv \nabla f \cdot d\mathbf{x} \quad (1.45)$$

对 1 形式的外微分决定矢量场的旋度

$$dA = A_{i,j}dx^j \wedge dx^i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(\nabla \times \mathbf{A})_i dx^j \wedge dx^k \quad (1.46)$$

对 2 形式的外微分决定矢量场的散度

$$dB = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}B_{i,l}dx^l \wedge dx^j \wedge dx^k = \nabla \cdot \mathbf{B}dx \wedge dy \wedge dz \quad (1.47)$$

对式 (1.45) 外微分, $d^2f = 0$ 相当于矢量分析中的

$$\nabla \times \nabla f = 0$$

对式 (1.46) 外微分, $d^2A = 0$ 相当于矢量分析中的

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$$

三维空间中, 3 形式是最高微分形式, 故对式 (1.47) 外微分为恒等式, 不提供新的矢量分析公式。

1.7 流形的定向、流形上积分与 Stokes 公式

流形可否定向是流形的重要性质，如球面 S^2 和环面 T^2 都是有内、外两个侧面的曲面，这种具有两个侧面的曲面称为**可定向曲面**。而有些曲面不能区分它的两个侧面，这种曲面不能定向，称为**单侧面**，最简单的单侧面为 Mobius 带，如 **Figure 1.7** 所示。以上是从流形的嵌入特性来判断，如何从流形本身特性来判断？首先找到有正负号的数学对象，在改变方向时它变号。对 n 维流形， n 形式集合 Λ^n 是一维线性空间，是具有正负号的数学对象，当流形改变定向时它改变符号，故可采取如下定义：

Definition 1.6. 如 n 维流形 M 上存在一个处处非零的连续 n 形式 $\tau(x) \in \Lambda^n(M)$ ，则流形 M 称为可定向流形。

$\tau(x)$ 是流形上具有正负号的对象，代表流形定向，可取为恒正，当取局域坐标系，在开集 U_α 中：

$$\tau(x) = f_\alpha(x) dx^1 \wedge x^2 \wedge \cdots \wedge dx^n \quad (1.48)$$

在交叠区，要求坐标卡集间的坐标转换函数恒正。即对定向流形，必可找到与微分结构相容的坐标卡的集合 $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ 使得交叠区的所有转换函数：

$$\begin{aligned} \psi = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) &\rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \\ \{x^i\} &\rightarrow \{y^i = \psi^i(x)\} \end{aligned}$$

相应的 Jacobi 矩阵恒正

$$J = \frac{\partial(y^1, \dots, y^n)}{\partial(x^1, \dots, x^n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{vmatrix} > 0 \quad (1.49)$$

当流形 M 上具有上述性质的坐标卡集时， M 是**可定向流形**。下面再讨论流形的**紧致性 (compactness)** 和**仿紧性 (paracompact)** 两个重要概念。

Definition 1.7. 当流形 M 的每一个开覆盖，都有一个有限子覆盖，则流形 M 是紧致的。

紧致性是流形的拓扑性质，同胚映射保持紧致性。**欧氏空间有界闭子集必紧致**，故判断流形的紧致性，可看它是否与欧氏空间中的闭子集同胚。

Definition 1.8. 若流形 M 的任意开覆盖都有一个局域有限子覆盖，则 M 称为仿紧的。

微分流形都是仿紧的。

在分析积分前，必须找到积分测度，可选 n 形式 $\tau(x)$ 为 n 维有向测度⁵，当选取局域坐标系后，可将其表示为：

$$\tau(x) = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \quad (1.50)$$

利用此测度，可以对函数 $f(x) \in \mathcal{F}(M)$ 沿着流形开邻域 U 内的任意 n 维闭子流形做积分运算：

$$\int_V f(x) \tau(x) = \int_V f(x) dx^1 \cdots dx^n, \quad V \in U \quad (1.51)$$

如上定义的积分的结果与所选坐标系无关。而有边界的流形的概念为：

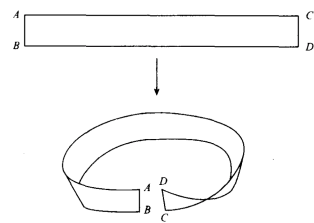


Figure 1.7: Mobius 带

⁵ 即 n 维体积元

Definition 1.9. 带边界的流形的定义与流形的定义很相似, 不过其有两类坐标卡, 有些开邻域与 \mathbb{R}^n 中开集同胚, 而另一些与 \mathbb{R}^{n+} 中开集同胚。

$$\mathbb{R}^{n+} = \{(x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n | x^n \geq 0\}$$

\mathbb{R}^{n+} 中 $x^n = 0$ 的点为 $(n-1)$ 维线性空间, \mathbb{R}^{n-1} 称为 \mathbb{R}^{n+} 的边界, 在对带边界的流形 V 做同胚变换时, 映射到 \mathbb{R}^{n+} 边界上的部分称为 V 的边缘 ∂V , ∂V 是 $(n-1)$ 维流形。当有积分区域有交叠区存在时, 需引入单位配分, 即在流形 M 上存在一组光滑函数 $\{\rho_\alpha(x)\}$, 有以下性质:

1. $0 \leq \rho_\alpha(x) \leq 1$
2. 当 $x \notin U_\alpha$ 时, $\rho_\alpha(x) = 0$
3. $\sum_\alpha \rho_\alpha = 1$

这族 $\{\rho_\alpha(x)\}$ 称为流形 M 的**单位配分**, 其示意图如 **Figure 1.8**所示。注意微分流形都是仿紧的, 所以 $\sum_\alpha \rho_\alpha$ 求和仅有有限个非零项, 使得求和有意义, 且可将求和号和积分号交换顺序

$$\int_M f \tau = \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha(x_\alpha) f(x_\alpha) dx_\alpha^1 \cdots dx_\alpha^n \quad (1.52)$$

选取不同坐标卡集, 不同的单位配分, 所得积分结果相同。下面介绍著名的 Stokes 定理⁶

Theorem 1.4. (Stokes 定理) 令 M 为光滑定向紧致流形, 其边缘 ∂M 为 $(n-1)$ 维光滑流形, 则

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \quad (1.53)$$

Stokes 定理是 Ampere-Stokes 公式, Gauss 公式等的推广, 例如:

Example. 当 M 为 \mathbb{R}^3 中有界闭区域时

$$\int_V d(\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}) = \int_V d\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} E_i dx^j \wedge dx^k\right) = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \int_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

这就是熟悉的 Gauss 定理。

注意式 (1.51) 定义的积分相对被积微分形式以及积分区域为双线性, 可采用下面的符号表示积分:

$$\int_M \omega \equiv \langle M, \omega \rangle \in \mathbb{R} \quad (1.54)$$

有性质:

$$\begin{aligned} \langle M, \alpha\omega \rangle &= \langle \alpha M, \omega \rangle = \alpha \langle M, \omega \rangle, \alpha \in \mathbb{R} \\ \langle M, \omega + \tau \rangle &= \langle M, \omega \rangle + \langle M, \tau \rangle \\ \langle M_1 + M_2, \omega \rangle &= \langle M_1, \omega \rangle + \langle M_2, \omega \rangle \end{aligned} \quad (1.55)$$

这时 Stokes 公式可表示为:

$$\langle M, d\omega \rangle = \langle \partial M, \omega \rangle \quad (1.56)$$

这表明, **外微分算子 d 与流形边缘算子 ∂ 间为对偶关系**, d 作用在微分形式上, 是局域算子, 而 ∂ 作用在积分区域上, 是整体性算子, Stokes 公式将积分区域和微分形式结合在一起, **通过 d 和 ∂ 将流形的局域性质和整体性质联系起来**。

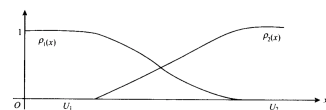


Figure 1.8: 单位配分示意图

⁶ 证明见《物理学家用微分几何》第 43 页。

2 流形变换及其可积性、李群变换及李群流形

研究流形的重要方法是**映射 (mapping)**，流形间连续映射保持流形的连续性，可微映射 (光滑的连续映射) 保持流形的可微性，同胚映射保持流形的拓扑特性。

2.1 流形间映射及其诱导映射、正则子流形

令 φ 是 m 维流形 M 与 n 维流形 N 之间的可微映射 (注意是光滑映射非同胚映射，逆映射不一定存在):

$$\begin{aligned} \varphi: M &\rightarrow N \\ p = (x^1, \dots, x^m) &\mapsto q = \varphi(p) = (y^1, \dots, y^n), \quad p \in M, q \in N \end{aligned} \quad (2.1)$$

该映射将流形 M 上曲线 $x(t)$ 映射到流形 N 上像曲线 $\varphi(x(t))$ 。流形间的映射 φ 将诱导出两大类映射，对切向量场产生**推前 (push forward)** 切映射，对微分形式产生**拖回 (pull back)** 映射。曲线 $x(t)$ 在 p 点切矢 X_p 映为像曲线 $\varphi(x(t))$ 在 q 点切矢 Y_q ，将 p 点切空间 $T_p(M)$ 映射到 q 点切空间 $T_q(N)$ ，称为**切映射** φ_* ，这个映射是推前的，选取局域坐标系后

$$\varphi_*: X_p = \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \rightarrow \varphi_* X = \xi^i(x) \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^k} \Big|_{q=\varphi(p)} \quad (2.2)$$

切映射决定了映射 φ 在一点邻域的性质，故有些文献记为: $d\varphi \equiv \varphi_*$ ，具有性质

1. 线性

2. 与李括号对易

$$[\varphi_* X, \varphi_* Y] = \varphi_* [X, Y] \quad (2.3)$$

3. 对于接连两次映射 $\varphi: M \rightarrow N, \psi: N \rightarrow L$ ，其诱导映射顺向

$$(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_* \quad (2.4)$$

线性空间 (切空间) 的映射可以诱导出对偶空间 (余切空间) 的对偶映射

$$\varphi^*: T_q^*(N) \rightarrow T_p^*(M) \quad (2.5)$$

注意映射方向反转，是拖回的。在选取局域坐标系后，0 形式:

$$\varphi^* f(y) = f(\varphi(x)) \equiv g(x) \quad (2.6)$$

对于 1 形式 $\omega_i(y) dy^i \in \Lambda^1(N)$:

$$\varphi^* (\omega_i(y) dy^i) = \omega_i(y(x)) \frac{\partial y^i}{\partial x^k} dx^k \in \Lambda^1(M) \quad (2.7)$$

对于任意 r 形式: $\alpha_r = \frac{1}{r!} f_{i_1 \dots i_r}(y) dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_r} \in \Lambda^r(N)$:

$$\varphi^* (\alpha_r) = \frac{1}{(r!)^2} f_{i_1 \dots i_r}(y(x)) \frac{\partial (y^{i_1}, \dots, y^{i_r})}{\partial (x^{k_1}, \dots, x^{k_r})} dx^{k_1} \wedge \dots \wedge dx^{k_r} \in \Lambda^r(M) \quad (2.8)$$

回拖映射 φ^* 具有以下性质:

1. 线性

2. 与外积交换

$$\varphi^* (\omega \wedge \sigma) = \varphi^* \omega \wedge \varphi^* \sigma \quad (2.9)$$

3. 与外微分交换

$$\varphi^*(d\omega) = d\varphi^*\omega \quad (2.10)$$

4. 对于接连两次映射 $\varphi: M \rightarrow N, \psi: N \rightarrow L$, 其诱导拖回映射反向:

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^* \quad (2.11)$$

φ_* 与 φ^* 相互对偶, 有性质

$$\langle \varphi^*\omega, X \rangle_p = \langle \omega, \varphi_*X \rangle_{q=\varphi(p)} \quad (2.12)$$

注意上式两端为在不同流形上的函数, 不过在对应点有同样的数值。对于一般的 r 形式

$$\langle \varphi^*\alpha_r; X_1, \dots, X_r \rangle_p = \langle \alpha; \varphi_*X_1, \dots, \varphi_*X_r \rangle_q \quad (2.13)$$

在 p 点邻域映射 φ 的性质决定了相应切映射 φ_* 的性质, 反之也对。切映射像的维数 $\dim \varphi_*T_p(M)$ 就是映射 φ_* 及映射 φ 的秩。在选取局域坐标系后, 相应变换矩阵 $\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)$, 此变换矩阵的秩 r 就是映射 φ 的秩。如果秩 $r = m \leq n$, 则称映射 φ_* 为**单射 (injective)**, 如果秩 $r = n \leq m$ 则称映射 φ_* 为**满射 (surjective)**。当 $m = n$, 及 M 和 N 是同维光滑流形, 如在 p 点邻域映射维为满秩 n , 则映射在 p 点邻域为 1-1 对应的微分同胚。

Definition 2.1. 当对 M 中任意一点 p , $\varphi_*|_p$ 均为单射, 则成 φ 为浸入映射。进一步, 1-1 对应的浸入映射称为嵌入映射, 这时 M 和像 $\varphi(M)$ 微分同胚, (M, φ) 称为 N 的嵌入子流形, 或者简称 M 是 N 的子流形。

Example.

1. **Figure 2.1** 表明了由一维线段 I 到 \mathbb{R}^2 的两种映射, 其中 (a) 不是浸入映射, 因为其不光滑, 在拐点处映射的秩 $r = 0$, (b) 是浸入映射但整体上不是 1-1 对应的, 所以嵌入映射。

2. 由下式给出的映射:

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos t, \sin t) \end{aligned}$$

是浸入映射不是嵌入映射。

3. 由下式给出的映射:

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (\cos t, \sin t, t) \end{aligned}$$

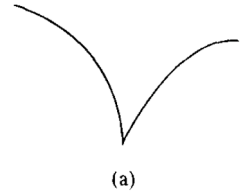
是嵌入映射, 映射像如 **Figure 2.2** 所示, 是螺旋线, 是 \mathbb{R}^3 中嵌入子流形。

对于嵌入子流形 (M, φ) , 可以把 M 上微分结构搬到像 $\varphi(M)$ 上, 另一方面 $\varphi(M) \subset N$, $\varphi(M)$ 可以有由流形 N 的微分结构诱导的拓扑。一般而言, 从 M 通过映射 φ 带给 $\varphi(M)$ 的拓扑 (称为**嵌入拓扑**) 比从 N 诱导的拓扑更精细。当嵌入拓扑与从 N 诱导的拓扑等价时, 称此嵌入子流形为**正则子流形**。对于嵌入正则子流形, 为简单叙述, 常不区分 M 与 $\varphi(M)$ 。

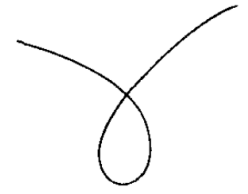
嵌入正则子流形是本章的主要研究对象, 这时流形 N 的坐标卡集中存在一个坐标卡 (U, ψ) , 使得 $p \in U, \psi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$, 且

$$\psi(U \cap M) = \psi(M) \cap \mathbb{R}^m$$

如 **Figure 2.3** 所示, (U, ψ) 称为 p 邻域正则坐标卡。当 M 是 N 的一个闭子集, 对其中任



(a) 不是浸入映射



(b)

(b) 浸入映射但不是嵌入映射

Figure 2.1: 线段 I 到 \mathbb{R}^2 的两种映射

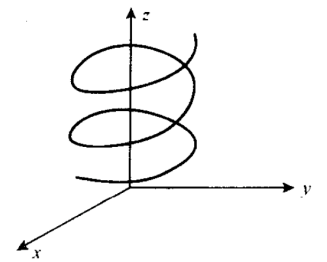
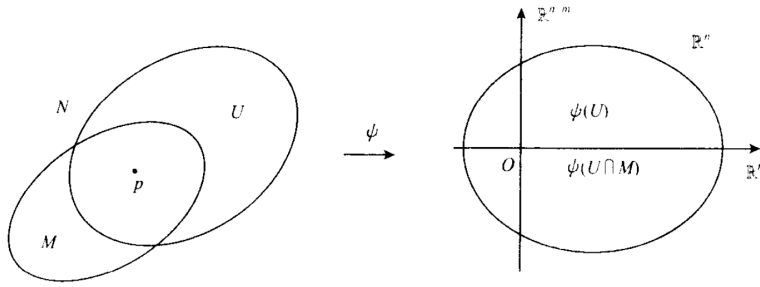


Figure 2.2: \mathbb{R}^3 中螺旋线

Figure 2.3: 子流形 M 的正则坐标卡

意 $p \in M$, 流形 N 的坐标卡集中存在一个含 p 的坐标卡, 使得在 p 的邻域内 $x \in M \cap N$

$$M \cap N = \{x \in U | \psi^i = 0, i = m+1, m+2, \dots, n\} \quad (2.14)$$

则称 M 为 N 的 m 维闭子流形。闭子流形为正则子流形¹。

任意紧致可微流形均能光滑嵌入在充分大的 n 维平空间 \mathbb{R}^n 中, 使得研究 \mathbb{R}^n 中子流形特别重要, 存在如下定理。

¹ 例如 \mathbb{R}^n 中 $(n-1)$ 维球面 S^{n-1} 为 \mathbb{R}^n 的闭子流形

Theorem 2.1. (Whitney) 定理 任意 n 维光滑连通闭流形 M 均能光滑浸入 \mathbb{R}^{2n} 及光滑嵌入 \mathbb{R}^{2n+1} 中。

当 m 维子流形 M 嵌入映射到 n 维流形 N 时, 切空间推前映人 (map into), 而余切空间拖回映满 (map onto)。即:

$$T_p(M) \subset T_p(N) \quad (M \subset N) \quad (2.15a)$$

$$\tau \in \text{Hom}(T_p(N), \mathbb{R}) \Rightarrow \varphi^* \tau \in \text{Hom}(T_p(M), \mathbb{R}) \quad (2.15b)$$

但是对于 $\sigma \in \text{Hom}(T_p(M), \mathbb{R})$ 对 $T_p(N)$ 中的矢量没有确定的映射。虽然切矢与余切矢相互对偶, 但是在子流形嵌入时它们起不同的作用, 它们的特性不同。

2.2 局域单参数李变换群、李导数

如果在点 $p \in M, X_p = 0$ 则称 p 点为切场的临界点 (critical point), 切场在临界点附近的性质十分复杂。可微切场的临界点通常是孤立奇点, 切场的非临界点称为普点。设点 $p \in M$ 是切场 X 的普点, 可以证明有且仅有一条通过 p 点的光滑曲线, 使此曲线在 p 点的切矢恰为该点给定的切向量 X , 这样的曲线称为切场 X 的积分曲线。实际上, 切场和积分曲线可表示为:

$$X(x) = \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad x: t \mapsto x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$$

给定普点 p 的坐标 $\{x^i(0) = a^i\}$ 要求此曲线的切向量就是给定的切向量场, 相当于求解一个给定初始条件的一阶常微分方程组:

$$\frac{dx^i(t)}{dt} = \xi^i(x(t)), \quad x^i(0) = a^i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.16)$$

该方程组在向量场普点邻域有唯一解, 所得积分曲线为流形 M 上的一维子流形。有以下性质:

1. 不同积分曲线不相交。

2. 在流形 M 上每点 (临界点除外), 都有积分曲线通过。

切场的积分曲线集合形成线汇, 如果将每条积分曲线看作一个元素, 则线汇是 $(n-1)$ 维流形, 或者说, 积分曲线在流形 M 中的**余维 (codimension)** 是 $(n-1)$ 。

流形切场是流形微分同胚变换的生成元, 利用积分曲线汇, 对与任意小的参数 t , 定义同胚映射 φ_t :

$$\varphi_t: M \rightarrow N, \quad p \mapsto q = \varphi_t(p) \quad (2.17)$$

像 $\varphi_t(p)$ 为由 p 点出发的切场 X 的积分曲线, 映射集合 $\{\varphi_t\}$ 满足:

$$\varphi_{t+s}(p) = \varphi_t(\varphi_s(p)) = \varphi_s(\varphi_t(p)), \quad \varphi_0(p) = p, \quad \varphi_{-t} = \varphi_t^{-1} \quad (2.18)$$

$\{\varphi_t\}$ 形成 M 的局域单参数李变换群, 为局域 Abel 群。群的生成元即给定切场 $X(x)$, 切场 $X(t)$ 的积分曲线即此变换群 $\{\varphi_t\}$ 的**轨道表示**, 称为变换群 $\{\varphi_t\}$ 的**流线 (flow)**。利用此变换群对流形的同胚变换可定义作用在流形张量场上的李导数算子 L_X 。

为了对流形上的张量场进行微分运算, 我们引入了外微分算子, 但对于流形上的切场, 无法自然地给出沿着某个方向的微分, 因为对于流形上不同点的切向量本质上属于不同的向量空间。这些向量空间虽然同构但是**不能由流形结构本身得到相应的正则同构**。对于流形上任意向量场, 为了讨论对底空间坐标的微分运算, 一般有两种方法:

1. 在流形 M 上的每点引入联络系数, 使得该点与邻近点建立联系, 详情看第三章。
2. 定义出张量场 K 沿着积分曲线方向的李导数 $L_X K$, 这是本节分析的问题。

在流形上给定一个张量场, 得到积分曲线汇, 再得到流形上局域单参同胚变换群 $\{\varphi_t\}$, **流形变换可诱导出张量场的变换**, 微分形式 ω 拖回为 $\varphi_t^* \omega$, 切场 Y 推前为 $\varphi_{t*} Y$, 可将邻近点张量场沿积分曲线推前或者拖回至同一点进行比较, 可以定义出各种张量场 K 相对给定切场 X 方向的李导数运算, 所得李导数 $L_X K$ 与 K 属相同类型的张量场, 可以形式地表示为:

$$L_X K|_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{|t|} (\varphi_t^* K - K) \Big|_p \quad (2.19a)$$

$$L_X K|_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{|t|} (\varphi_{t*} K - K) \Big|_p \quad (2.19b)$$

对于微分形式或者协变张量用前式, 对于逆变张量用后式。设流形 M 上给定向量场 $X(x) = \xi^i \partial_i \in \mathcal{X}(M)$, 通过 x 的积分曲线 $y(x, t)$:

$$y^i(t) = y^i(x^1, \dots, x^n, t), \quad \begin{cases} \frac{dy^i(t)}{dt} = \xi^i(y(t)) \\ y^i(x^1, \dots, x^n, 0) = x^i \end{cases} \quad (2.20)$$

对于标量场 $f \in \mathcal{F}(M)$:

$$\begin{aligned} \varphi_t^* f &= f(y(x, t)) \\ L_X f|_p &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(y(x, t)) - f(y(x, 0))}{t} = \frac{\partial f}{\partial y^i} \frac{dy^i}{dt} \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} f(y(x, t)) \Big|_{t=0} = Xf|_p \end{aligned}$$

即 Xf 是函数 f 沿切矢方向的梯度, 也即函数 f 相对 X 的李导数。

对于余切场 $\omega = \omega_i(y) dy^i \in \Lambda^1(M)$:

$$\varphi_t^* \omega = \omega_i(y(x, t)) \frac{\partial y^i(x, t)}{\partial x^j} dx^j$$

注意上式两项含 t , 利用 Leibnitz 法则:

$$\begin{aligned} L_X \omega|_p &= \left[\frac{\partial \omega_i(y)}{\partial y^j} \frac{dy^j}{dt} \Big|_{t=0} \frac{\partial y^i}{\partial x^k} dx^k + \omega_i(y) \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{dy^i}{dt} \Big|_{t=0} dx^k \right] \Big|_p \\ &= (\omega_{k,j} \xi^j + \omega_i \xi_{,k}^i) dx^k|_p \end{aligned} \quad (2.21)$$

或者写为:

$$L_X \omega_k \equiv (L_X \omega)_k = \omega_{k,j} \xi^j + \omega_i \xi_{,k}^i \quad (2.22)$$

对于切场 $Y(y) = \eta^i(y) \frac{\partial}{\partial y^i}$, 将 y 点切场沿积分曲线推到 p 点:

$$\varphi_{t*}|_p = \eta^i(y(x,t)) \frac{\partial x^j(y,t)}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \quad (2.23)$$

但是要注意对切场分量系数 $\eta^i(y) = \eta^i(y(x,t))$ 沿着积分曲线拖回。这里直接给出李导数的计算结果:

$$L_X Y|_p = \left(\xi^k \frac{\partial \eta^j}{\partial x^k} - \eta^k \frac{\partial \xi^j}{\partial x^k} \right) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p = [X, Y]_p \quad (2.24)$$

即对向量场的李导数运算即李括号运算:

$$L_X Y = [X, Y], \quad L_X \eta^j \equiv (L_X Y)^j = \xi^k \eta_{,k}^j - \eta^k \xi_{,k}^j \quad (2.25)$$

对于一般的张量场:

$$K = \{K_{k_1 \dots k_s}^{i_1 \dots i_r}\} \in \mathcal{T}_s^r(M)$$

则:

$$L_X K_{k_1 \dots k_s}^{i_1 \dots i_r} = (L_X K)_{k_1 \dots k_s}^{i_1 \dots i_r} = \xi^j K_{k_1 \dots k_s, j}^{i_1 \dots i_r} + K_{jk_2 \dots k_s}^{i_1 \dots i_r} \xi_{,k_1}^j + \dots - K_{k_1 \dots k_s, j}^{j i_2 \dots i_r} \xi_{,j}^{i_1} - \dots \quad (2.26)$$

上式中第一项相当于该分量在 X 方向的变更, 然后由于给定切场局域变更特性, 对于张量场每个协变指标, 提供一个回拖基底的正号贡献, 对于每一个逆变指标, 提供一个推前基底的负号贡献。

李导数有以下性质:

1. L_X 为不改变张量类型的线性算子。
2. 满足导子的 Leibnitz 法则, 并且与张量场的缩并运算对易:

$$\begin{aligned} L_X (K \otimes K') &= (L_X K) \otimes K' + K \otimes (L_X K'), K, K' \in \mathcal{T}_s^r(M) \\ L_X (T_s^r(\omega_1, \dots, \omega_r; X_1, \dots, X_s)) &= (L_X T_s^r)(\omega_1, \dots, \omega_r; X_1, \dots, X_s) \\ &\quad + T_s^r(L_X \omega_1, \dots, \omega_r; X_1, \dots, X_s) + \dots \\ &\quad + T_s^r(\omega_1, \dots, \omega_r; [X, X_1], \dots, X_s) + \dots \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$3. L_X f = Xf, \quad f \in \mathcal{F}(M)$$

$$4. L_X Y = [X, Y], \quad X, Y \in \mathcal{X}(M)$$

以上四个性质也可以当作李导数的定义。此外, 还可证明, 存在流形间连续映射时, 李导数满足:

$$L_X \varphi^* \omega = L_{\varphi_* X} \omega \quad (2.28)$$

沿不同方向的李导数:

$$[L_X, L_Y] = L_{[X, Y]}, \quad L_{aX+bY} = aL_X + bL_Y \quad (2.29)$$

作用于微分形式上的 k 阶导子是微分形式空间的线性映射:

$$D : \Lambda^r(M) \rightarrow \Lambda^{r+k}(M)$$

k 为偶则称为偶导子, 满足通常的 Leibniz 法则, k 为奇则称为奇导子, 满足斜 Leibniz 法则。**外微分算子 d 是 1 阶斜导子, 李导数为 0 阶导子。**缩并算子 $i_X \omega \equiv X \lrcorner \omega \equiv \langle \omega, X \rangle$ 是 -1 阶奇导子。**由作用在微分形式上的两种导子可以得到第三种导子。**偶偶导子的对易子为偶导子, 奇偶导子的对易子为奇导子, 奇奇导子的反对易子为偶导子。

由此可以将作用在微分形式上的李导数用内积算子和外微分算子表示出来 (**Cartan 公式**):

$$L_X = d \cdot i_X + i_X \cdot d \quad (2.30)$$

且三种导子的对易关系为:

$$[L_X, L_Y] = L_{[X, Y]}, \quad [L_X, i_Y] = i_{[X, Y]} \quad [L_X, d] = 0 \quad (2.31)$$

且很容易证明:

$$\langle d\omega, X, Y \rangle = L_X \langle \omega, Y \rangle - L_Y \langle \omega, X \rangle - \langle \omega, [X, Y] \rangle \quad (2.32a)$$

推广到任意 r 形式:

$$\begin{aligned} d\alpha_r(X_0, X_1, \dots, X_r) &\equiv \langle d\alpha_r, X_0, X_1, \dots, X_r \rangle \\ &= \sum_{i=0}^r (-1)^i L_{X_i} \alpha_r(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_r) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha_r([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_r) \end{aligned} \quad (2.32b)$$

\hat{X}_i 表示将 X_i 略去。

2.3 积分流形、Frobenius 定理

上节我们讨论了 1 个切场的积分曲线问题, 我们知道, 对于一个切场, 其积分曲线是一定存在的。在 p 点邻域可以选择坐标系, 使得坐标系线 x^1 就是切场的积分曲线, 即切场的坐标表示为 $X = \partial_1$, 而其积分曲线可以表示为 $\{x^i = c^i\}, c^i = \text{const}$, **下面进一步讨论 k 个切场的积分曲线问题。**

当在流形 N 上每点 p 安排了一个 $T_p(N)$ 的 k 维子空间 Δ_p^k , 则称流形 N 上有一个 **k 维分布 (distribution)**, 如在每点 $\Delta^k(x)$ 是由处处线性无关的 k 个向量场 $\{X_1(x), \dots, X_k(x)\}$ 张成, 则称 $\Delta^k(x)$ 为流形上可维 k 维分布, 或 **k 维流 (current)**, 并可表示为:

$$\Delta^k(x) = \{X_1(x), \dots, X_k(x)\} \quad (2.33)$$

这时如果流形 N 上存在 $(n-k)$ 个局域线性独立的函数 $\{f^a\}$, 它们满足:

$$\langle df^a, X_i \rangle = X_i(f^a) = 0 \quad (2.34)$$

则称这 $(n-k)$ 个函数为可维分布 $\Delta^k(x)$ 的初积分, 当且仅当这时, 流形 N 上分布 $\Delta^k(x)$,

是可积的，其 k 维积分流形由：

$$M = \{x \in U | f^a(x) = \text{const}, \quad a = 1, \dots, n-k\} \quad (2.35)$$

注意在流形 N 上， $df \neq 0$ ，但是限制在子流形 M 上时， $df|_M = 0$ 则称 M 为由分布 $\Delta^k(x)$ 决定的积分流形，它是 N 中连通的 k 维闭子流形。这时在 N 上任意一点 p ，都存在一个 k 维积分流形，可选取局域坐标 $\{x_1, \dots, x_k, f^k, \dots, f^{n-k}\}$ ，使得 $\Delta^k(x)$ 由 $\{\partial_i, i = 1, \dots, k\}$ 张成。这时 $\{X_\alpha, \alpha = 1, \dots, k\}$ 可表示为：

$$X_\alpha = \xi_\alpha^i \partial_i, \quad \alpha = 1, \dots, k$$

如存在积分流形，则 $\{X_\alpha\}$ 为子流形切场，则必须满足：

$$[X_\alpha, X_\beta] = C_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma \in \Delta^k \quad (2.36)$$

满足以上条件的分布则称为**对合分布 (involutive distribution)**，其实对合条件就是 $[\partial_i, \partial_j] = 0$ 在坐标变换下的推广，坐标基的对易关系在局域坐标变换下不能保持，但**对合条件**在任意坐标变换下都能保持。

Theorem 2.2. (Frobenius) 定理如在流形 N 上存在 k 维分布 $\Delta^k = \{X_1, \dots, X_k\}$ ，满足对合条件

$$[X_\alpha, X_\beta] = C_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma \in \Delta^k, \quad \text{对所有 } X_\alpha, X_\beta \in \Delta^k \quad (2.37)$$

则在 N 上每点 p 的邻域存在坐标系，使得：

1. $\{\partial_i, i = 1, \dots, k\}$ 形成 Δ^k 的局部基。
2. $\{x^a = \text{const}, a = k+1, \dots, n\}$ 给出 Δ^k 的积分流形，而 Δ^k 的任意初积分均可表达为 x^a 的函数。
3. 对 Δ^k ，在每一点 p ，存在惟一 k 维最大积分流形 M ，使通过 p 点的任意积分流形都是 M 的开子集。
4. N 上所有点的最大积分流形的集合形成流形族，称为**积分叶汇 (foliation)**，叶汇本身为 $(n-k)$ 维流形。

注意，积分流形的组成都是局域的，一般情况下不可能整体组成积分流形。

2.4 用微分形式表达的 Frobenius 定理、微分方程的可积条件

本节在微分形式来讨论积分流形的存在情况。对于流形间映射，切场推前，余切场拖回，流形 N 的维数 n 大于子流形 M 的维数 m ，故 N 上有些余切矢量在限制到子流形 M 上时应为零。讨论余切场的可积问题，即分析 n 维流形上 Pfaff 方程

$$\omega = \omega_i dx^i = 0 \quad (2.38)$$

的解的存在问题。这里 $\omega = 0$ 不是说 ω 是 $\Lambda^1(N)$ 中的零元，而是其在被限制在积分流形 M 上时使得 $\omega = 0$ ，找积分流形的存在条件，即找 Pfaff 方程的可解条件。在下面两种情况下 (2.38) 式的积分流形存在：

1. 在 p 点邻域可选坐标系，是存在函数 $\varphi(x)$ 满足 $\omega = d\varphi$ ，这时 $\varphi = \text{const}$ 是方程 $\omega = 0$ 的积分流形，是流形 N 上的超曲面。注意闭形式局域也为正合形式，故该情况的充要条件是 $d\omega = 0$ 。(闭形式局域为正合形式，但整体不一定)

2. 在 p 点邻域可选坐标系, 使得存在函数 $u(x), v(x)$ 满足

$$\omega = u dv \quad (2.39)$$

这时 $v = \text{const}$ 为 $\omega = 0$ 的积分曲面, 而 u^{-1} 称为积分因子。虽然 ω 不能表示为全微分, 但是 u^{-1} 可以。该情况的必要条件为²:

$$\omega \wedge d\omega = 0 \quad (2.40)$$

这个是 $\omega = 0$ 可积的必要条件, 又称 **Frobenius 条件**。

Example. \mathbb{R}^3 上的 1 形式:

$$\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \neq 0$$

可写为:

$$dz = -\frac{P}{R}dx - \frac{Q}{R}dy$$

如果此式有解, 则由混合偏导数相等条件和复合函数微分法则得到:

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + Q\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0 \quad (2.41)$$

此及将 ω 代入 (2.40), 此时 ω 必将可表示为: $\omega = \psi(x, y, z)d\varphi(x, y, z)$, $\varphi = \text{const}$ 是 \mathbb{R}^3 上超曲面 (2 维闭子流形), 由此也可看出偏微分方程常能写成微分形式体系, 可用分析微分形式的方法来分析微分方程的可积性。

下面把一个余切场的可积条件推广到与 Δ^k 对偶的 $(n-k)$ 维余分布上。在给定光滑 k 维分布 $\Delta^k(x)$ 后, 其可积条件是 Δ^k 应为对合分布。现在从对偶观点研究这个问题。分布 Δ^k 的基底 $\{X_i\}_1^k$ 线性独立, 在 N 上 p 点邻域, 可以扩充而选 N 上切场的基矢为 $\{X_1, \dots, X_k, X_{k+1}, \dots, X_n\}$, 相应余切场可选取对偶基 $\{\theta^1, \dots, \theta^k, \theta^{k+1}, \dots, \theta^n\}$ 使得:

$$\langle \theta^i, X_j \rangle = \delta_j^i, \quad i, j = 1, \dots, n$$

则集合 $\tau_{n-k} = \{\theta^{k+1}, \dots, \theta^n\}$ 满足:

$$\langle \theta^a, X_b \rangle = 0, \quad \theta^a \in \tau_{n-k}, X_b \in \Delta^k \quad (2.42)$$

则称 τ_{n-k} 为与 Δ^k 对偶的 $(n-k)$ 维余分布。下面讨论余分布决定的 Pfaff 方程组:

$$\theta^a(x) = 0, \quad a = 1, \dots, n-k \quad (2.43)$$

的可积条件。存在以下定理:

Theorem 2.3. 如可微分布 Δ^k 为对合分布, 则其对偶余分布 $\tau_{n-k} = \{\theta^a\}_1^{n-k}$ 必满足以下三个条件之一。

1. 在 p 点邻域存在 $(n-k)^2$ 个 1 形式 $\alpha_b^a \in \Lambda^1(N)$, 满足:

$$d\theta^a = \sum_{b=1}^{n-k} \alpha_b^a \theta^b, \quad a = 1, \dots, n-k \quad (2.44)$$

² 注意该式是个 3 形式, 二维空间积分因子必定存在, 二维 Pfaff 方程必可积。

2. 余分布的基形式 $\{\theta^a\}_1^{n-k}$ 线性独立 (见定理1.2), 故

$$\Sigma \equiv \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^{n-k} \neq 0$$

且其中每个元素 $\theta^a \in \tau_{n-k}$ 都有:

$$d\theta^a \wedge \Sigma = 0 \quad (2.45)$$

3. 在点 p 邻域存在光滑函数 $g_b^a(x), f^a(x) \in \mathcal{F}(N)$ 使得:

$$\theta^a = \sum_{b=1}^{n-k} g_b^a df^b, \quad a = 1, \cdots, n-k \quad (2.46)$$

以上三种条件相互等价, 都是余分布的可积条件。

尤其是 (2.46) 式, 更表明集合 $\{df^a\}_1^{n-k}$ 组成积分子流形的局域余切基矢。相应积分子流形可表示为在 p 点邻域 U :

$$M = \{x \in U | f^a = \text{const}, \quad a = 1, \cdots, n-k\} \quad (2.47)$$

是流形 N 的局域闭子流形, 是由 $(n-k)$ 维余分布 τ_{n-k} 决定的 Pfaff 方程组的解流形。下面用代数的语言考虑这个问题, 流形 N 上满足:

$$i_X \alpha = 0, \quad X \in \Delta^k \quad (2.48)$$

的微分形式 α 的集合记为:

$$\Lambda(N, \Delta^k) = \{\alpha \in \Lambda^*(N) | i_X \alpha = 0, \forall X \in \Delta^k\}$$

$\Lambda(N, \Delta^k)$ 在外积运算下形成 $\Lambda^*(N)$ 的子外代数, 而且形成理想, 即当 $\alpha \in \Lambda(N, \Delta^k), \gamma \in \Lambda^*(N)$, 有 $\alpha \wedge \gamma \in \Lambda(N, \Delta^k)$ 。该理想由余分布生成, 称为余分布 $\{\theta\}_1^{n-k}$ 生成的理想。再由 (2.44) 式表明在余分布可积条件下余分布不仅生成理想且满足:

$$d\theta^a \in \Lambda(N, \Delta^k) \quad (2.49)$$

这种理想称为闭理想, 即存在如下定理:

Theorem 2.4. (Frobenius 定理) 余分布的 Pfaff 方程组 $\theta^a = 0$ 完全可积的充要条件是: 在普点 p 邻域, 有余分布生成点理想是闭理想。

偏微分方程常能写成微分形式体系, 故常可用同样方法来分析微分方程的可积性。

2.5 李群流形

李群是分析流形对称性的重要工具, 而且李群流形本身为一类重要的微分流形。

Definition 2.2. n 维李群 G 是 n 维实解析流形, 且具有群结构, 即存在下列解析映射:

$$G \times G \rightarrow G \quad x, y \rightarrow xy^{-1} \quad (2.50)$$

以上定义表明, 李群是有群结构的解析流形, 而且群运算是解析的。因为李群 G 具有微分流形特征, 故我们可以分析它的维数、紧致性、连通性, 另一方面, 李群具有群结构, 我

们可以分析其可介性、幂零性、子群、陪集、商群，且以上两方面密切相关。

Example.

\mathbb{R}^n 中一般线性变换群 $GL(n, \mathbb{R})$:

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) | \det A \neq 0\}, \quad n \geq 2 \quad (2.51)$$

这里 $M(n, \mathbb{R})$ 代表 $n \times n$ 实矩阵，该群是 n^2 维、非紧、非连通流形。其含有恒元 e 的连通分量组成其子群 $GL^+(n, \mathbb{R})$

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) | \det A > 0\} \quad (2.52)$$

实正交群 $O(n)$ 是 $GL(n, \mathbb{R})$ 的子群，其群员矩阵 A 满足 $AA^T = 1$ ，即满足条件

$$\sum_{k=1}^n A_{ik} A_{kj} = \delta_{ij}$$

是 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 维流形，上式去 $i=j$ 并求和得到:

$$\text{tr}(AA^T) = \sum_{i,k=1}^n (A_{ik})^2 = n$$

此式表明 $O(n)$ 是 $GL(n, \mathbb{R})$ 的有界闭子集，故 $O(n)$ 为紧致流形，是 $GL(n, \mathbb{R})$ 群的最大紧致子流形，非连通，含 e 的连通分量 $SO(n)$ 是 $GL^+(n)$ 的最大紧致子群。

n 维复空间 \mathbb{C}^n 中一般线性变换群 $GL(n, \mathbb{C})$ 其最大紧致连通且单连通子群是 $SU(n)$ ，是 (n^2-1) 维实李群。例如 $SU(2)$ 群依赖三个群参数，同胚与 \mathbb{R}^4 中的三维球面 S^3 ，是紧致、连通、单连通流形。

2.6 李变换群、齐性 G 流形

下面我们分析李群 G 对流形 M 的作用，将 G 实现为 M 上的李变换群，群的实现也可叫群的表示。李群对流形的左作用可以用以下可微映射表示:

$$\varphi: G \times M \rightarrow M, \quad g, x \rightarrow \varphi(g, x) \quad (2.53a)$$

$$\varphi(g_1, \varphi(g_2, x)) = \varphi(g_1 g_2, x), \quad \varphi(e, x) = x \quad (2.53b)$$

于是对于任意群元， M 上存在微分同胚变换:

$$\varphi_g: M \rightarrow M, \quad x \mapsto \varphi(g, x) \quad (2.54a)$$

$$\varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2} = \varphi_{g_1 g_2}, \quad \varphi_e = \text{id}_M \quad (2.54b)$$

即映射 $g \rightarrow \varphi_g$ 是群 G 到 M 的李变换群间同态映射，称为群 G 的实现/表示。同样可以定义右作用:

$$\psi: M \times G \rightarrow M, \quad x, g \rightarrow \psi(x, g), \quad \psi(\psi(x, g_1), g_2) = \psi(x, g_1 g_2), \quad \psi(x, e) = x \quad (2.55)$$

注意这时映射 $g \rightarrow \psi_g$ 不是群的同态对应，因为 $\psi_{g_2} \psi_{g_1} = \psi_{g_1 g_2}$ ，而 $g \rightarrow \psi_{g^{-1}}$ 才是群的同态对应，是群的表示。我们主要关心左作用，并记 $\varphi_g x \equiv gx$ 。

李群 G 对 M 的作用，有两种情况需要特别注意:

1. 作用有效 (effective): 允许有不动点，对于非恒元 g ，存在 $gx \neq x$
2. 作用自由 (free): 没有不动点，对于非恒元，所有 $gx \neq x$

例如 $SO(2)$ 对 S^2 是作用有效的, 但非自由, 南北极点是不动点, 而对赤道 S^1 是作用自由的, 没有不动点。

当群 G 对 M 的作用是有效时, 保持某点 x_0 的群元 g 形成子群 $G_{x_0} \subset G$:

$$G_{x_0} = \{g \in G | gx_0 = x_0 \in M\}$$

称为 x_0 点的**迷向子群 (isotropic subgroup)**, 或称为**稳定子群 (stability subgroup)**。

另一方面, 当所有群元对流形 M 作用, 使得点 $x_0 \in M$ 所能到达的集合, 称为群 G 过点 x_0 的轨道 O_{x_0} :

$$O_{x_0} = \{x \in M | x = gx_0, \forall g \in G\}$$

轨道 O_{x_0} 是 M 的子流形。同一轨道上各点迷向子群同构

$$G_{gx_0} = gG_{x_0}g^{-1}$$

两轨道相交, 比完全重合, 不同轨道不相交。如果将每个轨道看成一点, 所有轨道集合形成的商空间叫做**轨道空间**, 记为 M/G ³。

³ 如 $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$, 其中 \mathbb{Z} 是整数加法群, 再比如 $S^n/Z^2 = RP^n$ 其中 Z^2 是作用在 S^n 上的宇称变换, 轨道是一一对顶点。

Theorem 2.5. 变换群 G 对 M 的作用, 如果对于流形上任意两点 $\forall x, y \in M$, 必定有 $\exists g \in G$, 使得 $y = gx$, 则称群 G 对 M 的作用是**传递的 (transitive)**, 且称流形 M 是 G **齐性流形 (homogeneous manifold)**。

注意齐性流形没有不变子流形。群 G 对 M 上任意点的轨道就是 M 自身, 齐性流形上所有点的迷向子群 G_x 相互同构, 且 G_x 的陪集与 M 间存在 1-1 对应的双射⁴:

⁴ 每个陪集对应流形 M 上一个点

$$\varphi_x : G/G_x \rightarrow M$$

当 M 是连通的局域紧流形, G 为局域紧李群, 则双射 φ_x 为微分同胚, 即 $G/G_x \sim M$ 。在物理学中常分析具有某种对称群作用的齐性流形, 下面举几个例子。

Example.

1. RP^n 是 \mathbb{R}^{n+1} 中通过原点的直线的集合, 作用于 RP^n 上的传递群是 $SO(n+1)$, 迷向子群是 $O(n)$, 即: $RP^n \simeq SO(n+1)/O(n)$.
2. Stiefel 流形 $V_{k,n} (k \leq n)$, 是在 n 维欧氏空间中所有通过原点的 k 维正交标架集合, 是正交群作用的陪集空间:

$$\begin{aligned} V_{k,n} &\simeq O(n)/O(k-n) \quad (k \leq n) \\ &\simeq SO(n)/SO(n-k) \quad (k < n) \end{aligned}$$

当 M 具有某些结构, 如微分结构、度规结构、辛结构、复结构等, 如李变换群 G 保持相应结构, 则 G 是给定结构的**自同构群 (group of automorphism)**, 例如微分同胚群、保辛群等。**同时注意, 群流形本身就是 G 作用的齐性流形。**

2.7 不变向量场、李代数、指数映射

李群流形本身为 n 维可微流形, 其切场集合 $\mathcal{X}(G)$ 形成无穷李代数, 是 n 秩 $\mathcal{F}(G)$ 模, 可选取局域活动坐标架, $e_a(x) \in \mathcal{X}$, 有

$$X(x) = \xi^a(x)e_a(x), \quad [e_a, e_b] = f_{ab}^c(x)e_c \quad (2.56)$$

这里结构函数是不是常数, 是依赖坐标的函数, 所以 $\mathcal{X}(G)$ 形成无穷维李代数。

可以定义群 G 对群流形本身的作用。对于任意群元, 有两种微分同胚变换:

$$\begin{aligned} L_g : G &\rightarrow G, \quad x \mapsto L_g x \equiv gx \\ R_g : G &\rightarrow G, \quad x \mapsto R_g x \equiv xg^{-1} \end{aligned}$$

容易证两种微分同胚变换互相交换: $L_{g_1} R_{g_2} = R_{g_2} L_{g_1}$ 。流形上的变换可以诱导出切场的变换。令 A 为恒元处切空间 $T_e(G)$ 的一个切矢, 用左平移变换:

$$L_{g*} : T_e(G) \rightarrow T_g(G), \quad A \mapsto L_{g*} A = A(g)$$

当 g 取遍所有群元, 就可以得到一个切场:

$$X = \bigcup_{g \in G} A(g) = \bigcup_{g \in G} L_{g*} A \in \mathcal{X}(G) \quad (2.57)$$

很容易证明, 这样的且场满足 $L_{g*} X = X$, 称为**左平移不变切场**, 或称为左不变切场。类似得可以定义右不变切场。所有左不变切场的集合为 $\mathcal{X}_l(G)$, 这个线性空间和 $T_e(G)$ 同构, $T_e(G)$ 为 n 维向量空间, 选择基矢 $\{\tau_a\}$ 后, $T_e(G)$ 中任意向量可表示为:

$$A = \sum A^a \tau_a$$

从 $T_e(G)$ 中每个向量出发都可以得到一个左不变切场, 从 τ_a 出发可得, 任意左不变向量场都可以展开为:

$$X_a = \bigcup_{g \in G} L_{g*} \tau_a, \quad X = \sum A^a X_a \in \mathcal{X}_l(G) \quad (2.58)$$

由于**切映射和李括号对易**, 因此如果 $X, Y \in \mathcal{X}_l(G)$:

$$L_{g*}[X, Y] = [L_{g*}X, L_{g*}Y] = [X, Y] \quad (2.59)$$

即 $\mathcal{X}_l(G)$ 在李括号运算下封闭, 形成李代数, 它是无穷维李代数的 n 维子代数, 选取 n 个线性独立的左不变向量场后:

$$[X_a, X_b] = c_{ab}^c X_c \quad (2.60)$$

注意这里的 c_{ab}^c 是常数了。且容易证明:

$$c_{ab}^c = -c_{ba}^c, \quad c_{ab}^c c_{ec}^d + c_{be}^c c_{ac}^d + c_{ea}^c c_{bc}^d = 0 \quad (2.61)$$

类似地可以定义流形上右不变向量场 $X^R, R_{g*} X^R = X^R$, 同样形成李代数 $\mathcal{X}_r(G)$, 且 $\mathcal{X}_l(G)$ 和 $\mathcal{X}_r(G)$ 同构, 统称为李群 G 的李代数。

$$L(G) \simeq \mathcal{X}_l(G) \simeq \mathcal{X}_r(G) \quad (2.62)$$

在本章第二节提到, 流形 M 上给定向量场 $X(x)$, 就可以得到 M 上积分曲线, 可得局域单参变换李群。下面我们分析通过恒元 e 的单参数子群, 单参数子群必 Abel, 且与实加法群 \mathbb{R} 同构:

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\rightarrow G, \quad t \mapsto g(t) \\ g(s+t) &= g(s)g(t) = g(t)g(s) \end{aligned}$$

两边对 s 取微分然后令 $s = 0$ 可得:

$$g'(t) = g(t)g'(0), \quad g(t) = g(0) \exp(tg'(0)) \quad (2.63)$$

单参数子群的切矢沿着子群左平移, 对于通过恒等元的情况:

$$X_A(g(t)) = L_{g(t)*} A$$

可以得到通过恒等元沿着 A 方向的单参数子群:

$$g(t) = \exp(tA), \quad A \in T_e(G) \quad (2.64)$$

其中 A 也叫做单参数子群的**无穷小生成元**。在李代数和李群之间定义指数映射:

$$\exp : L(G) \rightarrow G, \quad A \mapsto \exp A \in G \quad (2.65)$$

指数映射在李代数的零元邻域和李群的恒元邻域建立一一对应, 由此**李代数及其李括号运算决定了李群的局域结构**。

下面研究李群的矩阵表示, 当存在满足李代数结构的 $m \times m$ 矩阵集合 $\{\tau_a\}_1^n$:

$$[\tau_a, \tau_b] = c_{ab}^c \tau_c \quad (2.66)$$

则称集合 $\{\tau_a\}$ 为李代数 $L(G)$ 的 m 维表示, 它们的指数可以给出李群 G 的 m 维表示, 即对李代数中任意生成元 A , 可以得到过恒等元沿 A 方向的单参数子群:

$$A = \sum A^a \tau_a \in L(G), \quad g(t) = [g_{ij}(t)] = \exp(tA) \in G \quad (2.67)$$

$m \times m$ 矩阵 $g(t)$ 称为李群 G 的 m 维表示。

在群流形上左不变向量场也可定义为作用在群上函数的线性微分算子, 与 τ_a 对应的左不变向量场可以表示为:

$$\begin{aligned} X_a f(g) &= \left. \frac{d}{dt} f(g e^{t\tau_a}) \right|_{t=0}, \quad f \in \mathcal{F}(G) \\ X_a &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} = \sum_{i,j=1}^m \frac{dg_{ij}}{dt} \frac{\partial}{\partial g_{ij}} \bigg|_{t=0} = \text{tr} \left(\frac{dg}{dt} \frac{\partial}{\partial g} \right)_{t=0} \\ X_a &= \text{tr} \left(g \tau_a \frac{\partial}{\partial g} \right) = \sum_{i,j,k} g_{ik} (\tau_a)_{kj} \frac{\partial}{\partial g_{ij}} \end{aligned} \quad (2.68)$$

群流形上的余切场可以做类似分析, 当余切场 $\omega \in \Lambda^1(G)$ 满足:

$$L_a^* \omega = \omega, \quad \forall a \in G$$

称 ω 为左不变余切场, 例如使用群元表示的 Maurer-Cartan 形式:

$$\theta = g^{-1} dg \quad (2.69)$$

满足

$$L_a^* \theta = (ag)^{-1} d(ag) = \theta, \quad \forall a \in G \quad (2.70)$$

即 θ 相对于任意固定群元的左平移不变。当我们用 m 维矩阵表示 g , 取值在李代数 $L(G)$ 上的 1 形式可用基矢 $\{\tau_a\}_1^n$ 展开:

$$\theta = g^{-1} dg = \sum_{a=1}^n \theta^a \tau_a, \quad \theta^a = -2 \text{tr}(g^{-1} dg \tau_a) \quad (2.71)$$

其中 $\theta^a \in \Lambda^1_l(G)$ 为 n 个线性独立的左不变 1 形式。容易证明 $\theta = g^{-1}dg$ 满足:

$$d\theta + \theta \wedge \theta = 0 \quad (2.72)$$

利用对易关系 (2.7) 式可以得到:

$$d\theta^a = -\frac{1}{2}c_{bc}^a \theta^b \wedge \theta^c \quad (2.73)$$

而等式 $d^2\theta$ 相当于结构常数的 Jacobi 关系 (2.61) 式。左不变 1 形式的集合形成 n 维向量空间, 是 $\mathcal{X}_l(G)$ 的对偶空间, 按照 (2.68) 和 (2.71) 式选择基底, 则满足对偶关系:

$$\langle \theta^a, X_b \rangle = \delta_b^a, \quad [X_a, X_b] = c_{ab}^c X_c \quad (2.74)$$

类似可以定义右不变的 Maurer-Cartan 形式

$$\sigma = dg \cdot g^{-1} = \sigma^a \tau_a, \quad \sigma^a = -2 \operatorname{tr}(dgg^{-1}\tau_a) \quad (2.75)$$

右不变切场 $\{Y_a\}_1^n$ 可表示为:

$$Y_a = \operatorname{tr} \left(\tau_a g \frac{\partial}{\partial g} \right) \in \mathcal{X}_r(G) \quad (2.76)$$

它们满足:

$$d\sigma - \sigma \wedge \sigma = 0, \quad d\sigma^a = \frac{1}{2}c_{bc}^a \sigma^b \wedge \sigma^c \quad (2.77a)$$

$$\langle \sigma^a, Y_b \rangle = \delta_b^a, \quad [Y_a, Y_b] = -c_{ab}^c Y_c \quad (2.77b)$$

可以看出, 左不变切场和右不变切场之间的代数常数相差负号。实际上两者是同构的, 李群存在反自同构变换:

$$\gamma: G \rightarrow G, \quad g \mapsto g^{-1}$$

相应恒等元的切映射:

$$\gamma_*|_e = -id_{T_e(G)} \quad (2.78)$$

或者说 $-\gamma_*|_e$ 是 $T_e(G)$ 的恒等运算。切映射 $-\gamma_*$ 就是从 $\mathcal{X}_l(G)$ 到 $\mathcal{X}_r(G)$ 的一一对应的映射, 且不改变代数关系:

$$\begin{aligned} -\gamma_*: \mathcal{X}_l(G) &\rightarrow \mathcal{X}_r(G) & X^L &\mapsto -\gamma_* X^L \in \mathcal{X}_r(G) \\ [X^R, Y^R] &= [-\gamma_* X^L, -\gamma_* Y^L] = \gamma_* [X^L, Y^L] \end{aligned} \quad (2.79)$$

上式表明左右不变向量场构成的李代数同构。而且可以证明左不变切场 X^L 与右不变切场 Y^R 通过 g 点的积分曲线相同。

3 仿射联络流形

为了讨论流形上张量场对底空间坐标的微分运算, 需要将与邻近点进行比较, 流形上不同点上张量属于不同的张量空间, 虽然它们线性同构, 但是不能通过流形本身得到相应的正则同构。可以在 M 上每点引入联络系数。切丛联络叫做 M 的仿射联络, 给定仿射联络的流形称为仿射联络流形。

3.1 活动坐标架法流形切丛与标架丛

n 维流形 M 的切丛 $T(M)$ 是 $2n$ 维流形, 局域可表示为 M 与 \mathbb{R}^n 的笛卡尔积

$$T(M) \sim M \times \mathbb{R}^n$$

注意局域直积的切丛 $T(M)$ 是 (p, v_p) , 其中点 $p \in M, v_p \in T_p(M)$, 并非所有的对组成一般 $2n$ 维流形的坐标系都适用于切丛, 这是因为切丛具有结构。切场 X 是切丛 $T(M)$ 的光滑截面, 在 p 点邻域选取局域坐标系坐标后, 切场 X 可表示为:

$$X(x) = \xi^i(x) \partial_i$$

其中 $x = (x^1, \dots, x^n), \{\partial_i, i = 1, \dots, n\}$ 是流形局域坐标网诱导的切丛自然坐标架, 在每点切空间 $T_p(M)$ 还可坐标架转动, 即可选自然坐标架的线性组合, 得到活动坐标架 $e_a \in \mathcal{X}(M)$

$$e_a(x) = e_a^i(x) \partial_i, \quad a = 1, \dots, n \quad (3.1)$$

其中 $e_a^i(x) \in \mathcal{F}(M)$, 集合 $\{e_a^i(x)\}$ 组成 $n \times n$ 非奇异函数矩阵, 行列式在 p 点邻域非零, 即 $g = (e_a^i) \in GL(n, \mathbb{R})$ 矩阵。流形上每点所有切坐标架 $\{g \in GL(n, \mathbb{R})\}$ 的集合 $G_p \simeq GL(n, \mathbb{R})$, 可看成点 p 上纤维, 这时纤维为群流形 G_p , 各点纤维 G_p 的并集组成坐标架丛 $L(T)$

$$L(T) = \cup_p G_p$$

标架丛的截面 $g(x) = (e_a^i(x))$ 为活动标架, 即在每点 x 选一活动标架 $\{e_a(x) = e_a^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}\}$ 组成 n 个线性独立的切场集合。任意切场可用它们展开

$$X(x) = \xi^i(x) \partial_i = \xi^a(x) e_a(x) \quad (3.2)$$

其中 $\xi^a(x) \in \mathcal{F}(M)$ 是切场 X 在活动标架 $\{e_a\}_1^n$ 中的分量, 与在自然标架 $\{\partial_i\}_1^n$ 中的分量关系为:

$$\xi^i(x) = e_a^i(x) \xi^a(x) \quad (3.3)$$

类似在余切丛 $T^*(M)$ 也可选取活动坐标架 $\theta^a \in \Lambda^1(M)$:

$$\theta^a(x) = \theta_a^i dx^i, \quad a = 1, \dots, n \quad (3.4)$$

通常选取矩阵 $(\theta_a^i(x))$ 为矩阵 $(e_a^i(x))$ 的逆矩阵, 使得余切标架 $\{\theta^a\}_1^n$ 为 $\{e^a\}_1^n$ 的对偶坐标架, 即

$$\langle dx^i, \partial_j \rangle = \delta_j^i, \quad \langle \theta^a(x), e_b(x) \rangle = \theta_a^i(x) e_b^j(x) \langle dx^i, \partial_j \rangle = \delta_b^a \quad (3.5)$$

于是 M 上任意余切场可以 $\sigma = \sigma_i(x) dx^i \in \Lambda^1(M)$ 可展开为:

$$\sigma = \sigma_a(x) \theta^a(x), \quad \sigma_a(x) = \sigma_i(x) e_a^i(x) \quad (3.6)$$

注意对自然坐标架有

$$[\partial_i, \partial_j] = 0, \quad d(dx^i) = 0 \quad (3.7)$$

而活动标架 e_a 非交换, θ^a 非闭

$$[e_a(x), e_b(x)] = f_{ab}^c(x) e_c(x), \quad d\theta^a(x) = -\frac{1}{2} f_{bc}^a(x) \theta^b(x) \wedge \theta^c(x) \quad (3.8)$$

在切丛选活动标架后, 还可以进一步旋转

$$e'_a(x) = L_a^b(x) e_b(x), \quad a = 1, \dots, n, \quad \det(L_b^a(x)) \neq 0 \quad (3.9)$$

类似余切丛的活动标架也可作对应的对偶转动

$$\theta'^a(x) = L_b^{-1a}(x) \theta^b(x), \quad \langle \theta'^a(x), e'_b(x) \rangle = \delta_b^a \quad (3.10)$$

用新标架后, 切场和余切场的分量应为:

$$\xi'^a(x) = L_b^{-1a}(x) \xi^b(x), \quad \sigma'_a(x) = L_a^b(x) \sigma_b(x) \quad (3.11)$$

张量指标下标按照 L 变换, 称为协变指标, 而上指标分量按 L^{-1} 变换, 成为逆变指标, 且采用上下指标求和习惯。对于 M 上 (r, s) 型张量

$$K = K_{b_1 \dots b_s}^{a_1 \dots a_r} e_{a_1} \otimes \dots \otimes e_{a_r} \otimes \theta^{b_1} \otimes \dots \otimes \theta^{b_s} \in \mathcal{T}_s(M)$$

在标架进行变换时, 张量 K 的分量应做变换:

$$K = K_{b_1, \dots, b_s}^{\prime a_1, \dots, a_r} = L_{c_1}^{-1a_1} \dots L_{c_r}^{-1a_r} \cdot L_{b_1}^{d_1} \dots L_{b_s}^{d_s} K_{b_1 \dots b_s}^{c_1 \dots c_r} \quad (3.12)$$

3.2 仿射联络与协变微分

外微分算子 d 作用在微分形式上, 它是一般全微分的推广, 无需附加结构。李导数 L_X 可定义在各种张量场上, 但是要求在流形上有一个已知的确定切向量场 X 。

下面引入协变微商也可定义在各种张量场上, 但是必须对流形附加新的结构: **仿射联络**。定义一个协变微分算子 ∇ 在张量丛截面间给出一个映射:

$$\nabla : \mathcal{T}_s(M) \rightarrow \mathcal{T}_{s+1}(M), \quad K \rightarrow \nabla K = \frac{\Delta K}{\Delta x^i} dx^i$$

∇K 称为张量场 K 的**绝对协变微分** (absolute covariant derivative), 简称**协变微分**。可以由以下四个特点确定:

- 保持张量空间的线性结构:

$$\nabla(aK + bK') = a\nabla K + b\nabla K' \quad (3.13)$$

- 满足微分算子的 Leibniz 法则:

$$\begin{aligned} \nabla(K \otimes K') &= (\nabla K) \otimes K' + K \otimes \nabla K' \\ \nabla \langle \omega, X \rangle &= \langle \nabla \omega, X \rangle + \langle \omega, \nabla X \rangle \end{aligned} \quad (3.14)$$

- 对函数 $f \in \mathcal{F}(M)$ 作用相当于全微分:

$$\nabla f = df \quad (3.15)$$

- 可与以上三特点相自洽地定义对 $X \in \mathcal{X}(M)$ 的协变微分:

$$\begin{aligned} X &= \xi^a(x)e_a(x) \\ \nabla X &= d\xi^a(x)e_a(x) + \xi^a(x)\nabla e_a(x) \end{aligned} \quad (3.16)$$

可将 ∇e_a 表达为:

$$\nabla e_a(x) = \Gamma_a^b(x)(x)e_b(x), \quad \Gamma_a^b(x) = \Gamma_{ia}^b(x)dx^i \in \Lambda^1(M) \quad (3.17)$$

$\Gamma_a^b(x)$ 为 n^2 个 1 形式, 而 $\Gamma_{ia}^b(x)$ 为流形 M 上 n^3 个连续函数, 称为**联络函数**。即在流形 M 上给定 n^2 个联络 1 形式 Γ_a^b 时, 可以在 x 点和 $x + dx$ 点的切空间基矢建立 1-1 对应的仿射对应:

$$e_a(x + dx) \sim e_a(x) + \nabla e_a(x) = e_a(x) + \Gamma_a^b(x)e_b(x) \quad (3.18)$$

代入式 (3.16) 可得:

$$\nabla X = (d\xi^a + \xi^b \Gamma_b^a) e_a \quad (3.19)$$

下面分析对其他张量场的协变微分, 首先是余切场, 选取与 e_a 对偶的基矢 θ^a , $\langle \theta^a, e_b \rangle = \delta_b^a$, 对该式进行协变微分可得:

$$\begin{aligned} \langle \nabla \theta^a, e_b \rangle + \langle \theta^a, \nabla e_b \rangle &= 0 \\ \langle \nabla \theta^a, e_b \rangle &= -\langle \theta^a, \Gamma_b^c e_c \rangle = -\Gamma_b^a, \quad \nabla \theta^a = -\Gamma_b^a \theta^b \end{aligned} \quad (3.20)$$

因此对于余切场 $\omega(x) = \omega_a(x)\theta^a(x) \in \Lambda^1(M)$ 的协变微分可以表示为:

$$\nabla \omega = \nabla(\omega_a \theta^a) = (d\omega_a - \Gamma_a^b \omega_b) \theta^a \quad (3.21)$$

类似可对任意 (r, s) 型张量场 K 作协变导数, 所得 ∇K 为 $(r, s+1)$ 型张量, 以 $(1, 1)$ 型张量场为例:

$$\nabla K = (dK + \Gamma_c^a K_b^c - \Gamma_b^c) e_a \otimes \theta^b \in \mathcal{T}_2^1(M) \quad (3.22)$$

通常我们需要求张量场沿流形某特定方向的协变导数, 张量场 K 沿 X 方向对协变导数 $\nabla_X K$ 定义为

$$\nabla_X K = \langle \nabla K, X \rangle \in \mathcal{T}_s(M) \quad (3.23)$$

方向协变导数算子 ∇_X 不改变张量场的类型。同样, 沿自然基方向可以定义:

$$\nabla_i K = \langle \nabla K, \partial_i \rangle \quad (3.24)$$

于是协变微分也定义为:

$$\nabla K = dx^i \nabla_i K \quad (3.25)$$

对切场的协变导数

$$\nabla_i X = (\xi_{;i}^a + \Gamma_{ib}^a \xi^b) e_a \equiv \xi_{;i}^a e_a \quad (3.26)$$

成为切场 X 的协变导数。注意, 切场分量 ξ^a 的普通偏导数 $\xi_{;i}^a$ 的上标不是张量指标, 而其协变导数 $\xi_{;i}^a$ 的上指标是张量指标。因为

$$\xi_{;i}^{'a} = L_b^{-1a} \xi_{;i}^b + L_{b,i}^{-1a} \xi^b, \quad \xi_{;i}^{'a} = L_b^{-1a} \xi_{;i}^b \quad (3.27)$$

对于切向量场则可得

$$\omega_{a;i} \equiv (\nabla_i \omega)_a = \omega_{a,i} - \Gamma_{ia}^b \omega_b \quad (3.28)$$

对于张量场的协变微分和李导数进行比较

$$\begin{aligned}(\nabla_i K)_k^j &= K_{k;i}^j = \partial_i K_k^j - \Gamma_{ik}^l K_l^j + \Gamma_{il}^j K_k^l \\(L_X K)_k^j &= \xi^i \partial_i K_k^j + \partial_k \xi^l K_l^j - \partial_l \xi^j K_k^l\end{aligned}\quad (3.29)$$

二者很像，但有实质区别。由协变导数的定义可知，沿不同方向的协变导数可以线性相加：

$$\nabla_{fX+gY} K = f\nabla_X K + g\nabla_Y K, \forall f, g \in \mathcal{F}(M) \quad (3.30)$$

而对李导数只有

$$L_{aX+bY} K = aL_X K + bL_Y K, \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (3.31)$$

注意对联络 1 形式 Γ_b^a 的指标 a, b 也不是张量指标，因为

$$\Gamma_b'^a = L_b^{-1a} \Gamma_c^b L_d^c + L_c^{-1a} dL_d^c \quad (3.32)$$

即联络场不是张量场，不是几何量。联络系数 $\{\Gamma_i^a b(x)\}$ 是流形 M 上一组连续函数，选择联络系数有很大任意性，仅要求当切丛标架变换时它们按式 (3.32) 进行变换，给定坐标卡集后，与微分流形结构相关的联络系数集合总是存在的，即存在以下定理：

Theorem 3.1. 令 M 为仿紧 (paracompact) 光滑流形，则 M 上存在整体光滑联络。

证明略。

3.3 曲率形式与曲率张量

将式 (3.32) 写成 Pfaff 方程：

$$\Gamma' = L^{-1}(\Gamma + d)L \quad (3.33)$$

设法从 Frobenius 定理出发，得到满足可积条件的几何量。先将上式化为：

$$L\Gamma' = \Gamma L + dL \quad (3.34)$$

对上式做外微分运算得

$$dL \wedge \Gamma' + Ld\Gamma' = d\Gamma L - \Gamma \wedge dL \quad (3.35)$$

再次利用 Pfaffa 方程可得

$$L(\Gamma' \wedge \Gamma' + d\Gamma') = (d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma)L \quad (3.36)$$

令 $\Omega = d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma$ ，称为流形 M 上由联络 Γ 决定的曲率 2 形式方阵，其中矩阵元为：

$$\Omega_b^a = d\Gamma_b^a + \Gamma_c^a \wedge \Gamma_b^c \quad (3.37)$$

称其为**曲率 2 形式**，在局域标架场作线性变换时：

$$\Omega' = L^{-1} \Omega L \quad (3.38)$$

即曲率 2 形式为流形上张量场，是流形 M 上具有实质意义的几何量。其特性与流形 M 的整体拓扑性质有关。对曲率 2 形式微分的结构方程微分可得

$$d\Omega = \Omega \wedge \Gamma - \Gamma \wedge \Omega \quad (3.39)$$

该式即为结构方程的可积条件, 称为 **Bianchi 恒等式**, 是流形上联络结构所必须满足的条件。在流形上取局域坐标系后, 曲率 2 形式可以表示为

$$\Omega_b^a = \frac{1}{2} R_{bjk}^a dx^j \wedge dx^k, \quad R_{bjk}^a \in \mathcal{F}(M) \quad (3.40)$$

系数 R_{bjk}^a 是 M 上的光滑函数, 称为曲率张量系数, 它的四个指标都是张量指标, 是 (1,3) 型张量的分量。可用联络系数和其导数表示为:

$$R_{bik}^a = \Gamma_{bk,i}^a - \Gamma_{bi,k}^a + \Gamma_{ic}^a \Gamma_{kb}^c - \Gamma_{kc}^a \Gamma_{ib}^c \quad (3.41)$$

下面我们进一步分析对张量场进行两次协变微分的运算, 注意, 对于协变微分:

$$[\nabla_i, \nabla_k] \neq 0, \quad [\nabla_X, \nabla_Y]fZ \neq f[\nabla_X, \nabla_Y]Z \text{ (when } [X, Y] \neq 0) \quad (3.42)$$

即算子 $[\nabla_X, \nabla_Y]$ 不保持张量的线性结构, 不是张量算子。为了引入有几何意义的张量算子, 引入

$$R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]} \quad (3.43)$$

此算子相对切场 X, Y 呈斜双线性, 即具有性质:

$$R(X, Y) = -R(Y, X), \quad R(fX + gY, Z) = fR(X, Z) + gR(Y, Z), \quad fR(X, Y)Z \quad (3.44)$$

这是保持张量场线性结构的张量算子, $R(X, Y)$ 为 (1,1) 型张量算子。式 (3.43) 表明不存在 X 到 ∇_X 的同态对应, 而曲率张量算子 $R(X, Y)$ 正是对应同态对应的偏差。当在流形 M 上选定局域坐标系并在切丛上选定局域坐标架后, 可由 R 对基矢的作用得到张量场 R 的分量:

$$R(\partial_i, \partial_k)e_b = R_{bik}^a e_a \quad (3.45)$$

用联络系数表达时, 用上式得到的系数 R_{bik}^a 与式 (3.41) 相同。即曲率算子 $R(X, Y)$ 引入的曲率张量就是利用曲率 2 形式 Ω_b^a 得到的曲率张量。对曲率张量上下指标做缩并运算, 可以得到二阶协变对称张量场: **Ricci 张量场** $\mathcal{R} = \{\mathcal{R}_{kl}\}$

$$\mathcal{R}_{kl} = \sum_{i=1}^n R_{kil}^i = \frac{\partial \Gamma_{ki}^i}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial x^i} + \Gamma_{jl}^i \Gamma_{ki}^j - \Gamma_{ji}^i \Gamma_{kl}^j \text{ (?????有点问题待解决)} \quad (3.46)$$

另一种可能的缩并给出反对称张量 $S = \{S_{jk}\}$

$$S_{jk} = R_{ljk}^l = \frac{\partial \Gamma_{kl}^l}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{jl}^l}{\partial x^k} \quad (3.47)$$

3.4 测地线方程切丛联络的挠率张量

给定曲线 C 本身的切向量 X 可以表示为:

$$X = \frac{d}{dt} = \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (3.48)$$

当向量场 $Y = \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ 满足:

$$\nabla_X Y = \frac{dx^i}{dt} \left(\frac{\partial \eta^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k \eta^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k} = 0 \quad (3.49)$$

则称向量场 Y 沿曲线 C 平行输运, 沿曲线 C 的平行输运在流形 M 的 C 上各点的切空间之间建立了同构对应。平行输运于自己切矢量的曲线称为测地线, 在测地线上各点均满足:

$$\nabla_X X = 0 \quad (3.50)$$

可以得到测地线方程组:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \left(\Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} \right) = 0 \quad (3.51)$$

此为二阶常微分方程, 过流形 M 上任一点 p , 沿方向 X_p 恰有一条测地线。由上方程可以看出, 当取局域坐标自然基时, 仅**联络的对称部分对测地线方程有贡献**。当在一流形上定义了两个联络, 其**联络系数的对称部分相同, 则所确定测地线相同**。下面定义两个不同的联络的 ∇'_X, ∇_X , 由这两个联络的差可定义映射:

$$\begin{aligned} B: \mathcal{X} \times \mathcal{X} &\rightarrow \mathcal{X} \\ B(X, Y) &\equiv \nabla'_X Y - \nabla_X Y \end{aligned} \quad (3.52)$$

易证映射 $B(X, Y)$ 是 $\mathcal{F}(M)$ 的双线性映射, 即:

$$B(fX, Y) = B(X, fY) = fB(X, Y) \quad (3.53)$$

所以 B 为 $(1, 2)$ 型张量场, 与坐标系的选取无关, 当选取自然坐标基时:

$$B(X, Y) = \xi^k \eta^l (\Gamma_{kl}^i - \Gamma_{kl}^i) \partial_i \quad (3.54)$$

该映射将流形上具有相同测地线的联络归于一个等价类。在同一类联络中, 其差别在于张量 B 的反对称部分 A :

$$\begin{aligned} A(X, Y) &= \frac{1}{2} \{B(X, Y) - B(Y, X)\} \\ &= \frac{1}{2} \{[\nabla'_X Y - \nabla'_Y X] - [\nabla_X Y - \nabla_Y X]\} \end{aligned} \quad (3.55)$$

定义一个 $\mathcal{F}(M)$ 斜双线性映射 T :

$$T(X, Y) \equiv \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad (3.56)$$

易证映射 T 有性质:

$$T(X, Y) = -T(Y, X), \quad T(fX, gY) = fgT(X, Y) \quad (3.57)$$

故 T 为 $(1, 2)$ 型张量场, 称为**挠率张量 (torsion)**, 利用张量 T 可以将 A 写为:

$$A(X, Y) = \frac{1}{2} \{T'(X, Y) - T(X, Y)\} \quad (3.58)$$

即联络差张量 B 的反对称部分, 就是挠率张量的差。**挠率为零的联络称为对称联络**, 在具有相同测地线的联络联络等价类中, 仅有一个对称联络。**联络的挠率张量是用来区别联络与同一类联络中的对称联络的差别**, 同一等价类中, 联络差张量 B 的对称部分为零, 仅有反对称部分 A , 即:

$$B(X, Y) = A(X, Y) \quad (3.59)$$

在这等价类中任意一个联络都可分解为它的挠率张量的二分之一和一个对称联络之和，即：

$$\nabla_X Y = \nabla'_X Y - A(X, Y) = \nabla'_X Y + \frac{1}{2}T(X, Y) \quad (3.60)$$

其中 ∇'_X 为对称联络定义的协变导数， $T'(X, Y) = 0$ 。如果联络 ∇ 无挠，则满足：

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad (3.61)$$

挠率张量 T 正是上式两端之差。当选取坐标基 $\{e_a, a = 1, \dots, n\}$ 后：

$$T(e_a, e_b) = \nabla_{e_a} e_b - \nabla_{e_b} e_a - [e_a, e_b] = T_{ab}^c e_c \quad (3.62)$$

T_{ab}^c 为活动标架基中**挠率张量系数**。由联络系数定义知：

$$\nabla_{e_a} e_b = e_a^i \nabla_i e_b = e_a^i \Gamma_{ib}^c e_c \quad (3.63)$$

由上两式得到

$$T_{ab}^c = e_a^i \Gamma_{ib}^c - e_b^i \Gamma_{ia}^c - f_{ab}^c \quad (3.64)$$

注意到结构函数 f_{ab}^c 相对于其下指标反对称，故挠率张量的分量 T_{ab}^c 对其下指标反对称，于是可以利用其组成挠率 2 形式 τ^c ：

$$\begin{aligned} \tau^c &= \frac{1}{2} T_{ab}^c \theta^a \wedge \theta^b \\ &= d\theta^c + \Gamma_b^c \wedge \theta^b \end{aligned} \quad (3.65)$$

对上式进行外微分得：

$$d\tau^a = \Omega_b^a \wedge \theta^b - \Gamma_b^a \wedge \tau^b \quad (3.66)$$

此式也可以用挠率张量系数 $T_a^c b$ 及其协变导数表达为：

$$\nabla_a T_{bc}^d + \nabla_b T_{ca}^d + \nabla_c T_{ab}^d = R_{abc}^d + R_{bca}^d + R_{cab}^d \quad (3.67)$$

以上两式合称为仿射联络流形的 **Cartan** 结构方程组。对结构方程再进行一次外微分得到的就是仿射流形联络结构需要满足的 **Bianchi** 恒等式。下面分析任意张量场两次协变导数

	微分形式表达式	张量分量表达式
Cartan 结构方程	$\Omega_b^a = d\Gamma_b^a + \Gamma_c^a \wedge \Gamma_b^c$	$R_{bik}^a = \Gamma_{bk,i}^a - \Gamma_{bi,k}^a + \Gamma_{ic}^a \Gamma_{kb}^c - \Gamma_{kc}^a \Gamma_{ib}^c$
	$\tau^c = d\theta^c + \Gamma_b^c \wedge \theta^b$	$T_{ab}^c = e_a^i \Gamma_{ib}^c - e_b^i \Gamma_{ia}^c - f_{ab}^c$
Bianchi 恒等式	$d\Omega_b^a = \Gamma_c^a \wedge \Gamma_b^c - \Gamma_c^a \wedge \Gamma_b^c$	$R_{lij;m}^k + R_{ljm;i}^k + R_{lmi;j}^k = 0$
	$d\tau^a = \Omega_b^a \wedge \theta^b - \Gamma_b^a \wedge \tau^b$	$\nabla_a T_{bc}^d + \nabla_b T_{ca}^d + \nabla_c T_{ab}^d = R_{abc}^d + R_{bca}^d + R_{cab}^d$

的交换秩序的表达式 (Ricci identity)，对于标量场：

$$\begin{aligned} \nabla_i f &\equiv f_{,i}, \quad \nabla_i \nabla_j f = \partial_i f_{,j} + \Gamma_{ij}^k f_{,k} \\ [\nabla_i, \nabla_j] f &= (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) f_{,k} = T_{ij}^k \nabla_k f \end{aligned} \quad (3.68)$$

类似的对切场：

$$[\nabla_i, \nabla_j] \xi^k = R_{lij}^k \xi^l + T_{ij}^l \nabla_l \xi^k \quad (3.69)$$

对余切场:

$$[\nabla_i, \nabla_j]\omega_k = -R_{kij}^l \omega_l + T_{ij}^l \nabla_l \omega_k \quad (3.70)$$

即对 R_{kij}^l 项对每个逆变指标贡献正号, 对每个协变指标贡献负号。可以看出, 联络的曲率和挠率起十分不同的作用。联络决定张量的平行移动法则, 挠率相当于含联络平移群的结构函数, 而曲率相当于平移群李代数的中心荷。

3.5 协变外微分算子

曲率 2 形式 Ω_b^a 和挠率 2 形式 τ^a 都是具有张量指标的微分形式, 可以引入协变外微分算子 D , 可作用在取值为张量的微分形式上:

$$\begin{aligned} D: \mathcal{T}_s \otimes \Lambda^k &\rightarrow \mathcal{T} \otimes \Lambda^{k+1} \\ K\omega &\rightarrow D(K\omega) = (\nabla K) \wedge \omega + K d\omega \end{aligned} \quad (3.71)$$

对具有逆变指标函数的协变外微分

$$D\xi^a = d\xi^a + \Gamma_b^a \xi^b, \quad D\xi = d\xi + \Gamma\xi = (d + \Gamma)\xi \quad (3.72)$$

当坐标架发生变化时, 其协变外微分的变化为:

$$D'\xi' = d\xi' + \Gamma'\xi' = d(L^{-1}\xi) + (L^{-1}\Gamma L + L^{-1}dL)L^{-1}\xi = L^{-1}D\xi \quad (3.73)$$

即协变微分算子使得张量微分形式映射到同类型张量的高一阶微分形式上。对任意张量值的微分形式的作用为:

$$D = d + [\Gamma,] \quad (3.74)$$

这里的括号, 对所有逆变指标左作用 Γ , 对所有协变指标乘因子 $(-1)^{k+1}$ 后右作用 Γ , 如果张量没有逆(协)变指标, 则不对张量进行左(右)作用。例如对曲率 2 形式, 可以将 Bianchi 恒等式写为

$$D\Omega_b^a \equiv d\Omega_b^a + \Gamma_c^a \wedge \Omega_b^c - \Omega_c^a \wedge \Gamma_b^c \quad (3.75)$$

同样, 协变微分保持张量的变换性质。注意外微分算子 d 具有性质 $d^2 = 0$, 而协变外微分

	具有张量指标的微分形式	用 D 表达的矩阵形式
Cartan 结构方程	$\Omega_b^a = d\Gamma_b^a + \Gamma_c^a \wedge \Gamma_b^c$	$\Omega = D\Gamma^*$
	$\tau^c = d\theta^c + \Gamma_b^c \wedge \theta^b$	$\tau = D\theta$
Bianchi 恒等式	$d\Omega_b^a = \Gamma_c^a \wedge \Gamma_b^c - \Omega_c^a \wedge \Gamma_b^c$	$D\Omega = 0$
	$d\tau^a = \Omega_b^a \wedge \theta^b - \Gamma_b^a \wedge \tau^b$	$D\tau = \Omega \wedge \theta$

* 注意联络 Γ 本身的指标不是张量指标, 这里只是形式的表达式

算子 D 不再具有上述性质, D^2 运算的表达式为:

$$D^2 = [\Omega, \cdot] \quad (3.76)$$

括号理解为, 对每个逆变指标左外乘 Ω , 每个逆变指标右外乘 Ω 后乘 (-1) , 没有张量指标的部分可以抽出外乘。如设 $K \in \mathcal{T}_1^1(M)$:

$$\begin{aligned} DK &= dK + [\Gamma, K] = dK + \Gamma K - K\Gamma \\ D^2K &= d(DK) + [\Gamma, DK] = (d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma)K - K(d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma) = [\Omega, K] \end{aligned} \quad (3.77)$$

最后, 讨论张量值的微分形式的李导数算子:

$$L_X = d \cdot i_X + i_X \cdot d - [L_\xi,] \quad (3.78)$$

其中 L_ξ 为由 $\{\frac{\partial \xi^k}{\partial x^l}\}$ 排成的的方阵, ξ^k 为向量场 X 的分量 ($X = \xi^k \partial_k$), 这里括号理解为被作用微分形式有逆变 (协变) 指标时, 对所有逆变 (协变) 指标左 (右) 作用 L_ξ (乘 (-1))。例如, 对取值为 (1,1) 型张量的微分形式 Σ :

$$L_X \Sigma = d \cdot i_X \Sigma + i_X d \Sigma - L_\xi \Sigma + \Sigma L_\xi \quad (3.79)$$

4 黎曼流形

本章引入流形的度规结构，使流形成黎曼流形，这时流形将有更丰富的几何结构。

4.1 黎曼度规与黎曼联络

设 $G \in \mathcal{T}_2^0(M)$ 为二阶协变对称张量场，满足如下双线性映射：

$$X, Y \rightarrow G(X, Y) = G(Y, X), \quad X, Y \in \mathcal{X}(M), G(X, Y) \in \mathcal{F}(M) \quad (4.1)$$

选取自然坐标基后：

$$X = \xi^i(x) \partial_i, Y = \eta^j(x) \partial_j, \quad G(X, Y) = g_{ij}(x) \xi^i(x) \eta^j(x), \quad g_{ij}(x) = G(\partial_i, \partial_j) \quad (4.2)$$

Theorem 4.1. 任意实对称矩阵 \hat{G} 都相合于一个对角形矩阵，其对角上元素等于 $0, +1, -1$

$$\hat{G} = \hat{L}^t \{+1, \dots, +1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0\} \hat{L}, \quad \det \hat{L} \neq 0 \quad (4.3)$$

其中有 p 个 $+1$ 和 q 个 -1 ， $p+q=r$ 为 \hat{G} 的秩， $p-q=s$ 为 \hat{G} 的符号差。

现在设 M 上存在二阶对称非奇异协变张量场，即 $\hat{G} = (g_{ij})$ 对称非奇异， $r=n$ ，若符号差 $s=n$ ，则称矩阵 (g_{ij}) 恒正。

Definition 4.1. 如在流形 M 上存在处处可微恒正二阶对称协变张量场 G ，则称流形为黎曼流形， G 为黎曼流形的基本张量场，即度规张量场

利用上述定义的度规张量场可定义流形的度量结构¹，如微分长度和曲线 $x(t)$ 的弧长

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad \Delta s = \int \left(g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \right)^{\frac{1}{2}} dt \quad (4.4)$$

¹ 可以将定义条件放宽，若将恒正条件放宽为非奇异，则相应流形称为广义黎曼流形，比如四维闵氏空间就是广义黎曼流形，本节各公式一般对广义黎曼流形均适用。

可以定义在流形 p 点上切矢的标积、长度：

$$X_p \cdot Y_p = G(X, Y)_p = g_{ij}(p) \xi^i(p) \eta^j(p), \quad |X_p| = (g_{ij}(p) \xi^i(p) \xi^j(p))^{1/2} \quad (4.5)$$

以及两切矢的夹角和度规矩阵 (g_{ij}) 的逆矩阵 (g^{ij})

$$\cos \theta = \frac{X_p \cdot Y_p}{|X_p| |Y_p|}, \quad g^{ij} = \frac{A^{ji}}{\det(g_{ij})} \quad (4.6)$$

其中 A^{ji} 为元素 g_{ji} 的代数余子式。度规张量使得每点的切空间和余切空间建立了 $1-1$ 对应的映射，使得所有张量的分量指标可以上升或者下降：

$$g_{ij} \xi = \xi_i, \quad \xi^i = g^{ij} \xi_j \quad (4.7)$$

在黎曼流形上，可选特殊的保度规联络，向量按此联络平行输运时保持向量的长度和夹角不变，即要求：

$$\nabla G = 0, \quad \nabla_k g_{ij} = g_{ij;k} = \partial_k g_{ij} - \Gamma_{ki}^l g_{lj} - \Gamma_{kj}^l g_{li} = 0 \quad (4.8)$$

满足以上条件的联络称为**黎曼流形允许联络**，满足该条件的联络 Γ_{ik}^m 必可表示为:

$$\Gamma_{ik}^m = \left\{ \begin{matrix} m \\ ik \end{matrix} \right\} + K_{ik}^m \quad (4.9)$$

其中第一项为 Christoffel 符号:

$$\left\{ \begin{matrix} m \\ ik \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{mj} (\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{kj} - \partial_j g_{ik}) \quad (4.10)$$

第二项为 Contorsion 张量:

$$K_{ik}^m = \frac{1}{2} g^{mj} (T_{ik}^l g_{lj} + T_{jk}^l g_{li} + T_{ji}^l g_{lk}) \quad (4.11)$$

其中 T_{ik}^l 即为自然基中挠率张量的分量，如果进一步要求挠率张量为零，则称该联络为**黎曼联络**或者 **Levi-Civita 联络**，并可唯一确定:

$$\Gamma_{ik}^m = \left\{ \begin{matrix} m \\ ik \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{mj} (\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{kj} - \partial_j g_{ik}) \quad (4.12)$$

Theorem 4.2. 在 (广义) 黎曼流形上，存在唯一的无挠保度规联络。

Theorem 4.3. 在局域紧光滑流形 M 上允许存在正定的度规。

4.2 黎曼流形上微分形式

本节主要介绍 Hodge* 算子、余微分 δ 算子、Laplace Δ 算子。首先讨论 Hodge* 运算，对 n 维流形，其使 r 形式映射到 $(n-r)$ 形式:

$$\alpha_r = \frac{1}{r!} f_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \quad (4.13a)$$

$$* \alpha_r = \frac{1}{r!(n-r)!} f_{i_1 \dots i_r} \epsilon_{k_1 \dots k_{n-r}}^{i_1 \dots i_r} dx^{k_1} \wedge \dots \wedge dx^{k_{n-r}} \quad (4.13b)$$

其中 $\epsilon_{k_1 \dots k_{n-r}}^{i_1 \dots i_r}$ 是推广的 Levi-Civita 符号

$$\epsilon_{i_1 \dots i_n} = |g|^{\frac{1}{2}} \delta_{i_1 \dots i_n}^{1 \dots n}, \quad g = \det(g_{ij}) \quad (4.14)$$

Hodge* 是保持张量线性结构的线性算子，可由它对微分形式基地的作用完全确定。连续两次 Hodge* 运算仍为微分形式间线性映射:

$$* * \alpha_r = \text{sgn}(g) \begin{cases} \alpha_r, & n \text{ 为奇数} \\ (-1)^r \alpha_r, & n \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (4.15)$$

$*1$ 是一个 n 形式，在坐标变换下不变，是流形上几何量，称为 M 上**最优 n 形式**:

$$\tau = |g|^{\frac{1}{2}} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = *1 \quad (4.16)$$

利用积分测度 τ , 对紧致闭流形 M , 可在无穷维向量空间 $\Lambda^*(M)$ 上定义整体内积, 对于两个任意 r 形式:

$$\alpha_r = \frac{1}{r!} f_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}, \quad \beta_r = \frac{1}{r!} h_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \quad (4.17)$$

$$\alpha_r \wedge * \beta_r = \beta_r \wedge * \alpha_r = \frac{1}{r!} f_{i_1 \dots i_r} h^{i_1 \dots i_r} * 1 \quad (4.18)$$

于是当 M 为紧致流形时, 可以定义两个同阶微分形式的整体内积, 采用归一化 $\int_M * 1 = 1$, 有:

$$(\alpha; \beta) = \int_M \alpha \wedge * \beta = \int_M \beta \wedge * \alpha, \quad (\alpha; \beta) = (\beta; \alpha) = \text{sgn}(g)(*\alpha, *\beta) \quad (4.19)$$

对于恒正度规还有 $(\alpha; \alpha) \geq 0$, 仅当 $\alpha = 0$ 取等。

进一步将 Hodge* 运算和外微分运算结合, 定义出余微分算子:

$$\delta = \text{sgn}(g)(-1)^{nr+n+1} * d* = \text{sgn}(g) \begin{cases} - * d*, & n \text{ 为偶} \\ (-1)^r * d*, & n \text{ 为奇} \end{cases} \quad (4.20)$$

δ 为负一阶斜微分算子, 在整体标量积下, 以下两式成立:

$$(\alpha_r; d\beta_{r-1}) = (\delta\alpha_r; \beta_{r-1}), \quad (\alpha_r; \theta^a \wedge \beta_{r-1}) = g^{ab}(i_b \alpha_r; \beta_{r-1}) \quad (4.21)$$

余微分算子有性质

$$\delta^2 = 0 \quad (4.22)$$

满足 $\delta\alpha=0$, 则称 α 为余闭形式, 如果 $\alpha = \delta\beta$ 则称 α 为余正合形式。

定义 Laplace 算子

$$\Delta = (d + \delta)^2 = d\delta + \delta d \quad (4.23)$$

Δ 算子是同阶微分形式线性空间二微分算子, 称为调和算子, 如果 $\Delta\alpha_r = 0$ 则称 α_r 为 r 阶调和形式。零阶调和形式就是一般调和函数。

利用正交活动标价, 可将作用于微分形式上的 d, δ, Δ 算子表示为:

$$d\alpha = \theta^a \wedge \nabla_a \alpha \in \Lambda^{k+1}(M) \quad (4.24)$$

$$\delta\alpha = -g^{ab} i_a \nabla_b \alpha \in \Lambda^{k-1}(M) \quad (4.25)$$

$$\Delta = -\nabla_{e_a \cdot e_a}^2 - \theta^a \wedge i_b R(e_a, e_b) \quad (4.26)$$

4.3 黎曼曲率张量

黎曼流形上存在唯一无挠保度规联络: 黎曼联络:

$$\Gamma_{ik}^m = \left\{ \begin{matrix} m \\ ik \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{mj} (\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{kj} - \partial_j g_{ik}) \quad (4.27)$$

可以由该联络得到有几何意义的曲率张量场:

$$R_{kij}^l = \Gamma_{jk,i}^l - \Gamma_{ik,j}^l + \Gamma_{im}^l \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^l \Gamma_{ik}^m \quad (4.28)$$

进一步可以得到四阶协变曲率张量:

$$\begin{aligned} R_{lkij} &= g_{lm} R_{kij}^m \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} \right) + g_{ln} (\Gamma_{im}^n \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^n \Gamma_{ik}^m) \end{aligned} \quad (4.29)$$

四阶协变曲率张量有很高的对称性²:

1. 相对后两指标反对称: $R_{lkij} = -R_{lkji}$
2. 相对前两指标反对称: $R_{lkij} = -R_{klji}$
3. 后三指标循环置换和为零: $R_{l[kij]} = 0$
4. 前对与后对指标交换对称: $R_{lkij} = R_{ijlk}$
5. 协变导数满足 Bianchi 等式: $R_{lk[ij;m]} = 0$

² 1 可由曲率张量算子 $R(X, Y)$ 相对宗量反对称得到, 2 可由 $R(X, Y)$ 保度规得到, 3 可由挠率结构方程的可积条件 $D\tau = \Omega \wedge \theta$ 和无挠条件得到, 4 可由前三条得到, 5 可由曲率结构方程的可积条件得到

因此, 黎曼曲率张量的 n^4 个分量并不独立, 只有 $\frac{1}{12}n^2(n^2 - 1)$ 个独立分量。

对 $\{R_{kij}^l\}$ 收缩一对指标可以得到对称的 Ricci 张量:

$$\mathcal{R}_{kj} = R_{klj}^l = g^{li} R_{lkij}, \quad \mathcal{R}_{kj} = \mathcal{R}_{jk} \quad (4.30)$$

进一步缩并可以得到标曲率:

$$\mathcal{S} = g^{jk} \mathcal{R}_{jk} \quad (4.31)$$

将 Bianchi 等式 $R_{k[ij;m]}^l = 0$ 的 l, i 缩并得:

$$\mathcal{R}_{kj;m} + R_{kjm;l}^l - \mathcal{R}_{km;j} = 0 \quad (4.32)$$

乘 g^{km} 并利用度规张量协变导数为零得约化 Bianchi 等式:

$$\nabla_k (\mathcal{R}_j^k - \frac{1}{2} \delta_j^k \mathcal{S}) = 0 \quad (4.33)$$

爱因斯坦张量为:

$$G_{kl} = \mathcal{R}_{kl} - \frac{1}{2} g_{kl} \mathcal{S} \quad (4.34)$$

约化 Bianchi 等式表明 $\nabla^k G_{kl} = 0$, 正是广义相对论的出发点。

4.4 等长变换和共形变换 曲率张量的分解

对于黎曼流形, 坐标变换下, 变换后的度规为:

$$g'_{ij}(x') = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} g_{kl}(x) \quad (4.35)$$

若满足 $g'_{ij}(x') = g_{ij}(x')$, 则称度规张量的形式不变, 这样的变换称为**等长变换 (isometry)**。如果向量场 $X = \xi^i(x) \partial_i$ 满足:

$$L_X g_{ij} = \nabla_i \xi_j + \nabla_j \xi_i = 0 \quad (4.36)$$

则称 X 为此度规张量场的 **Killing 矢量**, 沿 Killing 矢量方向的无穷小同胚变换为等长变换。Killing 矢量集合形成李代数, 在 n 维流形上, 最多有 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 个独立的 Killing 矢量。

对于具有度规张量场 $\{g_{ij}(x)\}$ 的黎曼流形, 令 $\rho(x)$ 为其上恒正函数, 则可以定义新的度规

$$\tilde{g}_{ij}(x) = \rho(x)g_{ij}(x) \quad (4.37)$$

这种度规的改变, 改变了各向量的长度, 但是不改变两向量的夹角, 称为度规的**共形变换**。若有 $X = \xi^i(x)\partial_i$ 满足:

$$L_X g_{ij}(x) = \rho(x)g_{ij}(x) \quad (4.38)$$

这时 X 称为**共形 Killing 矢量**, 是无穷小共形变换的生成元。

对于具有度规张量的黎曼流形 (M, G) , 如果能通过共形变换转化为平直空间 ($\tilde{g}_{ij} = \delta_{ij}$), 则称 M 为**共形平空间**, 或称**共形欧里几德空间**。

在黎曼流形上可选正交活动标架 $\{e_a\}_1^n$, 按黎曼联络平行移动保持标架的正交性, 联络的和乐群可约化为 $O(n)$, 曲率张量分量可以按照 $O(n)$ 的不可约表示分解为三个部分

$$R_{abcd} = W_{abcd} + S_{abcd} + G_{abcd} \quad (4.39)$$

其中 G_{abcd} 与 R_{abcd} 有着相同的置换对称性和双重迹。

$$G_{abcd} = \frac{\mathcal{S}}{n(n-1)} (g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}), \quad g^{ac}g^{bd}G_{abcd} = \mathcal{S} \quad (4.40)$$

令 S_{ab} 表示 Ricci 张量的无迹部分, 可以与 g_{ab} 组成与 R_{abcd} 有相同置换对称性的张量:

$$S_{abcd} = \frac{1}{n-2} (g_{ac}S_{bd} + g_{bd}S_{ac} - g_{ad}S_{bc} - g_{bc}S_{ad}), \quad S_{ab} = \mathcal{R}_{ab} - \frac{1}{n}g_{ab}\mathcal{S} \quad (4.41)$$

其迹正好为 $g^{ac}S_{abcd} = S_{bd}$ 。而 Weyl 张量部分:

$$W_{abcd} = R_{abcd} - S_{abcd} - G_{abcd} \quad (4.42)$$

是黎曼曲率张量中完全无迹部分, 对任意一对指标缩并为零。三部分在正交标架转动时各自相互转换, 各自形成不变子空间, 有相同的置换对称性。

1. 1 维流形曲率张量必为零, $R_{1111} = 0$, 一条曲线的黎曼曲率必为零。
2. 2 维流形 R_{abcd} 仅有一个独立分量 $R_{1212} = \frac{1}{2}\mathcal{S}$
3. 3 维流形曲率张量独立分量个数为 6, 恰好为 \mathcal{R}_{ab} 的独立分量个数, 这时

$$R_{abcd} = g_{ac}\mathcal{R}_{bd} + g_{bd}\mathcal{R}_{ac} - g_{ad}\mathcal{R}_{bc} - g_{bc}\mathcal{R}_{ad} - \frac{1}{2}\mathcal{S}(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}) \quad (4.43)$$

这时 $R_{abcd} = S_{abcd} + G_{abcd}$, 仅当 $n \geq 4$ 才有非零的 Weyl 分量。

Weyl 张量又称共形张量, 在**度规的共形变化下不变**。非零 Weyl 数为:

$$N_c = \frac{1}{12}n^2(n^2 - 1) - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(n-3) \quad (4.44)$$

它们是黎曼曲率在共形变换下的不变量数。等长变换是一种特殊的共形变换, Ricci 张量的本征值 λ 还可组成 n 个不变量:

$$\det(R_{ab} - \lambda g_{ab}) = 0 \quad (4.45)$$

故黎曼曲率的等长不变量数为:

$$N_g = N_c + n = \frac{1}{12}n(n-1)(n-2)(n+3) \quad (4.46)$$

4.5 截面曲率 等曲率空间

本节分析流形在一点的各向异性问题。对于流形上任意四个向量场 $X = \xi^i \partial_i, Y = \eta^j \partial_j, Z = \zeta^k \partial_k, T = \tau^l \partial_l$

$$R(X, Y, Z, T) \equiv \langle R(Z, T)Y, X \rangle = R_{ijkl} \xi^i \eta^j \zeta^k \tau^l \quad (4.47)$$

曲率张量有很高的对称性，另一方面，可以定义：

$$\hat{G}(X, Y, Z, T) = G(X, Z)G(Y, T) - G(Y, Z)G(X, T) \quad (4.48)$$

与 $R(X, Y, Z, T)$ 具有相同的对称性。当 $X = Z, Y = T$ 时

$$\hat{G}(X, Y, X, Y) = G(X, X)G(Y, Y) - [G(X, Y)]^2 \quad (4.49)$$

是以矢场 X, Y 为邻边的平行四边形面积的平方。当 X, Y 互相独立时，上式不为零，令：

$$K(S_p) = \frac{R(X, Y, X, Y)}{\hat{G}(X, Y, X, Y)} = \frac{R_{ijkl} \xi^i \eta^j \xi^k \eta^l}{|X|^2 |Y|^2 - (X \cdot Y)^2} \quad (4.50)$$

称为黎曼流形在点 p 的**截面曲率 (section curvature)**。其中 S_p 表示由 $X, Y \in T_p(M)$ 所张平面。截面曲率又称黎曼截面曲率，由于曲率张量的对称性，它仅与平面 S_p 的方向有关。³黎曼流形在 p 点的各向异性可用该点各方向的截面曲率标志。⁴

当 $K(S_p)$ 与 S_p 方向无关时，则称 M 在点 p 是**迷向的 (isotropic)**。这时可将截面曲率记为 $K(p)$ ，是 M 上标量函数，且有：

$$\begin{aligned} R_{ijkl}(p) &= K(p) [g_{ik}(p)g_{jl}(p) - g_{il}(p)g_{jk}(p)] \\ \Omega_{ij}(p) &= \frac{1}{2} R_{ijkl}(p) \theta^k \wedge \theta^l = K(p) \theta_i \wedge \theta_j \end{aligned} \quad (4.51)$$

若截面曲率 K 在流形上所有点均为同一常数，则称 M 为常曲率空间。

Theorem 4.4. 设流形 M 为维数 $d \geq 3$ 的连通黎曼流形，如流形上所有点均是迷向的，则截面曲率必为常值，即 M 为常曲率空间。

常曲率空间是具有最大对称的相对等长变换的齐性空间⁵，且允许有 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 个 Killing 矢量。反之，如果 n 维流形可以定义一个度规，有 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 个 Killing 矢量，则称此流形具有最大对称空间，必为各点均迷向的齐性黎曼流形，为常曲率空间。

4.6 爱因斯坦引力场方程

场论中物质应由体系的能量动量表达，它们应是引力的源。一般物质能量动量张量可表示为二阶对称张量 $T_{\mu\nu}$ ，由于物理体系在时空平移下不变，故：

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (4.52)$$

爱因斯坦将引力看作是空间本身的度规性质，故在弯曲时空中能量动量守恒应表示为：

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (4.53)$$

爱因斯坦从与度规相容的黎曼联络与曲率导出的二阶对称张量中，仅 $R^{kj} - \frac{1}{2}g^{jk}\mathcal{S}$ 满足协变导数为零，于是爱因斯坦认为两者成比例，从而写出著名的爱因斯坦引力方程⁶：

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{S} = -8\pi G T_{\mu\nu} \quad (4.54)$$

³ 平面 S_p 与流形相切于 p 点，流形上经过 p 与 S_p 相切点所有测底线族形成一个二维曲面，此曲面在该点的 Gauss 曲率就是流形 M 在点 p 的 S_p 方向黎曼截面曲率。

⁴ 流形 M 在 p 点的曲率张量也可由所有二维切子空间的截面曲率唯一确定。

⁵ 对流形上任意一点 p ，存在无穷小等长变换将 p 点变至它邻域内任意一点

⁶ 参考上节对曲率张量对称性的讨论，在时空维数 $n < 3$ 时不存在引力场而时空为平，仅当 $n > 3$ 时才存在非平庸真空引力场。

此处 G 是牛顿引力常数, 将上式乘 $g^{\mu\nu}$ 缩并得 $\mathcal{S} = 8\pi GT^m u_\mu$, 故场方程也可表达为:

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = -8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^\lambda_\lambda) \quad (4.55)$$

引力场方程是度规场 $g_{\mu\nu}$ 的二阶微分方程。注意度规张量本身也是协变导数为零, 引力场方程可以再加入一项, 写为:

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{S} + \lambda g_{\mu\nu} = -8\pi GT_{\mu\nu} \quad (4.56)$$

爱因斯坦在研究宇宙学问题时, 发现不引入 $\lambda g_{\mu\nu}$ 项时方程没有稳定的宇宙解, 于是爱因斯坦建议在引力场方程中增加此项, 此项仅当时空在宇宙学量级时才起作用, 故通常称此项为宇宙学项, 另外此项与量子场论对真空能的估算有关, 故此项也受到人们重视。

4.7 测地线 Jacobi 方程

测地线是通常欧氏空间中直线的推广。通常弯曲空间中称两点间最短距离为测地线, 这样定义的测地线需要先定义度规。未定义度规时也可定义测地线, 即将测定线定义为平行输运自己切矢的曲线。**测地线的这两种定义对黎曼流形是相同的。**

对于自平行曲线, 在前面讨论过, 有测地线方程组:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0 \quad (4.57)$$

下面分析测地线为短程线的几何意义, 流形上经过 p, q 两点的曲线 $\gamma(t)$ ($\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$), 利用度规可定义两点曲线的弧长:

$$S[\gamma] = \int_0^1 \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt \quad (4.58)$$

由欧拉-拉格朗日方程:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0, \quad L = \sqrt{g_{ij}(x) \dot{x}^i \dot{x}^j} \quad (4.59)$$

经过运算可以得到:

$$\ddot{x}^l + \Gamma_{ij}^l \dot{x}^i \dot{x}^j = 0, \quad \Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2}g^{kl} \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) \quad (4.60)$$

可以发现两种定义所得到的测地线方程其实是相同的。

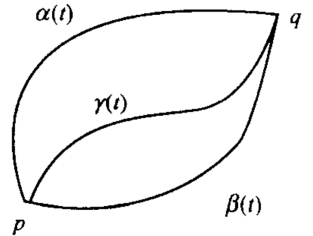
下面分析测地线附近的曲线族的相对行为。考虑映射 $F(u, t)$ 为曲线族, 对于固定 u , $F(u, t) = \gamma_u(t)$ 为从 p 到 q 的曲线, 当 $u = 0$ 时给出测地线 $\gamma(t) = \gamma_0(t) = F(0, t)$, 而 u 变化时曲线在 $\alpha(t), \beta(t)$ 之间连续畸变。用 $V = \frac{\partial}{\partial t}, J = \frac{\partial}{\partial u}$ 为相应于曲线族的切场, 假定它们间关系满足:

$$L_J V = [J, V] = 0 \quad (4.61)$$

即它们中任意一个可被另一个线族变更回自己, 当黎曼流形上取无挠联络时, 测地线 $\gamma(t)$ 上满足:

$$\nabla_V \nabla_V J + R(J, V)V = 0 \quad (4.62)$$

该方程称为 Jacobi 方程, 满足此方程的矢量场 $J = \frac{\partial}{\partial u}$ 称为 Jacobi 场, 它是测地线无穷小更变场 J 满足的方程。如非零的 Jacobi 场在测地线 γ 上的点 p, q 处为零, 则 p, q 为测地线上的共轭点, 表明在 p 处无穷小临近测地线会在 q 处相交, 例如球面上的对定点。



5 欧空间中的黎曼子流形

欧里几德空间是平空间，任意 n 维光滑流形局域像 \mathbb{E}^n ，且所有黎曼流形均可嵌入足够高维的欧氏空间中作为子流形。欧氏空间具有平庸度规、平庸联络、零曲率，而作为其子流形的黎曼度规和联络可由嵌入欧氏空间的平庸度规诱导组成，故我们特别注意研究欧氏空间的子流形。

5.1 黎曼流形的子流形

本节线分析一般黎曼流形中正则子流形。设 m 维流形 M 等长浸入在 n 维流形 N 中， $n = m + p, p > 0$ 。这里我们只分析局域性质，可以认为 M 是嵌入 N 中的。 $i: M \rightarrow N$ 。用 (U, x^j) 表示 M 的局域坐标卡， (V, u^a) 表示 N 的局域坐标卡，则嵌入子流形 M 可表示为 $u^a = u^a(x)$ ，将 M 嵌入，诱导将切空间推入：

$$\begin{aligned} X(x) = \xi^i(x) \partial_i \rightarrow i_* X &= \xi^i L_i^a \partial_a \quad \left(L_i^a = \frac{\partial u^a}{\partial x^i} \right) \\ &= \bar{\xi}^a \partial_a \quad (\bar{\xi}^a = \xi^i L_i^a) \end{aligned} \quad (5.1)$$

在黎曼流形 N 定义有度规

$$ds^2 = \eta_{ab} du^a du^b, \quad \eta_{ab} = \eta_{ba} \quad (5.2)$$

拖回映射得到 M 上度规场 g_{ij} ：

$$ds^2 = \eta_{ab} \frac{\partial u^a}{\partial x^i} \frac{\partial u^b}{\partial x^j} dx^i dx^j = g_{ij} dx^i dx^j, \quad g_{ij} = \eta_{ab} \frac{\partial u^a}{\partial x^i} \frac{\partial u^b}{\partial x^j} = g_{ji} \quad (5.3)$$

称为子流形 M 上诱导度规，使 M 为黎曼流形，任意两切场的内积：

$$(X, Y)_M = \xi^i \eta^j g_{ij} = \xi^i \eta^j \eta_{ab} \frac{\partial u^a}{\partial x^i} \frac{\partial u^b}{\partial x^j} = \bar{\xi}^a \bar{\eta}^b \eta_{ab} = (\bar{X}, \bar{Y})_N \quad (5.4)$$

在不引起混淆时，常将 M 和嵌入像看成等同，忽略下标，均记为 (X, Y) 。

对于两切场的李括号运算，同样可以证明：

$$[\bar{X}, \bar{Y}]|_{u=u(x)} = \overline{[X, Y]} = [X, Y] \quad (5.5)$$

即两切场推入后做李括号运算等价于先做李括号运算再推入，可简记为 $[\bar{X}, \bar{Y}]|_M = [X, Y]$ 。 N 中向量 V 在 $p \in M$ 与 M 中所有在 p 点的切向量 X 满足 $(V, X) = 0$ 则称 V 为 M 在 N 中 p 点的法向量， M 在 N 中单位法向量场称为 M 的法截面。

在 N 上给定联络 Γ_{ab}^c ，可对 N 上张量场进行协变微分 $\bar{\nabla}$ 运算，对 M 上切场的推入切场，可计算协变导数：

$$\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}|_M = \xi^i \left(\partial_i \left(\frac{\partial u^c}{\partial x^j} \eta^j \right) + \Gamma_{ba}^c \frac{\partial u^b}{\partial x^i} \frac{\partial u^a}{\partial x^j} \eta^j \right) \quad (5.6)$$

其值与 N 上联络有关，与切场嵌入扩张无关，简记为： $\bar{\nabla}_X Y \equiv \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}|_M$ ，它可能不再切于子流形 M ，用 N 上度规将它分为两部分：

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + H(X, Y) \quad (5.7)$$

其中 $\nabla_X Y$ 为其切分量，而 $H(X, Y)$ 为其法分量， $H(X, Y)$ 与嵌入子流形在该点的任意切方向垂直。 ∇ 称为由 $\bar{\nabla}$ 诱导的联络。

1. 由仿射联络 $\bar{\nabla}$ 诱导的联络 ∇ 仍为仿射联络。

2. 如 N 上联络无挠, 则诱导联络仍无挠。

3. 如 N 上所给联络为保度规的黎曼联络, 则诱导联络也为保度规的黎曼联络。

当 M 为 N 中余维 $p=1$ 的子流形, 称 M 为 N 中超曲面, 这时式 (5.7) 称为 Gauss 公式:

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y)E \quad (5.8)$$

这里 E 代表超曲面 M 在 N 中单位法向量场, $B(X, Y) \in \mathcal{F}(M)$, B 为 M 上双线性对称二阶协变张量场, 称为 M 的第 II 基本形式¹。而:

¹ 度规场 G 为第 I 基本形式

$$\bar{\nabla}_X E = -\varepsilon A X \in \mathcal{X}(M) \quad (5.9)$$

称为 Weingarten 公式, 这里 $\varepsilon = (E, E)_N = \pm 1$, A 称为形状因子 (shape operator), 为 $(1, 1)$ 型张量场, 且 $B(X, Y) = (A X, Y)_M$

5.2 欧空间的子流形 正交活动标价法

\mathbb{E}^n 度规可取 $\eta_{ij} = \delta_{ij}$, 且在任意点 p 切空间和余切空间都与 \mathbb{E}^n 本身微分同胚, \mathbb{E}^n 具有整体坐标基。

在 n 维欧空间中选正交活动标架:

$$(x; e_1(x), \dots, e_n(x)) \quad (5.10)$$

活动标架原点 x 的无穷小位移或者标架整体的无穷小转动都可在该点展开:

$$dx = \sum_{\alpha=1}^n e_{\alpha} \theta_{\alpha}, \quad de_{\alpha} = \sum_{\beta=1}^n e_{\beta} \omega_{\beta\alpha} \quad (5.11)$$

展开系数 θ_{α} 和 $\omega_{\beta\alpha}$ 都是 1 形式, 分别称为活动标架的标架 1 形式与联络 1 形式。它们都满足欧空间平庸联络的无挠及零曲率条件:

$$d\theta_{\alpha} + \sum_{\beta=1}^n \omega_{\alpha\beta} \wedge \theta_{\beta} = 0, \quad d\omega_{\alpha\beta} + \sum_{\gamma=1}^n \omega_{\alpha\gamma} \wedge \omega_{\gamma\beta} = 0 \quad (5.12)$$

正交标架完全刻画了物体的刚体运动, 上两方程称为 \mathbb{E}^n 中刚体运动群的结构方程, 或称为正交活动标架的结构方程。注意到标架转动时仍保持正交性 $(e_{\alpha}, e_{\beta}) = \delta_{\alpha\beta}$, 于是:

$$(de_{\alpha}, e_{\beta}) + (e_{\alpha}, de_{\beta}) = 0, \quad \omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha} \quad (5.13)$$

下面讨论嵌入在 \mathbb{E}^n 中的 m 维定向光滑子流形 M , 将活动标架原点取在 M 上:

$$(x; e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n) \quad (5.14)$$

使 $e_i (i \leq m)$ 为点 $x \in M$ 处子流形的切矢量, 且 $\{e_i\}_1^m$ 与 M 的定向一致。 $e_{\alpha} (m < \alpha \leq n)$ 为 M 在 x 的法向量。此局域正交坐标架称为子流形 M 的 Darboux 标架。

在流形 M 上选取局域坐标系 $\{u^i\}_1^m$, 将活动标架沿流形 M 做无穷小位移, 并展开:

$$dx = \sum_{i=1}^m e_i \theta_i, \quad \theta_i = \theta_i(u) = \sum_{j=1}^m \theta_{ij} du^j \in \Lambda^1(M) \quad (5.15)$$

位移的平方称为流形 M 的第 I 基本形式:

$$I = (d\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \theta_i^2 = \sum_{i,j=1}^m g_{ij}(u) du^i du^j, \quad g_{ij}(u) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial x^\alpha(u)}{\partial u^i} \frac{\partial x^\alpha(u)}{\partial u^j} \quad (5.16)$$

g_{ij} 为子流形诱导度规。整个 Darboux 活动标架转动也可作相应展开:

$$de_i = \sum_{j=1}^m e_j \omega_{ji} + \sum_{a=m+1}^n e_a \omega_{ai}, \quad de_b = \sum_{j=1}^m e_j \omega_{jb} + \sum_{a=m+1}^n e_a \omega_{ab} \quad (5.17)$$

展开系数 $\omega_{\alpha\beta}$ 都是 1 形式

$$\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha} \in \Lambda^1(M) \quad (5.18)$$

它们满足的正交活动标架的结构方程可表示为:

$$\begin{aligned} d\theta_i &= \sum_{j=1}^m \omega_{ij} \wedge \theta_j = 0, \quad \sum_{j=1}^m \omega_{aj} \wedge \theta_j = 0 \\ d\omega_{ij} &+ \sum_{k=1}^m \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \sum_{a=m+1}^n \omega_{ia} \wedge \omega_{aj} = 0 \\ d\omega_{ib} &+ \sum_{k=1}^m \omega_{ik} \wedge \omega_{kb} + \sum_{a=m+1}^n \omega_{ia} \wedge \omega_{ab} = 0 \\ d\omega_{ab} &+ \sum_{k=1}^m \omega_{ak} \wedge \omega_{kb} + \sum_{c=m+1}^n \omega_{ac} \wedge \omega_{cb} = 0 \end{aligned} \quad (5.19)$$

可知 ω_{ij} 为 M 的联络 1 形式, 可以将切标架变换正交投射到 M 的切从截面 $\mathcal{X}(M)$ 上, 得到 M 上活动标架的协变导数:

$$De_i = \sum_{j=1}^m e_j \omega_{ji} \quad (5.20)$$

即利用 E^n 空间平度规得到的切场的平行输运, 再正交投射到 M 的切从截面, 用此规则来定义 M 上切场的平行输运, 因而得到诱导的黎曼联络, 是与诱导度规场 $g_{ij}(u)$ 相容的黎曼联络。

简单起见, 设 M 为 E^n 中超曲面, M 的 Darboux 标架仅有一个法向量 e_n , 这时:

$$\begin{aligned} de_i &= \sum_{j=1}^m e_j \omega_{ji} + e_n \omega_{ni} \\ de_n &= \sum_{j=1}^m e_j \omega_{jn} \\ d\theta_i &+ \sum_{j=1}^m \omega_{ij} \wedge \theta_j = 0 \\ \sum_{j=1}^m \omega_{nj} \wedge \theta_j &= 0 \\ d\omega_{ij} &+ \sum_{k=1}^m \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \omega_{in} \wedge \omega_{nj} = 0 \\ d\omega_{in} &+ \sum_{k=1}^m \omega_{ik} \wedge \omega_{kn} = 0 \end{aligned} \quad (5.21)$$

由 Cartan 引理:

$$\omega_{ni} = \sum_{j=1}^m h_{ij} \theta_j, \quad h_{ij} = h_{ji} \quad (5.22)$$

可引入超曲面的第 II 基本形式:

$$\text{II} = -(\text{d}x, \text{d}e_n) = \sum_{i=1}^m \omega_{ni} \theta_i = \sum_{i,j=1}^m h_{ij} \theta_i \theta_j \quad (5.23)$$

超曲面 M 的黎曼曲率形式可表示为:

$$\Omega_{ij} = \text{d}\omega_{ij} + \sum_{k=1}^m \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} = -\omega_{in} \wedge \omega_{nj} = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^m R_{ijkl} \theta_k \wedge \theta_l \quad (5.24)$$

其中 $R_{ijkl} = h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}$, 常称为 Gauss 方程。同时可证:

$$\partial_l h_{ij} - \Gamma_{li}^k h_{kj} = \partial_j h_{il} - \Gamma_{ji}^k h_{kl} \quad (5.25)$$

5.3 三维欧空间中的曲线和曲面

对三维空间中给定曲线, 可如下选标架使此曲线的表达式简单, 首先将标架原点选在曲线上, 且令 \mathbf{e}_1 沿切线方向:

$$\text{d}\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 \theta_1, \quad I = \text{d}s^2 = (\text{d}\mathbf{x}, \text{d}\mathbf{x}) = \theta_1^2 \quad (5.26)$$

$\theta_1 = \pm \text{d}s$, 取定符号则确定了曲线的方向, 对定向曲线, 可选 $\theta_1 = \text{d}s$, 即 $\frac{\text{d}\mathbf{x}}{\text{d}s} = \mathbf{e}_1$ 为单位切向量, 其长为:

$$\left| \frac{\text{d}\mathbf{x}}{\text{d}s} \right| = 1 \quad (5.27)$$

曲线上垂直于点切向量的平面称为该点的法平面, 注意到 \mathbf{e}_1 的长恒为 1, 故:

$$\left(\mathbf{e}_1, \frac{\text{d}\mathbf{e}_1}{\text{d}s} \right) = 0 \quad (5.28)$$

即在 $\frac{\text{d}\mathbf{e}_1}{\text{d}s} \neq 0$ 的点, $\frac{\text{d}\mathbf{e}_1}{\text{d}s}$ 必在法平面上, 此 $\frac{\text{d}\mathbf{e}_1}{\text{d}s}$ 称为曲线的曲率向量, 其方向称为主法线方向:

$$\frac{\text{d}\mathbf{e}_1}{\text{d}s} = \kappa \mathbf{e}_2 \quad (5.29)$$

\mathbf{e}_2 为单位主法线方向, 而 $\kappa = \kappa(s)$ 称为曲线的曲率, 为单位切向量对弧长 s 的回转率, 在切线方向变化快处曲率 κ 大, 在 $\kappa \neq 0$ 处, 可令

$$\rho = \frac{1}{\kappa} \quad (5.30)$$

称为曲率半径。下面设曲线处处 $\kappa \neq 0$, 按照右手规则选定活动标架, 令

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \quad (5.31)$$

为单位副法线方向, 于是得到沿曲线的单参数活动标架:

$$\text{d}\mathbf{e}_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 \mathbf{e}_\beta \omega_{\beta\alpha}, \quad \omega_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta}(s) \text{d}(s) = -\omega_{\beta\alpha} \quad (5.32)$$

其中

$$P_{a\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \quad (5.33)$$

即:

$$\frac{d\mathbf{e}_2}{ds} = -\kappa\mathbf{e}_1 + \tau\mathbf{e}_3 \quad (5.34)$$

$\tau = \tau(s)$ 称为曲线的挠率。曲线切线与法主线确定的平面称为曲线的密切面, 挠率 τ 表示曲线密切平面的回转率, τ 恒为零的曲线为平面曲线。对封闭曲线, 还可定义全挠率 $\tau(c)$:

$$\tau(c) = \frac{1}{2\pi} \oint_c \tau ds \quad (5.35)$$

Theorem 5.1. 如果对某曲面, 其上封闭前的全挠率为零, 则此曲面必为球面。

注意, 对于一维流形, 每点仅有一个切方向, 其余均为嵌入法方向, 故一维子流形本身相应黎曼联络及黎曼曲率张量必定为零。上述曲率 $\kappa(s)$ 及挠率 $\tau(s)$ 均为曲线的嵌入特性, 由这两函数可唯一决定空间曲线形状。

下面分析三维欧空间曲面 $S(u^1, u^2)$, 选曲面各点法向量为 \mathbf{e}_3 , 在各点切平面上, 选正交活动标架 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, 正交标架原点沿曲面作无穷小位移:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{e}_1\theta_1 + \mathbf{e}_2\theta_2, \quad \theta_i = \theta_i(u) = \sum_{j=1}^2 \theta_{ij}(u)du^j \in \Lambda^1(S) \quad (5.36)$$

曲面第 I 基本形式:

$$I = ds^2 = (d\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = \theta_1^2 + \theta_2^2 = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2 = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij}du^i du^j \quad (5.37)$$

转动的无穷小变换:

$$d\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2\omega_{21} + \mathbf{e}_3\omega_{31}, \quad d\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1\omega_{12} + \mathbf{e}_3\omega_{32}, \quad d\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1\omega_{13} + \mathbf{e}_2\omega_{23} \quad (5.38)$$

其中 $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$ 都是曲面上 1 形式, 且可以证明:

Remark. ω_{12} 只与曲面的第 I 基本形式有关, 即存在唯一的 1 形式 $\omega_{12} = -\omega_{21}$ 满足条件:

$$d\theta_1 = -\omega_{12} \wedge \theta_2, \quad d\theta_2 = -\theta_1 \wedge \omega_{12} \quad (5.39)$$

另一方面, 由于 $\theta_3 = 0, d\theta_3 = 0$ 得:

$$\omega_{31} \wedge \theta_1 + \omega_{32} \wedge \theta_2 = 0 \quad (5.40)$$

由于 Cartan 引理:

$$\omega_{31} = a\theta_1 + b\theta_2, \quad \omega_{32} = b\theta_1 + c\theta_2 \quad (5.41)$$

于是曲面的第 II 基本形式:

$$\begin{aligned} II &= -(d\mathbf{x}, d\mathbf{e}_3) = -\theta_1\omega_{13} - \theta_2\omega_{23} = a\theta_1^2 + 2b\theta_1\theta_2 + c\theta_2^2 \\ &= Ldu^2 + 2Mdu dv + Ndv^2 = \sum_{i,j=1}^2 h_{ij}du^i du^j \end{aligned} \quad (5.42)$$

曲面的第 I 基本形式决定曲面的度规结构, 决定曲面的内蕴性质 (intrinsic property), 而

曲面的第II基本形式反映曲面嵌入在 E^3 的弯曲程度。

下面讨论曲线上的曲线，曲面上过点 p 作曲线 c ， c 的切矢 T 与标架基矢 e_1 夹角为 ϕ ，则：

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} = e_1 \frac{\theta_1}{ds} + e_2 \frac{\theta_2}{ds} = e_1 \cos \phi + e_2 \sin \phi \quad (5.43)$$

令：

$$\mathbf{b} = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{T}, \quad \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa \mathbf{N} = \kappa_g \mathbf{b} + \kappa_n \mathbf{e}_3, \quad \frac{d\mathbf{e}_3}{ds} = -\kappa_n \mathbf{T} + \tau_g \mathbf{b} \quad (5.44)$$

\mathbf{N} 为曲线的主法线方向， κ 为曲线斜率，而 κ_n 与 κ_g 分别称为法曲率²与测地曲率。其中法曲率：

$$\begin{aligned} \kappa_n &= \left(\frac{d\mathbf{T}}{ds}, \mathbf{e}_3 \right) = - \left(\frac{d\mathbf{x}}{ds}, \frac{d\mathbf{e}_3}{ds} \right) = \frac{\text{II}}{\text{I}} \\ &= \frac{\theta_1}{ds} \frac{\omega_{31}}{ds} + \frac{\theta_2}{ds} \frac{\omega_{32}}{ds} \\ &= a \cos^2 \phi + 2b \sin \phi \cos \phi + c \sin^2 \phi \end{aligned} \quad (5.45)$$

² 由曲线切向量 $d\mathbf{x}$ 和曲面法向量 \mathbf{e}_3 决定的平面与曲面 M 相交的平面曲线，称为曲面 M 沿方向 $d\mathbf{x}$ 的法截线，法曲率 κ_n 即该法截线在该点的法曲率

测地曲率决定了曲线切向量沿曲线的协变导数：

$$\nabla_s \mathbf{T} = \kappa_g \mathbf{b} \quad (5.46)$$

当 $\kappa_g = 0$ ，曲线切向 \mathbf{T} 沿曲线平行输运，即此曲线为测地线。测地线主法线与曲面法线平行，可将 $\kappa_g = 0$ 的条件写为：

$$(d\mathbf{T}, \mathbf{e}_3 \times \mathbf{T}) \equiv (d\mathbf{T}, \mathbf{e}_3, \mathbf{T}) = 0 \quad (5.47)$$

通过曲面上任意普点 p ，沿任意方向 $d\mathbf{x}$ 仅有一根测地线，该测地线在 p 点的挠率称为曲面 M 在 p 的挠率 τ_g 称为 M 在 p 点沿 $d\mathbf{x}$ 方向的测地挠率：

$$\tau_g = \left(\frac{d\mathbf{e}_3}{ds}, \mathbf{e}_3 \times \mathbf{T} \right) = \left(\frac{d\mathbf{e}_3}{ds}, \mathbf{e}_3, \mathbf{T} \right) \quad (5.48)$$

在曲面上沿某切方向 $d\mathbf{x}$ 移动时，造成法向量 \mathbf{e}_3 作相应变更 $d\mathbf{e}_3$ ， $d\mathbf{e}_3$ 也属于切平面，将 $d\mathbf{x}$ 映射到 $d\mathbf{e}_3$ 为切平面的线性变换，称为 Weingarten 变换：

$$d\mathbf{e}_3 = -W(d\mathbf{x}) \quad (5.49)$$

容易得到：

$$W(\mathbf{e}_1) = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2, \quad W(\mathbf{e}_2) = b\mathbf{e}_1 + c\mathbf{e}_2 \quad (5.50)$$

变换矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ 为对称矩阵，故 Weingarten 为自共轭变换，有两个实特征值 κ_1 与 κ_2

$$W(\mathbf{u}) = \kappa_1 \mathbf{u}, \quad W(\mathbf{v}) = \kappa_2 \mathbf{v} \quad (5.51)$$

相应特征方向称为在该点的主方向，两本征值称为主曲率。两者相乘称为全曲率 K 或者 Gauss 曲率：

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = ac - b^2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{R_{1212}}{g} \quad (5.52)$$

Weingarten 矩阵的迹的一半称为曲面在该点的中曲率：

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{1}{2}(a + c) \quad (5.53)$$

$H = 0$ 的曲面称为极小曲面。

当选取特殊的 Darboux 标架, 使得 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 分别为曲面 M 在 x 点的 Weingarten 变换的特征方向 (主方向), 即有:

$$\omega_{13} = \kappa_1 \theta_1, \quad \omega_{23} = \kappa_2 \theta_2 \quad (5.54)$$

第 II 基本形式为:

$$\text{II} = \kappa_1 \theta_1^2 + \kappa_2 \theta_2^2 \quad (5.55)$$

法曲率满足:

$$\kappa_n = \frac{\text{II}}{\text{I}} = \kappa_1 \cos^2 \phi + \kappa_2 \sin^2 \phi \quad (5.56)$$

Theorem 5.2. 高斯大定理: 全曲率 K 只与第 I 基本形式有关。

5.4 用 Cartan 活动标架法计算黎曼曲率

用 Cartan 活动标架法, 利用 Cartan 的两个结构方程计算黎曼曲率非常方便, 尤其是当流形有一定对称性时, 基本步骤如下:

1. 按照体系的对称性选活动标架, 最好选则正交标架。
2. 计算联络 1 形式 $\Gamma_b^a = \theta^c \Gamma_{cb}^a$, 并由下面两个条件唯一确定黎曼联络

$$\text{保度规 } dg_{ab} = \Gamma_{ab} + \Gamma_{ba}$$

$$\text{无挠 } d\theta^a + \Gamma_b^a \wedge \theta^b = 0$$

3. 计算曲率 2 形式 $\Omega_b^a = d\Gamma_b^a + \Gamma_c^a \wedge \Gamma_b^c = \frac{1}{2} R_{bcd}^a \theta^c \wedge \theta^d$

Example. 计算 2 维球面 $S^2 = \{\mathbf{x} \in E^3 \mid |\mathbf{x}|^2 = 1\}$ 首先由度规形式确定正交活动标架 1 形式

$$ds^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 (\sin \theta d\varphi)^2 = (\sigma^1)^2 + (\sigma^2)^2 \quad (5.57)$$

其中正交标架 1 形式:

$$\sigma^1 = r d\theta, \quad \sigma^2 = r \sin \theta d\varphi \quad (5.58)$$

接着由 Cartan 结构方程和无挠度规条件:

$$\begin{cases} d\sigma^a = -\omega_b^a \wedge \sigma^b \\ \omega_{ab} + \omega_{ba} = 0 \end{cases} \quad (5.59)$$

只有一个独立的联络 1 形式 $\omega_2^1 = f d\theta + g d\varphi$, 对标架 1 形式取外微分可得:

$$\omega_2^1 = -\cos \theta d\varphi \quad (5.60)$$

进一步可以计算出曲率 2 形式:

$$\Omega_2^1 = \frac{1}{2} R_{2ab}^1 \sigma^a \wedge \sigma^b = d\omega_2^1 = \frac{1}{r^2} \sigma^1 \wedge \sigma^2 \quad (5.61)$$

以及 Ricci 张量和标曲率

$$(\mathcal{R}_{ab}) = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S} = \text{tr}(\mathcal{R}_{ab}) = \frac{2}{r^2} \quad (5.62)$$

5.5 测地线与局域法坐标系

在张量分析计算时, 计算结果与坐标选取无关, 希望选取联络在该点为零的坐标系, 可以使得计算简化。

1. 仅对无挠联络, 可通过坐标变换使联络在一点为零
2. 当联络无挠, 则在点 p 邻域必存在一坐标系: 测地坐标系, 利用此测地坐标系自然标架, $\Gamma_{jk}^i|_p = 0$

下面简单介绍测地线及法坐标系。设 M 是 n 维黎曼流形, 其中任意点 $p \in M$, 在 $Y \in T_p M$ 方向存在一条以 p 为起点, Y 为切方向的测地线 $\gamma_Y(t)$, 满足:

$$\gamma_Y(0) = p, \frac{d\gamma_Y}{dt}(0) = Y \quad (5.63)$$

在此测地线上以 t 为参数的点:

$$\gamma_Y(t) = \exp(tY) \quad (5.64)$$

的坐标 $\{x^i\}$ 满足测地线方程:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0 \quad (5.65)$$

注意, 测地线参数 t 可进行仿射变换 $t \rightarrow at + b, a \neq 0$ 而不影响方程, 故测地参数 t 常称为仿射参数, 在 p 邻域, 测地线 $\gamma_Y(t)$ 的坐标可以表示为:

$$x^i = x^i|_p + \left. \frac{dx^i}{dt} \right|_p t + \frac{1}{2} \frac{d^2 x^i}{dt^2} t^2 + \cdots = x^i|_p + y^i t - \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^i y^j y^k t^2 + \cdots \quad (5.66)$$

当要求 $x^i = y^i t$, 则 $\frac{d^2 x^i}{dt^2} = 0$, 要求 $\Gamma_{jk}^i y^j y^k$ 沿曲线为零, 以上讨论对 $T_p M$ 中所有切向 $Y \in T_p(M)$ 都成立, 故

$$\Gamma_{jk}^i|_p = 0 \quad (5.67)$$

在 $T_p(M)$ 空间原点的 ε 邻域, $|Y| < \varepsilon$ 时, 在以 p 为起点, 以 Y 为切方向的测地线上, 有一点 q , 使由 p 到 q 的弧长为 $|Y|$, 记:

$$q = \text{Exp}_p Y \quad (5.68)$$

此指数映射将 $T_p(M)$ 中原点附近 ε 邻域内的点微分同胚映射到 M 上 p 点邻域的点, 可作为 p 点邻域的局域坐标系。下面考虑以特殊的测地坐标系, p 点邻域的法坐标系, 即在 $T_p(M)$ 选正交标架 $e_i(p)$

$$(e_i(p), e_j(p)) = \delta_{ij}, \quad Y = \sum_{i=1}^n y_i e_i(p) \in T_p M \quad (5.69)$$

以 p 为起点, 沿 Y 方向做测地线, 利用此指数映射可由切空间的坐标得到流形上 q 点局域坐标 y_i , 以 y_i 为 q 点坐标, 称为 p 邻域法坐标系。可选与活动基矢 $e_i(y)$ 对偶的标架 1 形式 θ_i , 以及活动标架的联络 1 形式:

$$\langle \theta_i(y), e_j(y) \rangle = \delta_{ij}, \quad \nabla e_i(y) = \sum_{j=1}^n e_j(y) \omega_{ji}(y) \quad (5.70)$$

满足结构方程:

$$d\theta_i(y) + \omega_{ij}(y) \wedge \theta_j(y) = 0 \quad (5.71)$$

用局域法坐标系, 上述 1 形式可以表示为

$$\theta_i(y) = \theta_{ik}(y) dy_k, \quad \omega_{ij}(y) = H_{kij}(y) dy_k \quad (5.72)$$

满足:

$$y_i = \sum_k \theta_{ik} y_k, \quad \sum_j y_j H_{jki} = 0, \quad g_{jk}(y) = \sum_{ij} \theta_{ij}(y) \theta_{ik}(y) \quad (5.73)$$

结构方程用局域法坐标系可以表示为:

$$\frac{\partial \theta_{ik}}{\partial y_l} - \frac{\partial \theta_{il}}{\partial y_k} = \sum_j (\theta_{jk} H_{lji} - \theta_{jl} H_{kji}) \quad (5.74)$$

在分析几何量在一点作泰勒展开时,用法坐标系常最方便,这时在点 p 处联络为零,下面将度规场 g_{ij} 、标架系数 θ_{ij} 以及联络系数 H_{ijk} 在以 p 为中心的局域法坐标系中的泰勒展开式列在下面:

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \delta_{ij} + \frac{1}{3} \sum_{k,l} R_{iklj}(p) y_k y_l + \cdots \\ \theta_{ij} &= \delta_{ij} + \frac{1}{6} \sum_{k,l} R_{iklj}(p) y_k y_l + \cdots \\ H_{ijk} &= \frac{1}{2} \sum_l R_{lij k}(y) y_l + \cdots \end{aligned} \quad (5.75)$$

6 齐性黎曼流形 对称空间

在流形上给定仿射联络，流形上所有保联络的仿射变换集合形成仿射变换群，对于广义黎曼流形，流形上给定有度规张量场，流形上所有保度规的等长变换集合形成等长群。仿射变换群和等长群均为李群。本章分析在这些李群作用下的齐性空间。通常对称空间是指其度规具有最大对称性的黎曼空间，为等长群的齐性空间，其曲率张量在等长群的平行运输变换下不变。

6.1 李群的黎曼几何结构

n 维李群是一光滑流形，而有时为显示其形状，可再给群 G 度规结构。要特别注意群 G 作用下不变度规，尤其是左右双不变度规，当 G 上存在 G 作用下不变度规场，这时 Killing 矢场即为左（右）基本矢场。而 G 不变度规完全由它在群恒等元处切空间所取值决定，即由相应李代数的 Killing 形式所决定。

下面以 $SU(2)$ 群为例进行分析。每个群元可表示为：

$$g = \begin{pmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \in SU(2), \quad \det g = z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 = 1 \quad (6.1)$$

再将每个复数用两个实数表示，约束条件可表示为：

$$z_1 = t - iz, \quad z_2 = y - ix, \quad x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1 \quad (6.2)$$

由此看出作为拓扑流形：

$$SU(2) \simeq S^3 \quad (6.3)$$

$SU(2)$ 群流形是 3 参数李群，与 S^3 微分同胚，注意 \mathbb{R}^4 中单位球面在 $SO(3)$ 转动群作用下不变，而 $SU(2)$ 为 $SO(3)$ 群的二重普适覆盖，如采用 $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ 的标准度规：

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2 = dz_1 d\bar{z}_1 + dz_2 d\bar{z}_2 \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ d \begin{pmatrix} \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \\ -z_2 & z_1 \end{pmatrix} d \begin{pmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} (d(g^{-1}) dg) = \frac{1}{2} \text{tr} ((ig^{-1}dg)(ig^{-1}dg)) \end{aligned} \quad (6.4)$$

其中 $g^{-1}dg$ 是群 G 上左不变形式，可用 $\mathfrak{su}(2)$ 李代数的生成元展开：

$$\begin{aligned} ig^{-1}dg &= \tau_a \theta_a \\ \tau_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.5)$$

代入上式化简可得：

$$ds^2 = \vartheta_x^2 + \vartheta_y^2 + \vartheta_z^2 \quad (6.6)$$

即群流形 S^3 为可平化流形， θ_a 组成 S^3 上正交活动标架，它们是 $SU(2)$ 群流形上左不变 1 形式，满足 Maurer-Cartan 方程

$$d\vartheta_a = \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} \vartheta_b \wedge \vartheta_c \quad (6.7)$$

由此正交活动标架，得联络 1 形式：

$$\omega_{ab} = \varepsilon_{abc} \vartheta_c \quad (6.8)$$

得曲率 2 形式:

$$\Omega_{ab} = \vartheta_a \wedge \vartheta_b \quad (6.9)$$

为常曲率空间, 非零曲率张量分量有:

$$R_{2323} = R_{3131} = R_{1212} = 1 \quad (6.10)$$

以上就是 $\mathfrak{su}(2)$ 李代数的 Killing-Cartan 度规, 以上推导表明它与 S^3 的标准度规时一致的, 是 $SU(2)$ 群作用不变度规。

6.2 齐性黎曼流形

齐性空间是具有 G 传递作用的流形。¹当 H 为 G 的闭子群, 用 $\{G, H\}$ 对常可组成两类陪集空间: 右陪集类 $[a] = aH$, 在其集合 G/H 上群 G 左作用:

$$g : [a] \rightarrow [ga] \quad (6.11)$$

类似可定义左陪集, 其上群 G 右作用。齐性空间上可能存在多种度规, 特别要注意的是 G 不变度规。

下面以二维球面: $S^2 \simeq SU(2)/U(1)$ 为例进行具体分析。 S^2 是三维欧空间的单位球面:

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \quad (6.12)$$

具有标准的度规及黎曼联络, 它们具有 $O(3)$ 转动对称性, S^2 是转动群 $O(3)$ 的齐性流形, 而在各点的稳定子群是 $U(1)$ 群。

如右图所示做极射投影, P 点坐标 (x, y, z) 与 Q 点坐标 (x_1, x_2)

$$\begin{aligned} x &= \sin \theta \cos \varphi, & x_1 &= \rho \cos \varphi = \frac{x}{1+z} \\ y &= \sin \theta \sin \varphi, & x_2 &= \rho \sin \varphi = \frac{y}{1+z} \\ z &= \cos \theta, & \rho &= \tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \end{aligned} \quad (6.13)$$

将 S^2 作为三维欧空间中单位球面所得度规, 它在三维空间转动群 $SO(3)$ 作用下不变:

$$ds^2 = (d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\phi)^2 = (\vartheta^1)^2 + (\vartheta^2)^2 \quad (6.14)$$

取活动标架 1 形式:

$$\vartheta^1 = d\theta, \quad \vartheta^2 = \sin \theta d\phi \quad (6.15)$$

由其外微分可得联络 1 形式:

$$\omega = \cos \theta d\phi = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \vartheta^2 \quad (6.16)$$

进一步取外微分得曲率 2 形式:

$$\Omega = \sin \theta d\theta \wedge d\phi = \vartheta^1 \wedge \vartheta^2 \quad (6.17)$$

黎曼曲率张量系数的非零分量 $R_{1212} = 1$ 。

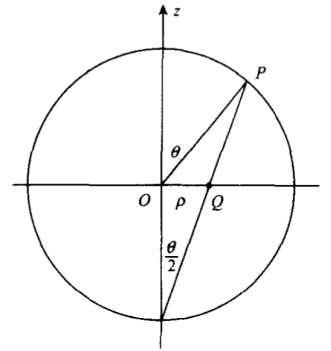
通常物理文献上常将联络 1 形式称为规范势, 记为:

$$A = A_\theta \vartheta^1 + A_\varphi \vartheta^2 \quad (6.18)$$

经比较可得:

$$A_\theta = 0, \quad A_\varphi = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad (6.19)$$

¹ 这种流形常可实现为陪集空间 G/H , 即其上有群 G 传递作用, 同时对流形上任意一点 p , G 的子群 H 保持 p 不变, H 称为稳定子群, 使整个空间同构于 G/H , 如果替代 p 点, 选空间另一点 q , 这时稳定子群 H' 必与 H 共轭, 因此当提到齐性空间 G/H 时, H 可为其共轭等价类中某代表元, 点 $p \in G/H$ 相应于 $[e] = eH$ 称为 G/H 的原点。



上式在 $\theta = 0, \pi$ 时奇异, 联络的这种表达式称为 Schwinger 规范。可对势 A 作规范变换, 相当于对陪集 $S^2 = SU(2)/U(1)$ 作 $U(1)$ 转动, 做规范变换后新的规范势为:

$$iA_\varphi^\pm = e^{\pm i\varphi} \left(iA_\varphi + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) e^{\mp i\varphi}, \quad A_\varphi^\pm = \frac{\mp 1 + \cos \theta}{\sin \theta} \quad (6.20)$$

其中 A^+ 仅在南极 $\theta = \pi$ 有奇点, 称为 Dirac 北区规范势, 类似 A^- 在北极有奇点, 称为南区规范势。

可将 E^3 中单位矢量 N 用矩阵表示为:

$$N = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau} = N^a \tau_a \quad (6.21)$$

其中 τ_a 为 Pauli 矩阵, 现将矩阵 N 表达为取值在 $\mathfrak{su}(2)$ 李代数上, 对它可作 $SU(2)$ 群的伴随变换:

$$N = g \tau_3 g^{-1}, \quad g = \begin{pmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \in SU(2) \quad (6.22)$$

这样定义的矩阵 N 不仅满足 $N^2 = I$, 且当对 g 右乘 $U(1)$ 元素:

$$g \rightarrow g e^{i\tau_3 \gamma}$$

N 不变, 即 $N \in SU(2)/U(1)$, 这样可以实现 $SU(2)$ 到 $SU(2)/U(1)$ 的 Hopf 映射。

如右图所示, $\mathbf{N} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$, 矢量 $\mathbf{b} = (-\sin \phi, \cos \phi, 0)$, 绕 \mathbf{b} 将 z 轴转至 \mathbf{N} 的矩阵 g 为:

$$g = e^{-i\gamma \cdot \mathbf{b} \theta / 2} = \cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (6.23)$$

利用 $\frac{1}{2} \text{tr}(\tau_a \tau_b) = \delta_{ab}$, 知:

$$N^a = \frac{1}{2} \text{tr}(N \tau_a) = \frac{1}{2} \text{tr}(g(1 + \tau_3)g^{-1} \tau_a) = z^+ \tau_a z \quad (6.24)$$

其中:

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+|\zeta|^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta \end{pmatrix} \quad (6.25)$$

$$\zeta = \tan \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} = x_1 + ix_2$$

上两式表明, 引入有约束的两个复标量场 (z_1, z_2) 为具有三个独立自由度的 S^3 , 而上式将它们表示为三个有约束的实场 N^a , 为具有两个自由度的 S^2 , 即相当于 Hopf 映射 $\eta: S^3 \rightarrow S^2, z \rightarrow \mathbf{N}$ 。

当我们用 $SU(2)$ 不变的 Killing-Cartan 形式定义陪集空间度规:

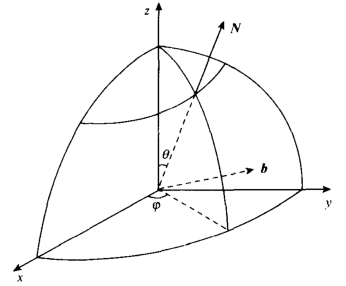
$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{1}{2} \text{tr}(dN dN) = dz^\dagger dz \\ &= \frac{4d\zeta d\bar{\zeta}}{(1 + \zeta \bar{\zeta})^2} = 4 \frac{dx_1^2 + dx_2^2}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2} = (\vartheta^1)^2 + (\vartheta^2)^2 \end{aligned} \quad (6.26)$$

其中 $\vartheta^a = i \text{tr}(g^{-1} dg \tau_a)$

上式表明所取度规与通常 2 维球面 S^2 的标准度规一致。

联络 1 形式:

$$\omega = \frac{1}{2} \text{tr}(g^{-1} dg \tau_3) = \text{tr}\left(g^{-1} dg \frac{1 + \tau_3}{2}\right) = z^+ dz \quad (6.27)$$



曲率 2 形式:

$$\Omega = d\omega = dz^+ \wedge dz = 2i \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{(1 + |\zeta|^2)^2} = 4 \frac{dx_1 \wedge dx_2}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2} \quad (6.28)$$

可在陪集 S^2 上再引入 $U(1)$ 自由度, 形成以 S^2 为底流形, $U(1)$ 为纤维的 Hopf 丛:

$$Z = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} e^{i\chi} \quad (6.29)$$

则:

$$ds^2 = dz^+ dz = \frac{1}{4} d\theta^2 + d\chi^2 + \sin^2 \frac{\theta}{2} d\varphi^2 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} d\varphi d\chi \quad (6.30)$$

进一步设法引入正交标架, 令:

$$\psi = \varphi + \chi \quad (6.31)$$

则:

$$ds^2 = \frac{1}{4} d\theta^2 + \cos^2 \frac{\theta}{2} d\chi^2 + \sin^2 \frac{\theta}{2} d\psi^2 = \sum_{i=1}^3 (\sigma^i)^2 \quad (6.32)$$

即 Hopf 丛上标架 1 形式:

$$\sigma^1 = \frac{1}{2} d\theta, \quad \sigma^2 = \cos \frac{\theta}{2} d\chi, \quad \sigma^3 = \sin \frac{\theta}{2} d\psi \quad (6.33)$$

联络 1 形式 $A = A_i \sigma^i = Z^+ dZ$

$$A = \cos^2 \frac{\theta}{2} d\chi + \sin^2 \frac{\theta}{2} d\psi \quad (6.34)$$

或者写为:

$$A_1 = 0, \quad A_2 = \cos \frac{\theta}{2}, \quad A_3 = \sin \frac{\theta}{2} \quad (6.35)$$

注意这时联络 A 不再奇异, 即将陪集空间 S^2 扩张为 Hopf 丛 $S^3 = SU(2)$, 联络 A 可在丛 S^3 上整体定义。

给定流形 M 可能有若干种齐性结构, 例如

$$S^5 \simeq SO(6)/SO(5) \simeq SU(3)/SU(2) \quad (6.36)$$

其上 $SO(6)$ 不变度规比 $SU(3)$ 不变度规具有更大对称性。

6.3 对称空间与局域对称空间

黎曼流形 M , 在其任意点 p 的邻域 U , 可沿各个方向定义测地线, 引入局域法坐标系, 可定义含 p 点邻域 U 到自己的对称变换 S_p , 使 p 点成为固定点, 且:

$$S_p : \text{Exp } X \rightarrow \text{Exp}(-X), \quad X \in T_p(M) \quad (6.37)$$

即 S_p 在 p 点的切空间的诱导映射反转所有切矢 X , 当此变换为等长变换, 则称为对称变换。对称变换 S_p 为**对合变换 (involutive)**, 满足 S_p^2 为 p 点邻域的恒等变换。

当对任意点 S_p 均为等长变换, 则 M 称为黎曼局域对称空间。

Theorem 6.1. 黎曼流形 M 为黎曼局域对称空间的充分必要条件为其黎曼曲率张量满足:

$$\nabla R = 0 \quad (6.38)$$

Theorem 6.2. 仿射联络流形 M 为仿射局域对称空间的充分必要条件是:

$$T = 0, \quad \nabla R = 0 \quad (6.39)$$

常曲率空间是等长变换的齐性空间, 是具有最大对称性的空间, 此空间的曲率张量的协变导数为零。**常曲率空间是黎曼局域对称空间。**黎曼齐性流形 $M \simeq G/H$ 也是黎曼局域对称空间。

$\nabla R = 0$ 对黎曼曲率张量有很强的限制, 是曲率张量的所有标量特征值均为常值:

$$R_{abcd}R^{abcd} = \text{const}, \quad \mathcal{S} = \mathcal{R}_a^a = \text{const} \quad (6.40)$$

可利用和乐群概念来分析对称空间。和乐群的每一元素都保持度规结构不变, 如果和乐群能够进一步保持黎曼曲率张量不变, 其黎曼曲率张量满足 $\nabla R = 0$ 则流形 M 为局域黎曼对称空间。对黎曼对称空间, 加上单连通这个整体条件, 即为黎曼对称空间。

Definition 6.1. 单连通黎曼流形 M , 当对其每点 p , 存在等长变换 S_p , 使得 p 为孤立固定点, 且其在切空间诱导映射翻转所有切矢:

$$S_p : X \rightarrow -X, X \in T_p(M) \quad (6.41)$$

此等长变换 S_p 称为 M 在 p 点对称变换, M 称为对称空间。

对称变换 S_p 为等长变换, 必将测地线映到测地线, 令 $\gamma(t)$ 为 M 上测地线:

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M, \gamma(0) = p$$

通常取参数 t 比例于弧长, 则:

$$S_{p*} : \dot{\gamma}(0) \rightarrow -\dot{\gamma}(0) \quad (6.42)$$

由于测地线是被其初点及初方向唯一确定, 故:

$$S_p \gamma(t) = \gamma(-t) \quad (6.43)$$

Theorem 6.3. 令 $\gamma(t)$ 为 M 上测地线

$$\gamma(0) = p, \quad \gamma(\tau) = q \quad (6.44)$$

则

$$S_q S_p \gamma(t) = \gamma(t + 2\tau) \quad (6.45)$$

上式表明测地线可以无限延伸, 在对称空间, 测地线可以向两个方向无限延伸, 即称测地线是完备的。

对黎曼流形的完备性及紧致性问题, 存在 Hopf-Rirow 定理: 对黎曼流形 M , 下列叙述等价:

1. M 作为度规空间是完备的;
2. M 的闭且有界子集是完备的;
3. M 是测地完备的;
4. M 上任意两点 p, q 可被最短长度测地线连接。

而黎曼对称空间就是具有以上各条件的黎曼流形，是测地完备的，对称空间任意两点可以被测地线连接。

6.4 对称空间的代数结构