

2022 年秋季微积分 I 课堂小测

2022 年 12 月 16 日

一、计算

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[e^2 - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{2n} \right].$

2. $\int \sqrt{\frac{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})}{1 + x^2}} dx.$

二、求极限 $\lim_{t \rightarrow x} \left(\frac{\sin t}{\sin x} \right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x}}$, 记此极限为 $f(x)$, 求函数 $f(x)$ 的间断点并判断其类型.

三、设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上二次可微, $|f(x)| \leq 1$, $|f''(x)| \leq 1$, $\forall x \in [0, 2]$. 证明:
 $\forall x \in [0, 2]$, 有 $|f'(x)| \leq 2$.

四、设 $f(x) = x^2 \ln(1 + x)$, 求 $f^{(n)}(0)$ ($n \geq 3$).

五、设 $a, b, c \geq 0$, 证明不等式:

$$(abc)^{\frac{a+b+c}{3}} \leq a^a b^b c^c$$