Décomposition de matroïdes orientés

Présentation du sujet Décomposition de Matroïdes orientés

Yann MARIN

Encadré par Emeric GIOAN.

Université de Montpellier
Faculté des Sciences

Sommaire

Sommaire

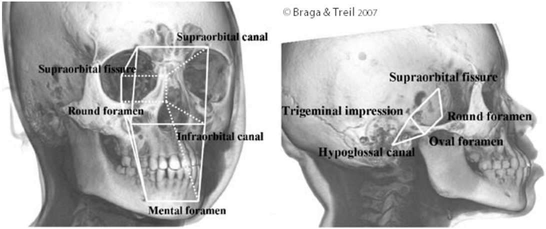
Qu'est-ce que nous appelons un modèle ?

Modèle

1. E = un ensemble de n labels de points.
2. Un modèle = configuration de n points

On regarde l'ensemble des 4-uplets de sommets de chaque modèle. On leur attribue le signe 0 si les points sont coplanaires et + ou - selon l'orientation du tétraèdre qu'ils forment sinon.

Notre exemple concret.



16 points

1. 16 points "landmarks sur 290 crânes d'Humains (182),de chimpanzé (58) et de bonobos (50).
2. soit 1820 signes de duplets à calculer.

Sommaire

Un mot sur les matroïdes

Qu'est-ce qu'un *matroïde* ?

Un matroïde est une structure combinatoire qui généralise le principe *d'indépendance linéaire* à d'autre objets comme les chemins de réseaux, les graphes, les matrices, les arrangements de vecteurs, de droites, d'hyperplan... Les matroïdes ont diverses définition équivalentes (indépendants, bases, circuits, hyperplan...) ce qui leur procure une certaine richesse d'information.

Un mot sur les matroïdes

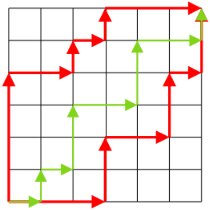
Qu'est-ce qu'un *matroïde* ?

Un matroïde est une structure combinatoire qui généralise le principe *d'indépendance linéaire* à d'autre objets comme les chemins de réseaux, les graphes, les matrices, les arrangements de vecteurs, de droites, d'hyperplan... Les matroïdes ont diverses définition équivalentes (indépendants, bases, circuits, hyperplan...) ce qui leur procure une certaine richesse d'information.

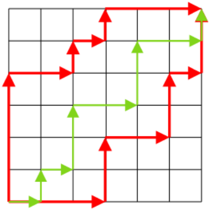
Et les matroïdes orientés ?

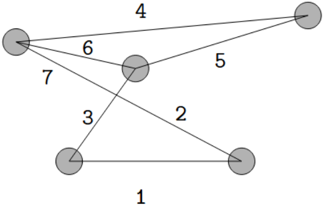
Les matroïdes orientés rajoutent une notion *d'ensemble signé*. Cela rajoute des information notamment de *relation de convexité*.

Mais... concrètement ?

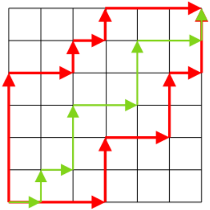


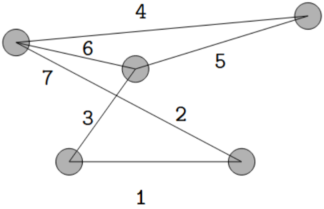
Mais... concrètement ?

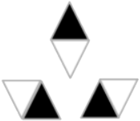




Mais... concrètement ?







Matroide orienté : une information riche.

Pourquoi les signes des 4uplets ?

En calculant les signes des 4uplets on calcul en fait le *chirotope d'un matroïde orienté*.

Chirotope d'un matroïde orienté :

Def chirotope d'un matroïde orienté :

Soit E=1 : :n et $\mathcal{B}$ un ensemble de parties de E de taille r et une fonction $\mathcal{X}$ $E^r \rightarrow (+, 0, -)$. Alors $M(E, \mathcal{B})$ est un matroïde orienté si et seulement si $\mathcal{X}$ vérifie les conditions suivantes :

1. (X1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$.
2. (X2) $\forall B$ et $B' \in \mathcal{B}$ et $e \in B - B'$, $\exists f \in B' - B$ tel que $B - e + f \in \mathcal{B}$.
3. (X3) $(b_1, b_2, ..., b_r) \in \mathcal{B}$ ssi $sign\mathcal{X}(b_1, ..., b_r) \neq 0$.
4. (X4) Soit σ une permutation. Alors $\mathcal{X}(\sigma(b_1), ..., \sigma(b_r)) = sign(\sigma)\mathcal{X}(b_1, ..., b_r)$.
5. (X5) $\forall b_1, ..., b_r, x, y \in E$, si $\mathcal{X}(x, b_2, .., b_r)\mathcal{X}(b_1, y, b_3, ..., b_r) \geq 0$ et $\mathcal{X}(y, b_2, ..., b_r)\mathcal{X}(x, b_1, b_3, ..., n_r) \geq 0$ alors

Que cache le chirotope d'un modèle ?

Par équivalence, l'ensemble $\mathcal{X}_M$ d'un modèle renferme énormément d'information par exemple :

1. Les circuits signés sont les partitions de Radon minimums.
2. Les covecteurs signés donnent les relations de convexités de M.
3. Des notions de visibilités ("visibilité à travers un triangle")
4. Et bien d'autres informations... (polynome de Tutte...)

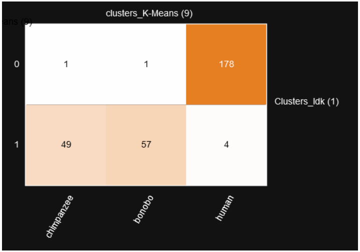
Le but est aussi de trouver d'autres informations cachés !

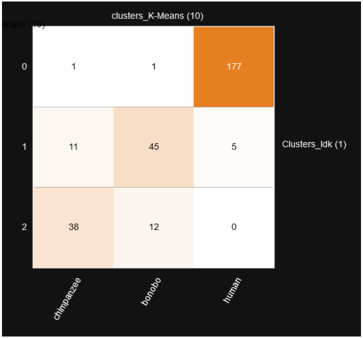
Que cache le chirotope d'un modèle ?

Par exemple, à partir de $\mathcal{X}$ et de $\underline{\mathcal{C}}$ l'ensemble de circuits non signés on obtient les circuits signés comme ceci :

$C(x_i) = (-1)^i \mathcal{X}(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{r+1})$ pour tout $x_i \in C$ pour tout $C \in \mathcal{C}$ avec $C \subseteq x_1, ..., x_{r+1}$ où $x_1, ..., x_r$ est une base non signé.

Le chirotope dans notre exemple concret :





Sommaire

Et nous, que faisons nous des signes et des modèles ?

Calculer l'ensemble des $\binom{n}{4}$, c'est trop.

Base constante

On dira qu'une base (4uplets) est constante si elle est de même signe dans tous les modèles. Dans l'exemple, on a 1241 bases constantes.

Sous-modèle constant

On appel sous-modèle constant un ensemble $P \subseteq E$ tel que toute base entièrement contenu dans P soit une base constante.

Le but est alors de décomposer E en un ensemble de sous-modèle constant et de mesurer des interactions sur ces différentes parties.

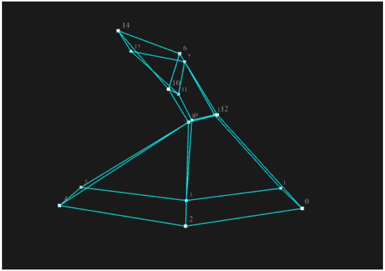
Usage des sous-modèles constants :

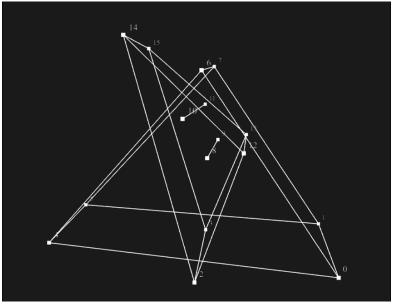
SMC et bounding box

On peut remarque que tout bounding box est un sous-modèle constant, l'inverse n'est pas vrai, les sous-modèles constants ont une certaine liberté d'elasticité.

On pourrait tout simplement importé des sous-modèle et les considéré comme des SMC. Tout ce qui vient après est donc indépendant de cette première partie.

Des "SMC" dans notre exemple :





Sommaire

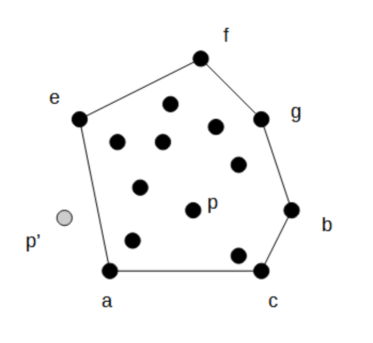
Retirons les SMC, que nous reste-il ?

Les bases non constantes renferme toute l'information sur l'interaction entre les deux tétraèdre, on ne peut donc pas négliger ces informations !
En fait, les clusters précédent étaient réalisé non pas avec les 1820 bases mais seulement avec les 579 bases non constantes !
Ce qu'il reste à faire, c'est **comprendre** quelles informations sont données, les **extraire** ou les réduire ainsi que trouver des façons de les **déduire**. En plus de cela, il faut **identifier** les informations que ne donnent pas le chirotope et proposer des alternatives pour obtenir ces informations.

Comprendre :

Par exemple, le signe de ces bases permettent de determiner la position d'un point par rapport à un SMC :

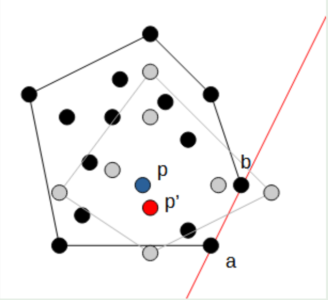
Position d'un point



Extraire :

Il est très probable que l'ensemble des bases non constante ne soit pas nécessaire à calculer. Il faut dont identifier les sous-ensemble qui sont utile et en quoi.

Intersection de point de SMC



Déduire :

De même, il est fortement probable que l'on puisse déduire le signe de certaines bases à partir d'autre bases.
Notamment grâce aux relations dites de Grassman-Plücker.

Tétraèdre de type 1 et de type 2 :

En 3 dimension, entre deux SMC il y a deux type de tétraèdre :

1. (type 1) ceux qui ont 1 point dans un SMC et 3 dans l'autre.
2. (type 2) ceux qui ont 2 points dans chaque SMC

Déduire :

équivalence type 1 type 2

(On pense que) on peut démontrer que les tétraèdres de type 1 et de type 2 sont équivalent.

En particulier, on obtient les mêmes clusters que précédemment avec uniquement les bases de type 1 ou celle de type 2 ! On passe alors a 271 bases.

Déduire : "preuve"

Soient M_1, M_2 deux SMC de E et soient a_1, b_1, c_1, d_1 des points de M_1 et a_2, b_2, c_2, d_2 ds points de M_2.
Alors on a :

$$\text{Si } sign(a_1, b_2, c_2, d_2)sign(a_2, b_1, c_2, d_2) \geq 0 \text{ et } \\ sign(b_1, b_2, c_2, d_2)sign(a_1, a_2, c_2, d_2) \geq 0 \text{ alors on a } \\ sign(a_2, b_2, c_2, d_2)sign(a_1, b_1, c_2, d_2) \geq 0.$$

Comme $sign(a_2, b_2, c_2, d_2)$ est constant, on obtient $sign(a_1, b_1, c_2, d_2)$ le signe d'une base de type 2 à partir de 3 signes de bases de type 1.

Les limites du chirotopes...

On voit bien dans les cluster précédents que les informations que donnent le chirotope ne suffisent pas à différencier parfaitement chimpanzés et bonobos...Il y a donc des informations qui ne sont pas dans l'ensemble des bases non constantes.
On pourrait tenter une approche matroide/géométrie affine et par exemple calculer les volumes des enveloppes convexes des SMC, ou bien leur orientation.. des informations qui ne semblent pas être dans le chirotope....

sauf si !

Sauf si on peut encore généralisé le chirotope ! La notion de phirotope sert à cela, c'est une notion assez récente qui permet de définir des matroïdes sur des points aux coordonnées complexes. En particulier la notion de phirotope ajoute la comparaison d'angles !
La relation chirotope/phirotope est donc une piste fondamentale pour continuer ce sujet...

Sommaire

Principe

Dans le cadre de ce stage, je propose aussi que l'on pose un certain nombre de défis à résoudre à partir du chirotope sur les divers sujet d'imagerie 2D,3D, de moteur de jeu, de maillage etc...
Le but n'est pas de les résoudres mais de montrer ce que pourrait apporter ce mode de raisonnement et peut être d'en trouver des applications ou des limitations.
si vous avez des proposition yann.marin@etu.umontpellier.fr !

Un moteur de jeu entièrement a partir du chirotope ?

"gameloop"

Do while(run) :

1. Calculer L la liste des signes à calculer sur cette frame.
2. **Déduire** L' une liste augmenté de signe de base.
3. Calculer les collisions et le rendu à partir de L'.
4. **Déterminer** L la liste minimale des signes à calculer à la prochaine frame.

Pour le moment la mise à jour de la scène (force, position,vitesse, accélération...) resterait en affine mais peut être qu'avec les phirotopes on pourrait aussi faire cela avec le chirotope.
Le but est finalement de calculer toute les informations de la scène entre chaque frame et tous les test postérieurs sont donc basés sur

Recherche de motif 2D dans une image ?

Supposons que l'on recherche un motif M (ici un ensemble de point particuliers) dans une image. Par exemple supposons que M soit entièrement contenu dans un block de taille 32x32 et à n points labelisé. Supposons que l'on puisse découper une image en block de taille 32x32 et trouver dans chaque block n points qui ont une correspondance avec ceux de M (ie : les n points sont labelisé par E). Alors on pourrait calculer le chirotope de chaque block et determiner si deux blocks se ressemblent.
Cela pourrait servir pour de la recherche de motif, de la poursuite de cible, des verifications de copy-moves forgery...

Recherche de motif 2D dans une image ?

Le problème est de déterminer les points n, leurs correspondance et quel mesure de ressemblance à partir du chirotope.
Mais si on y arrivait, deux chirotopes qui seraient semblables diraient que les deux block ont BEAUCOUP d'information en commun, qui sont notamment invariable aux transformations géométrique et à certaines déformations.