李群与李代数 chapter 2

Chapter 2. 群的线性表示理论

○ 2.1 群的线性表示

2.1.1. 线性表示的定义

以群论观点看，两个同构的群，群的性质完全相同。矩阵群比较容易研究，与给定群同构或同态的矩阵群，称为该群的线性表示

排除表示矩阵和零矩阵和的矛盾情况

若行列式不为零的 $m\times m$ 矩阵集合构成的群 $D(G)$ 与给定群同构或同态，则 $D(G)$ 称为群 G 的一个 m 维线性表示，或简称表示。与元素 R 对应的 $D(R)$ 称为 R 的表示矩阵。$\chi(R)=\mathrm{Tr}\,D(R)$ 称为元素 R 在表示 $D(G)$ 中的特征标。

① 恒元的表示是单位矩阵 ② 逆元的表示互为逆矩阵 ③ 同构：真实表示；同态：非真实表示

• 恒等表示 • 幺正表示 • 实正交表示

2.1.2 群代数和有限群的正则表示

如果对于群 G 中的每个元素 R，都有一个确定的数 $F(R)$（实数或复数）与之对应，这样的以群元素为自变量的函数称为群函数，常记为 $F(R)$。对于有限群，群函数只有 g 个取值。因此有限群群函数的数目等于群的阶数 g。

群 G 的每一个线性表示 $D(G)$ 都是群 G 的一个矩阵函数。表示矩阵的每一个元素 $D_{\mu\nu}(R)$ 是群 G 的一个群函数。特征标 $\chi(R)$ 也是一个群函数。但由于共轭元素特征标相同。

$$D(SRS^{-1})=D(S)D(R)D(S)^{-1},\qquad \chi(SRS^{-1})=\chi(R)$$

特征标 $\chi(R)$ 实际上是类函数

现在引入群元素的加法概念（只是从原则上规定群元素加法必须满足的一些基本公理。

① 加法交换律：$C_1R+C_2S=C_2S+C_1R$

② 群元素与数相乘的线性性质：$C_1R+C_2R=(C_1+C_2)R$. $\quad C_3(C_1R+C_2S)=C_3C_1R+C_3C_2S$

把有限群看成线性无关的，群元素 R 为基，复线性组合构成一个线性空间 L，称为群空间，维数为群的阶 g。元素的线性组合就是群空间的矢量 ⟶ 满足线性空间矢量的一般性质 群空间基矢的选择不唯一。以群元素作为基称为自然基。在自然基中，群空间矢量的各分量 $F(R)$ 是一个群函数。若任取 g 个线性无关的新基矢 e_s，则有以下变换关系：

$$e_s=\sum_R RM_{Rs}\ ,\quad \det M\neq0$$

$$X=\sum_R RF(R)=\sum_s e_s\phi_s$$

$$F(R)=\sum_s M_{Rs}\phi_s\ ,\qquad \phi_s=\sum_R (M^{-1})_{sR}F(R)$$

现在再引入矢量乘法：数与数作普通数的乘法，群元素与群元素按群元素的乘积规则相乘。

$$XY=\Big\{\sum_R F_1(R)R\Big\}\Big\{\sum_S F_2(S)S\Big\}=\sum_R\sum_S\big[F_1(R)F_2(S)\big](RS)$$

$$=\sum_T\sum_R\big[F_1(R)F_2(R^{-1}T)\big]T=\sum_T\sum_S\big[F_1(TS^{-1})F_2(S)\big]T$$

这样就使群空间变成代数，称为群代数。仍用线性空间符号 L 记示群代数。

在群代数中，群元素既是矢量，也是算符。

$$SR = T = \sum_P P\, D_{PR}(S)$$

显然有：

$$D_{PR}(S) = \begin{cases} 0 & P \neq SR \\ 1 & P = SR \end{cases}$$

由于重排定理，$D(S)$ 的每一行，每一列都只有一个矩阵元素不为1为0。

矩阵 $D(S)$ 是线性算符 S 在群代数自然基中的矩阵形式。算符乘积定义为两算符的相继作用，矩阵则按矩阵乘积规则相乘，则算符的乘积与矩阵乘积仍一一对应。（这种算符与其矩阵形式的一一对应或一多对应关系，一定在乘积中保持不变）

Proof：

$$T(SR) = \sum_P TP\, D_{PR}(S) = \sum_Q Q \sum_P D_{QP}(T)\, D_{PR}(S)$$

$$(TS)R = \sum_Q Q\, D_{QR}(TS)$$

由于结合律，两式左边相等，故：

$$D(T)\,D(S) = D(TS) \longleftrightarrow TS$$

显然 $D(S)$ 的集合构成群 $D(G)$，且同构于 G，称为 G 的正则表示，根据乘法表可以很容易写出矩阵形式，且显然有：

$$\chi(S) = \mathrm{Tr}\, D(S) = \begin{cases} g, & S = E \\ 0, & S \neq E \end{cases}$$

内禀群：算符可以左乘，也可以右乘，左乘和右乘根据各自的乘积规则可以分别构成两个群 G（左乘）和 $\bar{G}$（右乘）。两群同构，不过建立的一一对应关系应为 G 中 R 对应 $\bar{G}$ 中 R^{-1}，$\bar{G}$ 称为 G 的内禀群（intrinsic Group）。为使右乘算符的矩阵形式的集合也构成原群的线性表示，则可以把算符的矩阵形式取转置。

$$RS = \sum_P \bar{D}_{RP}(S)\, P$$

则 $S \longleftrightarrow \bar{D}(S)$　　$\bar{D}(ST) = \bar{D}(S)\,\bar{D}(T)$，且：

$$\bar{D}_{RP}(S) = \begin{cases} 1 & P = RS \\ 0 & P \neq PS \end{cases}$$

2.3.1 类算符

设群 G 阶数为 g，包含 g_c 个类，第 α 个类是

$$C_\alpha = \{S_1, S_2, \ldots S_{n(\alpha)}\} = \{S_k \mid S_k = TS_jT^{-1},\ T \in G\}$$

定义类算符：

$$C_\alpha = \sum_{S_k \in C_\alpha} S_k$$

由第一章结论

$$\sum_{T \in G} T S_j T^{-1} = \frac{g}{n(\alpha)} C_\alpha$$

且：$TC_\alpha T^{-1}=C_\alpha$，　$TC_\alpha=C_\alpha T$，　$T\in G$

即类算符和群中任一元素对易，反之群空间中能与任何群元素对易的矢量 t 一定是类算符的线性组合。

$$t=RtR^{-1}=\frac{1}{g}\sum_R RtR^{-1}=\sum_\alpha f(\alpha)C_\alpha$$

同样，两个类算符的乘积也是类算符的线性组合

$$C_\alpha C_\beta=\sum_{\gamma=1}^{g_c}f(\alpha,\beta,\gamma)C_\gamma$$

○ 2.2 标量函数的变换算符

采用系统转动的观点

设经过变换后，x 点的场变到 x' 点，变换后标量场在 x' 点的值应该等于变换前在 x 点的值：

$$x\xrightarrow{R}x'=Rx$$

$$\psi(x)\xrightarrow{R}\psi'(x')=\psi(x)=\psi(R^{-1}x')$$

为了明显地表达出新函数形式与变换 R 的关系，引入算符 P_R：

$$P_R\psi\equiv\psi',\qquad P_R\psi(x)=\psi'(x)=\psi(R^{-1}x)$$

P_R 是一个算符，把 ψ 变成 ψ'，ψ 和 ψ' 函数形式不同，上式只给出了两个函数在函数值上的关系，同时给出变换规则：把 ψ 的自变量 x 换成 $R^{-1}x$，再把 ψ' 看成 x 的函数，就得到新的函数形式 $P_R\psi$。

P_R 显然是线性算符：

$$P_R[a\psi(x)+b\phi(x)]=a\psi(R^{-1}x)+b\phi(R^{-1}x)=aP_R\psi(x)+bP_R\phi(x)$$

P_R 称为标量函数变换算符，且 P_R 与变换 R 一一对应，乘积也一一对应

$$x'\xrightarrow{S}x''=Sx'=(SR)x$$

$$P_R\psi(x)=\psi'(x)\xrightarrow{S}\psi''(x)=P_SP_R\psi(x)$$

$$x\xrightarrow{SR}x''=(SR)x$$

P_S 必须作用在 ψ' 上，P_R 作用在 ψ 上

$$P_S\psi'(x)=\psi'(S^{-1}x)=P_R\psi(S^{-1}x)=\psi[(SR)^{-1}x]$$

$P_S[P_R\psi(x)]=P_S\psi(R^{-1}x)=\psi(S^{-1}R^{-1}x)$ ✗ 不对！

$$\psi(x)\xrightarrow{SR}P_{SR}\psi(x)=\psi[(SR)^{-1}x]$$

故 $P_SP_R=P_{SR}$。如果 R 构成群，则 P_R 的集合构成与 R 同构的群。此后 P_G 与 G 不再严格区分，都为对称变换群。

例1. 一维系统的平移变换：

$$x\xrightarrow{T(a)}x'=T(a)x=x+a,\qquad x=T(a)^{-1}x'=x'-a$$

$$P_{T(a)}\psi(x)=\psi[T(a)^{-1}x]=\psi(x-a)$$

$$=\sum_n\frac{(-a)^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\psi(x)=\exp\left(-a\frac{d}{dx}\right)\psi(x)$$

$P_{T(a)}=\exp[-iaP_x]$，$\longrightarrow$ $P_{T(a)}$ 可以表达为沿 x 方向动量算符的指数形式

例2. $R(\omega)=R(\vec{e}_3,\omega)$, xy的二次多项式有三个独立的函数基:

$$\psi_1(x,y)=x^2,\qquad \psi_2(x,y)=\sqrt{2}xy,\qquad \psi_3(x,y)=y^2$$

构成的三维函数空间,对转动变换$R(\omega)$保持不变,也即对$P_{R(\omega)}$保持不变. 算符$R(\omega)$在这个不变函数空间中的作用可用一个三维矩阵描写. $D(\omega)=\left(\qquad\right)$ 答案略

现在讨论线性算符$L(x)$在R中的变换规律: 设$L(x)$使:

$$\psi_B(x)=L(x)\psi_A(x)$$

在进行变换R后:

$$\psi_A(x)\xrightarrow{R}\psi_A'(x')=P_R\psi_A(x')$$
$$\psi_B(x)\xrightarrow{R}\psi_B'(x')=P_R\psi_B(x')$$

$L(x)$的形式也必须发生变化,以确保它仍是这两特定状态的变换算符:

$$L(x)\xrightarrow{R}L'(x'),\quad \psi_B'(x')=L'(x')\psi_A'(x')$$

即: $$L'(x)\{P_R\psi_A(x)\}=P_R\psi_B(x)=P_R\{L(x)\psi_A(x)\}$$

所以 $$L'(x)P_R=P_RL(x),\qquad L'(x)=P_RL(x)P_R^{-1}$$

更直接的理解: $L(x)$的右边可能有波函数. P_R^{-1}的作用是抵消P_R对右面波函数的作用.

$$P_R[L(x)\psi(x)]=[P_RL(x)P_R^{-1}][P_R\psi(x)]=L'(x)\psi'(x)$$

量子力学中,物理量用线性厄米算符描写. 系统的哈密顿量应做变换

$$H(x)\xrightarrow{R}P_RH(x)P_R^{-1}$$

对称变换保持H不变:

$$H(x)=P_RH(x)P_R^{-1},\qquad [H(x),P_R]=0\longrightarrow P_R与H可对易.$$

设能级E为m重简并. 有m个线性无关的本征函数,

$$H(x)\psi_\mu(x)=E\psi_\mu(x),\qquad \mu=1,2,\cdots,m$$

ψ_μ构成一个m维线性空间, ψ_μ是一组基. 能量为E的本征函数都可表示为$\psi_\mu(x)$的线性组合.

$$H(x)[P_R\psi_\mu(x)]=P_RH(x)\psi_\mu(x)=E[P_R\psi_\mu(x)]$$

即$\psi_\mu(x)$经P_R变换后,仍属于该线性空间(不变子空间), $P_R\psi_\mu(x)$可按函数基展开:

$$P_R\psi_\mu(x)=\sum_{\nu=1}^{m}\psi_\nu(x)D_{\nu\mu}(R)\longrightarrow 对不变子空间才成立.$$

矩阵形式: $P_R(\psi_1\ \psi_2\cdots\psi_m)=(\qquad)\left(\qquad\right)$

$D_{\nu\mu}(R)$是对称变换算符在基$\psi_\mu(x)$中的矩阵形式,建立起一一对应或多一对应关系(证明方法和前面相同) $D(R)$构成群,它同构或同态于P_G和G

$$D(G)\sim/\approx P_G\approx G$$

P_G作用于不变函数空间的基上,得到线性表示. 线性表示描写不变函数空间中矢量的变换规律. 为了用群论方法描写不变函数的对称性. 首先要找到对称变换群的全部线性表示.

量子力学中,波函数的内积定义为:

$$\langle \psi(x) | \phi(x) \rangle = \int \psi^*(x)\phi(x)\,dx$$

对转动,平移等空间变换. $x \to R^{-1}x$ 的雅克比行列式为1

$$\langle P_R\psi(x) | P_R\phi(x) \rangle = \int \psi^*(R^{-1}x)\phi(R^{-1}x)\,dx = \langle \psi(x) | \phi(x) \rangle \text{ 不变}$$

P_R是幺正算符.函数内积的不变性在P_R下保持不变.若ψ_μ是正交归一的,则$D(G)$就是幺正表示

◯ 2.3 等价表示和表示的幺正性

2.3.1 等价表示

首先,我们知道,表示是一个矩阵群,它所作用的线性空间称为表示空间,正则表示的表示空间就是群代数

如在给定的不变函数空间中,线性变换群P_R作用于基$\psi_\mu(x)$上,得到一个线性表示,线性函数表示空间是表示空间,P_R及其矩阵形式$D(R)$此空间函数的变换性质

表示空间中基的选择不是唯一的,如选新基矢,

$$\phi_\mu = \psi_\nu X_{\nu\mu}$$

此时P_R的矩阵作相似变换:

$$P_R\psi_\mu = \psi_\nu D_{\nu\mu} \qquad P_R\phi_\mu = \psi_\rho D_{\rho\nu} X_{\nu\mu} = \underbrace{\psi_\lambda X_{\lambda\nu}}_{\phi_\nu}\underbrace{X^{-1}_{\nu\rho} D_{\rho\eta} X_{\eta\mu}}_{\bar{D}_{\nu\mu}}$$

即:

$$\bar{D}(R) = X^{-1}D(R)X$$

$D(R)$和$\bar{D}(R)$是同一个线性变换在同一个表示空间中的矩阵形式,只是函数基选择的不同,用过一个相似变换联系起来.如果群G中所有元素R在两个表示$D(G)$和$\bar{D}(G)$中的表示矩阵存在同一相似变换关系,则这两个表示称为等价表示.等价于同一表示的两个表示等价.等价表示没有实质的区别.

由此,寻找群G所有表示的问题化简为寻找群G的所有不等价表示.

$$\chi(R) = \mathrm{Tr}\,D(R) = \mathrm{Tr}\,\bar{D}(R) = \bar{\chi}(R)$$

对于有限群,每个元素在两表示中的特征标相等,是两表示等价的充要条件.

2.3.2 表示的幺正性

实际物理问题,P_R是幺正变换,选择正交归一基,则表示一定幺正.

定理:有限群的线性表示等价于幺正表示,两个等价的幺正表示一定可以通过幺正的相似变换联系

引入有限群群函数对群元素求平均的概念,而且这平均值对左乘或右乘群元素S保持不变

$$\bar{F} = \frac{1}{g}\sum_{R\in G}F(R) = \frac{1}{g}\sum_{R\in G}F(SR) = \frac{1}{g}\sum_{R\in G}F(RS)$$

在chapter 4中我们知道可以推广至连续群

推论:有限群实表示等价于实正交表示,两个等价的实正交表示一定可以通过实正交表示一定可以通过实正交相似变换相联系.

◯ 2.4 有限群的不等价不可约表示

2.4.1 不可约表示

定义：如果群G的表示D(G)的每一个表示矩阵都可通过同一个相似变换化成一个同一形式的阶梯矩阵：

$$X^{-1}D(R)X=\begin{pmatrix} D^{(1)}(R) & M(R) \\ 0 & D^{(2)}(R) \end{pmatrix}$$

则称D(G)为可约表示，反之则为不可约表示。容易证明，$D^{(1)}(R)$和$D^{(2)}(R)$分别构成群G的线性表示，且：

$$\chi(R)=\chi^{(1)}(R)+\chi^{(2)}(R)$$

不是零空间或全空间

可约表示的定义表明：可约表示的表示空间内存在非平庸的不变子空间。阶梯矩阵即是选取新基（不变子空间的基+补空间的基）下的表示矩阵。

如果D(G)的表示空间存在两个互补的不变子空间，可在两不变子空间分别取一组基，构成整个表示空间的一组完备基，则在这组基下，D(R)取同一形式的方块矩阵：

$$X^{-1}D(R)X=\begin{pmatrix} D^{(1)}(R) & 0 \\ 0 & D^{(2)}(R) \end{pmatrix}=D^{(1)}(R)\oplus D^{(2)}(R)$$

则D(R)称为完全可约表示。有时表示子空间虽然存在非平庸的不变子空间，但与其相补的子空间不是不变的。

如一维空间平移变换 T(a)：

$$D(a)=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 是不完全可约的

对于有限群 D(G)一定等价于幺正表示，如果是幺正导出，则选取正交归一基（不变子空间的新基也选取正交归一的）

则D(R)和$\bar{D}(R)$都是幺正矩阵。D(R)的行矢量之间正交归一，列矢量之间正交归一。则 $D^{(1)}(R)$和$D^{(2)}(R)$一定幺正，M(R)一定是零矩阵。这就是说，有限群的可约表示一定是完全可约表示。

对于有限群，把若干不可约表示直和起来，就构成一个已完全约化的可约表示，这样的可约表示不给出任何新的性质。表示空间中的任意矢量可唯一分解为分属各子空间的矢量之和，分别按各不可约表示变换。

于是问题进一步化简为寻找群的所有不等价不可约表示。

2.4.2 舒尔定理

舒尔(Schur)定理是群表示理论中最基本的定理，适用于所有群，揭示出群的不等价不可约表示的基本特征。

定理（舒尔定理二）：设$D^{(1)}(G)$和$D^{(2)}(G)$是群G的两个不等价不可约表示，维数分别为m_1和m_2，如果对每一个元素R都满足

$$D^{(1)}(R)X=XD^{(2)}(R)\ ,\quad 即\quad D^{(1)}_{\nu\rho}(R)X_{\rho\mu}=X_{\nu\rho}D^{(2)}_{\rho\mu}(R)$$

则 $X=0$

Proof:

不可约表示的表示空间不存在非平庸的不变子空间。如果在表示空间中找到低于表示维数的不变子空间，它必定是零空间

下面对不同的情况进行证明

(1). $m_1 > m_2$，把 X 各列看成列矩阵，有 m_2 个列矩阵，$X_{\cdot\mu}$，而上式可以看成 $D^{(1)}(R)$ 作用在这些列向量上，得到列矩阵的线性组合：

$$D^{(1)}(R) X_{\cdot\mu} = X_{\cdot\rho} D^{(2)}(R)_{\rho\mu}$$

即用 m_2 个列矩阵 $X_{\cdot\mu}$ 架设了关于 $D^{(1)}(G)$ 不变的子空间，维数不高于 m_2，因而必定是零空间

(2) $m_1 = m_2$，若 $\det X = 0$，则有逆矩阵 X^{-1}，两表示等价，与假设矛盾，若 $\det X = 0$，则 X 的列矩阵线性相关，只能架设起维数低于 m_1 的子空间，这子空间对 $D^{(1)}(G)$ 保持不变，因而只能是零空间。

(3) $m_1 < m_2$ 取转置 $D^{(1)}(R)^T X^T = X^T D^{(1)}(R)^T$。用反证法，若 $X^T \neq 0$，则上述证明表明 $D^{(1)}(R)^T$ 作用的空间存在不变子空间：

$$Y^{-1} D^{(1)}(R)^T Y = \begin{pmatrix} D_1(R) & M(R) \\ 0 & D_2(R) \end{pmatrix}$$

此式取转置，说明 $D^{(1)}(G)$ 的表示空间存在不变子空间，与假设矛盾，证完

推论1（舒尔定理一） 与不可约表示 $D(G)$ 的所有表示矩阵 $D(R)$ 对易的矩阵必为常数矩阵。即若 $D(R)X = XD(R)$ 则 $X = \lambda I$，λ 为常数。

Proof：取 X 的任一本征值 λ，令 $Y = X - \lambda I$，则 $\det Y = 0$，且 $D(R)Y = YD(R)$。按舒尔定理二情况(2)的证明方法可得 $Y = 0$，即 $X = \lambda I$，证完

推论2 有限群表示不可约的充要条件是不可能找到非常数矩阵与所有表示矩阵对易。

2.4.3 正交关系

群 G 表示 $D(G)$ 的每一个表示矩阵元素 $D_{\mu\nu}(R)$ 都是一个群 G 的群函数，把群函数 $D_{\mu\nu}(G)$ 排列成 $g\times 1$ 列矩阵，对应群空间中以群元素为基的一个矢量。群空间两矢量的点乘定义为：

$$\sum_R F_1(R)^* F_2(R)$$

定理：有限群 G 的不等价不可约幺正表示 $D^i(G)$ 和 $D^j(G)$ 的矩阵元素作为群空间矢量，满足正交关系：（正交性定理）

群函数排列成的矢量相互正交

$$\underline{\sum_{R\in G} D^i_{\mu\rho}(R)^* D^j_{\nu\lambda}(R)} = \frac{g}{m_j} \delta_{ij}\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\lambda}$$

Proof：取 $m_i \times m_j$ 矩阵 $Y(\mu\nu)$，只有第 μ 行第 ν 列元素不为零

$$Y(\mu\nu)_{\rho\lambda} = \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\lambda}$$

再定义 $m_i \times m_j$ 矩阵 $X(\mu\nu)$：

$$X(\mu\nu) = \sum_{R\in G} D^i(R)^{-1} Y(\mu\nu) D^j(R)$$

$$X(\mu\nu)_{\rho\lambda} = \sum_{R\in G} D^i_{\mu\rho}(R)^* D^j_{\nu\lambda}(R)$$

另一方面 $X(\mu\nu)$ 满足：

$$X(\mu\nu) D^j(S) = \sum_{R\in G} D^i(S) D^i(RS)^{-1} Y(\mu\nu) D^j(RS) = D^i(S) X(\mu\nu)$$

这里用到群函数关于群元素求和对右乘元素保持不变的性质。

若 $i\neq j$，则由舒尔定理二 $X(\mu\nu)=0$. 当 $i=j$ 时，由推论1 δ_{ij}

$$X(\mu\nu)_{\rho\lambda}=C(\mu\nu)\delta_{\rho\lambda}$$

其中 $C(\mu\nu)$ 是依赖于 $Y(\mu\nu)$ 的常数. 取 $i=j$ 的情况，取 $\rho=\lambda$，有以下式

$$\sum_{\lambda} X(\mu\nu)_{\lambda\lambda}=m_j C(\mu\nu)=\sum_{R\in G}\sum_{\lambda} D^j_{\lambda\mu}(R^{-1})D^j_{\nu\lambda}(R)=\sum_{R\in G} D^j_{\nu\mu}(RR^{-1})=g\cdot\delta_{\mu\nu}$$

故有：
$$\sum_{R\in G} D^i_{\mu\rho}(R)^* D^j_{\nu\lambda}(R)=\frac{g}{m_j}\delta_{ij}\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\lambda}$$
，证毕.

正交的矢量线性无关，有限群群空间最多有 g 个线性无关的矢量. 现在每个不等价不可约表示提供 m_j^2 个线性无关的矢量，于是有：

推论1：有限群不等价不可约表示维数平方和不大于群的阶数

$$\sum_j m_j^2\le g$$

在正交性定理中取 $\mu=\rho$，$\nu=\lambda$，并求和，有

$$\sum_R \chi^i(R)^*\chi^j(R)=g\delta^{ij}$$

推论2：有限群不等价不可约表示的特征标，作为群空间的矢量相互正交.

同类元素的特征标相同，其实是类函数. 可以建立类似的类空间，不等价不可约表示的特征标提供了类空间线性无关的矢量. 设群 G 有 g_c 个类. 第 α 个类 C_α 包含 $n(\alpha)$ 个元素，该类中特征标为 $\chi^i_{(\alpha)}$

$$\sum_{\alpha=1}^{g_c}\left(\frac{n(\alpha)}{g}\right)^{\frac12}\chi^{i*}_\alpha\left(\frac{n(\alpha)}{g}\right)^{\frac12}\chi^j_\alpha=\frac1g\sum_{\alpha=1}^{g_c} n(\alpha)\chi^{i*}_\alpha\chi^j_\alpha=\delta^{ij}$$

推论3：不等价不可约表示的个数不能大于群的类数，即：

$$\sum_j 1\le g_c$$

设 $D(G)$ 是有限群 G 的可约表示，其可分解为一系列不可约表示的直和

$$X^{-1}D(G)X=\bigoplus_j a_j D^j(R)\qquad \chi(R)=\sum_j a_j\chi^j(R)$$

其中 a_j 称为不可约表示在 $D^j(G)$ 表示中的重数. 右边的式子乘 $\chi^{i*}(R)/g$ 并对 R 求和，有

$$a_i=\frac1g\sum_{R\in G}\chi^i(R)^*\chi(R)$$
(唯一分解定理)

显然，如果两个表示在约化时各不可约表示的重数相等，则两个表示等价. 且不难推出：

$$\sum_{R\in G}|\chi(R)|^2=g\sum_j a_j^2\ge g$$

当 $D(G)$ 是不可约表示 $D^i(G)$ 时，$a_j=\delta_{ij}$，上式变成等号

推论4：有限群两个表示等价的充要条件是每个元素在两表示中的特征标对应相等.

推论5：有限群表示为不可约表示的充要条件是

$$\sum_{R\in G}|\chi(R)|^2=g$$

2.4.4 表示的完备性

根据正则表示的特征标和唯一分解定理，对于正则表示，各不可约表示的重数为：

$$a_j = \frac{1}{g}\sum_R \chi^{j*}(R)\,\chi(R) = \chi^j(E) = m_j$$

即：在正则表示的约化中各不可约表示出现的次数等于该表示的维数.

$$X^{-1}D(R)X = \bigoplus_j m_j D^j(R)$$

若取 R 为恒元，并对上式取迹，有

$$g = \chi(E) = \sum_j m_j^2$$

定理：有限群不等价不可约表示维数平方和等于群的阶数

推论1：有限群不等价不可约幺正表示的矩阵元素 $D^j_{\mu\nu}(G)$，作为群空间的矢量，构成群空间的正交完备基，任何群函数都可在此正交完备基上展开：

$$F(R) = C^j_{\mu\nu}(R)\,D^j_{\mu\nu}(R)$$

$$C^j_{\mu\nu}(R) = \frac{m_j}{g}D^j_{\mu\nu}(R)^* F(R)$$

类函数是一种特殊的群函数，把任何类函数按 $D^j_{\mu\nu}(R)$ 展开，有.

$$F(R) = F(SRS^{-1}) = \frac{1}{g}\sum_{S\in G}F(SRS^{-1})$$

$$= \sum_{j\mu\nu}\frac{C^j_{\mu\nu}}{g}\underline{\sum_{S\in G}}\sum_{\rho\lambda}\underline{D^j_{\mu\rho}(S)}\,D^j_{\rho\lambda}(R)\,\underline{D^j_{\nu\lambda}(S)^*} = \sum_{j\mu\nu}\frac{C^j_{\mu\nu}}{g}\underline{\sum_{\rho\lambda}}\frac{g}{m_j}\delta_{\mu\nu}\,\underline{\delta_{\rho\lambda}D^j_{\rho\lambda}(R)}$$

$$= \sum_{j\mu\nu}C^j_{\mu\nu}\cdot\frac{1}{m_j}\delta_{\mu\nu}\cdot\chi^j(R) = \sum_j\left(\frac{1}{m_j}\sum_\mu C^j_{\mu\mu}\right)\chi^j(R)$$

→ 完备基.

推论2：有限群不等价不可约表示的特征标 $\chi^j(G)$ 构成类空间的正交完备基：

$$F(R) = F(SRS^{-1}) = \sum_j C_j\,\chi^j(R)$$

$$C_j = \frac{1}{g}\sum_R \chi^{j*}(R)\,F(R)$$

推论3：有限群不等价不可约表示的个数等于群的类数

$$\sum_j 1 = g_c$$

把群空间的正交基 $D^j_{\mu\nu}(R)$ 和类空间的正交基 χ^j_α 正交归一化，得到正交归一基为

$$U_{R,j\mu\nu} = \left(\frac{m_j}{g}\right)^{\frac{1}{2}}D^j_{\mu\nu}(R) \quad , V_{\alpha,j}\left[\frac{n(\alpha)}{g}\right]^{\frac{1}{2}}\chi^j_\alpha$$

各列正交归一 ⟶ 幺正矩阵 ⟶ 各行正交归一

$U_{R,j\mu\nu}$ 是一个 $g\times g$ 矩阵，$V_{\alpha j}$ 是一个 $g_c\times g_c$ 矩阵，<u>都是幺正矩阵</u>.

这类表述在理论物理中经常用到

2.4 有限群不可约表示的特征标表

群论的主要任务：物理中常见的对称变换群 —— 找出所有不等价不可约表示，并研究可约表示的约化方法。

对于有限群，首先找出特征标表，然后先取适当的表象，找出不可约表示的表示矩阵（找出生成元的矩阵即可）应尽可能让更多的生成元是对角化的，这样的表示常称为不可约表示的标准形式。对于一个非阿贝尔群，至少在真实表示中，生成元不可能都是对角化的。

找出有限群的所有不变子群和商群是分析一个有限群的重要步骤。

例. D_3 群的特征标表

D_3	E	$2C_3$	$3C_2$
$D^{(1)}$	1	1	1
$D^{(2)}$	1	1	-1
$D^{(3)}$	2	-1	0

容易证明，将一不可约表示的所有矩阵都取复共轭，也构成一个表示，称为复共轭表示。

群 G 的两个不可约表示直乘也是一个表示，特别当其中有一个表示是一维表示时，这样的直乘表示仍是不可约的。

2.4.6 自共轭表示和实表示

表示矩阵都是实矩阵的表示称为实表示，或者定义扩充：等价于实表示的表示也称为实表示。如果复共轭的两不可约表示互相等价，则称为自共轭表示，对有限群，自共轭表示的充要条件是特征标为实数。

定理. 有限群幺正的不可约自共轭表示与其复共轭表示的相似变换矩阵，对实表示是对称的，对非实表示是反对称的。

一般说，有限群包含的自逆类的个数等于它的不等价不可约的自共轭表示的个数

○ 分导表示，诱导表示及其应用

2.5.1 分导表示和诱导表示

定义：群 G 阶数为 g，类 $C_{(\alpha)}$ 中有 $n(\alpha)$ 个元素，不可约表示记为 $D^j(G)$，H 是 G 的 h 阶子群，$\bar{C}_\beta$ 类中有 $\bar{n}(\beta)$ 个元素。

把群 G 不可约表示 $D^j(G)$ 中与子群 H 有关的表示矩阵挑出来，可构成子群 H 的一个表示，称为群 G 的不可约表示 $D^j(G)$ 关于子群 H 的分导（subduced）表示，记为 $D^j(H)$。分导表示一般是可约表示，可按子群的不可约表示 $\bar{D}^k(H)$ 分解，

$$X^{-1}D^j(T)X = \bigoplus_k a_{jk}\bar{D}^k(T) \quad , \qquad m_j = \sum_k a_{jk}\bar{m}_k$$

$$a_{jk} = \frac{1}{h}\sum_{T\in H}\bar{\chi}^k(T)^*\chi^j(T) = \frac{1}{h}\sum_\beta \bar{n}(\beta)\left(\bar{\chi}^k_\beta\right)^*\chi^j_\beta$$

仍采用上面的定义 $\bar{D}^k(H)$ 表示空间的基为 ψ_ν

$$T\,\psi_\nu = \psi_\mu \bar{D}_{\mu\nu}(T_t)$$

定义 $\psi_{r\nu} = R_r \psi_\nu$，$\psi_{1\nu} = \psi_\nu$，将基扩充到 $n\bar{m}_k$ 个基，n 为子群 H 的指数，以基 $\psi_{r\nu}$ 架全的空间对 G 保持不变，则对应群 G 的一个表示 $\Delta^k(G)$，表示矩阵可以利用 $SR_r = R_u T$ 计算

$$S\psi_{r\nu} = SR_r\psi_\nu = R_u T\psi_\nu = \psi_{u\nu}\bar{D}^k_{\nu\mu} = \sum_v \psi_{uv}\Delta^k_{uv,r\mu}(S)$$

$$\Delta^k_{uv,r\mu}(S) = \bar{D}^k_{\nu\mu}(T), \qquad \chi^k(S) = Tr\Delta^k(S)$$

$\Delta^k(S)$ 称为子群的不可约表示 $\bar{D}^k(H)$ 关于群 G 的诱导表示（induced）。诱导表示一般是可约的。

$$Y^{-1}\Delta^k(S)Y = \bigoplus_j b_{jk} D^j(S) \qquad (g/h)\,\bar{m}_k = \sum_j b_{jk} m_j$$

$$b_{jk} = \frac{1}{g}\sum_{S\in G}\chi^j(S)^*\chi^k(S) = \frac{1}{g}\sum_\alpha n(\alpha)(\chi^j_\alpha)^*(\chi^k_\alpha)$$

定理：按以上定义，重数 $a_{jk} = b_{jk}$ 　费罗贝尼乌斯(Frobenius)定理

○ 2.6 物理应用

2.6.1 定态波函数按群对称表示分类

• 把定态波函数组合成对称群确定不可约表示确定行的函数。新基矢在对称变换中按不可约表示变换

$$P_R\psi_p(x) = \psi_\lambda(x) D_{\lambda p}(R), \qquad X^{-1}D(R)X = \bigoplus_j a_j D^j(R)$$

$$a_j = \frac{1}{g}\sum_R \chi^j(R)^*\chi(R)$$

$$\Psi^j_{\mu r}(x) = \psi_p(x) X_{p,j\mu r} \qquad \text{第}j\text{个不可约表示，第}\mu\text{行，}r\text{区分重数}$$

$$P_R\Psi^j_{\mu r}(x) = \Psi^j_{\nu r}(x) D^j_{\nu\mu}(R) \quad (j\text{不求和})$$

如果选取成生元的表示矩阵对角化，则上式就是这些生成元的共同本征方程，用量子力学的语言来说，这样选取的函数基就是这些力学量共同的本征函数。

2.6.2 克莱布什—戈登级数和系数

合成系统有两子系统，子系统有相同的对称变换群 G，波函数分别按不可约表示变换

$$P_R\psi^j_\mu(x^{(1)}) = \sum_\rho \psi^j_\rho(x^{(1)}) D^j_{\rho\mu}(R), \qquad P_R\phi^k_\nu(x^{(2)}) = \sum_\lambda \phi^k_\lambda(x^{(2)}) D^k_{\lambda\nu}(R)$$

合成系统波函数是它们的乘积（矢量的直积）

$$\Psi^{jk}_{\mu\nu}(x^{(1)},x^{(2)}) = \psi^j_\mu(x^{(1)})\phi^k_\nu(x^{(2)})$$

其按直乘表示变换：

$$P_R\Psi^{jk}_{\mu\nu}(x^{(1)},x^{(2)}) = \sum_{\rho\lambda}\Psi^{jk}_{\rho\lambda}(x^{(1)},x^{(2)})\left[D^j(R)\times D^k(R)\right]_{\rho\lambda,\mu\nu}$$

直乘表示是可约的，可用相似变换矩阵 C^{jk} 来约化

矩阵元素 C-G系数

$$(C^{jk})^{-1}[D^j(R)\otimes D^k(R)]C^{jk}=\bigoplus_J a_J D^J(R)$$ C-G级数

$$\chi^j(R)\chi^k(R)=\sum_J a_J\chi^J(R)$$

C-G系数把直积波函数组合成不可约表示的波函数：

$$\Psi^J_{M r}(x^{(1)}x^{(2)})=\sum_{\mu\nu}\Psi^{jk}_{\mu\nu}(x^{(1)},x^{(2)})C^{jk}_{\mu\nu,JMr}$$

2.6.3 维格纳(Wigner)-埃加(Eckart)定理

定理：属于么正交换群P_R的两不等价不可约表示的函数正交，属于同一不可约么正表示不同行的函数也相互正交，属于同一不可约么正表示同一行的函数内积与行数无关

2.6.4 正则简并和偶然简并

设能级E有m重简并，对应的对称变换群G的表示为D(G)，若此表示是群G的不可约表示，则称此简并是正则简并的；若是可约表示，则称为偶然(accidental)简并

引入一个微扰$H_1(x)$，设它和原哈密顿量有相同的对称性，即(对称微扰)

$$[P_R,H_0(x)]=0\qquad[P_R,H_1(x)]=0$$

首先，把$H_0(x)$的本征波函数组合成属于对称变换群G确定不可约表示确定的行的函数$\psi^j_\mu(x)$：

$$P_R\psi^j_\mu(x)=\sum_\nu\psi^j_\nu(x)D^j_{\nu\mu}(R)$$

$$P_R[H_1(x)\psi^j_\mu(x)]=H_1(x)P_R\psi^j_\mu(x)=\sum_\nu H_1(x)\psi^j_\nu(x)D^j_{\nu\mu}$$

即对称波函数不改变波函数的变换性质

从量子力学我们知道，能量一级修正：

$$\langle\psi^j_\nu(x)|H_1(x)|\psi^j_\mu(x)\rangle=\delta_{\nu\mu}(\Delta E^j)$$

能量发生平移但不分裂，正则简并的能级在对称微扰的作用下不会分裂

对于偶然简并，属于同一不等价不可约表示各行的函数，能级移动相同，不发生分裂，但属于两个不同不等价不可约表示的函数，能级移动一般不相等，于是能级分裂了。对称微扰下，偶然简并的能级可以分裂但最多分裂到正则简并。

○ 2.7 有限群代数的不可约基

有限群的不等价不可约表示的矩阵元素也构成群代数中一组正交且完备的矢量，可取代作为群代数的新基

$$\phi^j_{\mu\nu}=\frac{m_j}{g}\sum_{R\in G}D^j_{\mu\nu}(R)^*R$$

这组基在左乘右乘元素时，按不可约表示$D^j(G)$变化

$$S\phi^j_{\mu\nu}=\sum_\rho\phi^j_{\rho\nu}D^j_{\rho\mu}(S)\qquad\phi^j_{\mu\nu}S=\sum_\rho D^j_{\nu\rho}(S)\phi^j_{\mu\rho}$$

也就是说，新的基$\phi^j_{\mu\nu}$把G的正则表示完全约化了，新的基还满足传递关系：

$$\phi^i_{\mu\rho}\,\phi^j_{\tau\nu} = \delta_{ij}\,\delta_{\rho\tau}\,\phi^j_{\mu\nu} \quad \text{不求和}$$

满足以上两式关系的基 $\phi^i_{\mu\nu}$ 称为群代数的不可约基