李群与李代数 chapter 1

Chapter 1. 群的基本概念

○ 1.1 对称

- 系统的对称性：指系统对某种变换保持不变的性质
- 保持系统不变的变换称为系统的对称变换

例如，N个粒子构成的孤立系统的哈密顿量为：

$$H=-\frac{\hbar^2}{2}\sum_j m_j \nabla_j^2+\sum_{i<j} U(|\vec{r}_i-\vec{r}_j|)$$

∇_j^2 是关于 $\vec{r}_j$ 的 Laplace 算符，U 是两个粒子间的二体相互作用势，它只是粒子之间距离的函数，它们对系统的平移、转动和反演都保持不变。若粒子是全同粒子，哈密顿量还对粒子间的任意置换保持不变。这个量子系统的对称性就用系统对这些变换的不变性来描述。

根据系统的对称性质，通过群论方法研究，可以直接得到系统精确的、与细节无关的重要性质

○ 1.2 群及乘法表

1.2.1 群的定义

系统的对称性质由对称变换的集合描写。把对称变换的共同性质归纳出来，得到群的定义

- 群的定义（集合，有一定要求约束）：规定了元素的"乘积"法则之后，满足以下四个条件的集合 G 称为群。

  (1) 封闭性　对于 $\forall f,g\in G$，都有 $fg\in G$

  (2) 结合律　$\forall f,g,h\in G$　$(fg)h=f(gh)$

  (3) 存在恒元　$\exists e\in G$，对于 $\forall f\in G$ 都有　$ef=fe=f$

  (4) 存在逆元　对于 $\forall g\in G$，$\exists g^{-1}\in G$，使得 $gg^{-1}=g^{-1}g=e$

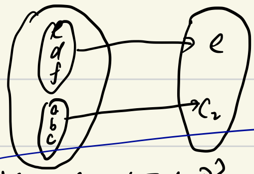
作为数学中群的定义，群元素可以是任何客体，元素的乘积法则也可以任意规定，满足以上四个条件的集合就为群。系统对称变换的集合，对于变换的乘积规则，若满足以上四个条件，就称为系统的对称变换群

- 群的同构和同态：

  同构：一一对应

  同态：多一对应

1. 同构：设 $G=\{g_\alpha\}$，$G'=\{g'_\alpha\}$ 为两个群，群之间一一映射且为满射 $g_\alpha\leftrightarrow g'_\alpha$，且G中任意两个元素的乘积也按相同的对应关系对应G'中相应两个元素的乘积，则称G和G'两个群是同构的，记作 $G\cong G'$



$D_3/C_3\cong C_2$

乘法表相同

① $g_\alpha\leftrightarrow g'_\alpha$ ② 若 $g_\alpha\leftrightarrow g'_\alpha$，$g_\beta\leftrightarrow g'_\beta$，则 $g_\alpha g_\beta\leftrightarrow g'_\alpha g'_\beta$．

由前面讨论过的 lagrange 定理，不难得出：

- 阶为同一素数的两个群同构（都为循环群）
- 无限群也存在同构 如 $SO(2)\cong U(1)$

2. 同态的定义（同构条件的放宽）：将同构中的一一对应，改为多一对应，同构是同态的一种特殊情况．同态包含更广泛的意义。

设 $G=\{g_{im}\}$ 与 $G'=\{g'_i\}$ 之间有多一对应关系，且为满射．群G中任意两元素的乘积也按相同的对应关系对应于G'中两个元素的乘积，符号表达为：① $g_{im}\to g'_i$ ② 若 $g_{im}\to g'_i$，$g_{jn}\to g'_j$，则 $g_{im}g_{jn}\to g'_i g'_j$（注意箭头是单向的）

则称G与G'同态，记作 $G\simeq G'$（等号改为一横）

互相同构的群，性质完全相同。

一般来说，群元素乘积不可对易 所有元素乘积都可对易的群称为阿贝尔群

- 重排定理、乘法表

1.2.2 子群

1.2.3 正N边形对称群

1.2.4 置换群

研究n个全同粒子体系的置换对称性，n个客体排列次序的变换称为置换(permutation)。设原来排列在第j位置的客体，经过置换R后排到第 r_j 位置，可用一 $2\times n$ 的矩阵描写R：

$$R=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_n\end{pmatrix}$$

对于一个给定置换，各列的排列次序是无关紧要的，重要的是每一列上下两个数字的对应关系

两个置换的乘积定义为相继做两次置换（在新排列的基础上做置换，不管之前排列在什么位置），注意，虽然置换操作用矩阵表示，但乘积不服从通常的矩阵乘积规则．置换乘积不满足交换律．

把置换上下两行交换即得到逆置换，恒元即上下两行相同

$$E=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n\end{pmatrix}$$

n个客体有n!个置换，按照上述置换乘积规则，n个客体的所有置换满足群的四个条件，构成一个 $g=n!$ 阶群 S_n

轮换(cycle)是一类特殊的置换，有$(n-l)$个客体保持不变，余下的l个客体顺序变换：

$$(a_1 a_2 \cdots a_l) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{l-1} & a_l & b_1 & \cdots & b_{n-l} \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_l & a_1 & b_1 & \cdots & b_{n-l} \end{pmatrix}$$

在用行矩阵描写轮换时，数字次序不可改变，但允许数字顺序变换：

如：
$$(123) = (231) = (312) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\neq (213) = (132) = (321) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 123^{-1}$$

显然，长度为1的轮换是恒等变换。长度为2的轮换称为对换，显然也有对换满足：

$$(ab) = (ba) \qquad (ab)(ab) = E$$

推而广之，长度为l的轮换，它的l次自乘等于自身，阶数为l。（l阶循环群）

两个没有公共客体的轮换，积分次序可以交换。任何置换都可唯一分解为若干个没有公共客体的轮换的乘积。

把一置换分解为没有公共客体的轮换乘积时，各轮换长度l_i的集合，称为该置换的轮换结构。一般来说，n个客体的任一置换R的轮换结构可表示为：

$$(l_1, l_2, \cdots) \qquad \sum l_i = n$$

$(l_1, l_2 \cdots)$这样把正整数n分解为若干正整数之和称为n的一组配分数。置换的轮换结构由一组配分数来描写。通常认为，只有把置换化为没有公共客体的乘积时，才算把置换化到了最简形式。不难证明以下乘积规则：

$$(ab\cdots d)(de\cdots f) = (ab\cdots de\cdots f)$$

即可按以下过程计算有公共客体的轮换的乘积

①. 先把轮换按上式切断，使每一对轮换只包含一个/没有公共客体

②再按上式拼接起来

- 可利用置换群写出D_3群的乘法表。（将三角形三个顶点看成三个客体），且易看出$S_3 \approx D_3$

1.3 群的各种子集

1.3.1 陪集和不变子群 商群

定义及基本性质略。

在置换群S_n中有一指数为2的极大不变子群，称为交变子群(alternating subgroup)，常记为S_n'

在轮换每一客体处都切断，则长度为l的轮换分解为$(l-1)$个对换的乘积：

$$(abc\cdots pq)=(ab)(bc)\cdots(pq)$$

同理，任何置换都可分解为若干个对换的乘积。这种分解虽然不是唯一的，但容易证明，它包含对换个数的奇偶性与分解方式无关。

把置换分解为对换乘积时，对换数目为偶数的置换称为偶置换，对换数目为奇数的对换称为奇对换。长度为奇数的轮换是偶置换，长度为偶数的轮换是奇置换，恒元是偶置换。常引入置换宇称 $\delta(R)$：

$$\delta(R)=\begin{cases}1, & R\text{是偶置换}\\ -1, & R\text{是奇置换}\end{cases}$$

1.3.2 共轭元素和类

对群 G 中任意给定的元素 $P\in G$，当 R_j 取遍类中所有元素时，SR_jS^{-1} 相互共轭，且不会有重复元素，故有：

$$SC_\alpha S^{-1}=C_\alpha,\quad SC_\alpha=C_\alpha S$$

这说明，类 C_α 作为复元素，可以和群 G 中任意元素 S 对易。反之，对 C_α 中固定的元素 R_j，让 P 取遍取中所有元素，PR_jP^{-1} 会出现重复元素，但其中每个元素重复次数相同，重复次数为：

$$m(\alpha)=\frac{g}{n(\alpha)}$$

可见类 C_α 中包含的元素数目 $n(\alpha)=g/m(\alpha)$ 是群 G 阶数 g 的因子。

类 C_α 中各元素的逆元也必定相互共轭

$$R_k=PR_jP^{-1}\quad\Rightarrow\quad R_k^{-1}=PR_j^{-1}P^{-1}$$

因此 R_j^{-1} 的集合也构成类，记为 C_α^{-1}，C_α 与 C_α^{-1} 称为相逆类，它们包含的元素数目相同。若 C_α 中有元素和其逆元素共轭，则 C_α 和 C_α^{-1} 重合，称为自逆

- 同类元素的阶必相同，但阶数相同的元素不属于同一类
- T5 和 S7 共轭，若群乘法表中左乘元素和右乘元素次序相同，则对角线对称的两元素共轭，共轭两元素，也一定会在对称位置出现
- 绕等价轴转动相同角度的变换互相共轭
- 绕双向轴转动正负相同角度的变换相互共轭
- 不变子群由群 G 中若干个完整的类构成，例：D_3 群的类

置换群的类：从另一角度理解两置换的乘积公式

SR：① R 置换的第二行数字做 S 置换

② S 置换的第一行做 R^{-1} 置换；

共轭元素 SRS^{-1} 把指写 R 的两行数字全部做 S 置换。特别当 R 是一个轮换时

$$S(a\ b\ c\cdots d)S^{-1}=(S_a\,S_b\,S_c\cdots S_d)$$

共轭变换不改变轮换的长度，只改变轮换涉及的客体编号。因此，置换群中有相同轮换结构的元素互相共轭，即置换群的类是由轮换结构来描写的。

任何置换都可表为对换的乘积，而任何对换又都可表为相邻客体对换 $P_a=(a\ \ a+1)$ 的乘积。P_a 满足以下条件：

① $P_a^2=E$ ② $P_aP_b=P_bP_a$，$|a-b|\geq 2$ ③ $P_aP_{a+1}P_a=P_{a+1}P_aP_{a+1}=(a\ \ a+2)$

④ $(a\ d)=(d\ a)=P_{a-1}P_{a-2}\cdots P_{d+1}P_dP_{d+1}\cdots P_{a-2}P_{a-1}=P_dP_{d+1}\cdots P_{a-1}P_aP_{a-1}\cdots P_{d+1}P_d$，$d<a$

引入长度为 n 的轮换 W：

$$W=(1\ 2\cdots n),\qquad W^{-1}=W^{n-1}$$

则：$$P_a=WP_{a-1}W^{-1}=W^{a-1}P_1W^{-a+1}$$

因此，W 和 P_1 是置换群的生成元，置换群的秩为2。?

1.3.3 群的同态关系

- 同态核定理．$G'\sim G$ 时，G' 反映了 G 中商群 G/H 的性质

1.3.4 群的直接积

- 定义 设群 H_1 和 H_2 是群 G 的两个子群

①. 除恒元外，子群 H_1 和 H_2 无公共元素

②. $R_j\in H_1$，$S_k\in H_2$，则 $R_jS_k=S_kR_j$

③. G 是所有 R_jS_k 的集合.

则称 G 是 H_1 和 H_2 的直接乘积．记为 $V=H_1\otimes H_2$．H_1 和 H_2 都是 G 的不变子群。

集合 $\{R_kS_j\}$ 不含有公共元素。若 $R_iS_j=R_kS_l\Rightarrow R_k^{-1}R_i=S_lS_j^{-1}$，分属两个子群。因此，$G=H_1\otimes H_2$ 的阶为 $g=h_1h_2$.

实际问题中，常遇到两群 H_1 和 H_2 作用于不同对象上，故而一定可对易，补上相同恒元 e_1e_2．定义集合

$$G=\{R_iS_k\mid R_i\in H_1,\ S_k\in H_2\}\longrightarrow \text{构成直积群 } G=H_1\otimes H_2.$$

- 例：包含空间反演 σ 的非固有点群称为I型非固有点群，不包含的则为P型非固有点群.

  G 是I型非固有点群．是了固有点群和二阶反演群 V_2 的直乘：

$$G=H\otimes V_2\qquad V_2=\{E,\sigma\}$$

- 熊夫利（Schönfiels）符号体系

○ 1.4 正四面体和立方体对称变换群