# Décomposition de matroïdes orientés: CR3

MARIN Yann

9 février 2022

Cette semaine j'ai implémenté deux algorithmes assez efficaces pour calculer jusqu'à n=30 ce qui nous permet de passer aux problèmes 2 et 3 dans les prochaines semaines.
Des optimisations sont encores possibles mais on préfére d'abord avancer sur le reste.
Dans la première partie nous parlerons de ces deux algorithmes et d'une propriété qui pourrait les améliorer.
Ensuite nous allons poser plus clairement le problème 2 et ses sous-problèmes.

## Table des matières


0.1 Glossaire . . . 1

**1 Algorithmes : 2**
1.1 Algorithme 1 : . . . 2
1.2 Algorithme 2 : . . . 3
1.3 Améliorations . . . 3

**2 Problèmes sous-jacent : 4**

**3 Recouvrements / Partitions 5**


### 0.1 Glossaire

- $E = \{1 :: n\}$ ensemble de n points.
- d la dimension d'un espace affine, par défaut d=4.
- B l'ensemble des $\binom{n}{d}$ d-uplets sur E.
- $X \subseteq B$ un ensemble de d-uplets.
- $P \subseteq E$ un ensemble de points.
- $S_P \subseteq B$ l'ensemble des $\binom{|P|}{d}$ d-uplets dans P.
- $L = \{P \subseteq E | S_P \subseteq X\}$
- $\overline{X} = E - X$
- $\overline{L} = \{P \subseteq E | \exists x \in \overline{X} \text{ tq } x \in S_P\}$
- $max(L) = \{P \in L| \text{ si } P \subseteq P' \in L \text{ alors } P = P'\}$
- $X_P = X \cap S_P$
- PS : Chaque itération du mot "Fixe" est à remplacer par le mot "constant".

# 1 Algorithmes :

## 1.1 Algorithme 1 :

**Algorithm 1** TROUVER-SOUS-MODELES-FIXES

**Require:** $X, E$
**Ensure:** $L$

FIFO=[(E,X)]
**while** $|FIFO| > 0$ **do**
  **for** tout les sous ensembles $P_i$ de FIFO[0][0] qui ne sont pas déjà dans FIFO **do**
    On calcul $X_i = X \cap S_{p_i}$
    **if** $|X_i| = \binom{|P_i|}{d}$ **then**
      $L = L \cup P_i$
    **else**
      $FIFO = FIFO \cup (P_i, X_i)$
    **end if**
  **end for**
  $FIFO = FIFO - FIFO[0]$
**end while**

Où FIFO est une liste First-in First-Out.

Ce premier algorithme part de E pour trouver tous les sous-modèles constants maximaux. Il a des résultats correctes pour 16,20 et 23 points mais la mémoire utilisé explose pour 25 points.

Une explication détaillé de ce programme peut être trouvé sur git : https ://github.com/YannMarin/stage-info/tree/master (branch master).

## 1.2 Algorithme 2 :

**Algorithm 2** TROUVER-SOUS-MODELES-CONSTANTS

**Require:** $X, E$

**Ensure:** $L$

FIFO=[(x,X-x) pour tout $x \in X$]
**while** $|FIFO| > 0$ **do**
  P = FIFO[0][0]
  X = FIFO[0][1]
  p=P[-1] (le dernier élément de P).
  bool-est-max = true
  **for** i de p+1 à n **do**
    compteur = 0
    **for** $x \in X$ **do**
      **if** $x \in S_P$ **then**
        compteur +=1
        X=X-x
      **end if**
    **end for**
    **if** $\binom{|P|}{d} + compteur = \binom{|P|+1}{d}$ **then**
      bool-est-max = false
      $FIFO = FIFO \cup (P \cup p, X)$
    **end if**
  **end for**
  **if** bool-est-max = true **then**
    $L = L \cup P$
  **end if**
  FIFO = FIFO-FIFO[0]
**end while**

Cet algorithme trouve tous les sous-modèles fixes à partir des d-uplets fixes. Il a des résultats correctes pour 16,20,23,25 points et prends quelques heures pour 30 points.
Sa feuille de route est aussi sur git.

## 1.3 Améliorations

Plusieurs amélioration sont possibles, par exemple tout simplement optimiser les programmes.
On pourrait aussi implémenter la possibilité de donner des tailles minimales et maximales aux sous-modèles fixes que l'on cherche.
Au lieu de commencer par E ou par les $\binom{n}{4}$ d-uplets fixes, ces programmes pourraient commencer par les $\binom{n}{k}$ sous ensembles de E de taille k pour un k quelconque.
On pourrait alterner ces deux versions avec deux autres versions qui n'utilisent pas de mémoire mais qui sont beaucoup plus lente pour les calculs.

**Proposition 1.1** *Pour $n > 5$ et $|X| = \frac{\binom{n}{4}}{2}$, $\frac{n}{2} + 1 > |P|$ pour tout $P \in L$.*

*Démonstration :*
$\binom{\frac{n}{2}+1}{4} > \frac{\binom{n}{4}}{2}$
$\Rightarrow (\frac{n}{2}+1)(\frac{n}{2})(\frac{n}{2}-2)(\frac{n}{2}-3)/4! > \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2*4!}$
$\Rightarrow (\frac{n+1}{2})(\frac{n}{2})(\frac{n-2}{2})(\frac{n-4}{2}) > \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2}$
$\Rightarrow (n+2)(n-4) > (n-1)(n-3) \Rightarrow n^2-2n-8 > n^2-4n+3 \Rightarrow n > 5.5$

## 2 Problèmes sous-jacent :

**Problème 1 (Sous-modèles constants.)** *Soit $\mathcal{M}$ un ensemble de sous-modèle sur E=1 : :n, et $X \subseteq B$ de signes fixes sur $\mathcal{M}$. On cherche $max(L) = \{P \in L|$ si $P \subseteq P' \in L$ alors $P = P'\}$, en d'autre termes les sous-modèles constants maximums de E.*

**Définition 2.1 (Sous-modèle constant symétrique.)** *Soit $\mathcal{M}$ un ensemble de sous-modèle sur E=1 : :n tel que $E = G \sqcup C \sqcup D$ (Gauche, Centre, Droite) tel que si $p \in G$ alors il existe $p' \in D$ tel que p' soit le symétrique de p "par rapport" à C. Alors $P \in L$ est un sous-modèle constant symétrique si et seulement si pour tout $p \in P$ tel que $p \in G \cup D$ alors $p' \in P$. On notera $L_{sym}$ l'ensemble des sous-modèles constants symétriques.*
*-Un sous-modèle constant symétrique P est dit constant symétrique-maximum ssi P est un sous-modèle constant maximum et qu'il est symétrique. Ces sous-modèles correspondent à $max(L) \cap L_{sym.}$ qu'on notera $max_{sym.}(L)$.*
*-Un sous-modèle constant symétrique P est dit constant maximum-symétrique ssi P est un sous-modèle constant symétrique et qu'il est maximum pour cette propriété. Ces sous-modèles correspondent à $max(L_{sym})$.*

**Remarque 2.1** *$max_{sym.}(L) \neq max(L_{sym})$. D'un point de vu pratique, nous serons plus intéressé par $max(L_{sym})$, néanmoins d'un point de vu algorithmique $max_{sym.}(L)$ est facilement déductible de L.*

**Définition 2.2 (Sous-modèles constants symétriques)** *Soit $\mathcal{M}$ un ensemble de sous-modèle sur E=1 : :n tel que $E = G \sqcup C \sqcup D$ (Gauche, Centre, Droite) tel que si $p \in G$ alors il existe $p' \in D$ tel que p' soit le symétrique de p "par rapport" à C. P et $P' \in L$ sont deux sous modèles symétrique par rapport à C si et seulement si pour tout $p \in P$ on a $p' \in P'$. On notera $L^2_{sym.}$ l'ensemble des paires de sous-modèles constants de L qui sont symétriques.*
*-$(P, P') \in L^2$ sont dits constants symétrique-maximum ssi P et P' sont des sous-modèles constants maximaux et qu'ils sont symétrique. On notera l'ensemble de ces sous-modèles par $max_{sym.}(L^2) = max(L)^2 \cap L^2_{sym.}$.*
*-$(P, P') \in L^2$ sont dits constants mamimum-symétrique ssi P et P' sont des sous-modèles constants symétriques et qu'ils sont maximaux pour cette propriété. On notera $max(L^2_{sym.}$ ces ensembles.*

**Remarque 2.2** *$max_{sym.}(L^2) \neq max(L^2_{sym.})$. Encore une fois, d'un point de vu pratique, nous serons plus intéressé par $max(L^2_{sym.}$ mais d'un point de vu algorithmique $max_{sym.}(L^2)$ est plus facilement déductible de L.*

**Remarque 2.3** *Si $P \in L_{sym}$ alors $(P, P) \in L^2_{sym}$.*

**Remarque 2.4** *Chaque bipartition $P_1 \sqcup P_2$ de $P \cap G \sqcup C$ où $P \in L_{sym}$ donne un couple de $L^2_{sym}$. Par contre, tout $P_1 \sqcup P_2$ n'est pas forcément dans $L_{sym}$.*

**Définition 2.3 (Symétrique d'un d-uplet)** *Soit x=$(P_1, P_2, ...P_d)$ un d-uplet de $E = G \sqcup C \sqcup D$, alors x'=$(P'_1, P'_2, ..., P'_d)$ est le symétrique de x dans E. En général, on repassera x' dans l'ordre lexicographique.*

**Définition 2.4 (Restriction symétrique d'un ensemble de d-uplet.)** *Soit X un ensemble de d-uplet de* $E = G \sqcup C \sqcup D$*. La restriction symétrique de X est l'ensemble* $X_{sym}=\{x \in X | x' \in X\}$*.*

**Proposition 2.1** *Soit X un ensemble de d-uplet constant sur* $E = G \sqcup C \sqcup D$ *et* $P \subseteq E$*. Alors P est un sous-modèle constant symétrique ssi pour tout d-uplet x de P, x et x' sont dans* $X_{sym}$*.*

**Remarque 2.5** *Pour trouver* $max(L^2_{sym.})$ *il suffit alors de chercher les sous-modèles constants maximum sur E avec* $X_{sym}$*.*
*En d'autre termes,* $max_{sym}(L^2) = max(L^2_{sym})$ *ssi* $X = X_{sym}$*.*

**Définition 2.5 (Sous-modèles constants symétriques croisés)** $(P, P') \in L^2_{sym}$ *tel que* $P \neq P'$ *seront dits croisés si* $P \cap G \neq \emptyset$ *et* $P \cap D \neq \emptyset$*.*

**Définition 2.6 (Sous-modèles constants symétriques séparés)** $(P, P') \in L^2_{sym}$ *seront dits séparés si* $P \subseteq G \sqcup C$ *et* $P \subseteq C \sqcup D$*.*

**Remarque 2.6** *Deux sous-modèles constants symétriques croisés donnent toujours deux sous-modèles constants symétriques séparés mais l'inverse n'est pas vrai.*

**Remarque 2.7** *La réunion de l'ensemble de sous-modèle constant symétrique, des sous-modèles constants symétriques croisés et des sous-modèles constants symétriques séparés donne l'ensembles des sous-modèles constants symétrique.*

**Remarque 2.8** *Soit* $X(GC)$ *l'ensemble des d-uplets fixes de X contenus dans GC, alors les sous-modèles fixes constants maximum de* $X_{sym}(GC)$ *donnent les sous-modèles constants symétriques maximum qui ne sont pas croisés.*

**Remarque 2.9** *Si* $(P, P')$ *est un sous-modèle constant symétrique croisé et que* $((P \cap GC) \cup (P' \cap GC), (P \cap CD) \cup (P' \cap CD)$ *est un sous-modèle constant symétrique séparé, alors* $P \cup P'$ *est un sous-modèle constant symétrique si et seulement si* $(P \cap GC) \cup (P' \cap CD) \in L_{sym}$ *et* $(P \cap CD) \cup (P' \cap GC) \in L_{sym}$*.*

## 3 Recouvrements / Partitions

**Problème 2 (Recouvrement cadre général.)** *Soit* $E = \{1 :: n\}$ *et L un ensemble de sous-parties de E. On cherche* $\mathcal{R}$ *l'ensemble des recouvrements de E minimaux par des ensembles de L, c'est à dire les ensembles ce* $P_i \in L$ *tel que* $\bigcup P_i = E$ *et minimaux pour cette propriété.*

**Problème 3 (Partition cadre général)** *Soit* $E = \{1 :: n\}$ *et L un ensemble de sous-parties de E. On cherche* $\mathcal{P}$ *l'ensemble des partitions de E minimum par des ensembles de L, c'est à dire les ensembles de* $P_i \in L$ *tel que* $\bigsqcup P_i = E$ *et minimaux pour cette propriété.*

**Problème 4 (Recouvrements par sous-modèles constants maximums.)** *Soit* $E = \{1 :: n\}$ *et max(L) l'ensemble des sous-modèles constants maximaux de E, on recherche l'ensemble des recouvrements/partitions de E minimaux par des ensembles de max(L).*

**Sous-problème 4.1 (Recouvrements par sous-modèles constants symétriques faibles)** *On recherche les recouvrements/partitions de E par des éléments de* $max(L_{sym.faible})$*.*

**Sous-problème 4.2 (Recouvrements par sous-modèles constants symétriques forts)** *On recherche les recouvrements/partitions de E par des éléments de* $max(L_{sym.forte})$*.*