量子场论 (I) 笔记

陈炎柯[*]

版本：*1.03*

更新时间：*October 30, 2020*

[*] chenyanke@stu.pku.edu.cn, 个人主页 http://yankechen.xyz

写在前面

本笔记是在北京大学 2020 年秋季学期马滟青 (助理教授) 老师所授的《量子场论 (I)》课程所记录。课程的主要参考教材有:Michael E. Peskin 和 Daniel V. Schroeder 所著的《An introduction to Quantum Feild Theory》，郑汉青老师所著的《量子场论 (上)》以及刘川老师的讲义。作为笔记可能会省略很多推导过程，主要记录思路和结果。可能会有很多笔误，后续有时间再慢慢修改。

笔记模板来自 ElegantLaTeX Group，模板下载地址：https://ddswhu.me/resource/

随课程进行每周更新。

2020.10.05 更新至 2.1 节

2020.10.15 更新至 2.3 节

2020.10.22 更新至 2.4 节

2020.10.30 更新至 3.1 节

Contents

1 场观点的必要性

(相对论性) 量子场论是描述**高能、微观、多粒子**系统的。
低能微观系统由非相对论性的量子力学描述，在正则量子化方法下:

$$E \to i\frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \to -i\vec{\nabla} \tag{1.1}$$

根据 $E = \frac{p^2}{2m}$，可以很容易的得到 Schrödinger 方程:

$$(i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m}\nabla^2)\varphi(x) = 0 \tag{1.2}$$

处理高能系统时，一个很自然的方法推广方法是将能动量关系式改为 $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$，将量子力学推广到相对论情况，可以得到 Klein-Gordon 方程:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\varphi(x) = 0 \tag{1.3}$$

但是相对论性的量子力学存在着很多问题，首先是**负能量**问题。$E = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$，且为了保证解在 Hilbert 空间的完备性，不能随意舍弃负能解。系统的能量没有下界永远无法达到一个稳定的状态。
另一个问题是**负概率密度**问题，我们知道，在量子力学下，通过 Schrödinger 方程我们可以得到概率流的连续性方程:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = \partial_\mu j^\mu = 0, \quad \rho = \varphi^* \varphi, \quad \vec{j} = \frac{-i}{2m}\left(\varphi^* \nabla \varphi - \varphi \nabla \varphi^*\right) \tag{1.4}$$

在相对论情况下同样有类似的:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = \partial_\mu j^\mu = 0, \quad \rho = \frac{i}{2m}\left(\varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial t}\right), \quad \vec{j} = \frac{-i}{2m}\left(\varphi^* \nabla \varphi - \varphi \nabla \varphi^*\right) \tag{1.5}$$

应用于平面波解 $\varphi = Ne^{-ip\cdot x}$ 时，得到:

$$j^\mu = |N|^2 \frac{p^\mu}{m} = |N|^2 (E, \vec{p}) \tag{1.6}$$

伴随着负的能量，同样出现了负的概率密度，这显然是不合理的。
Dirac 认为，负的概率密度来自于时间的二阶导数，如果将方程化成一阶能解决问题，提出 Dirac 方程:

$$(\not{p} - m)\psi = (i\not{\partial} - m)\psi = (i\partial_\mu \gamma^\mu - m)\psi = 0 \tag{1.7}$$

可以得到正定的概率流密度和连续性方程:

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu \psi, \quad \bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \tag{1.8}$$

但是依然没有办法解释负能量问题，Dirac 为此提出 Dirac 海的概念。认为真空是负能量态被填满的 Dirac 海，给予能量可以激发出空穴 (反粒子。显然 Dirac 海解释也存有很多缺陷:

- 无法解释 Boson。
- Dirac 海是一个无穷多自由度的多粒子体系，用单粒子的方程来描述显然是不合理的。

同样相对论性量子力学也无法满足微观因果性的要求，考虑一个自由单粒子传播的振幅:

$$U(t)=\langle\vec{x}|e^{-iHt}|\vec{x_0}\rangle \tag{1.9}$$

非相对论情况下:

$$U(t)=\langle\vec{x}|e^{-i\left(\vec{p}^2/2m\right)t}|\vec{x_0}\rangle=\left(\frac{m}{2\pi it}\right)^{3/2}e^{im(\vec{x}-\vec{x_0})^2/2t} \tag{1.10}$$

这个表达式在任意的 $\vec{x},t$ 下都是非零的。这个可以在非相对论情况下是可以理解的。但是在相对论情况下:

$$U(t)=\langle\vec{x}|e^{-it\sqrt{\vec{p}^2+m^2}}|\vec{x_0}\rangle\sim e^{-m\sqrt{(\vec{x}-\vec{x_0})^2-t^2}}(\text{when }(\vec{x}-\vec{x_0})^2\gg t^2) \tag{1.11}$$

是个小量但同样是非零的，这在相对论情况下不满足因果律的要求显然是不正确的。同时相对论性量子力学也无法解释粒子的产生与衰变，例如 $n\to p+e^-+\bar{\nu}_e$，这必然是一个多粒子的体系，因此引入场的概念是非常重要的。
量子场论的解决方案为:

- 不要求单粒子的概率守恒，但是要求总系统的幺正性。
- 运动方程由经典场方程给出。
- 对经典场进行量子化。
- 提出反粒子使得 $E_\pm>0$，不再有负能量，同时微观因果律可以得到保证。
- 重整化方案解决发散问题。
- QED,QCD,EW 理论都得到了实验的验证，预言了胶子、Higgs 粒子、$W^\pm$

得到量子场论，有两条路线:

(1). 非相对论量子力学 $\xrightarrow{\text{相对论化}}$ 相对论量子力学 $\xrightarrow{\text{多体化}}$ 量子场论
(2). 经典力学 $\xrightarrow{\text{多体化}}$ 经典场论 $\xrightarrow{\text{量子化}}$ 量子场论

由于相对论性量子场论自身有不自洽的很多问题，这门课程以第二条线路作为主线路。

2 经典场论

2.1 场方程

分析力学

经典力学下，最小作用量原理和牛顿定律是等价的。系统的作用量为:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt \tag{2.1}$$

由最小作用量原理可以给出 Euler–Lagrange 方程:

$$\delta S = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{2.2}$$

定义共轭动量 $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$，对 L 做 Legendre 变换可以得到 Hamitonian 及正则方程:

$$H \equiv p\dot{q} - L, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{2.3}$$

经典场: 无穷多自由度

当系统为有限多自由度时，$q \to q_i, \dot{q} \to \dot{q}_i$。当系统为无穷多自由度时，在连续性极限下，不使用 i 而使用空间坐标 $\vec{x}$ 来标记每个自由度，采用场的观点:” 场” 即为分布在空间各个位置的一个量。场 $\phi(x)$ 代表第 i 个点的 q_i 在体积 ΔV 中的平均:

many-particle system	$\rightarrow$	field
q_i	$\rightarrow$	$\phi(x)$
numbering by i	$\rightarrow$	numbering by x
$\sum_{i=1}^{\infty} \Delta V$	$\rightarrow$	$\int d^3\vec{x}$

Lagrangian 场论

在用场的观点描述时，作用量可以写为:

$$S = \int dt \int d^3\vec{x} \mathcal{L}\left(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)\right) \equiv \int d^4x \mathcal{L}\left(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)\right) \tag{2.4}$$

其中 $\mathcal{L}$ 为场的 Lagrangian 密度，后面不再做名字上的区分，也将其称为 Lagrangian，在构造 Lagrangian 时，应满足要求:

(1).$\mathcal{L}$ 有局域性。(2). 场不超过一阶导数。(3).$\mathcal{L}$ 是 Lorentz 标量。

此时应用最小作用量原理，可以得到场的 Euler–Lagrange 方程:

$$\delta S = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0 \tag{2.5}$$

Example 2.1 *实标量场:*

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{2.6}$$

通过 Euler–Lagrange 方程可以再次得到 K-G 方程。:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi = 0 \tag{2.7}$$

Hamitonian 场论

定义共轭动量:

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \tag{2.8}$$

通过 Legendre 变化得到系统的 Hamitionian 密度和 Hamitonian(再后续同样不对名称区分):

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L}, \quad H = \int d^3\vec{x}\mathcal{H} \tag{2.9}$$

对 Hamitonian 做变分有:

$$\delta\mathcal{H} = \dot{\phi}\delta\pi + \pi\delta\dot{\phi} - \delta\mathcal{L} = \dot{\phi}\delta\pi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \partial^i\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial^i\phi\right)}\right)\delta\phi = \dot{\phi}\delta\pi - \dot{\pi}\delta\phi \tag{2.10}$$

同时 $\mathcal{H}(\phi, \nabla\phi, \pi)$ 的变分也可写成:

$$\delta\mathcal{H} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} - \nabla\cdot\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\nabla\phi)}\right)\right)\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi}\delta\pi \tag{2.11}$$

故可以得到正则方程:

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi}, \quad \dot{\pi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} + \nabla\cdot\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\nabla\phi)}\right) \tag{2.12}$$

Example 2.2 *实标量场的 Hamitonian:*

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{2.13}$$

ϕ 的共轭动量为 $\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = \dot{\phi}$，可以得到其 Hamitonian 为:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{2.14}$$

2.2 Noether 定理

在经典场论中，每一种使得作用量不变的连续对称变换均会导致存在一个守恒流和运动常数。这一结论叫做 Noether 定理。通过某种变换会使得场发生变化:

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x) + \alpha\Delta\phi(x) \tag{2.15}$$

其中 α 是一个无穷小参数。如果该变换不改变 Lagranian，则显然作用量是不改变的。但是有时 Lagrangian 也会发生变化，如果需要作用量不变，则 Lagrangian 的变化必须是一个全微分形式:

$$\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}(x) + \alpha\partial_\mu\mathcal{J}^\mu(x) \tag{2.16}$$

场发生一定改变时，Lagrangian 的变化为:

$$\alpha\Delta\mathcal{L}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}(\alpha\Delta\phi)+\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)}\right)\partial_\mu(\alpha\Delta\phi)=\alpha\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)}\Delta\phi\right)+\alpha\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)}\right)\right]\Delta\phi \tag{2.17}$$

对比可得守恒流:

$$\partial_\mu j^\mu(x)=0,\quad j^\mu(x)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)}\Delta\phi-\mathcal{J}^\mu \tag{2.18}$$

以及运动常数:

$$Q\equiv\int\quad j^0d^3x,\quad \frac{d}{dt}Q=0 \tag{2.19}$$

Remark 这一小部分马老师上课时采用的是郑汉青老师讲义中的观点讲的。郑汉青老师的讲义中对这部分的讨论更加 *general* 一些也更复杂一点，而 *Peskin* 书中对这部分的讨论更加简明易懂一些，我这里就把 *Peskin* 书上的这部分搬运过来了。

全局 $U(1)$ 对称性

考虑复标量场的 Lagrangian:

$$\mathcal{L}=\left|\partial_\mu\phi\right|^2-m^2|\phi|^2 \tag{2.20}$$

进行全局的 $U(1)$ 变换 $\phi\to e^{i\alpha}\phi$ 时，显然 Lagrangian 是不变的，即:

$$\Delta\mathcal{L}=0\Rightarrow\mathcal{J}^\mu=0 \tag{2.21}$$

得到的守恒流为:

$$j^\mu=i\left[\left(\partial^\mu\phi^*\right)\phi-\phi^*\left(\partial^\mu\phi\right)\right] \tag{2.22}$$

时空平移对称性

考虑一个无穷小的时空平移:

$$x^\mu\to x^\mu-a^\mu \tag{2.23}$$

或者描述为场变换为:

$$\phi(x)\to\phi(x+a)=\phi(x)+a^\mu\partial_\mu\phi(x) \tag{2.24}$$

Lagrangian 同样是一个标量，按同样的方式变化:

$$\mathcal{L}\to\mathcal{L}+a^\mu\partial_\mu\mathcal{L}=\mathcal{L}+a^\nu\partial_\mu\left(\delta^\mu_\nu\mathcal{L}\right) \tag{2.25}$$

或者写为:

$$a^\nu\Delta\phi=a^\nu\partial_\nu\phi,\quad a^\nu\Delta\mathcal{L}=a^\nu\partial_\mu\mathcal{J}^\mu=a^\nu\partial_\mu\left(\delta^\mu_\nu\mathcal{L}\right) \tag{2.26}$$

可以得到时空平移守恒流:

$$T_{\nu}^{\mu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\mu} \phi\right)} \partial_{\nu} \phi-\mathcal{L} \delta_{\nu}^{\mu} \tag{2.27}$$

即场的能-动张量。相应可以得到的运动常数为能量和动量:

$$H=\int T^{00} d^{3} x=\int \mathcal{H} d^{3} x, \quad P^{i}=\int T^{0 i} d^{3} x \tag{2.28}$$

Remark 注意这里的 P^i 是场带有的 (物理) 动量，不要与正则动量混淆。

2.3 Lorentz 对称性

运动方程的 Lorentz 不变性

在 Lorentz 变换:

$$x^{\mu} \rightarrow x^{\mu\prime}=\Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}, \quad \phi(x) \rightarrow \phi^{\prime}\left(x^{\prime}\right) \tag{2.29}$$

运动方程应该是不变的。作用量:

$$S=\int d^{4} x L \mathcal{L}(x) \tag{2.30}$$

充分条件:$\mathcal{L}$ 是不变的:

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}^{\prime}\left(x^{\prime}\right)=\mathcal{L}(x) \tag{2.31}$$

标量场:

$$\phi(x) \rightarrow \phi^{\prime}\left(x^{\prime}\right)=\phi(x), \quad \partial_{\mu} \phi(x) \rightarrow \partial_{\mu}^{\prime} \phi^{\prime}\left(x^{\prime}\right)=\left(\Lambda^{-1}\right)^{\nu}{}_{\mu} \partial_{\nu} \phi(x) \tag{2.32}$$

注意 $g^{\mu}\nu$ 是 Lorentz 不变的，即:

$$\left(\Lambda^{-1}\right)_{\mu}^{\rho}\left(\Lambda^{-1}\right)_{\nu}^{\sigma} g^{\mu \nu}=g^{\rho \sigma} \tag{2.33}$$

于是 $\left(\partial_{\mu} \phi(x)\right)^{2}$ 项在洛伦兹变换下也是不变的，整个 $\mathcal{L}$ 和运动方程也是不改变的。
矢量场

$$A^{\mu}(x) \rightarrow A^{\mu\prime}\left(x^{\prime}\right)=\Lambda^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu}(x) \tag{2.34}$$

对于 Maxwell 场的 Lagrangian:

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4} F^{\mu \nu} F_{\mu \nu} \tag{2.35}$$

也是 Lorentz 不变的，运动方程自然也是不改变的。

Lorentz 群及其表示

做一般性的讨论，假设有一个场，在 Lorentz 变换下:

$$\Phi_a \to \Phi_a'(x') = M_{ab}(\Lambda)\Phi_b(x) \tag{2.36}$$

Lorentz 变换构成一个群，每个 Lorentz 变换可以映射到一个矩阵，且映射保持乘法关系不变:

$$\Lambda \to M(\Lambda) \tag{2.37}$$

即 M 是洛伦兹群的一个矩阵表示。考虑一个无穷小变换:

$$x^{\mu\prime} = x^\mu + \omega^{\mu\nu}x_\nu, \quad \omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu} \tag{2.38}$$

对 M_{ab} 做参数化:

$$M_{ab} = \delta_{ab} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(\mathcal{J}^{\mu\nu})_{ab} \tag{2.39}$$

$\mathcal{J}^{\mu\nu}$ 即 Lorentz 群的生成元。
我们对于 Lorentz 群的一个子群 $SO(3)$ 群很熟悉，生成元:

$$\vec{J} = \vec{x} \times \vec{p} = \vec{x} \times (-i\nabla) \tag{2.40}$$

令 $J^3 = J^{12}$ 等等，可以将生成元写为:

$$J^{ij} = -i\left(x^i\nabla^j - x^j\nabla^i\right) \tag{2.41}$$

$so(3)$Lie 代数:

$$[J^i, J^j] = i\epsilon^{ijk}J^k \tag{2.42}$$

群元:

$$R(\vec{\theta}) = e^{-i\vec{\theta}\cdot\vec{J}} \tag{2.43}$$

$J^i = \frac{\sigma^i}{2}$ 构成 $SO(3)$ 群的一个二维表示。
接下来我们继续看 Lorentz 群的生成元，将 $SO(3)$ 群生成元推广到 4 维即可得到:

$$J^{\mu\nu} = i\left(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu\right) \tag{2.44}$$

不难看出 Lorentz 群有 6 个自由度，分别对应 3 个 rotation 和 3 个 boost。生成元的对易关系为:

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i\left(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho}\right) \tag{2.45}$$

接下来我们要做的是找到群生成元的表示矩阵:
对于标量场:

$$J^{\mu\nu} = 0 \tag{2.46}$$

对于矢量场:

$$(\mathcal{J}^{\mu\nu})_{\alpha\beta} = i\left(\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta - \delta^\mu_\beta\delta^\nu_\alpha\right), \quad \Lambda = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}\right) \tag{2.47a}$$

$$A^\mu(x) \to A^{\mu\prime}(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x) \tag{2.47b}$$

无穷小变换的形式:

$$\Lambda^\alpha_\beta = \left(\delta^\alpha_\beta - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\left(\mathcal{J}^{\mu\nu}\right)^\alpha{}_\beta\right) \tag{2.47c}$$

矢量的变换也可以等价的写为:

$$V^{\mu\prime} = \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu = g^{\nu\rho}\Lambda^\mu{}_\nu g_{\nu\sigma}V^\sigma = (g^{\mu\nu} + \omega^{\mu\nu})V_\nu = V^\mu + \omega^{\mu\nu}V_\nu \tag{2.47d}$$

对于旋量场:

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right] \tag{2.48}$$

其中 γ^μ 是 Dirac 矩阵，满足代数关系:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \tag{2.49}$$

对于 4 维旋量表示，boost 和 rotation 生成元分别是:

$$S^{0i} = \frac{i}{4}\left[\gamma^0, \gamma^i\right] = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix} \tag{2.50a}$$

$$S^{ij} = \frac{i}{4}\left[\gamma^i, \gamma^j\right] = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\Sigma^k \tag{2.50b}$$

旋量场的变换矩阵可以写为:

$$\Lambda_{\frac{1}{2}} = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right) \tag{2.51}$$

对于无穷小变换:

$$(\Lambda_{\frac{1}{2}})^\alpha_\beta = \left(\delta^\alpha_\beta - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\left(S^{\mu\nu}\right)^\alpha{}_\beta\right) \tag{2.52}$$

我们对 Dirac 矩阵采用 Wely 表示:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \tag{2.53}$$

其中:

$$\sigma^\mu \equiv (1, \boldsymbol{\sigma}), \quad \bar{\sigma}^\mu \equiv (1, -\boldsymbol{\sigma}) \tag{2.54}$$

可以证明:

$$[\gamma^\mu, S^{\rho\sigma}] = (\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu\,\gamma^\nu \tag{2.55}$$

或者可以等价的写为:

$$\left(1 + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma}\right)\gamma^\mu\left(1 - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma}\right) = \left(1 - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathcal{J}^{\rho\sigma}\right)^\mu{}_\nu\gamma^\nu \tag{2.56}$$

或者写为有限变换的形式:

$$\Lambda^{-1}_{\frac{1}{2}}\gamma^\mu\Lambda_{\frac{1}{2}} = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu \tag{2.57}$$

自由场的拉氏量

实标量场:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{KG,r}} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{2.58}$$

复标量场:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{KG,c}} = \partial_\mu \varphi^\dagger \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^\dagger \varphi \tag{2.59}$$

电磁场:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{em}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{2.60}$$

旋量场:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Dirac}} = \bar{\psi}\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi \tag{2.61}$$

注意量纲:

$$[\phi] = 1, \quad [A^\mu] = 1, \quad [\psi] = \frac{3}{2} \tag{2.62}$$

相互作用场的拉氏量

ϕ^4 相互作用:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi\right)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \quad \left(+\frac{n}{3!}\phi^3\right) \tag{2.63}$$

Yukawa 理论:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Yukawa}} = \mathcal{L}_{\mathrm{Dirac}} + \mathcal{L}_{\mathrm{Klein\text{-}Gordon}} - g\bar{\psi}\psi\phi \tag{2.64}$$

QED:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{QED}} &= \mathcal{L}_{\mathrm{Dirac}} + \mathcal{L}_{\mathrm{Maxwell}} + \mathcal{L}_{\mathrm{int}} \\ &= \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi - \frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}\right)^2 - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \\ &= \bar{\psi}(iD\!\!\!\!/ - m)\psi - \frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}\right)^2\end{aligned} \tag{2.65}$$

其中 D_μ 是规范协变微分:

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu(x) \tag{2.66}$$

在规范变换下，拉氏量不变:

$$\psi(x) \to e^{i\alpha(x)}\psi(x), \quad A_\mu \to A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha(x) \tag{2.67}$$

耦合常数的量纲 $[g] \geq 0$ 是可重整理论，可重整理论有有限多参数可以从实验中抽取。微扰: 维数正规化，非微扰: 维数正规化。

Lorentz 对称性与角动量守恒

考虑一个 Lorentz 变换:

$$x^{\mu} \rightarrow x^{\mu\prime} = a^{\mu\nu} x_{\nu} \tag{2.68}$$

考虑无穷小的 Lorentz 变换:

$$a_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \delta\omega_{\mu\nu} \tag{2.69}$$

一般情况下场的变化为:

$$\phi_r^{\prime}\left(x^{\prime}\right) = \phi_r(x) + \frac{1}{2}\delta\omega_{\mu\nu}\left(I^{\mu\nu}\right)_{rs}\phi_s(x) \tag{2.70}$$

其中 I_{ν}^{μ} 是无穷小变换的生成元。可以得到守恒流:

$$J_{\mu}(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{\mu}\phi_r\right)}\frac{1}{2}\delta\omega_{\nu\lambda}\left(I^{\nu\lambda}\right)_{rs}\phi_s(x) - T_{\mu\nu}\delta\omega^{\nu\lambda}x_{\lambda} \tag{2.71}$$

利用 $\delta\omega_{\mu\nu}$ 的反对称性，可以改写为:

$$J_{\mu}(x) = \frac{1}{2}\delta\omega^{\nu\lambda}M_{\mu\nu\lambda}(x) \tag{2.72a}$$

$$M_{\mu\nu\lambda}(x) = T_{\mu\lambda}x_{\nu} - T_{\mu\nu}x_{\lambda} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{\mu}\phi_r\right)}\left(I_{\nu\lambda}\right)_{rs}\phi_s(x) \tag{2.72b}$$

相应的守恒量是一个二阶反对称张量:

$$M_{\nu\lambda}(x) = \int d^3\vec{x}\left[T_{0\lambda}x_{\nu} - T_{0\nu}x_{\lambda} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{0}\phi_r\right)}\left(I_{\nu\lambda}\right)_{rs}\phi_s(x)\right] \tag{2.73}$$

为角动量张量，当 ν, λ 取 $1,2,3$ 时

$$M_{ij} = L_{ij} + S_{ij} \tag{2.74}$$

其中:

$$L_{ij} = \int d^3\vec{x}\left(x_i T_{0j} - x_j T_{0i}\right), \quad S^{ij} = \int d^3\vec{x}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{0}\phi_r\right)}\left(I^{ij}\right)_{rs}\phi_s(x) \tag{2.75}$$

L_{ij} 代表轨道角动量，S^{ij} 联系内禀自由度与空间转动，具有自旋的意义。

2.4 自由场方程的解

实 K-G 场

$$\phi(x) = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}}\left(a_p e^{-ip\cdot x} + a_p^{\dagger}e^{ip\cdot x}\right) \tag{2.76}$$

其 Hamiltonian:

$$H = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{E}{2}(a_p^{\dagger}a_p + a_p a_p^{\dagger}) \tag{2.77}$$

复标量场

作业

旋量场

$$\psi(x)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{s=1,2}\left(a_p^s u^s(p)e^{-ip\cdot x}+b_p^{s\dagger}v^s(p)e^{ip\cdot x}\right) \tag{2.78}$$

其中 u,v 满足方程

$$(\not{p}-m)u^s(p)=0,\quad (\not{p}+m)v^s(p)=0 \tag{2.79}$$

对于 u:

$$\begin{pmatrix}-m & i\sigma\cdot\partial\\ i\bar{\sigma}\cdot\partial & -m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_L\\ u_R\end{pmatrix}=0\Rightarrow u^s(p)=\begin{pmatrix}\frac{p\cdot\sigma}{m}u_R\\ u_R\end{pmatrix} \tag{2.80}$$

通过 $\bar{u}^s u^s$ 是一个标量，可以得到:

$$u^s(p)=\begin{pmatrix}\sqrt{p\cdot\sigma}\xi^s\\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\xi^s\end{pmatrix},\quad s=1,2 \tag{2.81}$$

同理对于 v 可以得到:

$$v^s(p)=\begin{pmatrix}\sqrt{p\cdot\sigma}\eta^s\\ -\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\eta^s\end{pmatrix},\quad s=1,2 \tag{2.82}$$

这里矩阵开根号是，选取正的根号本征值，注意:

$$(p\cdot\sigma)(p\cdot\bar{\sigma})=p^2=m^2 \tag{2.83}$$

系数的选取满足:

$$\bar{u}^r(p)u^s(p)=2m\delta^{rs}\quad\text{or}\quad u^{r\dagger}(p)u^s(p)=2E_{\mathbf{p}}\delta^{rs} \tag{2.84a}$$

$$\bar{v}^r(p)v^s(p)=-2m\delta^{rs}\quad\text{or}\quad v^{r\dagger}(p)v^s(p)=+2E_{\mathbf{p}}\delta^{rs} \tag{2.84b}$$

自旋求和:

$$\sum u^s(p)\bar{u}^s(p)=\gamma\cdot p+m,\quad \sum_s v^s(p)\bar{v}^s(p)=\gamma\cdot p-m \tag{2.85}$$

Hamiltonian(作业):

$$H=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_s\left(E_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}a_{\mathbf{p}}^s-E_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{p}}^s b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}\right) \tag{2.86}$$

而 $b,b^\dagger$ 为 Grassmann numbers(Peskin 9.5), 所以可以写为:

$$H=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_s\left(E_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}a_{\mathbf{p}}^s+E_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}b_{\mathbf{p}}^s\right) \tag{2.87}$$

$E \ll m$ 的极限情况下，一个比较方便的选择是选择 ξ^s 是 σ_3 的本征质量，可以得到:

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{E-p^3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \sqrt{E+p^3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{large boost}} \sqrt{2E}\begin{pmatrix} 0 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \tag{2.88}$$

同理可以得到:

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{E-p^3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \sqrt{E+p^3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{large boost}} \sqrt{2E}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.89}$$

定义螺旋度算符:

$$h \equiv \hat{p} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2}\hat{p}_i \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} \tag{2.90}$$

$m = 0$ 时，$h = \pm 1/2$ 是好的量子数。

规范场

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{2.91}$$

运动方程为:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} \tag{2.92}$$

我们知道在规范变化下 $\mathcal{L}$ 不改变，规范变换是一种“冗余自由度”。通常有两种规范条件可以选取，一种是库伦规范:

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \tag{2.93}$$

在库伦规范下选取后 $\vec{A}$ 是唯一的，所以库伦规范下的 $\mathcal{A}$ 是物理的场，所以库伦规范也称为物理规范。但是库伦规范“显式”的破坏了 Lorentz 的协变性，在后续不再讨论。主要采用“显式”满足 Lorentz 协变的 Lorenz 规范:

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{2.94}$$

但是选取 Lorenz 规范后仍有“冗余自由度”，还有非物理的信息，是一个非物理的规范。下面我们在 Lorenz 规范下求解运动方程，在此规范下运动方程变为:

$$\partial^2 A^\nu = 0 \tag{2.95}$$

其解的形式为:

$$A^{\mu}=\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\left[a_{k,\lambda}\varepsilon^{\mu}(k,\lambda)e^{-ik\cdot x}+a^{\dagger}_{k,\lambda}\varepsilon^{*\mu}(k,\lambda)e^{ik\cdot x}\right] \tag{2.96}$$

哈密顿量:

$$\mathcal{H}=F^{\mu 0}\dot{A}_{\mu}+\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{2.97}$$

可以推导得到:

$$H=\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}E_k(-\alpha^{\dagger}_{\mu}\alpha^{\mu}),\quad \alpha_{\mu}=\sum_{\lambda}a_{k,\lambda}\epsilon^{\mu}(k,\lambda) \tag{2.98}$$

选取极化矢量:

$$\varepsilon^{\mu}(0)=(1,0,0,0),\quad \varepsilon^{\mu}(3)=(0,0,0,1) \tag{2.99a}$$

$$\varepsilon^{\mu}(+)=(0,-1/\sqrt{2},-i/\sqrt{2},0),\quad \varepsilon^{\mu}(-)=(0,1/\sqrt{2},-i/\sqrt{2},0) \tag{2.99b}$$

有:

$$\varepsilon_{\mu}(\lambda)\varepsilon^{\mu}\left(\lambda'\right)^{*}=g_{\lambda\lambda'},\quad \sum_{\lambda}g_{\lambda\lambda'}\varepsilon^{\mu}(\lambda)\varepsilon^{\nu}\left(\lambda'\right)^{*}=g^{\mu\nu} \tag{2.100}$$

最后:

$$H=\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}E_k(-a^{0\dagger}_{k}a^{0}_{k}+\sum_{i=1}^{3}a^{i\dagger}_{k}a^{i}_{k}) \tag{2.101}$$

但是由于洛伦兹规范 $\sum_{\lambda}a^{\lambda}_{k}k_{\mu}\epsilon^{\lambda\mu}$，必须有:

$$a^3=a^0,\quad a^{3\dagger}=a^{\dagger} \tag{2.102}$$

即两个非物理的分量上贡献会相互抵消，最后只留下物理的横向极化的贡献:

$$H=\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}E_k\sum_{\lambda=1}^{2}a^{\lambda\dagger}_{k}a^{\lambda}_{k} \tag{2.103}$$

3 场的量子化

3.1 标量场的量子化

首先回顾一下在量子力学中，有限自由度系统进行的量子化，将原本是数的坐标和动量看为有对易关系的算符:

$$[q_i,p_j]=i\delta_{ij},\quad [q_i,q_j]=[p_i,p_j]=0 \tag{3.1}$$

作为无穷多自由度的系统，是将场看成有对易关系的算符:

$$[\phi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)]=i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\quad [\phi(\mathbf{x},t),\phi(\mathbf{y},t)]=[\pi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)]=0 \tag{3.2}$$

上述对易关系也称为等时对易关系。
前面我们已经给出过场的平面波解的形式为:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathrm{p}}}} \left(a_p e^{-ip\cdot x} + a_p^\dagger e^{ip\cdot x}\right) \tag{3.3a}$$

$$\pi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{E_{\mathrm{p}}}{2}} \left(a_p e^{-ip\cdot x} - a_p^\dagger e^{ip\cdot x}\right) \tag{3.3b}$$

不过此时 $a, a^\dagger$ 是算符了。有对易关系:

$$[a_p, a_{p'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \tag{3.4}$$

前面我们计算过 Hamiltonian:

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{E}{2} (a_p^\dagger a_p + a_p a_p^\dagger) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E(a_p^\dagger a_p) + \text{const} \tag{3.5}$$

后面无穷大的常数，称为零点能，但是对于物理测量我们只能测量相对的能量差值，于是我们可以将其舍去。同样我们可以计算动量:

$$\mathbf{P} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \mathbf{p} a_p^\dagger a_p \tag{3.6}$$

$a, a^\dagger$ 和 $Hamiltonian$ 算符的对易为:

$$[H, a_p^\dagger] = E_p a^\dagger, \quad [H, a_p] = -E_p a_p \tag{3.7}$$

Heisenberg 方程:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{O} = [\mathcal{O}, H] \tag{3.8}$$

可以得到:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\phi(x) = i\pi(x), \quad i\frac{\partial}{\partial t}\pi(x) = -i(-\nabla^2 + m^2)\phi(x) \tag{3.9}$$

可以再次的得到 K-G 方程。
我们可以根据对易关系得到:

$$e^{ip\cdot x} a_{\mathbf{p}} e^{-ip\cdot x} = a_{\mathbf{p}} e^{-ip\cdot x}, \quad e^{ip\cdot x} a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-ip\cdot x} = a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip\cdot x} \tag{3.10}$$

可以得到:

$$\phi(x) = e^{i(Ht - \mathbf{P}\cdot\mathbf{x})} \phi(0) e^{-i(Ht - \mathbf{P}\cdot\mathbf{x})} = e^{iP\cdot x} \phi(0) e^{-iP\cdot x} \tag{3.11}$$

量子态

定义基态 (真空态)$|0\rangle$:

$$a_p|0\rangle = 0, \quad H|0\rangle = 0 \tag{3.12}$$

$a^\dagger$ 作用在真空态上:

$$H(a_1^\dagger + a_2^\dagger + \cdots)\,|0\rangle = H\,|p_1, p_2, \cdots\rangle = (E_1 + E_2 + \cdots)\,|p_1, p_2, \cdots\rangle \tag{3.13a}$$

$$\mathbf{P}(a_1^\dagger + a_2^\dagger + \cdots)\,|0\rangle = \mathbf{P}\,|p_1, p_2, \cdots\rangle = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \cdots)\,|p_1, p_2, \cdots\rangle \tag{3.13b}$$

所以称 $a^\dagger, a$ 为产生/湮灭算符。场处于激发态时产生粒子。同时由于:

$$a_p^\dagger a_q^\dagger\,|0\rangle = a_q^\dagger a_p^\dagger\,|0\rangle \tag{3.14}$$

所以激发出来的粒子是玻色子。
定义 one-particle state:

$$|\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}a_{\mathbf{p}}^\dagger|0\rangle, \quad \langle\mathbf{p} \mid \mathbf{q}\rangle = 2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \tag{3.15}$$

系数是为了满足内积的 Lorentz 不变性。同时 Lorentz 不变的积分测度为:

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}(2\pi)\delta\left(p^2 - m^2\right)\Big|_{p^0>0} \tag{3.16}$$

单粒子态的完备性条件为:

$$(\mathbf{1})_{1-\text{ particle }} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}|\mathbf{p}\rangle\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\langle\mathbf{p}| \tag{3.17}$$

若将 $\phi(\mathbf{x})$ 作用在基态上:

$$\phi(\mathbf{x})|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}|\mathbf{p}\rangle \tag{3.18}$$

即 $\phi(\mathbf{x})$ 是在 $\mathbf{x}$ 处产生一个粒子。

微观因果律和反粒子

传播振幅 (传播子):

$$D(x-y) = \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}e^{-ip\cdot(x-y)} \tag{3.19}$$

无论是类时的还是类空的，这个传播子都不为 0。但是实际上考虑因果律时我们应该是计算两点之间的因果性，即对易子:

$$[\phi(x), \phi(y)] = D(x-y) - D(y-x) \tag{3.20}$$

这个对易子是 Lorentz 不变的，当 $(x-y)^2 < 0$ 时，我们可以通过一个 Lorentz 变换使得 $x_0 = y_0$，等时对易子自然为 0。因果律可以得到满足。实际上，我们无法区分一对反向运动的正反粒子，两者相抵消满足了因果律，微观因果律要求正反粒子同时存在。这点在复标量场里更加清楚。留给作业。