李群与李代数 5

Chapter 5 单纯李代数的不可约表示

○ 5.1 李代数不可约表示的性质

5.1.1 表示和权

本章仅讨论紧致实李代数L的不可约幺正表示，简单称之为李代数的不可约表示，在此不可约表示中，生成元的嘉当-外尔基的表示矩阵$D(H_j)$和$D(E_\alpha)$满足：

$$D(H_j)^+ = D(H_j) \qquad D(E_\alpha)^+ = D(E_{-\alpha})$$

H_j是互相对易的厄米算符，取这l个H_j共同的正交归一个的本征矢量作为表示空间的基，这组基中$D(H_j)$是对角的，对角元是实数，把表示空间称为状态基$|\vec{m}\rangle$，或简称为态

$$H_j|\vec{m}\rangle = m_j|\vec{m}\rangle$$

l个本征值排列成态的权矢量$\vec{m}$，简称权，这l维空间称为权空间，在一个不可约表示中，若有n个线性无关的态对应一个共同的权，则此权称为重权，n为权的重数，$n=1$时称为单权，以生成元为状态基得到的表示就是伴随表示，在伴随表示中权矢量和根矢量重合

除恒等表示外，单纯李代数L的不可约表示都是真实表示，生成元及其线性组合的表示矩阵都不是零矩阵，权矢量张开l维空间，由正则对易关系知：

$$[D(H_j), D(E_\alpha)] = \alpha_j D(E_\alpha), \quad [D(E_\alpha), D(E_{-\alpha})] = D(H_\alpha); \quad H_\alpha = \vec{\alpha}\cdot\vec{H}$$

由此得：

$$\mathrm{Tr}\,D(E_\alpha) = 0, \quad \mathrm{Tr}\,D(H_\alpha) = 0, \quad \mathrm{Tr}\,D(H_j) = 0$$

$D(H_j)$是对角的 $\begin{pmatrix} m_{j1} & & \\ & \ddots & \\ & & m_{jl} \end{pmatrix}$ $\sum m_{jl} = 0$

后式表明，在不约表示，所有态的权矢量之和为零

$$\sum \vec{m} = 0$$

（包括对重权求和）

在选定的分量排列次序下，两权之差$(\vec{m}-\vec{m}')$的第一个不为零的分量为正值，则称权$\vec{m}$高于$\vec{m}'$，设$\vec{\alpha}$是正根，则由正则对易关系有：

$$H_j(E_{\pm\alpha}|\vec{m}\rangle) = [H_j, E_{\pm\alpha}]|\vec{m}\rangle + E_{\pm\alpha}H_j|\vec{m}\rangle = (m_j \pm \alpha_j)(E_{\pm\alpha}|\vec{m}\rangle)$$

E_α升权算符，$E_{-\alpha}$降权算符，有限维表示必有一个态$|\vec{M}\rangle$，对应权$\vec{M}$高于其他所有态的权，称为最高权，且任何升权算符

$$E_\alpha|\vec{M}\rangle = 0,$$

$\vec{\alpha}$是任何正根，$\vec{M}$是最高权

这是最高权的充要条件，也是计算最高权的主要方法

定理：单纯李代数L不可约表示的最高权是单权，两个不可约表示的充要条件是最高权相等，故单纯李代数L的不可约表示也常称为最高权表示。

5.1.2 权链和外尔反射

定理：单纯李代数L不可约表示的表示空间中，任一权$\vec{m}$和根满足

$$\frac{2\vec m\cdot\vec\alpha}{|\vec\alpha|^2} \equiv \Gamma(\vec m/\vec\alpha) = q-p$$

其中q和p是非负整数，由权链的端值决定，进一步 $\vec m - \Gamma(\vec m/\vec\alpha)\vec\alpha$ 是一个重数与 $\vec m$ 相同的权，称为等价权（根无重根，但权有重权）两个等价权关于通过原点，与 $\vec\alpha$ 垂直的平面作反射（外尔反射）。外尔反射的乘积定义为相继做两次外尔反射，外尔反射的集合构成外尔群W，通过外尔反射联系起来的所有等价权的数目称为此权的外尔轨道长度(size of orbit)

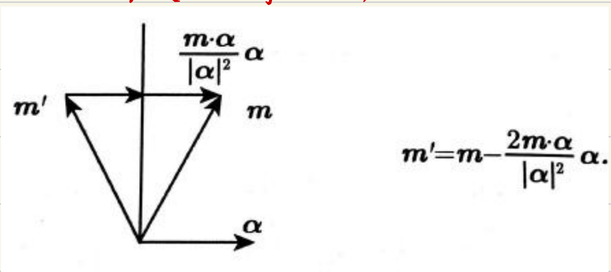


图. 外尔反射

定理(邓金定理)：权 $\vec M$ 可以作为单纯李代数 $\mathcal{L}$ 的一个有限维不可约表示最高权的充要条件是，对单纯李代数的所有素根 $\vec r_\nu$，$\vec M$ 满足

$$\Gamma(\vec M/\vec r_\nu) = \text{非负整数}$$

上定理说明，有一最高权（单权），用一系列降算符作用在最高权的态上，得到数目有限的线性无关的状态基，对应李代数的一个有限维不可约表示（计算的主要方法）

满足 $\Gamma(\vec M/\vec r_\nu)$=非负整的权 $\vec M$ 称为主权

a. 单纯李代数任一不可约表示的最高权一定是主权

b. 给定不可约表示，可能有好几个主权，不一定是单权，也不一定是最高权

c. 每个主权都可以是某不可约表示的最高权。

不可约表示的维数等于该表示包含的各主权重数及其外尔轨道长度的乘积之和

5.1.3. 基本主权

定义：在 ℓ 秩李代数 $\mathcal{L}$ 中，下述 ℓ 个主权 $\vec w_\mu$ 称为基本主权。

$$\Gamma(\vec w_\mu/\vec r_\nu) = d_\nu^{-1}\vec w_\mu\cdot\vec r_\nu = \delta_{\mu\nu}$$

根据上一部分的两个定理，任何主权都可表示为基本主权的非负整数线性组合，任何权都可表示为基本主权的整数线性组合：

$$\vec M = \sum_{\mu=1}^{\ell} M_\mu \vec w_\mu \qquad M_\mu = \Gamma(\vec M/\vec r_\mu) = \text{非负整数}$$

$$\vec m = \sum_{\mu=1}^{\ell} m_\mu \vec w_\mu \qquad m_\mu = \Gamma(\vec m/\vec r_\mu) = \text{整数}$$

与邓金图等价的嘉当矩阵 $A_{\nu\mu}$ 是单纯李代数的代数描述

$$A_{\nu\mu} = \Gamma(\vec r_\nu/\vec r_\mu) = \frac{2\vec r_\nu\cdot\vec r_\mu}{\vec r_\mu\cdot\vec r_\mu} = d_\mu^{-1}(\vec r_\nu\cdot\vec r_\mu)$$

嘉当矩阵的对角元为2，素根 $\vec{r}_\mu$ 和 $\vec{r}_\nu$ 正交时，邓金图中它们不相连 $A_{\mu\nu}=0$，在不正交时，设素根长度 $\vec{r}_\mu$ 小于 $\vec{r}_\nu$，$A_{\mu\nu}$ 分别等于 -1，-2 或 -3.

素根可按基本主权展开，展开系数正是嘉当矩阵元

$$\vec{r}_\mu = \sum_\nu \vec{w}_\nu A_{\nu\mu} \qquad \vec{w}_\nu = \sum_\mu \vec{r}_\mu (A^{-1})_{\mu\nu}$$

在基本主权为基的表象里，素根的分量都是整数，保证了权的分量也都是整数，而且等价权之间的对应关系也变得简单：

$$\vec{m}' \xrightarrow{\vec{r}_\mu} \vec{m} - m_\mu \vec{r}_\mu$$

利用基本主权为基：优点：所有权和根的分量都是整数.　　缺点：这组基不一定正交归一

采用 $A_{\nu\mu}$ 和 d_ν 可简化素根和内积的表述式

$$(\vec{r}_\nu \cdot \vec{r}_\mu) = d_\nu A_{\nu\mu} \qquad (\vec{r}_\nu \cdot \vec{w}_\mu) = d_\nu \delta_{\nu\mu} \qquad (\vec{w}_\nu \cdot \vec{w}_\mu) = d_\nu (A^{-1})_{\nu\mu}$$

对称化嘉当矩阵

以基本主权为最高权的不可约表示称为基本表示

5.1.5 卡西米尔不变量和伴随表示

采用生成元的嘉当-外尔基表示卡西米尔算子时：

$$C_2 = \sum_A I_A I_A = \sum_{j=1}^{\ell} H_j H_j + \sum_{\alpha \in \Delta_+} \{E_\alpha E_{-\alpha} + E_{-\alpha} E_\alpha\}$$

把 C_2 作用于最高权态 $|\vec{M}\rangle$ 上，有

$$C_2 |\vec{M}\rangle = \vec{M}^2 |\vec{M}\rangle + \sum_{\alpha\in\Delta_+} [E_\alpha, E_{\alpha^{-1}}] |\vec{M}\rangle$$
$$= \{M^2 + \vec{M} \cdot \sum_{\alpha\in\Delta_+} \vec{\alpha}\} |\vec{M}\rangle$$

下面将证明，单纯李代数中所有正根之和 $2\vec{\rho}$ 等于基本主权之和两倍：

$$2\vec{\rho} = \sum_{\alpha\in\Delta_+} \vec{\alpha} = 2\sum_{\mu=1}^{\ell} \vec{w}_\mu \qquad (*)$$

因此，二阶卡西米尔不变量 $C_2(\vec{M})$ 可表为

$$C_2(\vec{M}) = \vec{M}(\vec{M} + 2\vec{\rho}) = \sum_{\mu\nu=1}^{\ell} M_\mu d_\mu (A^{-1})_{\mu\nu} (M_\nu + 2)$$

Proof　要证明(*)式，即检验正根之和 $2\vec{\rho}$ 与每个与每个素根点乘是否都等于 $2d_\mu$. 把所有正根都按关于素根 $\vec{r}_\mu$ 的根链分组：

$$(\vec{\alpha} - q\vec{r}_\mu), \cdots, (\vec{\alpha} - \vec{r}_\mu), \vec{\alpha}, (\vec{\alpha} + \vec{r}_\mu), \cdots, (\vec{\alpha} + p\vec{r}_\mu)$$

根链中矢量之和为，

$$\vec{\beta} = (p+q+1)[\vec{\alpha} + \tfrac{1}{2}(p-q)\vec{r}_\mu]$$

$\vec{\alpha} = \vec{r}_\mu$ 时，$p=q=0$，$|\vec{r}_\mu|^2 = 2d_\mu$，其他其况 $\vec{\beta} \cdot \vec{r}_\mu = 0$，证完

设 $D^{\vec{M}}(I_A)$ 是不可约表示 $\vec{M}$ 的生成元，构造 g 维矩阵 $T(\vec{M})$，$T_{AB}(\vec{M}) = \mathrm{Tr}[D^{\vec{M}}(I_A) D^{\vec{M}}(I_B)]$. $T(\vec{M})$ 与伴随表示每一个生成元 $D^{ad}(I_D)$ 对易. 对单纯李群，伴随表示是不可约表示，因而 $T(\vec{M})$ 是常数矩阵

$$g\,T_2(\vec{M}) = \sum_A T_{AA}(\vec{M}) = Tr\left\{\sum_A D^{\vec{M}}(I_A) D^{\vec{M}}(I_A)\right\} = d(\vec{M})C_2(\vec{M})$$

对伴随表示，最高权就是最大根，$d(\vec{w})=g$，可以计算李代数的基林型

$$g_{AB} = -Tr\left[D^{ad}(I_A) D^{ad}(I_B)\right] = -\delta_{AB} T_2(w) = -\delta_{AB} C_2(w)$$

5.1.6 谢瓦莱基

只需计算与素根相联系的生成元的表示矩阵，由它们的对易关系可以得到所有生成元的表示矩阵

为使形式更加对称，引入谢瓦莱(chevalley)基

$$E_\mu = d_\mu^{-\frac{1}{2}} E_{\vec{r}_\mu} \qquad F_\mu = d_\mu^{-\frac{1}{2}} E_{-\vec{r}_\mu}$$

$$H_\mu = d_\mu^{-1} \sum_{j=1}^{\ell} (\vec{r}_\mu)_j H_j = d_\mu^{-1} \vec{r}_\mu \cdot \vec{H}$$

由正则对易关系：

$$[H_\nu, H_\mu] = 0 \qquad [H_\nu, E_\mu] = A_{\nu\mu} E_\mu$$

$$[H_\nu, F_\mu] = -A_{\nu\mu} F_\mu \qquad [E_\nu, F_\mu] = \delta_{\nu\mu} H_\mu$$

记为 A_μ

三个有相同下标 μ 的生成元正好满足 A_1 (对应 $SU(2)$) 子李代数的生成元的对易关系

取 $SU(2)$ 群的生成元为

$$E = I_+ = I_1 + iI_2 \qquad F = I_- = I_1 - iI_2 \qquad H = 2I_3$$

则有：

$$[H, E] = 2E \qquad [H, F] = -2F \qquad [E, F] = H$$

对应：$[H_\mu, E_\mu] = 2E_\mu \qquad [H_\mu, F_\mu] = -2F_\mu \qquad [E_\mu, F_\mu] = H_\mu$

属 A_μ 子李代数的不可约表示的状态集合 $\longrightarrow$ A_μ 多重态。表示空间存在重权，A_μ 多重态以复杂的方式纠缠在一起 要以适当方法规定重权对应的正交归一基，理清 A_μ 多重态中每一个状态是这些正交归一基怎样的线性组合。

5.2 盖尔范德方法及其推广

5.2.1 方块权图方法

单纯李代数 L，生成元 E_μ, F_μ, H_μ 架设 A_1 子代数 A_μ。对 L 的最高权表示 $\vec{M}$，选取正交归一的状态基，它们是 H_μ 的共同本征态，记为 $|\vec{m}\rangle$，H_μ 的表示矩阵是对角化的。E_μ 和 F_μ 的表示矩阵互为转置。

$$H_\mu|\vec{m}\rangle = m_\mu|\vec{m}\rangle, \qquad F_\mu|\vec{m}\rangle \propto |\vec{m} - \vec{r}_\mu\rangle$$

子代数 A_μ 对应 $SU(2)$ 群，这不可约表示的集合称为 A_μ 多重态。在 L 的不可约表示的表示空间中，对每一个满足下式的 $|\vec{m}\rangle$：

$$m_\mu > 0, \qquad E_\mu|\vec{m}\rangle = 0 \qquad (1)$$

都存在一个包含 $(m_\mu+1)$ 个状态基的 A_μ 多重态 $|\vec{m} - n\vec{r}_\mu\rangle$

$$|\vec{m}-n\vec{r}_\mu\rangle,\quad 0\le n\le m_\mu,\quad (F_\mu)^{m_\mu+1}|\vec{m}\rangle=0$$

$$F_\mu|\vec{m}-n\vec{r}_\mu\rangle=\sqrt{(m_\mu-n)(n+1)}\,|\vec{m}-(n+1)\vec{r}_\mu\rangle$$

以上$\vec{m}-n\vec{r}_\mu$都是单权，则这些状态基可以被选作为正交归一基。

表示空间存在重权，A_ℓ多重态以复杂的方式纠缠在一起。需要以适当方法规定重权对应的正交归一基，理清A_ℓ多重态中每一个状态基怎样的线性组合。

生成元满足的对易关系式可化简为:

$$E_\mu F_\nu=F_\nu E_\mu+\delta_{\mu\nu}H_\mu$$

在单纯李代数的最高权表示中，任何权为$\vec{m}$的态都可由最高权态$|\vec{M}\rangle$通过降算符得到。作用的降算符次数+1称为该权及其状态的级数，最高权的级数为1，$\vec{m}$的级数$L(\vec{M},\vec{m})$为:

$$\vec{M}-\vec{m}=\sum_\mu C_\mu\vec{r}_\mu\qquad L(\vec{M},\vec{m})=1+\sum_\mu C_\mu$$

从最高权开始，逐个构造A_μ多重态。在该多重态中，如又有状态基满足(1)式中的条件，则由它又产生新的多重态A_μ。最高权是单权，与最高权同属一个A_μ多重态的基的权是单权，与最高权等价的权也是单权。由最高权出发，通过若干多重态到达$|\vec{m}\rangle$，称为权$\vec{m}$的一条路径。只有一条路径的权一定是单权，对于有n条路径的权，先假设其重数为n，然后逐个计算生成元的表示矩阵元，如果有矩阵元为零，则代表实际重数比n小。

等价权中，有且仅有一个是主权，等价权的重数相等。

让每一个正交归一基填以权分量的方块，重标用右下标表示。

例如：$\vec{m}=-2\vec{w}_1+\vec{w}_2$，则$|m\rangle$对应 $\boxed{\bar{2},1}$，重权 $\boxed{\bar{2},1}_2$ → 第2个状态基。

把每一个状态基的方块按级数排列，得到方块权图。在方块权图中，由不同降算符联系的方块用不同的线相连。

一定会得到一级数最大的权，和状态基，$\vec{N}$，$|\vec{N}\rangle$，最低权。任何降算符作用上都为0。最低权一定是单权，且所有分量一定非正。

最低权取负值是另一个表示的最高权，是原表示的复共轭表示。$(D^{\vec{m}})^*\simeq D^{-\vec{N}}$，简写为$\vec{M}^*\simeq-\vec{N}$

互为复共轭的两表示，方块权图互为倒置，对应状态基的权差负号。若某一表示最低权刚好等于最高权的负值，则此表示是自共轭表示，方块权图上下对称。

5.2.2 盖尔范德基

难点在于如何从相互纠缠的多重态中选定对应重权的正交归一状态基。

对SU(N)群，即A_{N-1}李代数，盖尔范德选定了最高权表示的正交归一基，称为盖尔范德基。盖尔范德基用$N(N+1)/2$个参数W_{ab}描写，$1\le a\le b\le N$。参数W_{ab}满足条件:

$$W_{ab}\ge W_{a(b-1)}\ge W_{(a+1)b}\qquad(2)$$

并排列成一个倒置的三角形

$$|W_{ab}\rangle = \left|\begin{matrix} W_{1N} & & W_{2N} & & \cdots & & W_{(N-1)N} & & W_{NN} \\ & W_{1(N-1)} & & & \cdots & & & W_{N-1\,N-1} & \\ & & W_{12} & & & W_{22} & & & \\ & & & & W_{11} & & & & \end{matrix}\right\rangle$$

SU(N)群，常取 $W_{NN}=0$

$W_{ab} \geq W_{a(b-1)} \geq W_{(a+1)b}$

$W_{a(b-1)} = W_{ab}$ $\quad 1\leq a<b\leq N$

最高权态

最高权态的分量 M_μ，和权m的分量 m_μ，由下面公式计算.

$$M_\mu = W_{\mu N} - W_{(\mu+1)N}, \qquad m_\mu = 2\Omega_\mu - \Omega_{\mu+1} - \Omega_{\mu-1}$$

$$\Omega_0 = 0, \qquad \Omega_b = \sum_{a=1}^{b} W_{ab} \qquad 1\leq b\leq N, \qquad 1\leq \mu\leq N-1$$

满足(2)式和保持所有Ω_b不变的情况下，参数W_{ab}的不同取值给出了m的重数。升算符E_μ对盖尔范德基的作用得若干盖尔范德基的线性组合，每一个盖尔范德基把$W_{a\mu}$中的某个增加1，F_μ则减小1，盖尔范德写出了升算符表示矩阵的解析表达式

$$E_\mu |W_{ab}\rangle = \sum_{\nu=1}^{\mu} A_{\nu\mu}(W_{ab}) |W_{ab} + \delta_{a\nu}\delta_{b\mu}\rangle$$

$$A_{\nu\mu} = \left\{-\prod_{\tau=1}^{\mu-1}(W_{\tau(\mu-1)} - W_{\nu\mu} - \tau + \nu - 1)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{\frac{\prod_{\rho=1}^{\mu+1}(W_{\rho(\mu+1)} - W_{\nu\mu} - \rho + \nu)}{\prod_{\lambda\neq\nu,\,\lambda=1}^{\mu}(W_{\lambda\mu} - W_{\nu\mu} - \lambda + \nu)(W_{\lambda\mu} - W_{\nu\mu} - \lambda + \nu - 1)}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

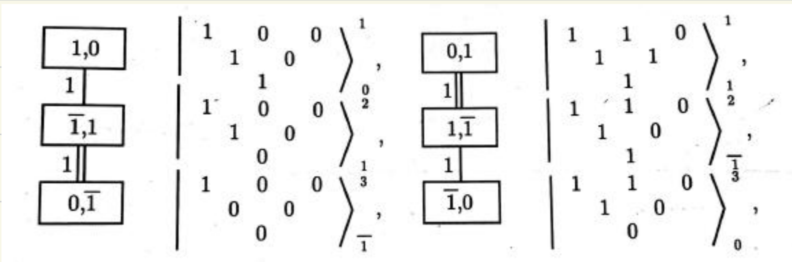
5.2.3 A_2李代数（SU(3)）的最高权表示

例举各A_2多重态的状态基和生成元的表示矩阵元。A_2李代数对应SU(3)群，在物理上有广泛的应用

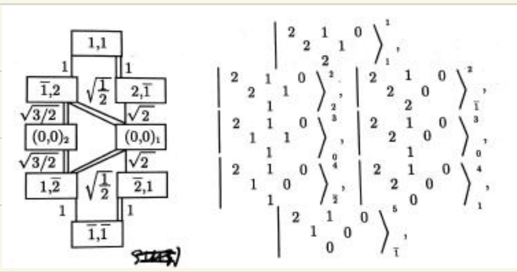
A_2李代数最高权表示M的盖尔范德基为：

$$\left|\begin{matrix} W_{13} & & W_{23} & & W_{33} \\ & W_{21} & & W_{22} & \\ & & W_{11} & & \end{matrix}\right\rangle^{L}_{m_\nu}, \qquad M_1 = W_{13} - W_{23}, \quad M_2 = W_{23} - W_{33}$$

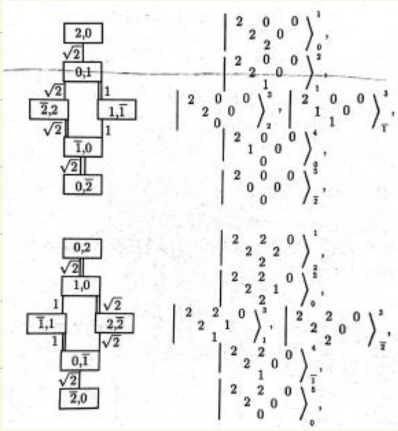
$$\vec{r}_1 = (2,-1) \qquad \vec{r}_2 = (-1,2)$$



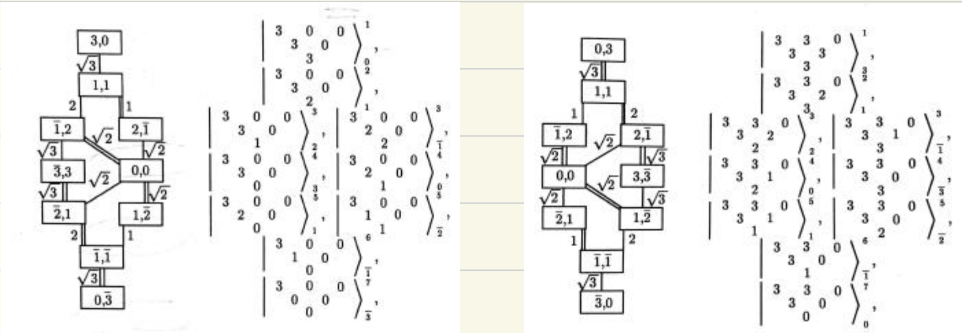
A_2李代数 (1, 0) 和 (0, 1) 表示的方块权图和盖尔范德基



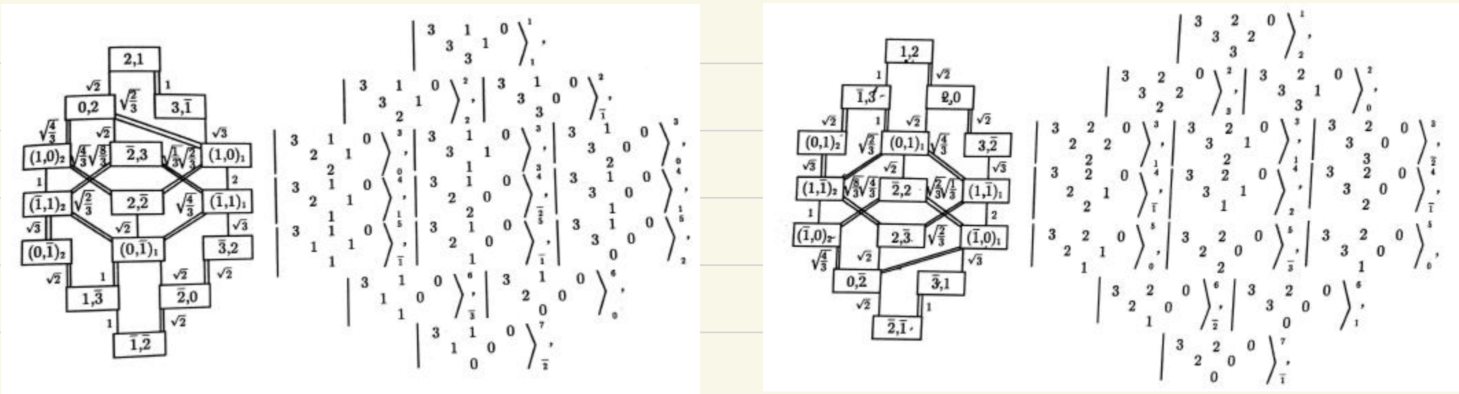
A_2李代数 (1, 1) 表示的方块权图和盖尔范德基



A_2李代数 (2,0)和(0,2)表示的方块权图和盖尔范德基



A_2李代数 (3,0)和(0,3)表示的方块权图和盖尔范德基



A_2李代数 (2,1)和(1,2)表示的方块权图和盖尔范德基

3.2.4. 推广的盖尔范德方法

从单纯李代数的邓金图看，除F_4李代数，所有单纯李代数的邓金图切掉最后一个素根后，都是A_{l-1}李代数的邓金图。因此和A_l李代数一样，其他李代数$\mathcal{L}$的最高权表示空间也由若干个A_{l-1}多重态构成，F_l的作用把居不同A_{l-1}多重态的状态基联系起来，构成A_l多重态，这就是推广的盖尔范德方法。当然由于素根r_l和A_{l-1}李代数邓金图的衔接方法不同，对不同类型的李代数$\mathcal{L}$，推广方法略有不同

①. 选取表象，使李代数$\mathcal{L}$的最高权表示D，关于子李代数A_{l-1}的分导表示取已约的形式，表示的正交归一基用子李代数A_{l-1}的盖尔范德基描写

此时 W_{ll} 不一定取0

$$|W_{ab}\rangle^{L}_{m_1} = \left|\begin{array}{ccccc} W_{1l} & W_{2l} & \cdots & W_{(l-1)l} & W_{ll} \\ & W_{1(l-1)} & \cdots & W_{(l-1)(l-1)} & \\ & \cdots & \cdots & & \\ & W_{12} & W_{22} & & \\ & & W_{11} & & \end{array}\right\rangle^{L}_{m_1}$$

它同时也是生成元H_l的本征态，L是级数，m_l是本征值，最高权表示的参数为：

$$W_{ll}=m_l=M_l \qquad W_{\mu l}=W_{(\mu+1)l}+M_\mu, \qquad W_{a(b-1)}=W_{ab}$$

$$L=1, \qquad 1\le \mu \le l-1, \qquad 1\le a<b\le l$$

显然这组参数是A_{l-1}多重态（包括单态）的最高权态，最高权$\vec{M}'$为：

$$\vec{M}'_\mu = W_{\mu l}-W_{(\mu+1)l}, \qquad 1\le\mu\le l-1$$

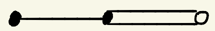
如果$m_l>0$，则它也是A_l多重态的最高权态。由A_{l-1}多重态的最高权态，按照盖尔范德方法计算在多重态中的状态基和李代数A_{l-1}生成元的表示矩阵

② 由于最高权态开始，随着状态基级数增加，寻找A_{l-1}多重态的最高权态，并用盖尔范德方法计算多重态的盖尔范德基和李代数A_{l-1}的生成元的表示矩阵

③ 在A_{l-1}多重态中找$m_l>0$的盖尔范德基，如果它在E_l作用下为零，它是A_l多重态的最高权态。从该最高权态开始计算A_l多重态中的盖尔范德基与F_l表示的矩阵元。要注意找互相关联的盖尔范德基（除第一行参数外，其他参数都相同，包括W_{ab}、L、m_l）

5.2.5 C_3李代数的最高权表示

C_3李代数的邓金图和盖尔范德基如下：F_2使m_3增加1，F_3使m_3减小2，$\Omega_3=\sum_a W_{a3}$减小2



$$\left|\begin{array}{ccccc} W_{13} & & W_{23} & & W_{33} \\ & W_{12} & & W_{22} & \\ & & W_{11} & & \end{array}\right\rangle^{2}_{m_2}$$

举一例以示说明

例. C_3李代数基本表示$(1,0,0)$

最高权态也是A_2多重态的最高权态，对应表示$(1,0)$，5.2.3中已计算过，包含3个状态基

$$\left|\begin{array}{ccccc} 1 & & 0 & & 0 \\ & 1 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{array}\right\rangle^{1}_{0} \qquad \left|\begin{array}{ccccc} 1 & & 0 & & 0 \\ & 1 & & 0 & \\ & & 0 & & \end{array}\right\rangle^{2}_{0} \qquad \left|\begin{array}{ccccc} 1 & & 0 & & 0 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 0 & & \end{array}\right\rangle^{3}_{1}$$

第3个状态基$m_3=1>0$，它是A_3 2重态的最高权态

$$F_3\left|\begin{array}{ccccc} 1 & & 0 & & 0 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 0 & & \end{array}\right\rangle^{3}_{1} = \left|\begin{array}{ccccc} 0 & & 0 & & \bar{1} \\ & 0 & & 0 & \\ & & 0 & & \end{array}\right\rangle^{4}_{\bar{1}}$$

得到的状态是A_2多重态的最高权态，对应表示$(0,1)$，此A_2多重态包含3个状态基。

$$\left|\begin{array}{ccccc} 0 & & 0 & & \bar{1} \\ & 0 & & 0 & \\ & & 0 & & \end{array}\right\rangle^{4}_{\bar{1}} \qquad \left|\begin{array}{ccccc} 0 & & 0 & & \bar{1} \\ & 0 & & \bar{1} & \\ & & 0 & & \end{array}\right\rangle^{5}_{0} \qquad \left|\begin{array}{ccccc} 0 & & 0 & & \bar{1} \\ & 0 & & \bar{1} & \\ & & \bar{1} & & \end{array}\right\rangle^{6}_{0}$$ 权为$(\bar{1},0,0)$。最低权态

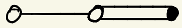
综上，C_3李代数$(1,0,0)$表示含有6个状态基，组成2个A_2多重态，分别对应A_2的$(1,0)$和$(0,1)$表示。

C_l李代数的所有最高权表示都是自共轭表示

5.2.6 B_3李代数的最高权表示

对于 B_l 李代数，在降算符 F_l 的作用下，产生的子代数 A_{l-1} 多重态的最高权态，有可能出现2重态

以 B_3 李代数最高权表示 $\bar{M}=(0,2,2)$ 为例，B_3 李代数的邓金图和盖尔范德基如下：



$$\left|\begin{matrix} W_{13} & & W_{23} & & W_{33} \\ & W_{12} & & W_{22} & \\ & & W_{11} & & \end{matrix}\right\rangle^{L}_{m_3}$$

降算符 F_2 使 m_3 增加2，F_3 使 m_3 减小2，和一个分权 W_{03} 减少1

按照推广的盖尔范德方法，得到

$$F_2|(0,2,2)\rangle = \sqrt{2}\,|(1,0,4)\rangle \qquad F_2\left|\begin{matrix} 4 & & 4 & & 2 \\ & 4 & & 4 & \\ & & 4 & & \end{matrix}\right\rangle^{1}_{2} = \sqrt{2}\left|\begin{matrix} 4 & & 4 & & 2 \\ & 4 & & 3 & \\ & & 4 & & \end{matrix}\right\rangle^{2}_{4}$$

$$F_3|(0,2,2)\rangle = \sqrt{2}\,|(0,3,0)\rangle \qquad F_3\left|\begin{matrix} 4 & & 4 & & 2 \\ & 4 & & 4 & \\ & & 4 & & \end{matrix}\right\rangle^{1}_{2} = \sqrt{2}\left|\begin{matrix} 4 & & 4 & & 1 \\ & 4 & & 4 & \\ & & 4 & & \end{matrix}\right\rangle^{2}_{0}$$

$$F_3|(0,3,0)\rangle = \sqrt{2}\,|(0,4,\bar{2})\rangle \qquad F_3\left|\begin{matrix} 4 & & 4 & & 1 \\ & 4 & & 4 & \\ & & 4 & & \end{matrix}\right\rangle^{2}_{0} = \sqrt{2}\left|\begin{matrix} 4 & & 4 & & 0 \\ & 4 & & 4 & \\ & & 4 & & \end{matrix}\right\rangle^{3}_{\bar{2}}$$

$$F_2|(0,3,0)\rangle = \sqrt{3}\,|(1,1,2)_1\rangle \qquad F_2\left|\begin{matrix} 4 & & 4 & & 1 \\ & 4 & & 4 & \\ & & 4 & & \end{matrix}\right\rangle^{2}_{0} = \sqrt{3}\left|\begin{matrix} 4 & & 4 & & 1 \\ & 4 & & 3 & \\ & & 4 & & \end{matrix}\right\rangle^{3}_{2}$$

$$F_2|(0,4,\bar{2})\rangle = 2\,|(1,2,0)_1\rangle \qquad F_2\left|\begin{matrix} 4 & & 4 & & 0 \\ & 4 & & 4 & \\ & & 4 & & \end{matrix}\right\rangle^{3}_{\bar{2}} = 2\left|\begin{matrix} 4 & & 4 & & 0 \\ & 4 & & 3 & \\ & & 4 & & \end{matrix}\right\rangle^{4}_{0}$$

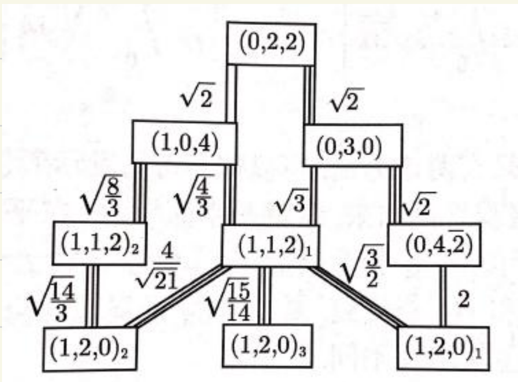


图. B_3最高权表示（0,2,2）的部分方块权图

状态基 $|(1,0,4)\rangle$ 是 A_3 四重态的最高权态，在 F_3 作用下

$$F_3|(1,0,4)\rangle = a_1|(1,1,2)_1\rangle + a_2|(1,1,2)_2\rangle$$

$$F_3\left|\begin{matrix} 4 & & 4 & & 2 \\ & 4 & & 3 & \\ & & 4 & & \end{matrix}\right\rangle^{2}_{4} = a_1\left|\begin{matrix} 4 & & 4 & & 1 \\ & 4 & & 3 & \\ & & 4 & & \end{matrix}\right\rangle^{3}_{2} + a_2\left|\begin{matrix} 4 & & 3 & & 2 \\ & 4 & & 3 & \\ & & 4 & & \end{matrix}\right\rangle^{3}_{2}$$

计算可得 $a_1=\sqrt{\frac{4}{3}}$，$a_2=\sqrt{\frac{8}{3}}$。再用 F_3 作用可得

$$F_3|(1,1,2)_2\rangle = b_1|(1,2,0)_2\rangle.$$

$$F_3\left|\begin{matrix}4 & & 3 & & 2\\ & 4 & & 3 & \\ & & 4 & & \end{matrix}\right\rangle^3_2 = b_1\left|\begin{matrix}4 & & 3 & & 1\\ & 4 & & 3 & \\ & & 4 & & \end{matrix}\right\rangle^4_0$$

$$F_3|(1,1,2)_1\rangle = b_2|(1,2,0)_1\rangle + b_3|(1,2,0)_2\rangle + \cdots$$

$$F_3\left|\begin{matrix}4 & & 4 & & 1\\ & 4 & & 3 & \\ & & 4 & & \end{matrix}\right\rangle^3_2 = b_2\left|\begin{matrix}4 & & 4 & & 0\\ & 4 & & 3 & \\ & & 4 & & \end{matrix}\right\rangle^4_0 + b_3\left|\begin{matrix}4 & & 3 & & 1\\ & 4 & & 3 & \\ & & 4 & & \end{matrix}\right\rangle^4_0 + \cdots$$

计算可得 $b_1=\sqrt{\frac{14}{3}}$ $b_2=\sqrt{\frac{3}{2}}$ $b_3=\frac{4}{\sqrt{21}}$，以及：

$$(a_1^2+2)-(b_2^2+b_3^2)=\frac{10}{3}-\frac{3}{2}-\frac{16}{21}=\frac{15}{14}$$

因此必须引入一个权为 $(1,2,0)$ 的 A_2 多重态的最高权态

$$F_3|(1,1,2)_1\rangle = \sqrt{\frac{3}{2}}|(1,2,0)_1\rangle + \frac{4}{\sqrt{21}}|(1,2,0)_2\rangle + \sqrt{\frac{15}{14}}|(1,2,0)_3\rangle$$

$$F_3\left|\begin{matrix}4 & & 4 & & 1\\ & 4 & & 3 & \\ & & 4 & & \end{matrix}\right\rangle^3_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left|\begin{matrix}4 & & 4 & & 0\\ & 4 & & 3 & \\ & & 4 & & \end{matrix}\right\rangle^4_0 + \frac{4}{\sqrt{21}}\left|\begin{matrix}4 & & 3 & & 1\\ & 4 & & 3 & \\ & & 4 & & \end{matrix}\right\rangle^4_0 + \sqrt{\frac{15}{14}}\left|\begin{matrix}4 & & 3 & & 1\\ & 4 & & 3 & \\ & & 4 & & \end{matrix}\right\rangle^4_0$$

5.2.7 平面权图

二秩李代数，权只有两个分量，权及重数画在平面直角坐标系中：平面权图

三种：A_2，$C_2 \approx B_2$ 局域同构，G_2

A_2 李代数，对应 $SU(3)$ 群，自身表示生成元取为

$$H_1=\sqrt{2}\,T_3^{(3)}=\sqrt{2}\,T_8=\frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathrm{diag}\{1,1,-2\}$$

$$H_2=\sqrt{2}\,T_2^{(3)}=\sqrt{2}\,T_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{diag}\{1,-1,0\}$$

$$E_{\vec{r}_1}=T_{12}^{(1)}+iT_{12}^{(2)}=T_1+iT_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$E_{\vec{r}_2}=T_{23}^{(1)}+iT_{23}^{(2)}=T_6+iT_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

按照公式 $[H_\mu, E_{\vec{r}}]=(\vec{r})_\mu E_{\vec{r}}$ 计算得

$$\vec{r}_1=\sqrt{2}\,\vec{e}_2 \qquad \vec{r}_2=\sqrt{\frac{3}{2}}\,\vec{e}_1-\frac{1}{\sqrt{2}}\,\vec{e}_2$$

$$\vec{w}_1=\frac{1}{3}(2\vec{r}_1+\vec{r}_2)=\frac{1}{\sqrt{6}}\,\vec{e}_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\,\vec{e}_2$$

$$\vec{w}_2=\frac{1}{3}(\vec{r}_1+2\vec{r}_2)=\sqrt{\frac{2}{3}}\,\vec{e}_1$$

按物理上的习惯，取 $\vec{e}_1$ 沿纵轴方向，$\vec{e}_2$ 沿横轴方向，互为复共轭的表示平面权图为原点反演，表示 $(\lambda,0)$ 的平面权图是倒置的正三角形，所有权的重数都为1。其他表示的平面权图是六边形，外边界的重数是1，每向原点走一格，权的重数增加1，权图缩为正三角形时，重数不再增加。

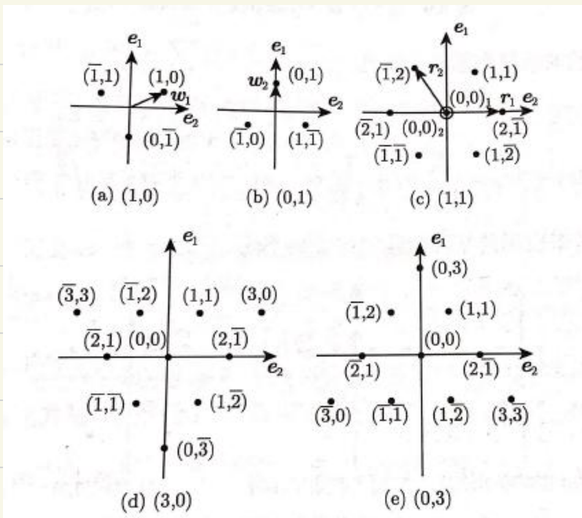


图. SU(3)群若干不可约表示的平面权图

B_2 李代数对应 SO(5) 群，自身表示生成元为

$$H_1 = T_{12} \qquad H_2 = T_{34}$$

$$E_{\vec{r}_1} = \frac{1}{2}\{T_{23} - iT_{13} - iT_{24} - T_{14}\} \qquad E_{\vec{r}_2} = \sqrt{\frac{1}{2}}\{T_{45} - iT_{35}\}$$

素根和基本主权是

$$\vec{r}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \qquad r_2 = \vec{e}_2$$

$$\vec{w}_1 = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \vec{e}_1 \qquad \vec{w}_2 = \frac{1}{2}\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \frac{1}{2}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$$

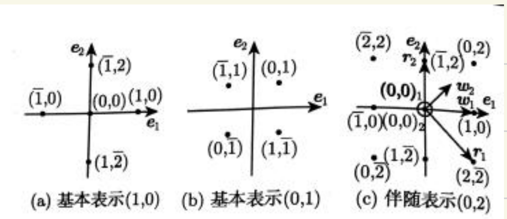


图 5.9　SO(5) 群若干表示的平面权图

○ 5.3 直乘表示的约化

单纯李代数两个不可约表示的直乘一般是可约表示，可分解为若干不可约表示直和，直和称为克莱布什-戈登级数。约化的相似变换矩阵元称为克莱布什-戈登系数

5.3.1 克莱布什-戈登级数

单纯李代数的紧致实形式里，取不可约表示为幺正表示，通过幺正相似变换，把两不可约表示之直乘 $(D^{M^{(1)}} \times D^{M^{(2)}})$ 约化：

$$(C^{M^{(1)}M^{(2)}})^{-1}(D^{M^{(1)}} \times D^{M^{(2)}})C^{M^{(1)}M^{(2)}} = \bigoplus_M a_M D^M$$

其中 a_M 是表示 $\vec{M}$ 在直乘表示约化中的重数，设 $d(M^{(i)})$ 是表示 $M^{(i)}$ 的维数，则 $C^{M^{(1)}M^{(2)}}$ 是 $d(M^{(1)})d(M^{(2)})$ 维矩阵，行指标为 $m^{(1)}, m^{(2)}$，列指标为 $M,(r),m$，用 r 来区分重表示。每个子空间的状态基在生成元下满足

$$H_\mu |\vec{M}^{(i)}, \vec{m}^{(i)}\rangle = m_\mu^{(i)} |\vec{M}^{(i)}, \vec{m}^{(i)}\rangle$$

$$E_\mu |\vec{M}^{(i)}, \vec{m}^{(i)}\rangle = \sum |\vec{M}^{(i)}, \vec{m}^{(i)} + \vec{r}_\mu\rangle D^{\vec{M}(i)}_{(\vec{m}^{(i)}+\vec{r}_\mu)\vec{m}^{(i)}}(E_\mu)$$

$$F_\mu |\vec{M}^{(i)}, \vec{m}^{(i)}\rangle = \sum |\vec{M}^{(i)}, \vec{m}^{(i)} - \vec{r}_\mu\rangle D^{\vec{M}(i)}_{(\vec{m}^{(i)}-\vec{r}_\mu)\vec{m}^{(i)}}(F_\mu)$$

式中对重权状态求和。直乘表示空间的状态基为（通常把标记符号 $\vec{M}^{(1)}$ 和 $\vec{M}^{(2)}$ 省略）

$$|\vec{M}^{(1)}, \vec{m}^{(1)}\rangle |\vec{M}^{(2)}, \vec{m}^{(2)}\rangle = |\vec{m}^{(1)}\rangle |\vec{m}^{(2)}\rangle$$

这是一组互相正交归一的状态基，约化后的状态基为

$$||\vec{M}(r), \vec{m}\rangle = \sum_{\vec{m}^{(1)}, \vec{m}^{(2)}} |\vec{m}^{(1)}\rangle |\vec{m}^{(2)}\rangle C^{\vec{M}^{(1)}\vec{M}^{(2)}}_{\vec{m}^{(1)}, \vec{m}^{(2)}; \vec{M}, (r), \vec{m}}$$

这是另一组相互正交归一的基，上式是单纯李代数克莱布什-戈登系数的最常用的表达方法。生成元 I_A 可取谢瓦莱基，当 I_A 取 H_μ 时，得：

$$(\vec m^{(1)}+\vec m^{(2)})\, C^{\vec M^{(1)}\vec M^{(2)}}_{\vec m^{(1)},\vec m^{(2)};\vec M,(r),\vec m} = C^{\vec M^{(1)}\vec M^{(2)}}_{\vec m^{(1)},\vec m^{(2)};\vec M,(r),\vec m}\, \vec m$$

$$C^{\vec M^{(1)}\vec M^{(2)}}_{\vec m^{(1)},\vec m^{(2)};\vec M,(r),\vec m} = 0 \;;\quad 当\ \vec m \neq \vec m^{(1)}+\vec m^{(2)}$$

即组合前后，权矢量相加，$\vec m=\vec m^{(1)}+\vec m^{(2)}$. 对SU(2)群，这就是磁量子数相加，但对单纯李代数，还要注意可能有重权. 当 I_A 取 E_μ，F_μ 时，有

$$\sum_{\vec m^{(1)\prime}=\vec m^{(1)}\mp\vec r_j} D^{\vec M^{(1)}}(I_A)_{\vec m^{(1)}\vec m^{(1)\prime}}\, C^{\vec M^{(1)}\vec M^{(2)}}_{\vec m^{(1)\prime},\vec m^{(2)};\vec M,(r),\vec m} + \sum_{\vec m^{(2)\prime}=\vec m^{(2)}\mp\vec r_j} D^{\vec M^{(2)}}(I_A)_{\vec m^{(2)}\vec m^{(2)\prime}}\, C^{\vec M^{(1)}\vec M^{(2)}}_{\vec m^{(1)},\vec m^{(2)\prime};\vec M,(r),\vec m}$$

$$= \sum_{\vec m'=\vec m\pm\vec r_j} C^{\vec M^{(1)}\vec M^{(2)}}_{\vec m^{(1)},\vec m^{(2)};\vec M,(r),\vec m'}\, D^{\vec M}(I_A)_{\vec m'\vec m}$$

其中，E_μ 对应上面符号，F_μ 对应下面符号. 对SU(2)群，E_μ 取 I_+，F_μ 取 I_-，H_μ 取 $2I_3$，因此在符号上面作的变动为

$$J=\vec M/2 \qquad j=\vec M^{(1)}/2\,,\quad k=\vec M^{(2)}/2\,,\quad \mu=m^{(1)}/2\,,\quad \nu=m^{(2)}/2$$

上式化简为

$$\Gamma^j_{\pm\mu}\, C^{jk}_{(\mu\mp1)\nu JM} + \Gamma^k_{\pm\nu}\, C^{jk}_{\mu(\nu\mp1)JM} = C^{jk}_{\mu\nu J(M\pm1)}\, \Gamma^J_{\mp M}$$

5.3.2 克莱布什-戈登级数

设 $\vec M$ 出现在单纯李代数 $\mathcal{L}$ 两不可约表示 $\vec M^{(1)}$ 和 $\vec M^{(2)}$ 直乘分解的 C-G 级数中，它的最高权态展开为：

$$||\vec M(r),\vec M\rangle = \sum_{\vec m^{(1)}} |\vec m^{(1)}\rangle\, |\vec M-\vec m^{(1)}\rangle\, C^{(r)}_{\vec m^{(1)}}$$

这是上节的一般展开公式的特殊情况，并简化了C-G系数的符号

现在来证明，展开式中一定包含 $\vec m^{(1)}$ 等于最高权表示 $\vec M^{(1)}$ 的项. 任取展开式中的一项，设 $\vec m^{(1)} \neq \vec M^{(1)}$，则必存在某升算符作用在态 $|\vec m^{(1)}\rangle$ 上不为零

$$E_\mu |\vec m^{(1)}\rangle = a|\vec m^{(1)}+\vec r_\mu\rangle + \cdots(重权态) \neq 0$$

因为 E_μ 作用在态 $||\vec M,(r),\vec M\rangle$ 上得零，所以展开式必包含一项：$|\vec m^{(1)}+\vec r_\mu\rangle\, |\vec M-\vec m^{(1)}-\vec r_\mu\rangle\, C^{(r)}_{\vec m^{(1)}+\vec r_\mu}$

$$E_\mu |\vec M-\vec m^{(1)}-\vec r_\mu\rangle = b|\vec M-\vec m^{(1)}\rangle + \cdots(重权态) \neq 0$$

且满足

$$a C^{(r)}_{\vec m^{(1)}} + b C^{(r)}_{\vec m^{(1)}+\vec r_\mu} = 0$$

这样 $\vec m^{(1)}$ 的递升过程中要一直进行下去，直到 $\vec m^{(1)}=\vec M^{(1)}$. 证完

说明 $\vec M-\vec M^{(1)}=\vec m^{(2)}$ 必定在 $\vec M^{(2)}$ 表示中出现. 同理，展开式中也一定有 $\vec m^{(2)}=\vec M^{(2)}$ 的项. 于是我们得到C-G系数中出现的不可约表示最高权 $\vec M$ 必须满足的条件为：

$$\vec M = \vec M^{(1)}+\vec m^{(2)} = \vec m^{(1)}+\vec M^{(2)}$$

对SU(2)群，条件化简为 $J=j+\nu\geq 0$ 或 $J=\mu+k\geq 0$. 若 $j\geq k$，则 $J=j+k-n$，$0\leq n\leq 2k$.

或更一般地写为

$$J = j+k,\ j+k-1,\ \cdots,\ |j-k|$$

在两表示 $\vec{M}^{(1)}$ 和 $\vec{M}^{(2)}$ 的直乘空间中，最高权是单权，状态基是 $|M^{(1)}\rangle|M^{(2)}\rangle$，因此 C-G 级数中一定出现一个重数为 1 的表示：

$$\vec{M}_1 = \vec{M}^{(1)} + \vec{M}^{(2)} \quad ; \quad ||\vec{M}_1, \vec{M}_1\rangle = |\vec{M}^{(1)}\rangle|\vec{M}^{(2)}\rangle$$

5.3.3 主权图方法

① 在 $\vec{M}^{(2)}$ 表示空间寻找 $\vec{M} = \vec{m}^{(2)} + \vec{M}^{(1)}$. 这些 $\vec{M}$ 就是有可能出现的最高权，且满足：

$$\vec{M}_1 - \vec{M} = \sum_{\mu=1}^{\ell} c_\mu \vec{r}_\mu$$

按和式自小至大，给这些 $\vec{M}$ 一个序号，第一个表示 $\vec{M}_1$ 是最高权态.

② 计算 $\vec{M}$ 的重数：

(a). 先在直乘空间找出权为 $\vec{M}$ 的正交归一状态基 $|\vec{m}^{(1)}\rangle|\vec{M}-\vec{m}^{(1)}\rangle$ 的个数 $b_{\vec{M}}$，显然 $a_{\vec{M}_1} = b_{\vec{M}_1} = 1$.

(b). 通过方块权图和盖尔范德方法，计算表示 $\vec{M}_i$ 中包含各 $\vec{M}$ 的重数 $C^{(i)}_{\vec{M}}$，也可查表

(c). $a_{\vec{M}_2} = b_{\vec{M}_2} - C^{(1)}_{\vec{M}_2}$，若 $a_{\vec{M}_2} = 0$，则 $\vec{M}_2$ 可去掉，并使后续表示序数减少 1

(d) 计算 $a_{\vec{M}_3} = b_{\vec{M}_3} - C^{(1)}_{\vec{M}_3} - a_{\vec{M}_2} C^{(2)}_{\vec{M}_3}$

(e) 依次类推：$a_{\vec{M}_n} = b_{\vec{M}_n} - \sum_{i=1}^{n-1} a_{\vec{M}_i} C^{(i)}_{\vec{M}_n}$

③ 把各主权在直乘空间和约化后各表示空间的重数排列成表，即得到直乘表示约化的主权图.

主权图具体画法如下. 把在克莱布什–戈登级数中出现的每一个表示 M_n, 按序数 n 排列, 各占一列, 列出该表示的重数 a_{M_n} 和表示包含的各主权 M. 在表示中这些主权的重数 $c_M^{(n)}$ 以指数形式标在主权 M 的右上角, a_{M_n} 和 $c_M^{(n)}$ 为 1 时省略. 最左面一列列出在表示直乘空间中各主权的重数 b_M 及其外尔轨道长度 $(O.S.)$. 它们的乘积之和就是直乘空间的维数 $d(M^{(1)})d(M^{(2)})$, 表在第一列的最下面. 对每一个表示 M_n, 各主权的重数与外尔轨道长度乘积之和就是该表示的维数, 也列在该表示所在列的最下面, 以检验计算得的克莱布什–戈登级数的正确性.

第二, 对在克莱布什–戈登级数中出现的表示, 把它的最高权态 $||M_n, M_n\rangle$ 按表示直乘空间有相同权的状态基展开 (见式 (5.59)). 根据最高权态的定义式 (5.7), 要求所有升算符 E_μ 作用在展开式上得零. 用这些条件计算展开式系数间的关系, 最后用归一化条件确定系数. **对简单情况也可根据属不等价不可约表示状态基的正交条件来计算.**

如果表示的重数 a_M 大于 1, 计算得到的表示最高权态 $||M_n, M_n\rangle$ 之间允许作线性组合. 即使重数为 1, 最高权态的相因子还可以自由选择. 通常使最高权态展开式中 $m^{(1)} = M^{(1)}$ 的项 (至少是其中的一项) 系数为正实数. 当 $M^{(1)} = M^{(2)}$ 时, 可以通过最高权态的适当组合, 使克莱布什–戈登系数对 $|m^{(1)}\rangle$ 和 $|m^{(2)}\rangle$ **的交换对称或反对称**, 对应表示 M 分别称为对称表示或反对称表示.

第三, 有了最高权态的展开式, 就可通过降算符的作用, 计算这表示其他状态基的展开式. 因为前面的计算错误会直接影响后面的计算, 所以计算过程中每一计算结果都要作检验. 对每一个状态基的展开式 (5.59), 应该检查等式各项权之和 $m^{(1)} + m^{(2)}$ 是否都等于 m, 检查此展开式是否归一, 与已得到的相同权的展开式是否正交, 检查在克莱布什–戈登级数中各表示维数之和是否等于直乘表示的维数 $d(M^{(1)})d(M^{(2)})$. 当 $M^{(1)} = M^{(2)}$ 时, 还要检查克莱布什–戈登级数中对称表示维数之和是否等于 $d(M^{(1)})[d(M^{(1)}) + 1]/2$, 反对称表示维数之和是否等于 $d(M^{(1)})[d(M^{(1)}) - 1]/2$.

SU(2)群的计算是最简单的例子. SU(2)群不可约表示中,所有非负权都是主权,且是单权. 在不可约表示中所有 D^j 中各主权都是单权,经计算不难得出所有重数 $a_J=1$, 即 SU(2)群的C-G级数为:

$$D^j \times D^k = \bigoplus_J D^J \quad , \qquad J = j+k, \cdots, |j-k|$$

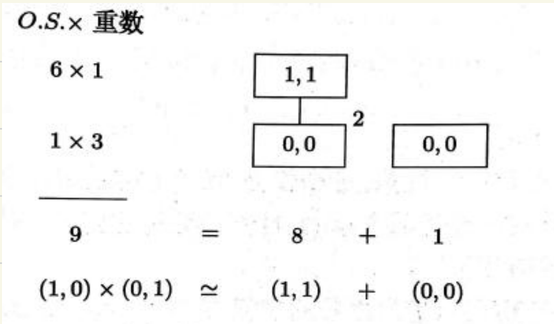
再用主权图方法计算SU(3)群(A_2李代数)的两个基本表示直乘分解的C-G级数和系数

例1. $(1,0)\otimes(0,1)$. 由它们的方块权图得直乘表示空间有两个主权(0,0)和(1,0),由平面权图可知其OS分别为1和6. (1,1)是直乘表示空间最高主权,重数为1,主权为(0,0)在直乘空间表示的状态基有三个 $b_{(0,0)}=3$

$$|(1,0),(1,0)\rangle|(0,1),(\bar{1},0)\rangle \qquad |(1,0),(\bar{1},1)\rangle|(0,1),(1,\bar{1})\rangle$$

$$|(1,0),(0,\bar{1})\rangle|(0,1),(0,1)\rangle$$

在(1,1)中(0,0)是二重权,所以C-G级数中(0,0)的重数是3-2=1,计算得SU(3)两个基本表示直乘分解的主权图如下所示.



SU(3) 群直乘表示 (1,0) × (0,1) 分解的主权图

表示(1,1)的最高权展开式为:

$$||(1,1),(1,1)\rangle = |(1,0),(1,0)\rangle|(0,1),(0,1)\rangle$$

可由方块权图计算其他状态的展开式

$$||(1,1),(\bar{1},2)\rangle = F_1||(1,1),(1,1)\rangle = |(1,0),(\bar{1},0)\rangle|(0,1),(0,1)\rangle$$

$$||(1,1),(2,\bar{1})\rangle = F_2||(1,1),(1,1)\rangle = |(1,0),(1,0)\rangle|(0,1),(1,\bar{1})\rangle$$

$$||(1,1),(0,0)_1\rangle = \sqrt{1/2}\, F_1||(1,1),(2,\bar{1})\rangle$$

$$= \sqrt{1/2}\,\{|(1,0),(1,0)\rangle|(0,1),(\bar{1},0)\rangle + |(1,0),(\bar{1},1)\rangle|(0,1),(1,\bar{1})\rangle$$

$\vdots$

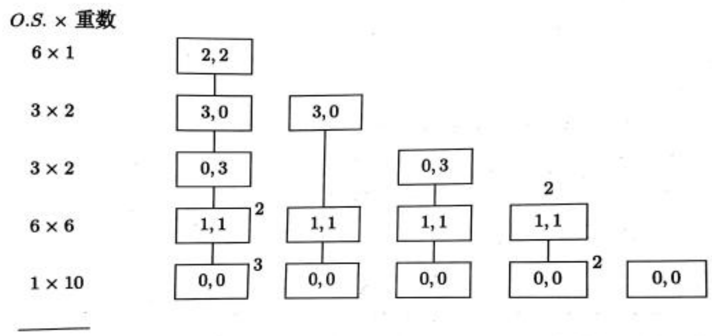
表示(0,0)是一维表示,可根据其在升算符作用下得零求出C-G系数

例2. $(1,1)\otimes(1,1)$. 这在粒子物理中非常有用.

按照方块权图,直积表示空间中出现的主权有(2,2),(3,0),(0,3),(1,1),(0,0),重数分别为1,2,2,6和10,如下页中的表格所示.参加直乘的两个表示是相同的,表中暂时忽略 $|\omega^{(1)}\rangle$ 和 $|\omega^{(2)}\rangle$ 交换得到的状态基,这些主权外尔轨道的长度之和为6,3,3,6和1

主权	重数	独立状态基
(2,2)	1	$\vert(1,1)\rangle\vert(1,1)\rangle$
(3,0)	2	$\vert(1,1)\rangle\vert(2,\bar{1})\rangle$
(0,3)	2	$\vert(1,1)\rangle\vert(\bar{1},2)\rangle$
(1,1)	6	$\vert(1,1)\rangle\vert(0,0)_1\rangle$, $\vert(1,1)\rangle\vert(0,0)_2\rangle$, $\vert(\bar{1},2)\rangle\vert(2,\bar{1})\rangle$
(0,0)	10	$\vert(1,1)\rangle\vert(\bar{1},\bar{1})\rangle$, $\vert(2,\bar{1})\rangle\vert(\bar{2},1)\rangle$, $\vert(\bar{1},2)\rangle\vert(1,\bar{2})\rangle$, $\vert(0,0)_a\rangle\vert(0,0)_b\rangle$, $a,b=1,2$

按照方块权图以及主权态得基，我们可以很容易找出各最高权中其他最高权的重数，最后得到(1,1)最高权表示的重数为2，其余均为1，由此可以得到SU(3)两个伴随表示的主权图.



$$64 = 27 + 10 + 10 + 2\times 8 + 1$$

$$(1,1)\times(1,1) \simeq (2,2)_S + (3,0)_A + (0,3)_A + (1,1)_S + (1,1)_A + (0,0)_S$$

下面计算各最高权态和展开式 (2,2)的最高权态为

$$||(2,2),(2,2)\rangle = |(1,1)\rangle|(1,1)\rangle$$

因此 $||(2,2)\rangle$ 是对称表示，在降算符的作用下得

$$||(2,2),(0,3)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}F_1||(2,2),(2,2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|1,1\rangle|\bar{1},2\rangle + |\bar{1},2\rangle|1,1\rangle\}$$

$$||(2,2),(3,0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}F_2||(2,2),(2,2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|1,1\rangle|2,\bar{1}\rangle + |2,\bar{1}\rangle|1,1\rangle\}$$

表示(3,0)和(0,3)的最高权态必须和上面的正交

$$||(0,3),(0,3)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|1,1\rangle|\bar{1},2\rangle - |\bar{1},2\rangle|1,1\rangle\}$$

$$||(3,0),(3,0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|1,1\rangle|2,\bar{1}\rangle - |2,\bar{1}\rangle|1,1\rangle\}$$

因此(3,0)和(0,3)是反对称表示，在乘积表示空间权为(1,1)的态出现6次，由在E_1作用下为零的条件，得到四个状态组合

$$|1,1\rangle|(0,0)_2\rangle;\quad |1,1\rangle|(0,0)_1\rangle - \sqrt{2}|\bar{1},2\rangle|2,\bar{1}\rangle$$

$$|(0,0)_2\rangle|1,1\rangle;\quad |(0,0)_1\rangle|1,1\rangle - \sqrt{2}|2,\bar{1}\rangle|\bar{1},2\rangle$$

进一步要求下得到两个独立状态基，符合C-G系数中(1,1)的重数为2，把这两个状态基组成对称和反对称的形式.

$$||(1,1),(1,1)\rangle_S = \cdots\cdots$$

$$||(1,1),(1,1)\rangle_A = \cdots\cdots$$

(0,0)表示也是对称表示，很容易计算.

○ 5.4 SO(4)群和洛伦兹群

5.4.1 SO(4)群不可约表示及其生成元

从邓金图可以看出 SO(4)的李代数 D_2 可分解为 $A_1 \oplus A_1$，因而SO(4)群与两个SU(2)群的直乘有同态关系
经过适当组合，SO(4)群自身表示的生成元化为两个SU(2)群直乘的生成元.

SO(4)群自身表示的六个生成元 T_{ab}，作适当组合得

$$T_1^{(\pm)} = \frac{1}{2}(T_{23} \pm T_{14}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mp i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ \pm i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

及其1,2,3循环. 上式可表成二维矩阵的直乘形式：

$$T_1^{(+)} = \frac{1}{2}\sigma_2 \times \sigma_1 \; ; \quad T_2^{(+)} = -\frac{1}{2}\sigma_2 \times \sigma_3 \; ; \quad T_3^{(+)} = \frac{1}{2} 1 \times \sigma_2 \; ;$$

$$T_1^{(-)} = -\frac{1}{2}\sigma_1 \times \sigma_2 \; ; \quad T_2^{(-)} = -\frac{1}{2}\sigma_2 \times 1 \; ; \quad T_3^{(-)} = \frac{1}{2}\sigma_3 \times \sigma_2 \; ;$$

它们分成两组生成元，分别满足SU(2)群的对易关系

$$[T_a^{(\pm)}, T_b^{(\pm)}] = i\sum_{c=1}^{3}\epsilon_{abc} T_c^{(\pm)}, \quad [T_a^{(+)}, T_b^{(-)}] = 0$$

作相似变换后，分解可以看得更清楚

$$N^{-1} T_a^{(+)} N = (\sigma_a/2) \times 1 \qquad N^{-1} T_a^{(-)} N = 1 \times (\sigma_a/2)$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -i & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \end{pmatrix}$$

由此SO(4)群任意元素R可表为：

$$R = e^{-i\sum_{a<b}^{4}\omega_{ab}T_{ab}} = e^{-i\sum_{a=1}^{3}(\omega_a^{(+)}T_a^{(+)} + \omega_a^{(-)}T_a^{(-)})}$$

$$= \exp\{-i\omega^{(+)}\hat{n}^{(+)}\cdot \vec{T}^{(+)}\}\exp\{-i\omega^{(-)}\hat{n}^{(-)}\cdot T^{(-)}\}$$

$$= N\{u(\hat{n}^{(+)}, \omega^{(+)}) \times u(\hat{n}^{(-)}, \omega^{(-)})\}$$

$$\omega_1^{(\pm)} = \omega_{23} \pm \omega_{14} = \omega^{(\pm)} n_1^{(\pm)}$$

$$\omega_2^{(\pm)} = \omega_{31} \pm \omega_{24} = \omega^{(\pm)} n_2^{(\pm)} \qquad \omega^{(\pm)} = \left\{\sum_{a=1}^{3}(\omega_a^{(\pm)})^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega_3^{(\pm)} = \omega_{12} \pm \omega_{34} = \omega^{(\pm)} n_3^{(\pm)}$$

这样，R矩阵明显地表达成两个二维幺模幺正矩阵u的直乘，两个u矩阵同时改变符号时，R矩阵保持不变. 因此SO(4)群元素和两个SU(2)直乘的群元素有一二对应关系

$$SO(4) \sim SU(2) \otimes SU(2)'$$

两个SU(2)群的参数 ⟶ SO(4)群的参数. 为了可以使群参一一对应，其中一个SU(2)'的群空间缩小一半

$$0 \le \omega^{(+)} \le 2\pi \qquad 0 \le \omega^{(-)} \le \pi$$

$$0 \le \theta^{(\pm)} \le \pi \qquad -\pi \le \varphi^{(\pm)} \le \pi$$

一个 SU(2)' 群的群空间缩小了一半，类似于 SO(3) 群的群空间，在群空间的边界上直径两端的点对应同一群元，这就是说 SO(4) 群是双连通的。双连通性反映了 R 在两矩阵 u 同时改变符号时保持不变

$$R(\hat{n}^{(+)}, \omega^{(+)}; \hat{n}^{(-)}, \omega^{(-)}) = R(-\hat{n}^{(+)}, (2\pi-\omega^{(+)}); -\hat{n}^{(-)}, (2\pi-\omega^{(-)}))$$

$$R(\hat{n}^{(+)}, \omega^{(+)}; \hat{n}^{(-)}, \pi) = R(-\hat{n}^{(-)}, (2\pi-\omega^{(+)}); -n^{(-)}, \pi)$$

即 SO(4) 群的覆盖群是 $SU(2)\otimes SU(2)'$ 群，选择这组参数后，SO(4) 群上积分的密度函数为：

$$dR = \frac{1}{8\pi^4}\sin^2\left(\frac{\omega^{(+)}}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\omega^{(-)}}{2}\right)\sin\theta^{(+)}\sin\theta^{(-)}\, d\omega^{(+)} d\omega^{(-)} d\theta^{(+)} d\theta^{(-)} d\varphi^{(+)} d\varphi^{(-)}$$

SO(4) 群的不等价不可约表示可以表为两个 SU(2) 群不等价不可约表示之直乘

$$D^{jk}(SO(4)) = D^{j}(SU(2)) \otimes D^{k}(SU(2)')$$

$$D^{jk}(\hat{n}^{(+)}, \omega^{(+)}; \hat{n}^{(-)}, \omega^{(-)}) = D^{j}(\hat{n}^{(+)}, \omega^{(+)}) \times D^{k}(\hat{n}^{(-)}, \omega^{(-)})$$

D^{jk} 是 $(2j+1)(2k+1)$ 维的，他的生成元 I^{jk}_{ab} 可由 SU(2) 群的生成元表出

$$I_a^{jk(+)} = I_a^{j} \times 1_{2k+1} \qquad I_a^{jk(-)} = 1_{2j+1} \times I_a^{k}$$

$$I_{ab}^{jk} = \sum_{c=1}^{3}\epsilon_{abc}\left(I_c^{jk(+)} + I_c^{jk(-)}\right) \qquad I_{a4}^{jk} = I_a^{jk(+)} - I_a^{jk(-)}$$

D^{jk} 表示的直乘分解，也可以借用 SU(2) 群表示的性质计算：

$$D^{j_1k_1}(R) \times D^{j_2k_2}(R) \simeq \bigoplus_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2}\ \bigoplus_{K=|k_1-k_2|}^{k_1+k_2} D^{JK}(R)$$

事实上，$I_a^{jk(\pm)}$ 与谢瓦莱基有直接的联系：

$$H_1 = 2I_3^{jk(-)} \qquad H_2 = 2I_3^{jk(+)}$$

$$E_1 = I_1^{jk(-)} + iI_2^{jk(-)} \qquad E_2 = I_2^{jk(+)} + iI_2^{jk(-)}$$

利用基本旋量表示，SO(4) 群的生成元为：

$$S_{23} = (\sigma_2 \times \sigma_2)/2 \qquad S_{14} = -(\sigma_1 \times \sigma_1)/2$$

$$S_{31} = -(\sigma_1 \times \sigma_2)/2 \qquad S_{24} = -(\sigma_2 \times \sigma_1)/2$$

$$S_{12} = (\sigma_3 \times 1)/2 \qquad S_{34} = (1 \times \sigma_3)/2$$

将其进行线性组合：

$$S_1^{(\pm)} = \frac{1}{2}(S_{23} \pm S_{14}) \quad \text{---- 指标 1, 2, 3 循环.}$$

再利用相似变换

$$S_a^{\pm} = X^{-1}P_{\pm}X \times \frac{\sigma_a}{2}, \quad X^{-1}P_{+}X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X^{-1}P_{-}X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

变换矩阵：

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即SO(4)群的旋量表示等价于$D^{\frac{1}{2}0}\oplus D^{0\frac{1}{2}}$. SO(4)群的恒等表示是$D^{00}$, 自身表示等价于$D^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$

5.4.2 洛伦兹群的性质

四维时空两个惯性系之间的坐标变换称为洛伦兹变换，这里取用虚坐标系和欧几里得度规，则洛伦兹变换矩阵是四维正交矩阵:

$$A^T A = A A^T = 1$$

其中: A_{ab}和A_{44}是实数， A_{a4}和A_{4a}是虚数， a和b=1,2,3

实数性条件在矩阵乘积中保持不变，A构成群，齐次洛伦兹群，记为L_h

若取实坐标和闵可夫斯基度规，洛伦兹变换矩阵A是实质正交矩阵，

$$A^T \eta A = \eta \qquad \eta = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

同理 A也构成群 O(3,1)，与L_h同构:

$$M^{-1} A M = A \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

以下内容全部使用虚坐标 $x_4 = ict$ 和欧氏度规

由正交条件可得

$$\det A = \pm 1 \qquad A_{44}^2 = 1 + \sum_{a=1}^{3} |A_{a4}|^2 \geq 1$$

可以把L_h群分成不连续的四片，包含恒元的一片满足

$$\det A = 1 \qquad A_{44} \geq 1$$

称为固有洛伦兹群 $L_p = L_+^\uparrow$，非紧致，三个陪集中各选一个对角矩阵作为代表:

$\sigma = \mathrm{diag}\{-1, -1, -1, 1\}$ 空间反演

$\tau = \mathrm{diag}\{1, 1, 1, -1\}$ 时间反演

$\rho = \mathrm{diag}\{-1, -1, -1, -1\}$ 时空反演

以上三个元素，加上恒元，构成四阶反演群V_4，齐次洛伦兹群四个连续片分别用以下符号标记

$$L_+^\uparrow = L_p \qquad L_-^\uparrow = \sigma L_p \qquad L_-^\downarrow = \tau L_p \qquad L_+^\downarrow = \rho L_p.$$

正时洛伦兹群　完全(full)洛伦兹群 L_f

5.4.3 固有洛伦兹群的群参数和不可约表示

讨论L_p群自身表示的生成元，设A是无穷小元素，$A = 1 - i\alpha X$

$$1 = A^T A = 1 - i\alpha(X + X^T) \qquad X^T = -X$$

$$1 = \det A = 1 - i\alpha\, \mathrm{Tr} X, \qquad \mathrm{Tr} X = 0$$

故X是无迹反对称矩阵，可以将SO(4)群自身表示展开

$$A = 1 - i\sum_{a<b}^{3} \omega_{ab} T_{ab} - i\sum_{a=1}^{3} \omega_{a4} T_{a4}$$
$$= 1 - i\sum_{a=1}^{3}\left(\omega_a^{(+)} T_a^{(+)} + \omega_a^{(-)} T_a^{(-1)}\right)$$

因实数性条件：

$$\omega_1^{(\pm)} = \omega_{23} \pm \omega_{14} \qquad \omega_2^{(\pm)} = \omega_{31} \pm \omega_{24} \qquad \omega_3^{(\pm)} = \omega_{12} \pm \omega_{34}$$

ω_{ab} 是实数． ω_{a4} 是虚数 $\qquad \omega_a^{(+)} = (\omega_a^{(-)})^*$

因有洛伦兹群的群参是 $\omega^{(\pm)}$ 的三个实分量和三个虚分量、如果允许采用虚参数，则除参数的实数性条件不一样外，SO(4)群和 L_p 群生成元相同，结构常数相同，在对应不可约表示中的生成元也相同．即两群不等价不可约表示——对应，L_p 群有限维不等价不可约表示 $D^{jk}(L_p)$ 生成元为：

$$I_{ab}^{jk} = \sum_{c=1}^{3} \epsilon_{abc}\left\{ I_c^{jk(+)} + I_c^{jk(-)} \right\}, \qquad I_{a4}^{jk} = I_a^{jk(+)} - I_a^{jk(-)}$$
$$I_a^{jk(+)} = I_a^j \times I_{2k+1} \qquad I_a^{jk(-)} = I_{2j+1} \times I_a^k$$

但因参数实数性条件不同，两群的整体性质有区别

使用推广欧拉角：对于任意给定固有洛伦兹变换 A， $\det A = 1$， $A_{44} \geq 1$． 令 $A_{44} = \cosh\omega$．
从 A_{44} 中提出 $-i\sinh\omega$，剩下的部分看成三维空间单位矢量 $\hat{n}(\theta,\varphi)$

$$A_{44} = \cosh\omega \qquad i A_{14}/\sinh\omega = \sin\theta\cos\varphi$$
$$i A_{24}/\sinh\omega = \sin\theta\sin\varphi \qquad i A_{34}/\sinh\omega = \cos\theta$$

令 $\qquad A(\varphi,\theta,\omega,0,0,0) = R(\vec{e}_3,\varphi)\, R(\vec{e}_2,\theta)\, R(\vec{e}_3, i\omega)$

有：
$$A(\varphi,\theta,\omega,0,0,0)\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A_{14}\\A_{24}\\A_{34}\\A_{44}\end{pmatrix}$$

于是 $\qquad A(\varphi,\theta,\omega,\alpha,\beta,\gamma) = \underbrace{R(\varphi,\theta,0)}_{\text{转动}}\, \underbrace{A(\vec{e}_3, i\omega)}_{\text{洛伦兹变换}}\, \underbrace{R(\alpha,\beta,\gamma)}_{\text{转动}}$

六个参数的取值范围为

$$0 \leq \omega < \infty \qquad 0 \leq \theta \leq \pi \qquad 0 \leq \beta \leq \pi$$
$$-\pi \leq \varphi \leq \pi \qquad -\pi \leq \alpha \leq \pi \qquad -\pi \leq \gamma \leq \pi$$

可表出 $A(\varphi,\theta,\omega,\alpha,\beta,\gamma)$ 在表示 $D^{jk}(L_p)$ 中的表示矩阵：

$$D^{jk}(\alpha,\beta,\gamma) = D^j(\alpha,\beta,\gamma) \times D^k(\alpha,\beta,\gamma)$$
$$D^{jk}(\vec{e}_3, i\omega) = \exp(\omega I_3^j) \times \exp(-\omega I_3^k)$$
$$D^{jk}_{\mu\nu,\mu'\nu'}(\varphi,\theta,\omega,\alpha,\beta,\gamma) = \sum_{\rho\tau} e^{-i(\mu+\nu)\varphi}\, d^j_{\mu\rho}(\theta)\, d^k_{\nu\tau}(\theta)\, e^{(\rho-\tau)\omega}$$
$$\times e^{-i(\rho+\tau)\alpha}\, d^j_{\rho\mu'}(\beta)\, d^k_{\tau\nu'}(\beta)\, e^{-i(\mu'+\nu')\gamma}$$

5.4.4 L_p 的覆盖群

L_p和$SO(4)$有相同生成元，只是参数的实数性条件不同

$$u(\vec{e}_a, \omega) = e^{-i\omega\sigma_a/2}, \quad u(\vec{e}_3, i\omega) = e^{\omega\sigma_3/2}$$

$$D^{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\gamma) = u(\alpha,\beta,\gamma) = e^{-i\alpha\sigma_3/2}\, e^{-i\beta\sigma_2/2}\, e^{-i\gamma\sigma_3/2}$$

在相似变换N中

$$\begin{aligned} A &= A(\varphi,\theta,\omega,\alpha,\beta,\gamma) \\ &= N\{u(\varphi,\theta,0)\times u(\varphi,\theta,0)\}\{\exp(\omega\sigma_3/2)\times\exp(-\omega\sigma_3/2)\} \\ &\quad \times \{u(\alpha,\beta,\gamma)\times u(\alpha,\beta,\gamma)\}N^{-1} \\ &= N\{M\times(\sigma_2 M^* \sigma_2)\}N^{-1} \end{aligned}$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -i & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = u(\varphi,\theta,0)\exp(\omega\sigma_3/2)u(\alpha,\beta,\gamma) \in SL(2,C)$$

有两个不同元素M和M'通过以上关系对应L_p中同一元素A，则

$$1 = N^{-1}(AA^{-1})N = MM'^{-1}\times\sigma_2(MM'^{-1})^*\sigma_2, \quad MM'^{-1} = e^{i\varphi}$$

由于 $\det M = \det M' = 1 \Rightarrow M' = \pm M$

1 L_p元素对应 2 $SL(2,C)$元素

$SL(2,C)$是L_p的覆盖群　　$L_p \sim SL(2,C)$.

$$M = \exp(i\vec{\Omega}\cdot\vec{\sigma}/2)$$

以上提供了两组参数$(\varphi,\theta,\omega,\alpha,\beta,\gamma)$和$\vec{\Omega}$之间的互换方法，主要供理论研究使用，实际计算时不太方便，选用这组参数时，A在表示D^{jk}中的表示矩阵为：

$$D^{jk}(A) = \exp\left\{-i\sum_{a=1}^{3}\Omega_a I_a^j\right\}\times\exp\left\{-i\sum_{a=1}^{3}\Omega_a^* I_a^k\right\}$$

5.4.5 固有洛伦兹群的类

由于$L_p \sim SL(2,C)$，可以通过$SL(2,C)$的类研究L_p的类，若M的两本征值不相等，则M可以相似于对角矩阵

$$Y^{-1}MY = \begin{pmatrix} e^{-i\tau} & 0 \\ 0 & e^{i\tau} \end{pmatrix} = \exp\left\{-i\begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 0 & -\tau \end{pmatrix}\right\}$$

其中τ的虚部为正，τ增加π对应M改变符号，τ描写了M矩阵所属的类，也描写了L_p群对应的类。

L_p群中的类代表元素为$A(\varphi,0,\omega,0,0,0)$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh\omega & -i\sinh\omega \\ 0 & 0 & i\sinh\omega & \cosh\omega \end{pmatrix}$$

当$M\in SL(2,C)$的两个本征值相等时，本征值只能是±1，若M对角，$M=\pm 1$，在$SL(2,C)$中构成两个类，对应L_p群中恒元构成的类，这类已包含在上式中，$\varphi=\omega=0$。若M不对角，也构成两类，对应L_p中一个类。

$$Y^{-1}MY = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp\left\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

因为: $u(-\pi, \pi/4, 0)\begin{pmatrix}\sqrt{2}+1 & 0\\ 0 & \sqrt{2}-1\end{pmatrix} u(\pi, 3\pi/4, 0) = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$= \exp\left\{\begin{pmatrix}0 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\} = \exp\{-\sigma_1 - i\sigma_2\} = \exp\left\{-i\sum_{a=1}^{3}\Omega_a\sigma_a/2\right\}$$

得代表元素为 $A(-\pi, \pi/4, \omega, 3\pi/4, 0)$，其中 $\cosh\omega = 3$，或 $\Omega_1 = -2i$，$\Omega_2 = 2$，$\Omega_3 = 0$

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 2i\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -2 & 0 & -1 & -2i\\ -2i & 0 & -2i & 3\end{pmatrix} = e^{-i2T_{31} - 2T_{14}}$$

此时A矩阵的四个本征值都是1，但只有两个线性无关的本征矢量，可通过相似变换化为约当(Jordan)标准型:

$$Z = \begin{pmatrix}0 & 0 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0 & 1\\ 0 & -4i & 0 & 0\end{pmatrix}; \qquad Z^{-1}AZ = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

5.4.6 Dirac旋量表示

对于四个满足反对易关系的 γ_μ 矩阵，引入

$$\bar{\gamma}_\mu = \sum_{\nu=1}^{4} A_{\mu\nu}\gamma_\nu$$

由 γ 矩阵的等价定理可知，存在幺模相似变换

$$D(A)^{-1}\gamma_\mu D(A) = \sum_{\nu=1}^{4} A_{\mu\nu}\gamma_\nu, \qquad \det D(A) = 1$$

$D(A)$ 的集合构成 L_h 群的多值表示，生成元为:

$$I_{\mu\nu} = \frac{-i}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)$$

引入电荷共轭变换矩阵 C:

$$C^{-1}\gamma_\mu C = -\gamma_\mu^T \qquad C^\dagger C = 1 \qquad C^T = -C \qquad \det C = 1$$

有:

$$C^{-1}I_{\mu\nu}C = -I_{\mu\nu}^T$$

对 L_p 群，用下面条件选择表示矩阵 $D(A)$

$$C^{-1}D(A)C = \{D(A^{-1})\}^T, \qquad A \in L_p$$

得 L_p 群的双值基本旋量表示，对 L_h 群，用下式规定群空间各连续片的代表元素

$$C^{-1}D(A)C = A_{44}/|A_{44}|\,\{D(A^{-1})\}^T, \qquad A \in L_h$$

解得:

$$D(\sigma) = \pm i\gamma_4 \qquad D(\tau) = \pm\gamma_4\gamma_5 \qquad D(\rho) = \pm i\gamma_5$$

矩阵 $D(A)$ 与 L_h 有二一对应关系，称为Dirac旋量表示，也是 L_h 的覆盖群. Dirac旋量表示不是幺正表示，下面计算矩阵的共轭矩阵性质.

$$D(A)^{\dagger}\gamma_a D(A^{-1})^{\dagger} = \sum_{b=1}^{3} A_{ab}\gamma_b - A_{a4}\gamma_4$$

$$D(A)^{\dagger}\gamma_4 D(A^{-1})^{\dagger} = -\sum_{b=1}^{3} A_{4b}\gamma_4 + A_{44}\gamma_4$$

做γ_4相似变换：

$$\{\gamma_4 D(A)^{\dagger}\gamma_4\}\gamma_\mu\{\gamma_4 D(A)^{\dagger}\gamma_4\}^{-1} = \sum_{\nu=1}^{4} A_{\mu\nu}\gamma_\nu$$

$$\gamma_4 D(A)^{\dagger}\gamma_4 = c\, D(A)^{-1}$$

$$\gamma_4 D(A)^{\dagger}\gamma_4 = A_{44}/|A_{44}|\, D(A)^{-1}$$

这就是量子场论中用旋量场构造洛伦兹变换不变量时，必须插入一个γ_4矩阵的原因：

$$\bar{\psi}\psi = \psi^{\dagger}\gamma_4\psi$$