2022 年秋季微积分 I 课堂小测

2022 年 12 月 30 日

一、计算

1.(15 分) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n+1)^3}{n^4}$.

2.(15 分) $\displaystyle\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}dx$.

3.(10 分) 曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 与直线 $y=x$ 所围成的平面图形的面积.

二、(15 分) 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可微, 且 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\frac{5}{2}$, $\displaystyle\int_0^1 xf(x)dx=\frac{3}{2}$, 求

$$\int_0^1 x(1-x)(3-f'(x))dx.$$

三、(15 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内二阶可导, 且 $f(a)=f(b)=0$, 证明: 对任意 $x\in(a,b)$, 都存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)(x-a)(x-b).$$

四、(15 分) 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x+x^2+x^3}$, 求 $f^{2023}(0)$.

五、(15 分) 讨论 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{e^x-1}, & x\neq 0\\ \frac{1}{2}, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性和可微性.