2020.10.09

- Dirac 方程以及一些后续的约定

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0$$

采用 Dirac-Pauli 表象：$\gamma^0=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ $\quad\gamma^k=\begin{pmatrix}0&\sigma^k\\-\sigma^k&0\end{pmatrix}$

$$j^\mu = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\psi = \bar\psi\gamma^\mu\psi \qquad \partial_\mu j^\mu = 0$$

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = g^{\mu\nu} \qquad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix}$$

- Dirac 方程的解 参考 Peskin

$$\psi = u(E,\vec p)e^{i(\vec p\cdot\vec x - Et)}$$

在静止系中：$E=m,\ \vec p=0 \Rightarrow (\gamma^\mu p_\mu - m)u = 0$

$$(\gamma^0 E - m)u = 0 \qquad \begin{pmatrix}E-m&\\&-E-m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ \end{pmatrix}=0$$

$$E=\pm m \quad u(E,0)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$E=m \quad \psi_{1,2} = u_{1,2}e^{-imt} \qquad \psi_{3,4} = u_{3,4}e^{imt}$$

问题：$\vec p\neq 0$ 时，$\vec L = \vec r\times\vec p$ 是不是一个好量子数。

$$[H,\vec L] = [\vec\alpha\cdot\vec p+\beta m,\ \vec r\times\vec p] = \alpha_i[p_i,\ \varepsilon_{ijk}r_j p_k] = -i\vec\alpha\times\vec p \neq 0$$

显然 $\vec L$ 不是一个好量子数.

问题：有没有办法引入一个好量子数？引入一个和 α,β 有关的物理量.

引入 $\vec S = \frac{1}{2}\vec\Sigma = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\vec\sigma&0\\0&\vec\sigma\end{pmatrix}$

$$[H,\vec\Sigma] = [\alpha_i,\vec\Sigma]p_i = 2i\vec\alpha\times\vec p$$

$$[H,\vec S] = i\vec\alpha\times\vec p$$

定义 $\vec J = \vec L+\vec S$，可以使得 $[H,\vec J]=0$

$$\vec S^2 = \frac{3}{4}\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix} \qquad S_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&1&\\&&&-1\end{pmatrix}$$

$[H,\vec S]=0$ when $\vec p=0$

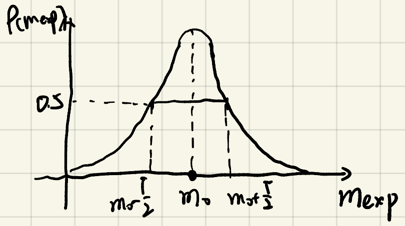
$\psi_1,\ s=\frac{1}{2}$ $\quad\psi_2,\ s=-\frac{1}{2}$ $\quad\psi_3,\ s=\frac{1}{2}$ $\quad\psi_4,\ s=-\frac{1}{2}$

Dirac 方程自动给出费米子的自旋

- 如何定义粒子？

$m,\ \tau(\Gamma),\ Q,\ \vec\mu,\ J^{PC}$

• 粒子质量



$$P(m_{exp}) = \frac{\Gamma}{2\pi\left[(m_{exp}-m_0)^2+\frac{\Gamma^2}{4}\right]}$$

m_0：期待值：粒子的质量

Γ：半高宽度：粒子的宽度

• 不稳定粒子的寿命（τ）

$\xrightarrow{t}$ 其他粒子　　τ：大量粒子寿命的平均值

$t \to t+dt$ 的间隔内：　$dN = -N(t)\,dt/\tau \Rightarrow N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$

• 宽度和寿命之间的关联：

$$\Gamma \cdot \tau = 1 \qquad \tau \to \infty,\ \Gamma = 0$$

• 宽度可以告诉我们什么？　$\Delta E/E_0 = \frac{\hbar c}{(m_0c^2)(c\tau)}$

例：$m_0c^2 \sim 1$ GeV　　$c\tau \sim 1$ 米

$$\Gamma = \frac{\hbar c}{c\tau} = \frac{200\,\text{MeV}\cdot\text{fm}}{1\,\text{m}} \sim 10^{-15}\,\text{GeV} \qquad \Gamma/m_0 \sim 10^{-15}$$

特征量级：$\tau \sim 10^{-23}$s（宽）—强相互作用，$10^{-19} \sim 10^{-17}$—EM，　10^{-10}s．weak相互作用

① τ 非常大，测 τc 即可　　$\tau \sim 10^{-13}$s

② τ 非常短．$l \sim 1$Å或更小，测能量分布．测量宽度即可　　$\tau \sim 10^{-21}$s

③ 10^{-20}s $< \tau < 10^{-14}$s 最困难

多种末态：

A	1	Γ_1	$\#_1$
	2	Γ_2	$\#_2$
	3	Γ_3	⋮
	4	Γ_4	⋮
	5	Γ_5	⋮
	⋮	Γ_n	$\#_n$

总宽度　$\Gamma_{tot} = \sum_i^{n} \Gamma_i$　　n=? 理论模型的预言　　$\Gamma_i = \frac{1}{\tau_i}$

实验上的可观测量　$R_i = \frac{\#_i}{\#_{总}}$：分支比　　$\sum_i R_i = 1$

$$\Gamma_i = \Gamma_{tot} \times R_i$$

th 计算量　　exp　　exp

稳定粒子: $\boxed{e^{\pm},\ p/\bar{p},\ \gamma}$

2020.10.14.

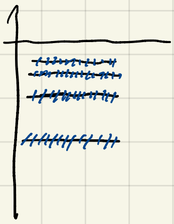
• 粒子的性质: $m.\ \Gamma.\ Q.\ \vec{\mu},\ J^{PC}$ ....

• 氢原子为何激发态不稳定? → 局域的形式. 作用如何产生? 通过光子产生. 而H中无光子的存在.

$$H=\frac{\vec{p}_p^2}{2m_p}+\frac{\vec{p}_e^2}{2m_e}-\frac{e^2}{r}+H_\gamma$$

解薛定谔eq 并不能得到激发态会衰变的结果. 加上一项光子动能项 H_γ

分裂的线状能级 产生一定展宽



$$\Gamma\tau=1$$

• 粒子的衰变:

$$N(t)=N(0)e^{-t/\tau}=N(0)e^{-\Gamma t}$$

近似: 波函数相位不变, 仅 $|\psi(\vec{r},t)|^2$ 变小:

$$\psi(t)=\psi(0)e^{-\frac{i}{\hbar}E_0t}e^{-\frac{\Gamma t}{2\hbar}}=\psi(0)\int C(E)e^{-\frac{iEt}{\hbar}}\frac{dE}{2\pi}$$

$$C(E)=\int_0^\infty e^{-\frac{\Gamma t}{2\hbar}}e^{-\frac{iE_0t}{\hbar}}e^{\frac{iEt}{\hbar}}dt=\frac{i\hbar}{E-E_0+i\frac{\Gamma}{2}}$$

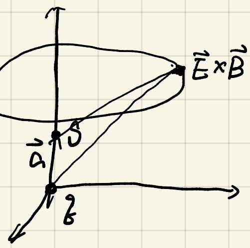
$$|C(E)|^2=\frac{1}{\pi}\frac{(\frac{\Gamma}{2})}{(E-E_0)^2+(\frac{\Gamma}{2})^2}$$ lorentz 分布

• 电荷

$$q_p+q_e<10^{-21}e$$

电荷为何量子化?

1931. Dirac monopole ?



$$\vec{S}=\frac{1}{4\pi}\vec{E}\times\vec{B}=\frac{qg}{4\pi}\frac{\vec{a}\times\vec{r}}{r^3|\vec{r}-\vec{a}|^3}$$

$$\vec{J}_z=\cdots\cdots=qg=2\pi\times(0,\tfrac{1}{2},1,\tfrac{3}{2}\cdots\cdots)$$

• 粒子自旋 $\{S^2, S_z\}$

helicity $h=\frac{\vec{S}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}$, $m\neq0$ 时, 依赖参照系

$m=0$, helicity → chirality

费米子: $\frac{1}{2}$　　波色子 0. 标量　　1. 矢量

- 磁矩. $\vec{\mu} = g\frac{e}{2m}\vec{S}$

$$\begin{cases} s=\frac{1}{2}, & g=2 \\ s=1, & g=1 \end{cases} \Rightarrow g\cdot s=1$$

$gs-1 \neq$ 反常磁矩. $gs=1$ 只是 Born阶 / leading order

质子. 中子: $\mu_p = 2.79\frac{e}{2m_p}$ $\quad \mu_n = -1.91\frac{e}{2m_n}$

磁矩是一个检验复合结构的重要工具

Lagrang- formalism

- 现代物理的3个核心要素

1. 物理体系可以用作用量泛函描述
2. 作用量泛函可以由少数的一般性原理给出 Lagrangian 如何构造? 对称性
3. 体系的演化过程可以用构型中的路径来表示. 此路径可以由作用量极值给出

其中最重要的: 一般性原理

有限多自由度:

$$S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i)\,dt \quad , \quad \frac{\delta S}{\delta q} = 0 \text{ 给出 Euler-Lagrange 方程}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

场论. 全空间. 无限自由度

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = \int d^4x\,\mathcal{L} \qquad L = \int d^3x\,\mathcal{L}(\phi_i, \dot{\phi}_i)$$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0$$

- massless scalar field: $\phi(x)$. $\partial_\mu \phi(x) = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi)$$

- $m \neq 0$ $\quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2$

E-L: $\quad (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi = 0$

- ϕ^4 理论:

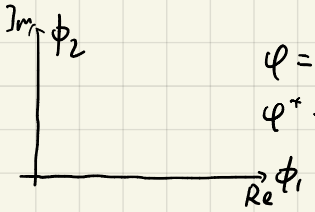
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

- ϕ_1, ϕ_2 $m_1 = m_2$? $g_1 = g_2$?

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 - \frac{1}{2}m_1^2\phi_1^2 - g_1\phi_1^4 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2 - \frac{1}{2}m_2^2\phi_2^2 - g_2\phi_2^4 - g_3\phi_1^2\phi_2^2$$

$$\begin{pmatrix}\phi_1' \\ \phi_2'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1 \\ \phi_2\end{pmatrix}$$

$= \frac{1}{2}[(\partial_\mu\phi_1)^2 + (\partial_\mu\phi_2)^2] - g(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2$. 系统内部有其他自由度. 场量空间 $SO(2)$

- 

$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$ ϕ_1, ϕ_2 : real scalar

$\varphi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2)$ φ : complex scalar

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\varphi^+)(\partial^\mu\varphi) - m^2\varphi^+\varphi - g(\varphi^+\varphi)^2$$

这时有了全局 $U(1)$ 对称性

- $S = \frac{1}{2}$ $\psi, \bar\psi$

$\mathcal{L} = k\,\bar\psi(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$ $\pi_\psi = \mathcal{L}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\dot\psi} = -ik\bar\psi\gamma^0$

$\mathcal{H} = \pi_\psi\dot\psi - \mathcal{L} = k\psi^+(\vec\alpha\cdot\vec p + \beta m)\psi$ $k = 1$

$\mathcal{L}$: $\bar\psi(i\gamma^\mu\overrightarrow{\partial_\mu} - m)\psi$

E.L $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0$ $\bar\psi(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial_\mu} + m) = 0$

* Nother 定理

一个变换 U

$|\alpha\rangle \longrightarrow |\alpha'\rangle = \hat U|\alpha\rangle$

$\hat Q \longrightarrow \hat Q' = \hat U\hat Q\hat U^{-1} = Q$

$[H, \hat U] = 0$ $U(\varepsilon) = e^{-i\varepsilon\hat Q}$

场: 算符. $\phi \to \hat U\phi\hat U^{-1} = \phi + i\varepsilon[\hat Q, \phi]$ $[\phi, \hat Q] = 0 \Rightarrow$ 对称性

- 真空 $\hat H|0\rangle = |0\rangle$ $\hat U|0\rangle = |0\rangle$

$e^{i\alpha\hat Q}|0\rangle = |0\rangle$ $\hat Q|0\rangle = |0\rangle$ 真空在某种对称性下保持不变. 必须有对应的守恒荷为 0

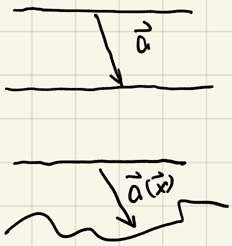
- 内部空间:

粒子 → 海森堡. 同位旋. 质子中子不可区分, 在强相互作用下是全同粒子. 只是"自旋"(同位旋)不同.

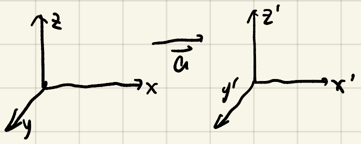
$\begin{pmatrix}p \\ n\end{pmatrix}$ isospin. $SU(2)$ $N \to N' = e^{i\vec\tau\cdot\vec\theta}N$ $\vec\tau = \vec\sigma$

内部空间.与时空坐标无关. 全局对称性

局域 $N(x) \to e^{i\vec{\tau}\cdot\vec{\theta}(x)} N(x)$



• 全局和局域



$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{a}$ 全局

$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{a}(\vec{x})$ 局域

在经典力学的坐标变换观点下. 局域 $\Leftrightarrow$ 力

Weyl: gravity + QED

(a) $g^{\mu\nu\prime} = \lambda(x) g^{\mu\nu}$

(b). $A^{\mu\prime} = A^{\mu} - \partial^{\mu}\lambda(x)$

1927年. 兰登 $e^{-\lambda(x)} \to e^{i\lambda(x)}$

gauge