李群与李代数 . Chapter 4

Chapter 4. 三维转动群和李代数基本知识

SO(3)群是最简单的李群. 对SO(3)群的研究对物理上和数学上有很多启示, 本章也通过SO(3)群介绍李代数的基本知识.

4.1 SO(3)群

本笔记按照多数文献之习惯, 采用系统转动的观点

在三维空间建立直角坐标系, 位矢为:

$$\vec{r} = \vec{e}_i x_i$$

空间转动保持原点、两点距离、手征性不变, 变换前后

$$\vec{r}' = \vec{e}_i x_i' \quad , \quad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

原点、距离不变要求 R 是实正交矩阵:

$$x'^T x' = x^T R^T R x = x^T x \Rightarrow R^T R = 1$$

建立固定在系统上的坐标系 K', 则 $\vec{r}'$ 在 K' 系中的分量保持不变。

单位矢量的变换关系为:

$$\vec{e}_j' = \vec{e}_i R_{ij}$$

坐标系的手征性不变要求: (右手系)

幺模矩阵

$$\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) = \vec{e}_1' \cdot (\vec{e}_2' \times \vec{e}_3') = \det R = 1$$

因此: 行列式为1的实正交矩阵描写三维空间转动变换. 行列式为−1 则改变系统的手征性. 即包括空间反演 σ。

三维幺模实矩阵 $R(\vec{n}, \omega)$; $\vec{n}$ 方向转动 ω 角. 集合: SO(3)群 三维转动群.

SO(3) 再包括进空间反演变换 ⟶ O(3)群.

利用泡利矩阵和级数展开:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$e^{-i\omega\sigma_2} = \sum_n \frac{1}{n!}(-i\omega\sigma_2)^n = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}$$

取:

$$T_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & \\ i & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

可将 $R(\vec e_3,\omega)$ 写成指数形式：

$$R(\vec e_3,\omega)=e^{-i\omega T_3}=\begin{pmatrix}\cos\omega & -\sin\omega & \\ \sin\omega & \cos\omega & \\ & & 1\end{pmatrix}$$

同理，根据三个轴的循环对称性：

$$R(\vec e_1,\omega)=e^{-i\omega T_1},\quad T_1=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & -i\\ & i & 0\end{pmatrix}\qquad R(\vec e_2,\omega)=e^{-i\omega T_2},\quad T_2=\begin{pmatrix}0 & & i\\ & 0 & \\ -i & & 0\end{pmatrix}$$

T_i 矩阵元的元素满足：

$$(T_i)_{jk}=-i\varepsilon_{ijk}.$$

引入一个特殊转动 $S(\varphi,\theta)$，把 $\vec e_3$ 轴上的点转到 $\hat n(\theta,\varphi)$ 方向。

$$S(\varphi;\theta)=R(\vec e_3,\varphi)\,R(\vec e_2,\varphi)$$

$$S(\varphi,\theta)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}$$

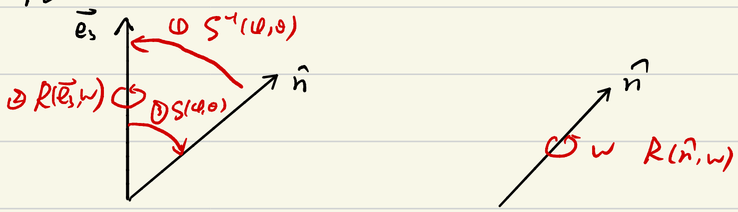
不难验证：$ST_3S^{-1}=\hat n\cdot\vec T$ ，$\vec T=\vec e_i T_i$

$R(\hat n,\omega)$ 可表示为三个转动的乘积：

① 把 $\hat n$ 方向转到 $\vec e_3$ 方向 $S^{-1}(\theta,\varphi)$

② 在 $\vec e_3$ 方向转 ω $R(\vec e_3,\omega)$

③ 把 $\vec e_3$ 方向转回 $\hat n$ 方向 $S(\theta,\varphi)$



$$S(\varphi,\theta)R(\vec e_3,\omega)S^{-1}(\varphi,\theta)\quad=\quad R(\hat n,\omega)$$

$$R(\hat n,\omega)=S(\varphi,\theta)\,R(\vec e_3,\omega)\,S(\varphi,\theta)^{-1}$$

$$=e^{-i\omega ST_3S^{-1}}=e^{-i\omega\hat n\cdot\vec T}=e^{-i\omega_i T_i}\qquad(\omega_i=\omega n_i)$$

不难发现：$R(\hat n,\omega)=R(-\hat n,2\pi-\omega)$，$R(\hat n,\pi)=R(-\hat n,\pi)$

即在半径为 π 的球内连续变化，球直径两端的点代表同一转动。

$R(\hat n,\omega)=S(\varphi,\theta)\,R(\vec e_3,\omega)\,S(\varphi,\theta)^{-1}$ 也说明 $SO(3)$ 群中转动相同的角度共轭

○ 4.2 李群的基本概念

通过 $SO(3)$ 群的推广，初步理解李群的一般性质：

4.2.1 李群的组合函数

在欧氏空间变化

李群：连续群，用一组连续变化的实参数描写。

变化区域：群空间　　　实参个数：连续群的阶

测度不为零的区域内：群元素和参数值一一对应
↳可以简单理解为维数和群空间维数相同的区域
例如：SO(3)旋转球，球体内一一对应，球面测度为零，不是一一对应
组合函数：对于群元素的乘积，有：

$$R(r)\,S(s) = T(t)$$

$$t = f(r,s)$$

$f(r,s)$称为连续群的组合函数（结构函数）
李群是结构函数为解析函数的连续群
由群的性质，组合函数还必须满足以下条件：
(1) 封闭性：要求$f(r,s)$是单值解析函数，至少在测度不为零的区域
(2) 结合律：$f[r,f(s,t)] = f[f(r,s),t]$
(3) 恒元的参数为 e 也包括在群空间内：$f(e,r) = f(r,e) = r$
(4). R的逆元的参数记为 $\bar{r}$，$f(r,\bar{r}) = f(\bar{r},r) = e$
组合函数往往十分复杂，只用于理论分析，群的许多概念在李群中同样适用。

4.2.2 李群的局域性质

• 邻近元素：群空间中，群元素R的点的邻域中，各点对应的元素称为R的邻近元素。
常取 $e=0$，恒元的邻近元素参数是无穷小量，称为无穷小元素。
李群的无穷小元素描写李群的局域性质
无穷小元素与R相乘得R的邻域的元素。
把无穷多个无穷小元素相继乘到群元素R上，在群空间表现为一条连续直线，如果R点和恒元的点可以通过一条完全在群空间内的点连接，则R可以表示为无穷多个无穷小元素的乘积 —— R的性质可以通过微分方程描写。
若有两无穷小元素 $A(\alpha)$，$B(\beta)$ 相乘，将AB的参数作 Taylor 展开：

$$f(\alpha,\beta) = f(0,0) + \sum_{k=1}^{g}\left(\alpha_k \frac{\partial f(\alpha,0)}{\partial \alpha_k}\bigg|_{\alpha=0} + \beta_k \frac{\partial f(0,\beta)}{\partial \beta_k}\bigg|_{\beta=0}\right)$$

$$= \alpha + \beta$$

可见：无穷小元素相乘，参数相加。
无穷小元素乘积满足交换律（如：无穷小转动乘积次序可以交换，但有限转动次序不能交换。

4.2.3 生成元和微量算符

$$P_R \psi(x) = \psi(R^{-1}x)$$

若R为无穷小元素$A(\alpha)$，上上式按α展开：

$$P_A\psi(x) = \psi(x) + \alpha_k \frac{\partial (A^{-1}x)_i}{\partial \alpha_k}\Big|_{\alpha=0} \frac{\partial \psi(A^{-1}x)}{\partial (A^{-1}x)_i}\Big|_{\alpha=0}.$$

无穷小微分算符 $I_k^{(1)}$

$$= \psi(x) - i\alpha_k \left(-i \frac{\partial (Ax)_i}{\partial \alpha_k}\Big|_{\alpha=0} \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\psi(x)$$

$$\Rightarrow \quad I_k^{(0)} = -i \frac{\partial (Ax)_i}{\partial \alpha_k}\frac{\partial}{\partial x_i} \qquad P_A\psi(x) = \psi(x) - i\alpha_k I_k^{(1)}\psi(x).$$

参数独立则$I_k^{(1)}$线性无关。 P_R是幺正算符则微分算符是厄米算符，故引入$(-i)$

例：三维空间：$\vec{x}$代表质心的坐标

$$(A\vec{x})_i = [\delta_{ij} - i\alpha_j (T_j)_{ki}]\, x_i = x_i - \alpha_j \varepsilon_{jki} x_i$$

故三维转动群的微量算符正是量子力学中的轨道角动量算符.

$$I_k^{(0)} = -i\varepsilon_{ijk} x_i \partial_j = L_k.$$

把无穷小元素的表示矩阵$D(A)$按无穷小参数展开：

$$D(A) = 1 - i\alpha_k I_k \qquad I_k = i\frac{\partial D(A)}{\partial \alpha_k}\Big|_{\alpha=0}.$$

I_k称为李群表示$D(G)$的生成元. 它是微量微分算符在表示空间的形式.

如果$D(G)$是真实表示，则I_k线性无关

规定实参，则幺正表示的生成元是厄米矩阵

4.2.4 李群的整体性质：

①. 李群的连通性 $\begin{cases} \text{连通的. 简单李群} & SO(3) \\ \text{若干片 混合李群} & O(3) \quad \text{特殊元素} \end{cases}$

混合李群的性质完全由简单李群(不变子李群)和每一连续片(陪集)中一个代表元素的性质决定。

②、简单李群的连通度

R与恒元点，许多连线. 有些连线可以在群空间内连续变化，有些不能.

分成能相互连续变化的若干组，组数称为连通度.

例如：$SO(2)$. 跳跃. 无穷多度连通. $(-\pi, \pi)$跳跃

数学上已证明：n度连通简单李群G一定同态于另一单连通李群，同态对应关系$1:n$，这个单连通的李群称为G的覆盖群.

SO(3)群：两组：一组奇次跳跃，一组偶次跳跃。双连通。

覆盖群是 SU(2) 群

③ 群空间的紧致性

在欧氏空间，包含边界的闭区域是紧致的，不包含边界的开区域（包括无穷区域）是非紧致的。群空间紧致的李群称为紧致李群。

○ 4.3 三维转动群的覆盖群：SU(2)

4.3.1 SU(2) 群的定义

二维么模幺正矩阵的集合，乘法定义为矩阵的乘积，满足群的四个条件，因而构成群。记为 SU(2) 群。对于群中任意元素 u：

$$u=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SU(2)$$

有八个参数：$aa^*+cc^*=bb^*+dd^*=ad-bc=1 \quad ab^*+cd^*=0$

$$\Rightarrow \quad a=d^*,\ c=-b^*,\ |c^2|+|d^2|=1$$

有三个参数独立：用实矢量 $\vec{\omega}$ 的球坐标 ω,θ,φ 表示出三个独立参数：

$$a=d^*=\cos(\omega/2)-i\sin(\omega/2)\cos\theta$$

$$c=-b^*=\sin(\omega/2)\sin\theta\sin\varphi-i\sin(\omega/2)\sin\theta\cos\varphi$$

$$u(\hat{n},\omega)=1\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)-i(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$\vec{\sigma}$ 在不交换次序的情况下满足所有矢量代数的公式：

$$\vec{\sigma}\cdot\hat{n}=\sigma_i n_i=\begin{pmatrix} n_3 & n_1-in_2 \\ n_1+in_2 & -n_3 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{\sigma}\times\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{\sigma}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})=\varepsilon_{ijk}\sigma_i u_j v_k$$

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{a})(\vec{\sigma}\cdot\vec{b})=1(\vec{a}\cdot\vec{b})+i\vec{\sigma}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

由以上关系可证明：

$$u(\hat{n},\omega_1)u(\hat{n},\omega_2)=u(\hat{n},\omega_1+\omega_2)$$

$$u(\hat{n},4\pi)=1 ,\qquad \hat{u}(\hat{n},2\pi)=-1$$

$$\hat{u}(\hat{n},\omega)=\hat{n}(-\hat{n},4\pi-\omega)=-u(-\hat{n},2\pi-\omega)$$

$\vec{\omega}$ 的变化范围是个半径为 2π 的球体。显然 SU(2) 是个简单李群

由于外球面的点都代表同一元素，因此连线在到达球面时可以任意跳跃

且跳跃前后两点可以独立在球面上自由移动，从而可以把跳跃连在一起而消去此跳跃，故而 $SU(2)$ 群是单连通的。

4.3.2 同态关系：

泡利矩阵的线性组合仍是无迹厄米矩阵，反之：任何二维无迹厄米矩阵 X 只包含三个独立的实参数，都可展开为泡利矩阵的实线性组合。

若组合系数是三维空间给定 p 点的三个直角坐标：

$$X = \vec{\sigma}\cdot\vec{x} = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1+ix_2 & -x_3 \end{pmatrix}$$

$$x_i = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(X\sigma_a) \qquad \det X = -\sum x_i^2$$

因此无迹厄米矩阵和 p 点位矢有一一对应关系：取 $u(\hat{n},\omega)\in SU(2)$，有：

$$u(\hat{n},\omega)\,X\,u(\hat{n}\omega)^{-1} = X'$$

X' 仍是一个无迹厄米矩阵，且有相同的行列式，对应空间另一点的坐标 p' 的位矢 $\vec{x}$，即

$$u(\hat{n},\omega)(\vec{\sigma}\cdot\vec{x})\,u(\hat{n},\omega)^{-1} = \vec{\sigma}\cdot\vec{x}' \qquad x_i' = R_{ij}x_j$$

Note：计算 R 矩阵的具体形式：

把 $\vec{x}$ 分解为平行和垂直 $\hat{n}$ 的方向：

$$\vec{x} = \hat{n}a + \hat{m}b \quad . \quad \hat{n}\cdot\hat{m} = 0, \quad \vec{\sigma}\cdot\vec{x} = \vec{\sigma}\cdot\hat{n}a + \vec{\sigma}\cdot\hat{m}b$$

直接进行计算有：

$$u(\hat{n},\omega)(\vec{\sigma}\cdot\hat{n}) = (\vec{\sigma}\cdot\hat{n})\,u(\hat{n},\omega)$$

$$(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})(\vec{\sigma}\cdot\hat{m}) = -(\vec{\sigma}\cdot\hat{m})(\vec{\sigma}\cdot\hat{n}) = i\vec{\sigma}\cdot(\hat{n}\times\hat{m})$$

$$(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})(\vec{\sigma}\cdot\hat{m})(\vec{\sigma}\cdot\hat{n}) = i[\vec{\sigma}\cdot(\hat{n}\times\hat{m})](\vec{\sigma}\cdot n)$$

$$= -\vec{\sigma}\cdot[(\hat{n}\times\hat{m})\times\hat{n}] = -\vec{\sigma}\cdot\hat{m}$$

故：$\left[1\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) - i(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right](\vec{\sigma}\cdot\hat{m})\left[1\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) + i(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]$

$$= \vec{\sigma}\cdot[\hat{m}\cos\omega + (\hat{n}+\hat{m})\sin\omega]$$

故：$\vec{r}' = \hat{n}a + \hat{m}b\cos\omega + (\hat{n}\times\hat{m})b\sin\omega = R(\hat{n},\omega)\vec{r}$

位矢 $\vec{r}$ 经转动 $R(\hat{n},\omega)$ 后，正好变成了矢量 $\vec{r}'$，因此 $SU(2)$ 群任一元素 $u(\hat{n},\omega)$ 都对应 $SO(3)$ 群的一个确定元素 $R(\hat{n},\omega)$

$$u(\hat{n},\omega)\sigma_j u(\hat{n}\omega)^{-1} = \sum_i \sigma_i[R(\hat{n},\omega)]_{ij}$$

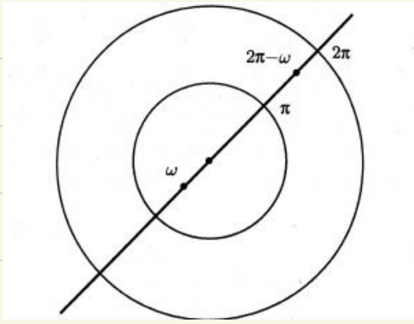
反之对于 $SO(3)$ 群任一元素 R，它把坐标矢量 $\vec{r}$ 变成 $\vec{r}'$，并把 X 变成 X'，X 和 X' 都是无迹厄米矩阵，且有相同的行列式，必然可以通过 $SU(2)$ 联系起来

如果设：$u_1 \Sigma u_1^{-1} = u_2 \Sigma u_2^{-1} = \Sigma'$，得 $u_2^{-1}u_1$ 可与任何 Σ 对易，故而必是常数矩阵。再设 $u_2 = \lambda u_1$，由于么模条件：$\lambda = \pm 1$。这给出 SO(3) 群一个群元素 R 和 SU(2) 群一对群元素 $\pm u$ 之间的一二对应关系，且：

$$u_1 \sigma_a u_1^{-1} = \sigma_b R_{ba} \qquad u_2 \sigma_b u_2^{-1} = \sigma_d R_{db}$$

$$u_2 u_1 \sigma_a u_1^{-1} u_2^{-1} = u_2 \sigma_b u_2^{-1} (R_1)_{ba} = \sigma_d (R_2)_{db} (R_1)_{ba}$$

即对应关系元素乘积保持不变。因此 SO(3) ~ SU(2)



SO(3) 群：半径为 π 的球，SU(2) 群：半径为 2π 的球。$R(\vec{n}, \omega)$ 与 $u(\vec{n}, \omega)$ 和 $\hat{u}(-\vec{n}, 2\pi-\omega)$ 两个群元对应。(π 内一一对应)

SU(2) 群是 SO(3) 群的覆盖群。SO(3) 群的真实表示(单值表示)是 SU(2) 群的非真实表示。SU(2) 群的真实表示，严格来说不是 SO(3) 群的表示，称为 SO(3) 群的双值表示

文献中常把 SU(2) 群元素 $u(\vec{n}, \omega)$ 也称为绕 $\vec{n}$ 方向转动 ω 角的变换，且常说"旋量转动 4π 角才恢复原状"

4.3.3 群上的积分

有限群中对群元素取平均值，推广到李群，定义了群函数对群元素的的积分，也就是对群参数的带权积分。

$$\frac{1}{g} \sum_{R \in G} F(R) \longrightarrow \int dR\, F(R) = \int dr\, W(R) F(R)$$

其中 $W(R)$ 是加权函数。在群空间测度不为零的区域内，要求群函数是群参数的单值、连续、可微和可积函数。且要求 $W(R)$ 单值、可积、不小于零和不发散。在群空间内任何一个测度不为零的区域内不恒为零的区域内不恒为零。且有归一化要求：

$$\frac{1}{g} \sum_{R \in G} 1 = 1 \longrightarrow \int dR = \int (dr)\, W(R) = 1$$

群函数在群空间对群参数的这种积分称为群上的积分

群上的积分运算是线性运算

$$\int dR[aF_1(R)+bF_2(R)] = a\int dR F_1(R) + b\int dR F_2(R)$$

希望选择 $W(R)$，使群上的积分对左乘和右乘元素都保持不变。

$$\int dR F(R) = \int dR F(SR) = \int dR F(RS)$$

设 $T=SR$，上面的条件就变成：

$$\int (dt) W(T) F(T) = \int dT F(T) = \int dR F(R)$$
$$= \int dR F(SR) = \int dR F(T) = \int (dr) W(R) F(T)$$

即 $drW(R)$ 不依赖于群元素 R，以恒元附近的权函数为标准，取常数 W_0，人体积元为 $d\alpha$。

$$(dr)W(R) = (dt)W(T) = (d\alpha)W_0$$

把上式看成积分变量替换，权函数就是变换的雅克比行列式。权函数有限就是群中各元素的邻域内，元素的相对密度有限。设 R 固定，R' 为 R 附近元素，参数为 r'，恒元附近元素 A，参数为 α，且 $R'=AR$，写出雅克比行列式

$$W_0 = W(R)\left|\det\left\{\frac{\partial f_i(\alpha,r)}{\partial \alpha_j}\right\}\right|_{\alpha=0}$$

$$W(R) = W_0\left|\det\left\{\frac{\partial f_i(r',\bar{r})}{\partial r'_j}\right\}\right|_{r'=r} \quad (A=R'R^{-1}$$

☆ 对紧致李群，有限群的求和 $\longrightarrow$ 群上的积分，有限群的许多理论就可推广到紧致李群中来。

① 线性表示等价于幺正表示，两等价幺正表示可以通过幺正的相似变换联系

② 实表示　　　　实正交表示　　　　实正交　　　　实正交

③ 可约表示一定是完全可约的，不可约表示的充要条件是找不到非常数矩阵与所有表示矩阵对易。

④ 不等价不可约幺正表示的矩阵元和特征标满足正交关系

$$\int dR\, D^{i}_{\mu\rho}(R)^* D^{j}_{\nu\lambda}(R) = \frac{1}{m_j}\delta_{ij}\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\lambda}$$

$$\int dR\, \chi^i(R)^* \chi^j(R) = \delta_{ij}$$

• 对 $SU(2)$ 群：

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\omega \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\chi^i(\omega)^*\chi^j(\omega) = \delta_{ij}$$

任何表示都可按不可约表示展开：

$$X^{-1}D(R)X=\bigoplus_j a_j D^j(R) \qquad \chi(R)=\sum_j a_j\chi^j(R)$$

$$a_j=\int dR\,\chi^j(R)^*\chi(R)$$

即对特征标的积分可以化为类上的积分，如对 SU(2) 群

$$a_j=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}d\omega\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\chi^j(\omega)^*\chi(\omega)$$

⑤表示等价的充要条件是每个元素在两个表示中的特征标对应相等，不可约表示的充要条件是特征标满足：

$$\int dR\,|\chi(R)|^2=1$$

⑥设 P_R 是与 G 同构的标量函数变换算符群，则把任意函数投影到不可约表示 D^j_μ 行函数的投影算符和幂等元是：

$$\phi^j_{\mu\nu}=m_j\int dR\,D^j_{\mu\nu}(R)^*P_R$$

$$e^j_\mu=\phi^j_{\mu\mu},\quad e^j=\sum_\mu e^j_\mu \qquad \sum_j e^j=I\ (\text{恒等变换})$$

$$e^j_\mu e^i_\nu=\delta_{ij}\delta_{\mu\nu}e^j_\mu,\quad e^je^i=\delta_{ij}e^j$$

⑦自共轭的不可约幺正表示与其复共轭表示的幺正相似变换矩阵只能是对称或反对称的，这相似变换矩阵对实表示是对称的，对自共轭而非实表示是反称的

4.3.4. SU(2) 群群上的积分

SU(2) 群是紧致李群，我们想计算其权函数 $W(R)$

$$du=W(\hat{n},\omega)d\omega_1d\omega_2d\omega_3=W(\hat{n},\omega)\omega^2\sin\theta\,d\omega\,d\theta\,d\varphi$$

空间不同方向平等，$W(\hat{n},\omega)$ 应与 $\hat{n}$ 方向无关。①（相同 ω 的元素 $u(\hat{n},\omega)$ 应是共轭的，可以通过一个相似变换联系起来。群空间中，互相共轭的两个元素所在点的邻域中，元素的相对密度应该相等）② 参数 $\vec{\omega}$ 之间只差一个转动变换，转动变换的雅克比行列式就是转动变换矩阵的行列式，值为 1.

即权函数 W 只是 ω 的函数，以 $u(\vec{e}_3,\omega)$ 代替 R，以 $u(A)$ 代替 A，乘积只需要取到 α_j 的一级小量。

$$u(\vec{e}_3,\omega)=I\cos(\omega/2)-i\sigma_3\sin(\omega/2)$$

$$u(A)=I-i(\sigma_1\alpha_1+\sigma_2\alpha_2+\sigma_3\alpha_3)/2$$

$$\begin{aligned}u(A)u(\vec{e}_3,\omega)&=I\cos(\omega'/2)-i(\vec{\sigma}\cdot\vec{n}')\sin(\omega'/2)\\&=I\{\cos(\omega/2)-\alpha_3\sin(\omega/2)/2\}\\&\quad-i\sigma_1\{\alpha_1\cos(\omega/2)+\alpha_2\sin(\omega/2)\}/2\\&\quad-i\sigma_2\{\alpha_2\cos(\omega/2)-\alpha_1\sin(\omega/2)\}/2\\&\quad-i\sigma_3\{\alpha_3\cos(\omega/2)+2\sin(\omega/2)\}/2\end{aligned}$$

乘积元素的参数为:

$$\cos(\omega'/2)=\cos(\omega/2)-\alpha_3\sin(\omega/2)/2=\cos[(\omega+\alpha_3)/2]$$
$$\sin(\omega'/2)=\sin[(\omega+\alpha_3)/2]=\sin(\omega/2)+\alpha_3\cos(\omega/2)/2$$
$$\omega'n_1'=[\omega\sin^{-1}(\omega/2)][\alpha_1\cos(\omega/2)+\alpha_2\sin(\omega/2)]/2$$
$$\omega'n_2'=[\qquad\qquad][\alpha_2\cos(\omega/2)-\alpha_1\sin(\omega/2)]/2$$
$$\omega'n_3'=[\omega'\sin^{-1}(\omega'/2)][\alpha_3\cos(\omega/2)+2\sin(\omega/2)]/2=\omega'=\omega+\alpha_3$$

注意: 后面的括号元零级量时, 前面的括号可用 ω 代替 ω', 后面的括号有零级量时, 前面括号的 ω' 必须取到一级量

代入雅可比行列式

$$\frac{W_0}{W(\omega)}=\left|\det\left[\frac{\partial(\omega'n_i')}{\partial\alpha_j}\right]\right|_{\alpha=0}=\begin{vmatrix}(\omega/2)\cot(\omega/2) & \omega/2 & 0\\ -\omega/2 & (\omega/2)\cot(\omega/2) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$
$$=\omega^2[4\sin^2(\omega/2)]^{-1}$$
$$W(\omega)=W_0\frac{4}{\omega^2}\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

W_0 可由归一化条件定出

$$1=4W_0\int_0^{2\pi}\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)d\omega\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\int_{-\pi}^{\pi}d\varphi=16\pi^2W_0$$

最后得到:

$$W(\omega)=\frac{\sin^2(\omega/2)}{4\pi^2\omega^2}$$

采用参数 ω, θ, φ 时: 群上的积分式为:

$$\int du\, F(u)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\int_0^{2\pi}\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)F(\omega)\,d\omega$$

SO(3)群的参数 ω 变化范围缩小一半

$$\int dR\, F(R)=\frac{1}{2\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\int_0^{\pi}\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)F(\omega)\,d\omega$$

○ 4.4 SU(2)群的不等价不可约表示

本小部分计算SU(2)群、SO(3)群和O(3)群的不等价不可约表示

4.4.1 欧拉角

SO(3)群, $R(\hat{n},\omega)$。在群空间内, 参数与群元有一一对应关系。但这组参数在实际计算中不太方便。可以引入新参数 把群中任意元素表成三个绕坐标轴向转动的乘积, 使任意元素表示矩阵的计

算简化为绕坐标轴向转动元素的乘积，但恒元附近，参数和群元间有多一对应关系，不便于理论研究，两组参数各有优缺点。由SO(3)群元素定义的欧拉角有普遍意义，可推广至洛伦兹群和SU(3)群等

对任意给定三维实正交矩阵R，可把R的第三列看成一个单位矢量$\hat{n}$的分量，R作用在$\vec{e}_3$上即得

$$R\vec{e}_3=\hat{n}=\begin{pmatrix}\cos\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

θ和φ是$\hat{n}$的极向和方位角，在前面的讨论中我们引入了$S(\varphi,\theta)=R(\vec{e}_3,\varphi)R(\vec{e}_2,\theta)$，也把$\vec{e}_3$转到$\hat{n}$方向，即$S^{-1}R$保持$\vec{e}_3$轴不变，可记为$R(\vec{e}_3,\gamma)$，取$\theta=\beta$，$\varphi=\alpha$，有：

$$R=S(\alpha,\beta)R(\vec{e}_3,\gamma)=R(\vec{e}_3,\alpha)R(\vec{e}_2,\beta)R(\vec{e}_3,\gamma)\equiv R(\alpha,\beta,\gamma)$$

写成矩阵有：

$$R(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{pmatrix}C_\alpha C_\beta C_\gamma-S_\alpha S_\gamma & -C_\alpha C_\beta S_\gamma-S_\alpha C_\gamma & C_\alpha S_\beta\\ S_\alpha C_\beta C_\gamma+C_\alpha S_\gamma & -S_\alpha C_\beta S_\gamma+C_\alpha C_\gamma & S_\alpha S_\beta\\ -S_\beta C_\gamma & S_\beta S_\gamma & C_\beta\end{pmatrix}$$

元素R的这组参数变化范围为：

$$-\pi\le\alpha\le\pi,\qquad 0\le\beta\le\pi\qquad -\pi\le\gamma\le\pi$$

采用欧拉角作为参数时，群上的积分与面元的面积（$\sin\beta\,d\alpha\,d\beta$）和大圆弧长（$d\gamma$）成比例：

$$\int F(R)dR=\frac{1}{8\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}d\alpha\int_0^{\pi}\sin\beta\,d\beta\int_{-\pi}^{\pi}F(\alpha,\beta,\gamma)d\gamma$$

前面的系数由归一化条件定出

$$\int dR=\frac{1}{8\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}d\alpha\int_0^{\pi}\sin\beta\,d\beta\int_{-\pi}^{\pi}d\gamma=1$$

SU(2)群也可类似定义欧拉角，群上的积分元也类似 注意γ的变化范围扩大了一倍

$$u(\alpha,\beta,\gamma)=u(\vec{e}_3,\alpha)u(\vec{e}_2,\beta)u(\vec{e}_3,\gamma)$$

$$\int F(R)dR=\frac{1}{16\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}d\alpha\int_0^{\pi}\sin\beta\,d\beta\int_{-2\pi}^{2\pi}F(\alpha,\beta,\gamma)d\gamma$$

$$\int dR=\frac{1}{16\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}d\alpha\int_0^{\pi}\sin\beta\,d\beta\int_{-2\pi}^{2\pi}d\gamma=1$$

4.4.2 SU(2)群的线性表示

找一个线性变换群G表示的基本方法就是寻找变换群的不变函数空间，例如选取基

$$R_R\psi_\mu^j(x)=\sum_\nu\psi_\nu^j(x)D_{\nu\mu}^j(R)$$

如果不变函数空间不包含任何非平庸不变子空间，则此表示是不可约的

把SU(2)群的元素u看成二维空间的幺正变换

$$\begin{pmatrix}\xi'\\ \eta'\end{pmatrix}=u\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\quad;\quad\begin{pmatrix}\xi''\\ \eta''\end{pmatrix}=u^{-1}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$

由ξ和η的n次齐次函数构成n+1维函数空间，是SU(2)群的不变函数空间，为了表示的幺正性，也为了计算结果有清楚的物理意义，规定函数基的系数和函数基的指标为：

$$\psi_m^j(\xi,\eta)=\frac{(-1)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}\xi^{j-m}\eta^{j+m}$$

$$j=\frac{n}{2}=0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},\cdots$$

$$\mu=j-m=j,j-1,\cdots,-(j-1),-j$$

把标量函数变换算符 P_u 作用到函数基 $\psi^j_\mu(\xi,\eta)$ 上，由

$$P_u\psi^j_\mu(\xi,\eta)=\psi^j_\mu(\xi',\eta')=\sum_\nu\psi^j_\nu(\xi,\eta)D^j_{\nu\mu}(u)$$

$$u^{-1}=I\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})=\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)+in_3\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) & \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)(n_2+in_1)\\ \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)(-n_2+in_1) & \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)-in_3\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\end{pmatrix}$$

当 $\hat{n}=\vec{e}_3$ 时，有 $\xi'=\xi\exp(i\frac{\omega}{2})$ 和 $\eta'=\eta\exp(-i\frac{\omega}{2})$，

$$P_u\psi^j_\mu(\xi,\eta)=\frac{(-1)^{j-\mu}}{\sqrt{(j+\mu)!(j-\mu)!}}\left[\xi e^{i\frac{\omega}{2}}\right]^{j-\mu}\left[\eta e^{-i\frac{\omega}{2}}\right]^{j+\mu}=\psi^j_\mu(\xi,\eta)e^{-i\mu\omega}$$

$$D^j_{\nu\mu}(\vec{e}_3,\omega)=\delta_{\nu\mu}e^{-i\mu\omega}$$ → 对角化的

当 $\hat{n}=\vec{e}_2$ 时，有 $\xi'=\xi\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)+\eta\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$ 和 $\eta'=-\xi\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)+\eta\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)$，得

$$P_u\psi^j_\mu(\xi,\eta)=\frac{(-1)^{j-\mu}}{\sqrt{(j+\mu)!(j-\mu)!}}\left[\xi\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)+\eta\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]^{j-\mu}\times\left[-\xi\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)+\eta\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]^{j+\mu}$$

$$=(-1)^{j-\mu}\sum_{n=0}^{j-\mu}\frac{\sqrt{(j-\mu)!}\left[\xi\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]^{j-\mu-n}\left[\eta\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]^{n}}{(j-\mu-n)!\,n!}\times\sum_{m=0}^{j+\mu}\frac{\sqrt{(j+\mu)!}\left[-\xi\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]^{j+\mu-m}\left[\eta\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]^{m}}{(j+\mu-m)!\,m!}$$

为了把等式右边表达成 ψ^j_ν 的线性组合，替换指标 n,m 为 n,ν，$\nu=n+m-j$

$$P_u\psi^j_\mu(\xi,\eta)=\underbrace{\sum_{\nu=-j}^{j}\frac{(-1)^{j-\nu}\xi^{j-\nu}\eta^{j+\nu}}{[(j+\nu)!(j-\nu)!]^{1/2}}}_{\psi^j_\nu(\xi,\eta)}\times\underbrace{\sum_n\frac{(-1)^n[(j+\nu)!(j-\nu)!(j+\mu)!(j-\mu)!]^{\frac{1}{2}}}{(j+\nu-n)!(j-\mu-n)!\,n!\,(n-\nu+\mu)!}\times\left[\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]^{2j+\nu-\mu-2n}\left[\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]^{2n-\nu+\mu}}_{D_{\nu\mu}(\vec{e}_2,\omega)}$$

$$=\psi^j_\nu(\xi,\eta)\,D_{\nu\mu}(\vec{e}_2,\omega)$$

n 取 $\max\begin{pmatrix}0\\ \nu-\mu\end{pmatrix},\cdots,\min\begin{pmatrix}j+\nu\\ j-\mu\end{pmatrix}$

因此：$D^j_{\nu\mu}(\alpha,\beta,\gamma)=[D^j(\vec{e}_3,\alpha)D^j(\vec{e}_2,\beta)D^j(\vec{e}_3,\gamma)]=e^{-i\nu\alpha}d^j_{\nu\mu}(\beta)e^{-i\mu\gamma}$

按习惯，该矩阵的行列指标按 $j,j-1,\cdots,-(j-1),-j$ 的次序排列

对于 d^j 矩阵，有几个重要的性质：

$$d^j_{\nu\mu}(\omega)=d^j_{-\mu-\nu}(\omega)=(-1)^{\mu-\nu}d^j_{\nu\mu}(-\omega)=(-1)^{\mu-\nu}d^j_{\mu\nu}(\omega)$$
$$=d^j_{\mu\nu}(-\omega)=(-1)^{\mu-\nu}d^j_{-\nu,\mu}(\omega)$$
$$d^j_{\nu\mu}(\pi)=(-1)^{j-\mu}\delta_{\nu(-\mu)}\quad,\quad d^j_{\nu\mu}(2\pi)=(-1)^{2j}\delta_{\nu\mu}$$
$$d^j_{\nu\mu}(\pi-\omega)=(-1)^{j-\mu}d^j_{-\nu\mu}(\omega)=(-1)^{j+\nu}d^j_{\nu-\mu}(\omega)$$

直接计算可得：

$$d^j_{\mu j}(\beta)=d^j_{j\mu}(\beta)=(-1)^{j-\mu}d^j_{j\mu}(\beta)=(-1)^{j-\mu}d^j_{-\mu-j}(\beta)$$

$$=\left[\frac{(2j)!}{(j+\mu)!(j-\mu)!}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]^{j+\mu}\left[\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]^{j-\mu}$$

$$d_{00}^{l}(\beta)=\sum_{n=0}^{l}(-1)^n\left[\frac{l![\cos(\frac{\omega}{2})]^{l-n}[\sin(\frac{\omega}{2})]^n}{n!\,(l-n)!}\right]^2$$

现在分析SU(2)群表示 D^j 的性质:

(1). D^j 是 $2j+1$ 维表示. $j=0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},\cdots$ $D^0=1$ 是恒等表示, $D^{\frac{1}{2}}(u)=u$ 是自身表示.

$\checkmark\,(d^j_{\nu\mu}(2\pi)=(-1)^{2j}\delta_{\nu\mu})$

(2). j 为整数时, D^j 是SO(3)群的单值表示, SU(2)群的非真实表示. j 为半奇数时, D^j 是SO(3)群的双值表示, SU(2)群的真实表示.

(3) d^j 是实正交矩阵, D^j 是幺正表示

(4) 绕z轴转动元素的表示矩阵是对角的, 可以很容易得到转角为ω的类在表示 D^j 中的特征标

$$\chi^j(\omega)=\sum_{\mu=-j}^{j}e^{-i\mu\omega}=\sum_{\mu=-j}^{j}e^{i\mu\omega}=\frac{\sin[(j+\frac{1}{2})\omega]}{\sin(\frac{\omega}{2})}\longrightarrow \text{实数. 自共轭表示}$$

上式满足不等价不可约表示, 因此不同 D^j 都SU(2)群的不等价不可约表示, 因由Fourier理论, 区间 $[0,2\pi]$ 内 $\sin[(j+\frac{1}{2})\omega]$ 构成完备函数系, 因此 D^j 为SU(2)群的所有有限维不等价不可约表示.

参数用欧拉角表述时, SU(2)群不等价不可约表示矩阵元素的正交关系为

$$\frac{1}{16\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}d\alpha\int_0^{\pi}d\beta\sin\beta\int_{-2\pi}^{2\pi}d\gamma\, D^j_{\nu\rho}(\alpha,\beta,\gamma)^* D^{i}_{\lambda\lambda}(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{1}{2j+1}\delta_{ij}\delta_{\nu\lambda}\delta_{\rho\lambda}$$

(5) 把表示矩阵按参数展开, 取到参数的一级项, 得到生成元的表达式

$$D^j_{\nu\mu}(\vec{e}_3,\omega)=\delta_{\nu\mu}(1-i\mu\omega)$$

$$d^j_{\nu\mu}(\omega)=\delta_{\nu\mu}-i\,\omega\frac{i}{2}[\delta_{\nu(\mu-1)}\Gamma^j_\mu-\delta_{\nu(\mu+1)}\Gamma^j_\nu]$$

$$D^j_{\nu\mu}(\vec{e}_1,\omega)=[D^j(\vec{e}_3,-\tfrac{\pi}{2})\,d^j(\omega)\,D^j(\vec{e}_3,\tfrac{\pi}{2})]_{\nu\mu}$$

$$=\delta_{\nu\mu}-i\omega\frac{1}{2}[\delta_{\nu(\mu-1)}\Gamma^j_\mu+\delta_{\nu(\mu+1)}\Gamma^j_\nu]$$

$$\Gamma^j_\nu=\Gamma^j_{-\nu+1}=[(j+\nu)(j-\nu+1)]^{\frac{1}{2}}$$

$$(I^j_+)_{\nu\mu}=(I^j_1+iI^j_2)_{\nu\mu}=\delta_{\nu(\mu+1)}\Gamma^j_\nu=\delta_{(\nu-1)\mu}\Gamma^j_{-\mu}$$

$$(I^j_-)_{\nu\mu}=(I^j_1-iI^j_2)_{\nu\mu}=\delta_{\nu(\mu-1)}\Gamma^j_{-\nu}=\delta_{(\nu+1)\mu}\Gamma^j_\mu$$

$$(I^j_3)_{\nu\mu}=\mu\delta_{\nu\mu}$$

$I_\pm$ 在物理中称为升降阶算符. 比较生成元可知, D^1 表示等价于SO(3)群的自身表示

$$M^{-1}T_aM=I^1_a\qquad a=1,2,3\qquad\qquad M=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1&0&1\\-i&0&-i\\0&\sqrt{2}&0\end{pmatrix}\qquad (T_a)_{bc}=-i\varepsilon_{abc}$$

$$M^{-1}R(\alpha\beta\gamma)M=D^1(\alpha,\beta,\gamma)$$

D^j 的表示空间包含 $2j+1$ 个状态基 ψ^j_μ, 升降阶算符的作用如下

$$I^j_-\,\psi^j_{j-n}=\Gamma^j_{j-n}\,\psi^j_{j-n-1}\qquad\qquad I^j_+\,\psi^j_{j-n-1}=\Gamma^j_{j-n}\,\psi^j_{j-n}$$

$$\Gamma^j_{j-n}=\sqrt{(2j-n)(n+1)}$$

(6). D^j 的特征标是实数, 因而是自共轭表示. 在自共轭表示中, $D(\vec{e}_3,\alpha)$, $D(\vec{e}_3,\gamma)$ 中的 α,γ 改变了符号, 而 $d^j_{\nu\mu}(\beta)$ 是实矩阵

轴角β値，现

$$d^j(\pi)^{-1} D^j(\alpha,\beta,\gamma) d^j(\pi) = D^j(\alpha,\beta,\gamma)^*$$

当 $j=l$ 为整数时，$d^l(\pi)$ 是对称矩阵，因而 D^l 是实表示，而当 j 是半奇数时，$d^j(\pi)$ 是反对称矩阵，D^j 是自共轭而非实表示。换言之 SO(3)群的单值表示是实表示，双值表示是自共轭而非真实表示。

4.4.3 O(3)群的不等价不可约表示

O(3)群是混合李群，固有转动记为 R，构成 SO(3)群，SO(3)群是 O(3)群的不变子群。行列式为 -1 的一片称为非固有转动，记为 $R' = \sigma R$，σ 是空间反演，R' 构成 SO(3)群的陪集。这里只讨论 SO(3) 的单值表示，即 $j=l$ 取非负整数。

因为 σ 可与任何转动元素对易，所以在不可约表示中必为常矩阵，又 $\sigma^2 = E$ 这个常数又只能取 ±1。取 SO(3) 的不可约表示空间的基为 ψ^l_m，取 $\phi^{l\pm}_m \sim \psi^l_m \pm \sigma\psi^l_m$，得 $\sigma\phi^{l\pm}_m = \pm\phi^{l\pm}_m$。以 $\phi^{l\pm}_m$ 为基，得到 O(3)群的两个不等价不可约表示 D^{l+} 和 D^{l-}，表示矩阵为

$$D^{l\pm}(R) = D^l(R) \qquad D^{l\pm}(\sigma) = \pm 1 \qquad D^{l\pm}(\sigma R) = \pm D^l(R)$$

这是找混合李群不等价不可约表示的一般方法

4.4.4 球函数和球谐函数多项式

下面讨论 SO(3)群不可约表示的简单物理应用。球对称系统的变换群是SO(3)群，系统哈密顿量在转动时保持不变

$$P_R H(x) P_R^{-1} = H(x)$$

设能级 E 是 n 重简并，有 n 个线性无关的本征函数 $\psi_\mu(x)$：

$$H(x)\psi_\mu(x) = E\psi_\mu(x)$$

经转动变换，仍是能级中的一个本征函数

$$H(x)[P_R\psi_\mu(x)] = P_R H(x)\psi_\mu(x) = E P_R\psi_\mu(x)$$

$P_R\psi_\mu(x)$ 在 $\psi_\nu(x)$ 下的展开系数构成表示 $D[SO(3)]$

$$P_R\psi_\mu(x) = \psi_\mu(R^{-1}x) = \sum_\nu \psi_\nu(x) D_{\nu\mu}(R)$$

此表示一般是可约表示，将表示和基函数约化

$$X^{-1} D(R) X = \bigoplus_l a_l D^l(R)$$

$$X^{-1} I_a X = \bigoplus_l a_l I^l_a \qquad \chi(R) = \sum_l a_l \chi^l(R)$$

展开式中只能出现 SO(3) 的单值表示 D^l，l 是非负整数。a_l 可用特征标积分计算：

$$a_l = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi d\omega \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\chi^l(\omega)\chi(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi d\omega \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\sin\left[\left(l+\frac{1}{2}\right)\omega\right]\chi(\omega)$$

用 X 矩阵重组波函数，可得属于确定不可约表示 D^l_m 行的定态波函数

$$\psi^l_{mr} = \sum_\mu \psi_\mu(x) X_{\mu,lmr}, \qquad P_R\psi^l_{mr}(x) = \sum_{m'} \psi^l_{m'r}(x) D^l_{m'm}(R)$$

这就是说，如果系统是各向同性，对称变换群是SO(3)群，则定态波函数可组合成属SO(3)群不可约表示确定行的函数 $\psi^l_{m\nu}(x)$. 现在讨论这函数的物理意义. 我们知道 P_R 在函数基 $\psi^l_{m\nu}(x)$ 中的矩阵形式是 D^l. 它的生成元是 I^l_a，对应的微分算符是 L_a

$$L_3\psi^l_{m\nu}(x) = m\psi^l_{m\nu}(x)$$

$$L_\pm\psi^l_{m\nu}(x) = \Gamma^l_{\mp m}\psi^l_{m\pm1}(x)$$

$$L^2\psi^l_{m\nu}(x) = l(l+1)\psi^l_{m\nu}(x), \quad L^2 = \sum_{a=1}^{3}(L_a)^2 = L_3^2 + (L_+L_- + L_-L_+)/2$$

可以量子力学作对应讨论。对于各向同性系统的能量的本征函数，在不同的方法中有不同的理解，在群论中，它是属三维转动群不可约表示确定的行函数.

例. 用 SO_3 群研究一个在中心力场中的单粒子系统

取球坐标系 $x=(r,\theta,\varphi)$，取 x_3 轴上的点 $x_0=(r,0,0)$，通过转动 $T(r,\theta,\varphi)$，使得 $x=Tx_0$，转动后：

$$\psi^l_m(x) = \psi^l_m(Tx_0) = P_{T^{-1}}\psi^l_m(x_0) = \sum_{m'}\psi^l_{m'}(x_0)D^l_{mm'}(T)^* = \sum_{m'}\psi^l_{m'}(x_0)e^{im\varphi}d^l_{mm'}(\theta)e^{im'r}$$

与r无关 ⟶ 等式最右与r无关，$m'=0$ 以外的项只能为零

于 $m=0$ 的项（归一化系数见后续积分很容易看出）

$$\psi^l_m(x_0) = \phi_l(r)\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\,\delta_{m0}$$

$$\psi^l_m(x) = \phi_l(r)\left[\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\,D^l_{m0}(\varphi,\theta,0)^*\right] = \phi_l(r)Y^l_m(\theta,\varphi)$$

即属SO(3)群不可约表示 D^l_m 行的单粒子波函数必可分解为径向函数 $\phi_l(r)$ 和角度函数 $Y^l_m(\theta,\varphi)$ 的乘积，$\phi_l(r)$ 只是径向的函数，在角度变换中相当于一个常系数，所以 $Y^l_m(\theta,\varphi)$ 也是属 $D^l{}_m$ 行的函数，在量子力学中称为球函数：

$$Y^l_m(\theta,\varphi) = \left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}e^{im\varphi}d^l_{m0}(\theta)$$

由不等价不可约表示矩阵元素的正交性可知，球函数对角度积分是正交归一的：　　少了 $\int_{-\pi}^{\pi}d\gamma$ 的积分，故有一个 4π

$$\int_{-\pi}^{\pi}d\varphi\int_0^\pi d\theta\sin\theta\,Y^l_m(\theta,\varphi)^*Y^{l'}_{m'}(\theta,\varphi) = \frac{[(2l+1)(2l'+1)]^{\frac{1}{2}}}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}d\varphi\int_0^\pi\sin\theta\,d\theta\,D^l_{m0}(\varphi,\theta,0)D^{l'}_{m'0}(\varphi,\theta,0)^* = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

由 d^l 矩阵的对称性质：

$$Y^l_m(\theta,\varphi)^* = \left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-im\varphi}d^l_{m0}(\theta) = (-1)^m Y^l_{-m}(\theta,\varphi)$$

定义勒让德（Legendre）函数：

$$P_l(\cos\theta) = \left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)^{\frac{1}{2}}Y^l_0(\theta,0) = d^l_{00}(\theta)$$

也满足正交性质.

在空间反演中，$x\to -x$，$\theta\to\pi-\theta$，$\varphi\to\pi+\varphi$

$$Y^l_m(\pi-\theta,\pi+\varphi) = (-1)^l Y^l_m(\theta,\varphi)$$

球函数有确定的宇称 $(-1)^l$. 这是系统具有空间反演不变性的结果.

球函数有两个重要性质

a. 球函数可用已知Jacobi多项式表出

b. $Y^l_m(\theta,\varphi)$ 乘上 r^l 称为球谐多项式 $\mathcal{Y}^l_m(\vec{r})$　　满足 Laplace 方程

○ 4.5 李氏定理

4.5.1 李氏第一定理

定理 简单李群的线性表示完全由它的生成元决定

Proof 设 $RS=T$，$t_A=f_A(r;s)$. 右乘 S^{-1}，$R=TS^{-1}$. 在表示 $D(G)$ 中，$D(R)=D(T)D(S^{-1})$. 固定 S，对两边求导

$$\frac{\partial D(R)}{\partial r_B}=\frac{\partial D(T)}{\partial r_B}D(S^{-1})=\sum_A\frac{\partial D(T)}{\partial t_A}\frac{\partial f_A(r;s)}{\partial r_B}D(S^{-1})$$

然后取 $S^{-1}=R$，$T=E$，由生成元的定义式

$$\frac{\partial D(R)}{\partial r_B}=-i\left[\sum_A I_A S_{AB}(r)\right]D(R)\quad(*)$$

$$S_{AB}\equiv\left.\frac{\partial f_A(r;s)}{\partial r_B}\right|_{S=\bar{R}}$$

对于给定的李群和选定的群参数，$S(r)$是一个确定的矩阵函数，与具体的线性表示无关，$(*)$式R取恒元则得：

$$S_{AB}(e)=\delta_{AB}$$

设表示$D(G)$是m维的，则$(*)$式是关于m^2个函数$D_{\mu\nu}(R)$的m^2个一阶联立偏微分方程，有m^2个边界条件

$$D(R)|_{R=E}=1$$

解是存在的，与积分路径无关，所以可以选取特殊的路径，得到$D(R)$. 证完.

这一定理从数学上描述了无穷小元素是如何决定李群性质的. 即"无穷多个无穷小元素乘积"

推论1 若简单李群两个表示的所有生成元间都存在同一相似变换关系，则两表示等价

$$\bar{I}_A=X^{-1}I_A X$$

推论2 简单李群的表示不可约的充要条件是表示空间不存在对所有生成元不变的非平庸子空间

推论3 设$I_A^{(1)}$和$I_A^{(2)}$是简单李群两个不等价不可约表示的生成元，表示的维数分别为m_1和m_2，若$m_1\times m_2$矩阵X对所有生成元满足：

$$I_A^{(1)}X=XI_A^{(2)}$$

则$X=0$.

推论4 与简单李群不可约表示的所有生成元都对易的矩阵必常数.

对混合李群，还要选群空间每一连通片的一个代表元素，要求表示矩阵和生成元一起满足上述条件，这些推论才能成立.

4.5.2 李氏第二定理

定理：李群的线性表示的生成元满足对易关系

$$I_AI_B-I_BI_A=i\sum_D C_{AB}{}^D I_D$$

其中：

$$C_{AB}{}^D=\left[\frac{\partial S_{DB}(r)}{\partial r_A}-\frac{\partial S_{DA}(r)}{\partial r_B}\right]\Big|_{r=r_0}$$

称为李群的结构常数，它们与具体的线性表示无关. 反之，满足此对易关系的g个矩阵，可以作为李群的一组生成元，确定简单李群的一个单值或多值表示.

因为生成元是微量算符在表示空间中的矩阵形式，所以微量微分算符也满足相同的对易关系

$$[I_A^{(0)}, I_B^{(0)}] = i\sum_D C_{AB}^{\ D} I_D^{(0)}$$

通常，李群的结构常数的计算方法为：选择李群的一个真实表示，如自身表示，找出生成元的具体形式，计算它们的对易关系，从而确定结构常数，例 SO(3)群的微量微分算符：

$$[L_a, L_b] = i\sum_d \epsilon_{abd} L_d \qquad \Rightarrow C_{ab}^{\ d} = \epsilon_{abd}$$

$$[L_3, L_\pm] = \pm L_\pm \ , \ [L_+ L_-] = 2L_3$$

4.5.3 李氏第三定理

定理：李群的结构常数满足以下条件

$$C_{AB}^{\ D} = -C_{BA}^{\ D}$$

$$\sum_P \{ C_{AB}^{\ P} C_{PD}^{\ Q} + C_{BD}^{\ P} C_{PA}^{\ Q} + C_{DA}^{\ P} C_{PB}^{\ Q} \} = 0$$

反之，对满足此条件的一组实常数，一定存在相应的李群，以这组常数作为结构常数

根据该定理，可以由结构常数对李群进行分类。结构常数相同的李群有相同的局域性质，称为局域同构。

但应注意，局域同构的李群整体上不一定同构，例如SU(2)和SO(3)有相同的结构常数，局域同构，但整体上是同态关系

4.5.4 李群的伴随表示

设 $RSR^{-1} = T$，T 的参数是 S和R参数的函数

$$t_A = \psi_A(s_1, s_2, \cdots ; r_1, r_2 \cdots) \equiv \psi_A(s:r)$$

$\psi_A(s:r)$ 也是2g个变量的实函数，对真实表示 $D(R)D(S)D(R)^{-1} = D(T)$ 等式两边对 S_A 求导，然后取 $S=0$

$$D(R)\frac{\partial D(S)}{\partial S_A} D(R)^{-1}\Big|_{S=0} = \sum_B \frac{\partial D(T)}{\partial t_B}\Big|_{t=0} \frac{\partial \psi_B(s:r)}{\partial S_A}\Big|_{S=0}$$

$$D(R) I_A D(R)^{-1} = \sum_B I_B D_{BA}^{ad}(R) \qquad D_{BA}^{ad}(R) = \frac{\partial \psi_B(s:r)}{\partial S_A}\Big|_{S=0}$$

上式给出群元素 R 和矩阵 $D^{ad}(R)$ 的一个一一对应或多一对应关系，$D^{ad}(R)$是李群的一个表示，称为伴随(adjoint)表示，维数是李群的阶数，描写生成元在共轭变换中的变换性质

计算伴随表示的生成元：

$$D(R) = I - i\sum_A r_A I_A \qquad D(R)^{-1} = I + i\sum_B r_B I_B$$

$$D_{BA}^{ad}(R) = \delta_{BA} - i\sum_D r_D (I_D^{ad})_{BA}$$

$$\Rightarrow i\sum_B C_{DA}^{\ B} I_B = [I_D, I_A] = \sum_B I_B (I_D^{ad})_{BA}$$

$$i\sum_B C_{DA}^{\ B} I_B = [I_D, I_A] = \sum_B I_B (I_D^{ad})_{BA}$$

比较可知，伴随表示的生成元与李群的结构常数直接相关

$$(I_D^{ad})_{BA} = i\, C_{DA}^{\ B} \qquad (*)$$

由李氏第三定理，这组矩阵也满足对易关系，通常计算伴随表示的方法是，将已知表示的生成元与(*)式比较，找出是伴随表示的表示

例如 SO(3) 和 SU(2) 的伴随表示是 SO(3) 的自身表示，对于不等价不可约表示 $D^j(R)$ 或标量函数变换算符

$$D^j(R) I_a D^j(R)^{-1} = \sum_b I_b R_{ba} \quad \text{自身表示} \qquad P_R L_a P_R^{-1} = \sum_b L_b R_{ba}$$

特别地，当 $a=3$ 时

$$\vec{L}\cdot\hat{m} = P_R L_3 P_R^{-1}, \quad R\vec{e}_3 = \hat{m}$$

角动量在任意方向的分量的表达式

如果 $\psi^l_m(x)$ 是属于 SO(3) 群不可约表示 D^l m 行的函数：

$$L^2[P_R\psi^l_m(x)] = l(l+1)[P_R\psi^l_m(x)], \quad R=(\varphi,\theta,\gamma)$$

$$(\vec{L}\cdot\hat{m})[P_R\psi^l_m(x)] = m[P_R\psi^l_m(x)], \quad R\vec{e}_3 = \hat{m}$$

4.5.5 李代数

$$[(-iI_A),(-iI_B)] = \sum_D C^D_{AB}(-iI_D)$$

实数

在李群的真实表示中 $(-iI_A)$ 线性无关，以 $(-iI_A)$ 为基，所有线性组合构成实线性空间。定义此空间中的矢量乘积为对易关系式，称为李乘积。该线性空间对李乘积封闭，构成实代数，称为实李代数

紧致李群 ⟶ 紧致李代数　　复线性组合也封闭 ⟶ 复李代数，或李代数

复化　实形

李群 G 有子群 H，李代数分别为 $\mathcal{L}_G$、$\mathcal{L}_H$，$\mathcal{L}_H\subset\mathcal{L}_G$，若对任意 $X\in\mathcal{L}_G$，$Y\in\mathcal{L}_H$，必有 $[X,Y]\in\mathcal{L}_H$，则称 $\mathcal{L}_H$ 是 $\mathcal{L}_G$ 的理想

零和全体李代数是两个平庸理想。李代数存在非平庸李群的充要条件是李群存在非平庸不变子群

不存在非平庸：　　单纯李群　李代数

不存在阿贝尔不变子李群：　　半单纯李群　李代数

高于一阶的单纯李群都是半单李群，高于一维的单纯李代数都是半单李代数

李群是单纯李群，李代数是单纯李代数 $\Longleftrightarrow$ 李群的伴随表示是不可约表示

○ 4.6 半单李代数的正则形式

对于李群选择一组参数，结构常数就确定了。如果换另一组参数 $\bar{\alpha}_j$，为了保持表示矩阵不变

$$\sum_j \alpha_j I_j = \sum_j \bar{\alpha}_j \bar{I}_j$$

生成元和结构常数跟着变化：

$$\begin{cases} \bar{\alpha}_A = \sum_B \alpha_B (X^{-1})_{BA} & \bar{I}_A = \sum_D X_{AD} I_D \\ \bar{C}^D_{AB} = \sum_{PQS} X_{AP} X_{BQ} C^S_{PQ} (X^{-1})_{SD} \end{cases}$$

可见不是结构常数的全部性质都反映李群的本质

基林型就是结构常数中反映李代数本质的量。基林型 g_{AB} 定义如下：

$$g_{AB} = \sum_{PQ} C_{AP}{}^{Q} C_{BQ}{}^{P} = -\sum_{PQ} (I^{ad}_A)_{QP} (I^{ad}_B)_{PQ} = -\sum_Q (I^{ad}_A I^{ad}_B)_{QQ} = -\mathrm{Tr}(I^{ad}_A I^{ad}_B)$$

显然 g_{AB} 关于下标对称，在参数变换中，按对称张量变换

$$g'_{AB} = \sum_{A'B'} X_{AA'} X_{BB'} g_{A'B'}, \quad g = X g X^T$$

若看成度规张量，可定义协变结构常数 C_{ABD}

$$C_{ABD} = \sum_P C_{AB}{}^{P} g_{PD} = -C_{BAD} = -C_{ADB}$$

定理（嘉当判据）半单纯李代数的充要条件是

$$\det g \neq 0$$

紧致半单纯李代数充要条件是基林型是负定的

在 g 作正交相似变换时，参数的选择不能改变基林型的本征值的符号，半单李代数的基本型没有零本征值，紧致半单李代数的基林型的本征值全为负的。

对半单李代数 g_{AB} 有对称逆矩阵 g^{AB} ⟶ g_{AB} 和 g^{AB} 相当于度规张量，可以用来升降指标。

对于紧致半单李代数，可以通过参数的选择使基林型为负常数矩阵，此时结构常数对三个指标完全反对称，群的伴随表示是实正交表示

$$g_{AB} = -\tau \delta_{AB} \quad ; \quad g^{AB} = -\tau^{-1}\delta_{AB} \quad ; \tau > 0$$

$$C_{AB}^{\ \ D} = -C_{BA}^{\ \ D} = \sum_P C_{ABP}\, g^{PD} = -\tau^{-1} C_{ABD} = -C_{AD}^{\ \ B}$$

在此条件下，各生成元的平方和可与每一生成元对易，称为卡西米尔（Casimir）算子。它在不可约表示中取常数矩阵

$$\sum_A I_A^{\lambda} I_A^{\lambda} = C_2(\lambda)\, 1$$

不可约表示 D^λ 的生成元　　此表示中的二阶Casimir不变量（$SO(3)$群中 $C_2(\lambda) \to l(l+1)$）

4.6.2 半单李代数的分类

研究紧致半单实李代数的不可约表示，把若干实参数为纯虚数，就可得到其他非紧致半单李代数的不可约表示。紧致半单实李代数的伴随表示是实正交表示，通过实正交相似变换，分解为高于一维的紧致单纯李代数的直和（定义群上的积分，由有限群推广）

李代数中能互相对易的生成元数目 ℓ，称为李代数的秩（rank），也是对应李群的秩，这些互相对易的生成元记为 H_j，线性组合构成了李代数（不是理想），称为嘉当子代数

$$[H_j, H_k] = 0, \quad H_j \in \mathcal{H} \quad 1 \le j \le \ell$$

李代数中除了 $(g-\ell)$ 个生成元 E_α 都是 ℓ 个 H_j 的共同本征矢量

$$[H_j, E_\alpha] = \alpha_j E_\alpha$$

本征值 $\vec{\alpha}$ 是 ℓ 维实欧氏空间中的非零矢量，根矢量，简称根，根矢量两两成对，互差负号，除正负成对的根外，根矢量互不平行，根矢量满足关系：

$$\Gamma\left(\frac{\vec{\alpha}}{\vec{\beta}}\right) \equiv d_\beta^{-1}\, \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = q - p \quad ; \quad d_\beta = \frac{\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}}{2}$$

其中 p, q 是非负整数，由根链的端值决定，即 $\vec{\alpha} + n\vec{\beta}$ 是根，$-q \le n \le p$，$\vec{\alpha} + (p+1)\vec{\beta}$ 和 $\vec{\alpha} - (q+1)\vec{\beta}$ 不是根

正根（第一分量大于零）$\vec{\alpha}$ 的生成元 $E_{\vec{\alpha}}$ 称为升算符，$E_{-\vec{\alpha}}$ 称为降算符，H_j 和 E_α 称为嘉当-韦尔基，满足正则对易关系

$$N_{\vec{\alpha},\vec{\beta}} = -N_{\vec{\beta},\vec{\alpha}} = \sqrt{p(q+1)\beta^2/2}$$

正则对易关系为

$$\begin{cases} [H_j, H_k]=0 \qquad [H_j, E_\alpha] = \alpha_j E_\alpha \\ [E_\alpha, E_\beta] = \begin{cases} N_{\vec\alpha\vec\beta} E_{\vec\alpha+\vec\beta} ; & \vec\alpha+\vec\beta \text{ is root} \\ \sum_j \alpha_j H_j ; & \vec\alpha+\vec\beta=0 \\ 0 ; & 其他 \end{cases} \end{cases}$$

素根是不能表达成其他正根非负线性组合的根，素根线性无关，l 秩李代数有 l 个素根

素根的夹角只能有 $\frac{5\pi}{6}$. $\frac{3\pi}{4}$. $\frac{2\pi}{3}$ 和 $\frac{\pi}{2}$. 对应素根长度平方比为 1:3，1:2. 1:1 和无限制，通常让生成元乘一个公共常数，使长根长度平方为2. 而基林型是负的常数矩阵，与嘉当子代数相关的基林型为

$$g_{jk} = \sum_{\rho\alpha} C_{j\rho}^{\alpha} C_{k\alpha}^{\rho} = \sum_{\alpha} C_{j\alpha}^{\alpha} C_{k\alpha}^{\alpha} = -\sum_{\alpha\in\Delta} \alpha_j \alpha_k = -C\delta_{ij}$$

所有高于一维的紧致单纯实李代数可用邓金图分类

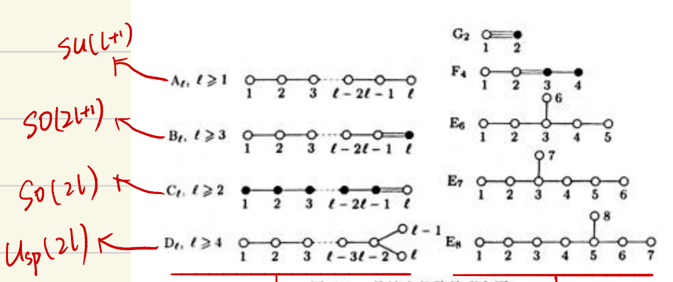


图 4.5 单纯李代数的邓金图

○ 4.7 旋量场和张量场

4.7.1 矢量场和张量场

标量、矢量、张量　数学上由线性变换定义. 物理上通常根据转动、洛伦兹变换定义，现在，我们根据物理量在三维空间中的转动定义张量和旋量

矢量分布的空间称为矢量场，矢量函数变换算符为：

$$[O_R \vec V(x)]_a = \sum_b R_{ab} V(R^{-1}x)_b \qquad 即 \qquad O_R V(x) = R V(R^{-1}x)$$

或者写成：$\vec V(x) \xrightarrow{R} O_R \vec V(x) = \sum_a \vec e_a [O_R V(x)]_a = \sum_a \vec e_a R_{ab} V(R^{-1}x)_b = \sum_b \vec e_b' V(R^{-1}x)_b$

两部分：变换后P'点的场与变换前P点的场联系 P_R，另一部分是描写矢量转动

$$O_R = P_R Q_R = Q_R P_R$$

O_R. P_R. Q_R 都是幺正算符. 作用在场上的物理量算符 $L(x)$ 在变换 R 中按下式变换

$$L(x) \xrightarrow{R} O_R L(x) O_R^{-1}$$

张量和张量场：n个指标，作为一个整体，每一个指标按矢量的变换规则变换→n阶张量.

$$T_{a_1a_2\cdots a_n} \xrightarrow{R} (Q_R T)_{a_1a_2\cdots a_n} = \sum_{b_1b_2\cdots} R_{a_1b_1}\cdots R_{a_nb_n} T_{b_1\cdots b_n}$$

$$Q_R = R\times R\times\cdots\times R$$

$$[T(x)]_{a_1\cdots a_n} \xrightarrow{R} (O_R T(x))_{a_1\cdots a_n} = \sum_{b_1\cdots b_n} R_{a_1b_1}\cdots R_{a_nb_n}[T(R^{-1}x)]_{b_1\cdots b_n}$$

标量是零阶张量. 矢量是一阶张量.

4.7.2 旋量场

系统需要 $2s+1$ 个分量作为一个整体来共同描写. 在变换 R 中:

$$\Psi^{(s)}_\sigma \xrightarrow{R} (Q_R\Psi^{(s)})_\sigma = \sum_\lambda D^s_{\sigma\lambda}(R)\Psi^{(s)}_\lambda$$

$$Q_R = D^s_{\sigma\lambda}(R)$$

按此规则变换的量称为 S 阶旋量. 旋量的空间分布称为旋量场, 旋量场用 $2s+1$ 个函数作为一个整体共同描写.

$$\Psi^{(s)}(x)_\sigma = [O_R\Psi^{(s)}(x)]_\sigma = \sum_\lambda D^{(s)}_{\sigma\lambda}(R)\Psi^{(s)}(R^{-1}x)_\lambda$$

O_R 称为旋量变换算符. 习惯上, 旋量用 $2s+1$ 行的列矩阵来描写, 只有在专门强调分量时才注上分量指标, 用得最多的是 $S=\frac{1}{2}$ 阶旋量, 称为基本旋量, 常省去上标 $\frac{1}{2}$

共有 $2s+1$ 个旋量基 $e^{(s)}(\rho)$, 共有 $2s+1$ 个:

$$e^{(s)}(\rho)_\sigma = \delta_{\rho\sigma}$$

在变换中:

$$e^{(s)}(\rho)_\sigma \xrightarrow{R} [O_R e^{(s)}(\rho)]_\sigma = [Q_R e^{(s)}(\rho)]_\sigma = \sum_{\lambda=-s}^{s} D^s_{\sigma\lambda}(R)\, e^{(s)}(\rho)_\lambda = D^s_{\sigma\rho}(R) = \sum_{-\lambda}^{\lambda} e^{(s)}(\lambda)\, D^s_{\lambda\rho}(R)$$

旋量基与空间坐标无关. 故 $P_R\, e^{(s)}(\rho) = e^{(s)}(\rho)$

同样:

$$\Psi^{(s)}(x) = \sum_{\rho=-s}^{s} e^{(s)}(\rho)\,\psi_\rho(x)$$

$$O_R\Psi^{(s)}(x) = \sum_{\rho=-s}^{s}\{Q_R e^{(s)}_\rho\}\{P_R\psi(x)\}_\rho$$

$$= \sum_\lambda e^{(s)}(\lambda)\left[\sum_\rho D^s_{\lambda\rho}(R)\psi(R^{-1}x)_\rho\right]$$

标量场也是零阶旋量场, 转动群自身表示和 D' 表示等价

$$M^{-1}R\,M = D^1(R) \qquad M = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -i & 0 & i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

所以矢量场可以通过 M 矩阵组合成一阶旋量场

$$\vec{V}(x) = \sum_{a=1}^{3}\vec{e}_a V_a(x) = \sum_{\rho=-1}^{1} e^{(1)}(\rho)\, V^{(1)}(x)_\rho$$

$$e^{(1)}(\rho) = \sum_{a=1}^{3}\vec{e}_a M_{a\rho} \qquad V^{(1)}(x)_\rho = \sum_{a=1}^{3}(M^{-1})_{\rho a}V(x)_a$$

4.7.3 总角动量算符及其本征函数.

旋量函数的变换算符由 $O_R = Q_R P_R$, 对无穷小变换, 把 P_R Q_R 和 O_R 的微量算符记为 L_a. S_a 和 J_a:

$$P_A = 1 - i\sum_a \alpha_a L_a$$

$$Q_A = 1 - i\sum_a \alpha_a S_a$$

$$O_A = 1 - i\sum_a \alpha_a(L_a + S_a) = 1 - i\sum_a \alpha_a J_a$$

L_a: 轨道角动量算符. S_a 是表示 D^s 的生成元

设系统的哈密顿量各向同性，则SO(3)是系统的对称变换群

$$O_R H(x) O_R^{-1} = H(x)$$

设：
$$O_R \psi_\rho(x) = \sum_{\rho'} \psi_{\rho'} D_{\rho'\rho}(R)$$

D构成一个表示，用群论方法进行约化

$$X^{-1} D(R) X = \sum_j a_j D^j(R) \qquad \Phi^j_{\mu r}(x) = \sum_\rho \psi_\rho(x) X_{\rho, j\mu r}$$

$$O_R \Phi^j_{\mu r} = D^s(R) \Phi^j_{\mu r}(R^{-1}x) = \sum_\nu \Phi^j_{\nu r}(x) D^j_{\nu\mu}(R)$$

把上式写成生成元的关系有：

$$J_3 \Phi^j_{\mu r}(x) = \mu \Phi^j_{\mu r}(x)$$

$$J_\pm \Phi^j_{\mu r}(x) = \Gamma^j_{\mp\mu} \Phi^j_{(\mu\pm1)r}(x)$$

$$J^2 \Phi^j_{\mu r}(x) = j(j+1) \Phi^j_{\mu r}(x)$$

$$J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 \qquad J_\pm = J_1 \pm i J_2$$

旋量基是总角动量算符和自旋角动量算符的共同本征函数：

$$J_3 e^{(s)}(\rho) = S_3 e^{(s)}(\rho) = \rho e^{(s)}(\rho)$$

$$J_\pm e^{(s)}(\rho) = S_\pm e^{(s)}(\rho) = \Gamma^s_{\mp\rho} e^{(s)}(\rho\pm1)$$

$$J^2 e^{(s)}(\rho) = S^2 e^{(s)}(\rho) = s(s+1) e^{(s)}(\rho)$$

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2, \qquad S_\pm = S_1 + i S_2$$