

Décomposition de matroïdes orientés:

CR4 Sous-modeles, Sous-modeles symetriques et sous-modeles constants: definitions

MARIN Yann

15 février 2022

Cette feuille sert à répertorier les définitions de différents types de sous-modèle. Elle donne aussi leur nombre dans l'exemple sur 16 points et les noms des fichiers correspondants.

Table des matières

0.1	Glossaire	1
1	Sous-modèles	1
2	Recouvrement	3
3	Une bipartition intéressante ?	4
4	Amélioration des programmes	5

0.1 Glossaire

- $E = \{1 :: n\}$ ensemble de n points.
- d la dimension d'un espace affine, par défaut $d=4$.
- B l'ensemble des $\binom{n}{d}$ d -uplets sur E .
- $X \subseteq B$ un ensemble de d -uplets.
- $P \subseteq E$ un ensemble de points.
- $S_P \subseteq B$ l'ensemble des $\binom{|P|}{d}$ d -uplets dans P .
- $L = \{P \subseteq E | S_P \subseteq X\}$
- $\overline{X} = E - X$
- $\overline{L} = \{P \subseteq E | \exists x \in \overline{X} \text{ tq } x \in S_P\}$
- $\max(L) = \{P \in L | \text{ si } P \subseteq P' \in L \text{ alors } P = P'\}$
- $X_P = X \cap S_P$
- PS : Chaque itération du mot "Fixe" est à remplacer par le mot "constant".

1 Sous-modèles

Définition 1.1 (Sous-modèle) *Un sous-modèle est un ensemble $P \subseteq E$.*

On abrège sous-modèle en SM.

Pour $n=16$ il y a 2^{16} sous-modèles possibles. En général il y en a 2^n

Définition 1.2 (sous-moèle constant) *Etant donné X un ensemble de d -uplets constants un sous modèle $P \subseteq E$ est dit constant ssi tout 4-uplet de points de P est dans X .
On abrège Sous-modèle constant en SMC.*

Définition 1.3 (SMC maximaux) *Les SMC maximaux sont les sous-modeles constants maximaux pour l'inclusion.
Dans notre cas avec $n=16$, il y en a 768.
Le nom du fichier est 16PSMC.txt*

Définition 1.4 (Sous-modèle symétrique intrinsèque.) *Etant donné $E=GCD$ une partition de E telle que G et D sont en bijection, alors un SM $P \subseteq E$ est dit symétrique intrinsèque ssi pour tout $p \in P$ on a $p' \in P$ où p' est le point "symétrique" de p par rapport à C .*

Définition 1.5 (Paire de sous-modèle symétrique) *P et P' dans E sont dit symétriques ssi pour tout $p \in P$ on a $p' \in P'$.*

Remarque 1.1 *Un SM symétrique intrinsèque P peut être vu comme une paire de sous-modèle symétrique (P,P) .*

Définition 1.6 (Paire de sous-modèle symétrique séparés) *Une paire de SM symétrique (P,P') est dites séparée si $P \subseteq GC$ et $P' \subseteq CD$ ou vice-versa.*

Définition 1.7 (Paire de sous-modèle symétrique croisés) *Une paire de SM symétrique (P,P') est dite croisée si elle n'est pas séparée.*

Définition 1.8 (Paire de sous-modèle constant symétrique) *Une paire de sous-modèle constant qui sont symétrique sont dits Paire de SM constants symétriques.*

Remarque 1.2 *Les paires de sous-modèles constantes symétriques sont aussi des paires de sous-modèles symétriques constantes.*

Définition 1.9 (Paire de sous-modèle constants maximum symétrique) *Une paire (P,P') de SMC est dites maximum symétrique si P et P' sont maximum et que (P,P') est une paire de SMC symétrique quelconque.*

Dans notre exemple, 620 sous-modèles maximum sont dans une paire symétrique, donc on a 310 paires de SM.

Ces 310 paires sont toutes des symétriques croisés.

Elles sont dans le fichier 16SMC_Cr.txt

Définition 1.10 (Paire de sous-modèle constants symétrique maximum) *Une paire (P,P') de SMC symétrique est dite symétrique maximum si (P,P') est symétrique et que P et P' sont maximaux pour cette propriété.*

Dans notre cas on a 716 SMC qui sont dans des paires symétriques maximum, soit 358 paires. Toutes ces paires sont des symétriques croisées.

Ces 716 SMC sont dans le fichier 16PSMC.sym_max.txt

Remarque 1.3 *Les paires de SMC maximum symétrique ne sont pas les mêmes que les paires de SMC symétrique maximum.*

Définition 1.11 (Sous-modèle constant maximum non symétrique) Les sous-modèle constant maximum non symétrique sont les ensembles P qui sont des SMC tels que P' est soit un SM non constant soit un SMC non maximum.

Pour le moment on ne fait aucune distinction entre ces deux cas.

On en a 148 qui sont dans le fichier 16PSMC_nonSym.txt

Remarque 1.4 Soit P un sous-modèle constant maximum non symétrique. Alors soit P' n'est pas constant soit P est contenu dans un ensemble P_2 tel que P_2 n'est pas constant et P'_2 est un sous-modèle constant maximum son symétrique.

Définition 1.12 (demi-sous-modèle) Soit $E=GCD$, P est un demi-sous-modèle si $P \subseteq GC$ ou $P \subseteq CD$.

Définition 1.13 (Projection d'une paire de sous-modèle) Soit $P \subseteq E = GCD$, alors la projection sur GC de (P, P') est l'ensemble $P_{proj} = \{p \in P \cup P' | p \in GC\}$.

La projection d'une paire de sous-modèles est un demi-sous-modèle.

A partir des paires de SMC maximum symétriques on créer 106 demi-sous-modèles dont 32 sont maximum et sont dans le fichier MaxSymProjG.txt

A partir des paires de SMC symétriques maximum on créer 122 demi-sous-modèles dont 33 sont maximum et sont dans le fichier SymMaxProjG.txt

A partir des paires de SMC maximum non symétrique, on créer 79 demi-sous-modèles dont 23 sont maximum et 26 sont minimaux, ces derniers sont dans le fichier 16PSMC_maxnonsym_minimaux.txt

Remarque 1.5 (composition de demi-sous-modèles) Si P est un demi-sous-modèle, alors $P \cup P'$ est un sous-modèle symétrique intrinsèque. On dira alors que c'est la composition de (P, P')

2 Recouvrement

Définition 2.1 (Recouvrement par SMC maximaux) Soit $E=1 : :n$ et une liste de SMC maximaux. On dit qu'un ensemble $P_1, P_2, ..P_i$ recouvre E en i parties ssi $E \subseteq P_1 \cup P_2 \cup ... \cup P_i$. Dans notre cas il y a 40 3-recouvrements dont 34 sont des 3-partitions. Ces recouvrements sont dans le fichier SMCMaxRec.txt

Définition 2.2 (Recouvrement par paire de SMC maximum symétrique.) Soit $E=1 : :n$ et une liste de paire de SMC maximum symétrique. On dit qu'un ensemble $(P_1, P'_1), (P_2, P'_2), ..., (P_i, P'_i)$ recouvre E en i paires ssi $E \subseteq P_1 \cup P'_1 \cup P_2 \cup P'_2 \cup ... \cup P_i \cup P'_i$. Pas encore calculé ! (manque de sens d'après moi, cf recouvrement par demi-modèle constant maximum)

Définition 2.3 (Recouvrement par paire de SMC symétrique maximum) Soit $E=1 : :n$ et une liste de paire de SMC symétrique maximum. On dit qu'un ensemble $(P_1, P'_1), (P_2, P'_2), ..., (P_i, P'_i)$ recouvre E en i paires ssi $E \subseteq P_1 \cup P'_1 \cup P_2 \cup P'_2 \cup ... \cup P_i \cup P'_i$. Pas encore calculé ! (manque de sens d'après moi, cf recouvrement par demi-modèle constant maximum)

Définition 2.4 (Recouvrement par demi-sous-modèle constant maximum) Soit $E=GCD$, et une liste de demi-sous-modèle constant maximaux tous sur GC ou tous sur CD . Alors on dit qu'un ensemble $P_1, P_2, ..P_i$ recouvre GC (respectivement CD) en i parties ssi $GC = P_1 \cup P_2 \cup ... \cup P_i$.

Remarque 2.1 *Tout recouvrement par paire de SMC symétrique maximum (ou par paire de SMC maximum symétrique) donne un recouvrement par demi-sous-modèle constant. Pour calculer les recouvrements par SMC maximum symétrique on calculera donc les recouvrements par projections de paire de SMC maximum symétrique.*

Définition 2.5 (Recouvrement par projection maximum de paire de SMC maximum symétrique)

Soit $E=GCD$ et une liste de paire de SMC maximum symétrique, soit la liste des projections maximum sur GC de ces paires. Alors un recouvrement par projection maximum de paire de SMC maximum symétrique est un recouvrement de GC par demi-sous-modèle de cette dernière liste.

Dans notre cas, on trouve 77 bipartitions pour les maximum symétriques et 88 pour les symétriques maximum.

Définition 2.6 (Recouvrement par comp. de proj. max. de paire de SMC maximum sym.)

Recouvrement par composition de projection maximum de paire de SMC maximum symétrique : Soit $E=GCD$ et une liste de paire de SMC maximum symétrique. Soit la liste des projections maximum sur GC de ces paires, puis soit la liste des compositions de ces de-sous-modèles. Alors un recouvrement par comp. de proj. max. de paire de SMC maximum sym. est un recouvrement de E par des éléments de cette dernière liste.

Dans notre cas, cette liste comporte 32 éléments qui sont dans le fichier ProjGtoE.txt et on trouve enfin 77 bipartitions (les composition des recouvrement par projection maximum de paire de SMC maximum symétrique).

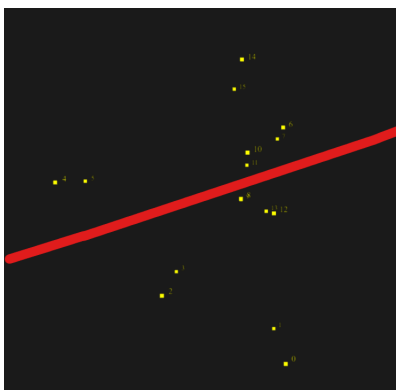
3 Une bipartition intéressante ?

Une succession d'étapes a mené à une 2-partition qui semble intéressante :

1. Calcul des SMC maximaux (768)
2. On ne regarde que les SMC maximaux non symétriques (148)
3. On projette sur GC les SMC maximaux non symétriques (79), on ne garde que les minimaux (26).
4. On cherche les bipartitions de GC avec ces 26 SMC.

On trouve un unique 2-recouvrement de GC qui est d'ailleurs une 2-partition. Cette bipartition est $(0,2,8,12)(4,6,10,14)$. En considérant les symétriques de ces parties, on trouve une bipartition de E : $P_1 = (0, 1, 2, 3, 8, 9, 12, 13)$ et $P_2 = (4, 5, 6, 7, 10, 11, 14, 15)$.

Dans chacune de ces parties, on cherche alors un SMC non symétrique entièrement contenu



dedans. Pour P_1 on trouve $(0,3,7,9,12,13)$, son symétrique est constant $(1,2,8,12,13)$ mais pas

maximum, en effet par exemple (1,2,8,11,12,13) est un SMC maximum, son symétrique est (0,3,9,10,12,13) qui n'est pas constant. Mais (1,2,8,11,12,13) n'est pas entièrement contenu dans P_1 . Dans P_2 on trouve la base (5,7,11,15) dont le symétrique (4,6,10,14) n'est pas constant.

A première vue cette bipartition paraît intéressante puisqu'elle est unique et qu'elle sépare correctement les 16 points. Mais il est difficile de savoir si ces parties ont réellement une propriété ou si c'est simplement un hasard de trouver cette bipartition.

4 Amélioration des programmes

Pour améliorer les programmes il faudrait séparer les différentes opérations en modules :
Etant donné une liste de SMC (ou chaque SMC apparaît une seule fois) il faudrait pouvoir :

- Trouver les maximums (suffixe *_max* dans le nom du fichier.)
- Trouver les minimums (suffixe *_min*)
- Trouver les projections sur GC (suffixe *_projG*)
- Trouver/créer les paires de symétriques
- Trouver les recouvrements/partitions (suffixe *_rec/part*)

A partir d'une liste de SMC symétriques :

- Trouver les compositions des paires de symétriques (suffixe *_comp*)

A partir d'une liste de SM non constant :

- Trouver les d-uplets constants et non constants de chaque SM
- Trouver le nombre de d-uplets symétrique intrinsèques.