李群与李代数 chapter 3

Chapter3. 杨图. 杨表和杨算符

○ 3.1 原始幂等元和杨算符

在有限群群代数 $\mathcal{L}$ 中，对左乘元素保持不变的子空间称为左理想，在左理想中选定适当基后，由左乘元素就可以计算出左理想对应的表示，若该表示是不可约表示，则称为最小左理想。同样对右乘元素，也可以定义右理想和最小右理。如果两个理想对应的表示等价，则称为等价的左理想，对右乘元素有相同的等价右理想

由有限群代数的不可约基，我们知道其变换关系为：

$$S\phi^j_{\mu\nu}=\sum_\rho \phi^j_{\rho\nu}D^j_{\rho\mu}(S) \qquad \phi^j_{\mu\nu}S=\sum_\rho D^j_{\nu\rho}(S)\,\phi^j_{\mu\rho}$$

上式指出，对于固定的 j 和 ν，m_j 个基 $\phi^j_{\mu\nu}$ 可以架设一个最小左理想，记为 $\mathcal{L}^j_\nu=\mathcal{L}\phi^j_{\nu\nu}$，对应不可约表示 $D^j(A)$，改变 ν，可以得到 m_j 个等价的最小左理想 $\mathcal{L}^j_\nu$。同样，对于固定的 j 和 μ，可以用 m_j 个基 $\phi^j_{\mu\nu}$ 架设最小右理想 $\mathcal{R}^j_\mu=\phi^j_{\mu\mu}\mathcal{L}$，也对应不可约表示 $D^j(A)$，同样，m_j 个极小右理想 $\mathcal{R}^j_\mu$ 互相等价。

群代数 $\mathcal{L}$ 中的投影算符 $e=e^2\in\mathcal{L}$ 称为幂等元(idempotent) 满足下式的 n 个矢量称为相互正交的幂等元

$$e_a e_b=\delta_{ab}\,e_a \qquad \text{不求和}$$

对于给定幂等元，所有 re_a 的集合构成左理想，$\mathcal{L}_a=\mathcal{L}e_a$，称为由 e_a 生成的左理想，设 $t\in\mathcal{L}_a$，则 $t=re_a$，有：

$$te_a=re_a^2=re_a=t$$

满足 $te_a=0$ 的所有 $t\in\mathcal{L}$ 的集合，也构成左理想 $\mathcal{L}_a'$，它是和 $\mathcal{L}_a$ 互补的左理想 $\mathcal{L}_a\oplus\mathcal{L}_a'=\mathcal{L}$，$\mathcal{L}_a'$ 的幂等元是 $E-e_a$。由幂等元 e_a 同样也可以生成右理想 $\mathcal{R}_a=e_a\mathcal{L}$。由于正交性，由 n 个互相正交的幂等元 e_a 生成的 n 个左或右理想相加是直和的关系，因为它们不存在公共矢量。

$$\mathcal{L}\sum_a e_a=\bigoplus_a\mathcal{L}_a \quad ; \quad \Big(\sum_a e_a\Big)\mathcal{L}=\bigoplus_a\mathcal{R}_a$$

事实上，由群代数中的任一矢量 $z\in\mathcal{L}$，所有 rz 的集合也构成左理想 $\mathcal{L}_z=\mathcal{L}z$，满足 $tz=0$ 的所有 $t\in\mathcal{L}$ 的集合也构成左理想 $\mathcal{L}_z'$ 但这两个理想可能含有公共矢量，它们之和也不一定充满整个群代数。

生成最小左理想 $\mathcal{L}_a=\mathcal{L}e_a$ 的幂等元称为原始幂等元。由不可约基很容易可以找到一组相互正交的幂等元如下所示：

$$e^j_\nu=\phi^j_{\nu\nu}=\frac{m_j}{g}\sum_R D^j_{\nu\nu}(R)^*R, \qquad e^i_\mu e^j_\nu=\delta_{ij}\delta_{\mu\nu}e^j_\nu$$

$$e^j=\sum_{\nu=1}^{m_j}e^j_\nu=\frac{m_j}{g}\sum_R\chi^j(R)^*R, \qquad e^ie^j=\delta_{ij}e^j$$

不求和

由原始幂等元 e^j_ν 生成的左理想的基就是固定 j 和 ν 的 m_j 个不可约基，因而就是 $\mathcal{L}^j_\nu$，同理生成的右理想是 $\mathcal{R}^j_\nu$，$\mathcal{L}^j_\nu$ 和 $\mathcal{R}^j_\nu$ 并不相同，但它们对应的不可约表示是相同的。

如果同一个幂等元生成的左理想和右理想相同，这理想就称为双边理想。不存在更小的非零双边理想则称为简单双边理想。由幂等元 e^j 生成的左理想包含固定 j 的全部 m_j^2 个基 $\phi^j_{\mu\nu}$，同理，e^j 生成的右理想也包含这 m_j^2 个基 $\phi^j_{\mu\nu}$，因此，由幂等元生成的左理想和右理想是相同的

即: $\mathcal{L}^j = \mathcal{L}e^j = \bigoplus_{\mu=1}^{m_j}\mathcal{L}_\mu^j = \bigoplus_{\nu}^{m_j}\mathcal{R}_\nu^j = e^j\mathcal{L}$

事实上，从任何一个基矢 $\phi^j_{\mu\nu}$ 出发，左乘群代数 $\mathcal{L}$，就包含固定 j 和 ν 的 m_j 个基矢。再右乘群代数，就会包含固定 j 的全部 m_j^2 个基矢。$\mathcal{L}^j$ 是群代数 $\mathcal{L}$ 的简单双边理想，它是所有对应不可约表示 $D^j(G)$ 的左理想之和，也是所有对应不可约表示 $D^j(G)$ 的右理想之和。另外，因为 $\chi^j(E)=m_j$，由特征标的完备关系，可以证明所有 e^j 之和是恒元：

$$\sum_{j=1}^{g_c} e^j = \sum_{R\in G}\Big[\frac{1}{g}\underbrace{\sum_{j=1}^{g_c}\chi^j(R)^*\chi^j(E)}_{g\cdot\delta_{RE}}\Big]R = E$$

3.1.2 原始幂等元的性质

我们需要判别幂等元是否原始的，两个原始幂等元是否等价的，两个原始幂等元是不是等价的，以及原始幂等元作为投影算符的完备性问题。下面两个定理就是要解决这些问题。

定理. 设 e_1 和 e_2 是生成两个最小左理想 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$ 的最小幂等元，则此两幂等元等价的充要条件是至少存在一个群元素 S，满足:

$$e_1Se_2\neq0,\quad \exists S\in\mathcal{L}$$

Proof: ①首先证明充分性。若上式成立，它就提供由左理想 $\mathcal{L}_1$ 的矢量到左理想 $\mathcal{L}_2$ 的矢量的一个映射：

$$x_1\in\mathcal{L}_1 \longrightarrow x_2 = x_1e_1Se_2\in\mathcal{L}_2$$

这种对应关系对左乘群元素保持不变

$$Rx_1\in\mathcal{L}_1\longrightarrow Rx_2 = Rx_1e_1Se_2\in\mathcal{L}_2$$

只要证明这种映射是一一映射(bijective)，则此两左理想等价。

(a). 证明是满射(Surjective)。假设 x_2 集合构成 $\mathcal{L}_2$ 的子空间 $\mathcal{L}_3$，显然该子空间也是左理想，且取 $x_1=e_1\in\mathcal{L}_1$ 时，$x_2=e_1Se_2\neq0$，故 $\mathcal{L}_3$ 也不是零空间，由 $\mathcal{L}_2$ 是最小左理想，故 $\mathcal{L}_3=\mathcal{L}_2$，是满射

(b) 其次证 $x_1\neq0$ 时，必有 $x_2\neq0$，否则对于 $x_2=0$ 的 x_1，可以组成一子空间(左理想)，且不包含 e_1，故只能是零空间。

(c). 再证是单射(injective)，若 x_1, x_1' 都映射到一个 $\mathcal{L}_2$ 中同一个矢量 x_2，则 x_1-x_1' 映射到零矢量，与(b)矛盾。

充分性证完

② 证必要性。设两左理想等价，则 e_1 对应 $\mathcal{L}_2$ 中一个矢量 $b=be_2\neq0$，则 $e_1e_1=e_1$ 在 $\mathcal{L}_2$ 中对应矢量 $e_1b=e_1be_2=b\neq0$。因此至少有一个群元素 S 满足 $e_1Se_2\neq0$。

证完

推论: 幂等元 $e_a=e_a^2$ 是原始幂等元的充要条件是对 $\mathcal{L}$ 中任一矢量 t 都有下式成立:

$$e_ate_a=\lambda_te_a$$

其中 λ_t 是依赖于 t 的常数，可以为零

Proof: ①充分性：用反证法证明：设上式成立，而 e_a 不是原始幂等元，即 e_a 对应的表示是可约表示

$$D^{(a)}(G)=D^{(1)}(G)+D^{(2)}(G)\qquad \mathcal{L}_a=\mathcal{L}_1\oplus\mathcal{L}_2$$

$\mathscr{L}_a$中任意矢量$t=te_a$都可分解为分属两个左理想的矢量之和 $t=t_1\oplus t_2$，$t_1\in\mathscr{L}_1$，$t_2\in\mathscr{L}_2$，e_a也可作此分解：

$$e_a^2=e_1+e_2\,,\quad e_1e_a=e_1\in\mathscr{L}_1\quad e_2e_a=e_2\in\mathscr{L}_2$$

由此可以立即得到 $e_1e_2=0$，$e_1^2=e_1$，$e_2^2=e_2$，即 e_a可以分解为两个相互正交的幂等元之和。因此

$$e_1=e_ae_1e_a=\lambda e_a\,,\quad e_1=e_1^2=e_1\lambda e_a=\lambda e_1$$

$$R(\phi^j_{\mu\nu}S)=\sum_\rho\sum_\lambda D^j_{\nu\rho}(S)\,\phi^j_{\lambda\rho}\,D^j_{\lambda\mu}(R)$$

$$=\sum_\lambda\phi^{j'}_{\lambda\nu}\,D^j_{\lambda\mu}(R)\longrightarrow \text{变换矩阵相同}$$

解得 $\lambda=0$，$e_1=0$，$e_a=e_2$；或 $\lambda=1$，$e_a=e_1$，总之 e_a不能再分解。

②必要性，已知 e_a是原始幂等元，$e_a^2=e_a$，若 $e_ate_a=0$，则式已成立。若 $e_ate_a\neq0$，则这提供一个$\mathscr{L}_a$的一个自映射，映射前后两组基 x_μ和 $x_\mu'=x_\mu e_ate_a$，在左乘元素中得到的不可约表示是相同的，即设：

$$x_\mu'=\sum_\nu x_\nu M_{\nu\mu}\,,\quad \text{则}\quad M^{-1}D(G)M=D(G)$$

由舒尔定理可知，$M=\lambda_t I$，故 $e_ate_a=\lambda_te_a$，证明完毕。

这推论的条件还可放宽，如果 e_a满足条件

$$e_ate_a=\lambda_te_a\,,\quad e_ae_a=\lambda_Ee_a\neq0$$

则 $e_b=e_a/\lambda_E$ 是原始幂等元

定理 设 e_a，$1\le a\le n$，是n个互相正交的幂等元，$e_ae_b=\delta_{ab}e_a$，则由n个e_a生成的n个左理想之和为群代数$\mathscr{L}$的充要条件是：n个e_a之和为恒元

$$\mathscr{L}=\bigoplus_{a=1}^n\mathscr{L}e_a\quad\Longleftrightarrow\quad E=\sum_{a=1}^n e_a$$

Proof：①充分性：若E等于e_a之和，则$\mathscr{L}$中任一矢量t都可用下法唯一地分解为分属各$\mathscr{L}e_a$的矢量之和：

$$t=tE=\sum_{a=1}^n te_a\,,\quad te_a\in\mathscr{L}_a$$

因此$\mathscr{L}$是$\mathscr{L}_a$的直和

②必要性，若$\mathscr{L}$是$\mathscr{L}_a$的直和，则E可唯一分解为$\mathscr{L}_a$的各矢量之和，属$\mathscr{L}_a$的矢量为 $Ee_a=e_a$，证毕。

3.1.3 杨图、杨表和杨算符