

Décomposition de matroïdes orientés:

CR5 Partie mathématique.

MARIN Yann

2 mars 2022

Ce CR5 traite la partie plus mathématiques du sujet. Une introduction aux matroïdes orientés est donc nécessaire et fera l'objet de la première partie, ensuite nous expliciterons l'utilisation de cette théorie mathématique dans notre cadre concret de représentation de modèles 3D et de mesure d'interaction.

Notre but est à la fois de trouver une application pratique (algorithmique) mais aussi théorique et de généraliser nos notions à des matroïdes orientés abstraits.

Table des matières

0.1	Glossaire	1
1	Introduction	2
2	Critères d'interactions	3
2.1	Taux d'interactions	3
2.2	Intersection	3
2.3	Intrication	4
2.4	Cocircuit d'un matroïde orienté	4
3	Partie Algorithmique	5
3.1	Vision "moteur d'application"	6
3.1.1	Notion de position	6
3.1.2	Notion de rotation	7
4	En dimension 3 (d=4)	7
4.1	Rotation	7

0.1 Glossaire

- $E = \{1 :: n\}$ ensemble de n points.
- d la dimension d'un espace affine, par défaut $d=4$.
- B l'ensemble des $\binom{n}{d}$ d -uplets sur E .
- $X \subseteq B$ un ensemble de d -uplets.
- $P \subseteq E$ un ensemble de points.
- $S_P \subseteq B$ l'ensemble des $\binom{|P|}{d}$ d -uplets dans P .
- $L = \{P \subseteq E | S_P \subseteq X\}$
- $\overline{X} = E - X$
- $\overline{L} = \{P \subseteq E | \exists x \in \overline{X} \text{ tq } x \in S_P\}$

- $\max(L) = \{P \in L \mid \text{si } P \subseteq P' \in L \text{ alors } P = P'\}$
- $X_P = X \cap S_P$
- \mathcal{B} l'ensemble des bases d'un matroïdes.
- \mathcal{X} un chirotope.

1 Introduction

Les matroïdes (orientés et non orientés) sont des objets mathématiques généralisant la notion de dépendance d'algèbre linéaire des matrices (d'où le nom matroïde). Ils peuvent être définis par différents axiomes (indépendants, circuit, bases ...) et ont des applications dans divers domaines comme les graphes et la programmation linéaire. Les matroïdes font ressortir un lien profond entre géométrie et combinatoire.

Les matroïdes orientés complètent cette notion de matroïde en apportant principalement la notion de convexité aux matroïdes et des représentations topologiques.

La théorie des matroïdes est vaste et il y a de nombreuses définitions. Dans ce CR nous prenons la partie de n'introduire que ce qui est nécessaire en parallèle avec les applications que nous trouvons.

Définition 1.1 (Bases d'un matroïde) Soit $E = \{1 : n\}$ et $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(E)$ tel que :

(B1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$

(B2) Soient B_1 et $B_2 \in \mathcal{B}$ tel que $B_1 \neq B_2$ et $e \in B_1 - B_2$ alors $\exists f \in B_2 - B_1$ tel que $B_1 - e + f \in \mathcal{B}$

Alors \mathcal{B} est l'ensemble des bases d'un matroïde sur E que l'on note $M(E, \mathcal{B})$.

Remarque 1.1 La notion de base d'un matroïde correspond dans les graphes à celle d'arbre couvrant, dans une famille de vecteur aux ensembles générateurs indépendants (c'est à dire aux bases de l'espace linéaire), dans un graphe biparti aux couplages maximaux, dans une grille "lattice path" aux chemins compris entre deux autres chemins... De plus, les différentes façons de choisir $\binom{n}{k}$ forment aussi un matroïde appelé matroïde uniforme.

Exemple 1.1 Soit E un ensemble de points dans un espace en trois dimension et \mathcal{B} l'ensemble des 4-uplets de E . Alors \mathcal{B} est l'ensemble des bases d'un matroïde. En effet il s'agit du matroïde uniforme $U_{4,n}$.

Définition 1.2 (Orientations de base de matroïdes et chirotope) Soit $E = \{1 : n\}$ et \mathcal{B} un ensemble de parties de E de taille r et une fonction $\mathcal{X} : \mathcal{P}(E) \rightarrow \{+, 0, -\}$. Alors $M(E, \mathcal{B})$ est un matroïde orienté si et seulement si \mathcal{X} vérifie les conditions suivantes :

(X1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

(X2) $\forall B$ et $B' \in \mathcal{B}$ et $e \in B - B'$, $\exists f \in B' - B$ tel que $B - e + f \in \mathcal{B}$.

(X3) $(b_1, b_2, \dots, b_r) \in \mathcal{B}$ ssi $\text{sign} \mathcal{X}(b_1, \dots, b_r) \neq 0$.

(X4) Soit σ une permutation. Alors $\mathcal{X}(\sigma(b_1), \dots, \sigma(b_r)) = \text{sign}(\sigma) \mathcal{X}(b_1, \dots, b_r)$.

(X5) $\forall b_1, \dots, b_r, x, y \in E$, si $\mathcal{X}(x, b_2, \dots, b_r) \mathcal{X}(b_1, y, b_3, \dots, b_r) \geq 0$ et $\mathcal{X}(y, b_2, \dots, b_r) \mathcal{X}(x, b_1, b_3, \dots, b_r) \geq 0$ alors $\mathcal{X}(b_1, b_2, \dots, b_r) \mathcal{X}(x, y, b_3, \dots, b_r) \geq 0$.

\mathcal{X} est appelé chirotope et $M(E, \mathcal{X})$ est un matroïde orienté.

Proposition 1.1 Soit E un ensemble de n points dans un espace (affine) de dimension d , et soit \mathcal{B} l'ensemble des d -uplets de E qui ne sont pas entièrement contenus dans un hyperplan. Alors $\mathcal{X} : B \in \mathcal{B} \rightarrow \text{sign}(\det(B))$ donne un matroïde orienté $M(E, \mathcal{X})$.

Nous nous intéresserons particulièrement au cas $d=4$ (espace à 3 dimensions) et à $d=3$ (espace à 2 dimensions).

2 Critères d'interactions

2.1 Taux d'interactions

Définition 2.1 *Chirotopes d'un ensemble de modèles* Soit \mathcal{M} un ensemble de modèles dont les points sont labélisés par $E=1 : :n$. Alors $\mathcal{X}_{\mathcal{M}}$ est l'ensemble des bases constantes (ie : de même signe) sur l'ensemble des modèles.

Remarque 2.1 $\mathcal{X}_{\mathcal{M}}$ est l'information principale que nous possédons dans ce stage, pour le moment on est capable de le calculer sur une centaine de point. Mais cela demande beaucoup trop de ressource et l'un des buts implicites de ce stage est de réduire le nombre de 4-uplets à utiliser. D'une première part en décomposant les modèles en sous-modèles constants (cf CR 1-4) et d'une autre en identifiant les 4-uplets qui sont les plus significatifs pour mesurer les interaction entre deux sous-modèles.

Dans toute la suite, on se placera en deux dimension avec $E=1 : :n$ et une bipartition M_1, M_2 de E en deux sous modèles constants. Le nombre d'orientation de triangle à calculer passe donc à $\binom{n}{k} - \binom{n}{|M_1|} - \binom{n}{|M_2|}$. **Pour minimiser ce nombre il faut que $|M_1| \simeq |M_2|$.**

Proposition 2.1 *En deux dimensions, tous 3-uplets de E possède soit un segment de M_1 et un point de M_2 soit le contraire. Dans le premier cas le signe du triangle formé détermine alors dans quel demi-plan se situe le point de M_2 par rapport à la droite formé par le segment de M_1 .*

Remarque 2.2 *Comme l'orientation d'un triangle dépend aussi de l'orientation de l'espace, qui est arbitraire, il est plus judicieux de dire que deux triangles ont la même orientation plutôt que de dire qu'ils sont tous les deux du signe + ou du signe -. En pratique cependant, cette information supplémentaire peut être simplifier les calculs.*

Remarque 2.3 *En trois dimensions il y a deux types de tétraèdres : ceux qui ont trois sommets dans M_1 (ou M_2) et un sommets dans M_2 (ou M_1) et ceux qui ont deux sommets dans chacun des deux.*

La plupart de ce que l'on va faire en deux dimensions va marcher en trois dimension avec les tétraèdre de type 1. En revanche, l'étude des tétraèdres de type 2 devra se faire autrement. (l'étude de la rotation de M_2 par rapport à M_1 est une piste possible).

Proposition 2.2 *(à verifier) En deux dimension, tous changements de signe d'un triangle donne une information sur la position d'un SMC par rapport à l'autre. En particulier, plus il y a de changements de signe, plus il y a de changement. (Cela peut donner un critère de "narrow phase", dans un moteur physique il s'agit d'une phase pour savoir si cela vaut le coup de chercher s'il y a une intersection entre deux objets.)*

Cette proposition découle directement de la proposition précédente. Mais on peut réduire le nombre de triangle à regarder. En cherchant par exemple un critère d'intersection.

2.2 Intersection

Proposition 2.3 *(Intersection) Soit $p_1 \in M_1$. Alors un point $p_2 \in M_2$ intersecte M_1 si et seulement si l'orientation de tous les triangles formés par un segment de M_1 et p_2 est la même que celles des triangles formés par un segments de M_1 et p_1 . En particulier, il suffit de vérifier cette propriété sur les segments qui sont des arêtes du polytope convexe associé à M_1 .*

Ici le nombre d'orientations de triangle à regarder est passé à $\binom{|fr(M_1)|}{2}|M_2| + \binom{|fr(M_2)|}{2}|M_1|$ où $fr(M_i)$ désigne les sommets du polytope convexe associé à M_i . Techniquement, pour l'intersection on peut descendre à $\binom{|fr(M_1)|}{2}|fr(M_2)| + \binom{|fr(M_2)|}{2}|fr(M_1)|$ triangles.

Remarque 2.4 Une possibilité pour avoir une information sur l'intrication entre deux SMC est de compter le nombre d'intersections.

Remarque 2.5 Il existe une intersection entre M_1 et M_2 qui ne fait intervenir qu'un seul changement de signe de triangle.

2.3 Intrication

L'intrication est un critère subjectif, l'évaluer demande donc de définir une valeur d'intrication. Dans cette sous-section nous proposons différentes valeurs possibles.

Définition 2.2 Cellule d'un SMC Soit $P \in M$ où M est un SMC. Alors on appelle $conv(P)$ une cellule de M . De plus, soit $p \in P$ et $p' \in E$. Alors $p' \in conv(P)$ si et seulement si pour toute arête ab de $conv(P)$ on a $sign(abp) = sign(abp')$.

Définition 2.3 Décomposition d'un SMC en cellules imbriquées Soit P_1, P_2, \dots, P_r une décomposition de M tel que $conv(P_r) \subseteq conv(P_{r-1}) \subseteq \dots \subseteq conv(P_1)$. On appelle décomposition d'un SMC en cellules imbriquées une telle décomposition.

Définition 2.4 Décomposition en membrane Soit M un SMC. Soit $P_1 = fr(M)$ et $P_i = fr(M - P_{i-1} - \dots - P_1)$ pour tout i . Alors les P_i sont appelés les membranes de M et la décomposition de M par ses membranes est une décomposition en cellules imbriquées.

Remarque 2.6 Chaque SMC a une décomposition par membrane unique.

Proposition 2.4 Mesure forte d'intrication Soit M_1 et M_2 deux SMC et $P_1, \dots, P_r, P'_1, \dots, P'_s$ des décompositions en cellules imbriquées de M_1 et M_2 . On mesure l'intrication entre M_1 et M_2 à partir du nombre de point de M_1 dans les différentes cellules de M_2 et du nombre de point de M_2 dans M_1 tout en donnant plus de valeur aux points dans les cellules P_i avec i petit.

Proposition 2.5 Mesure faible d'intrication Soit M_1 et M_2 deux SMC et $P_1, \dots, P_r, P'_1, \dots, P'_s$ des décompositions en cellules imbriquées de M_1 et M_2 . On mesure l'intrication entre M_1 et M_2 à partir des plus petits $i+j$ tels que $conv(P_i) \cap conv(P_j) \neq \emptyset$.

En fait, l'intrication peut se voir de deux manières : l'intrication de M_1 dans M_2 ou l'intrication de M_1 et M_2 . A priori, ces deux visions ne se mesurent pas de la même façon. La mesure faible d'intrication fait intervenir $((\binom{P_1}{2} + \binom{P_2}{2} + \dots + \binom{P_r}{2})(P'_1 + P'_2 + \dots + P'_s)) + ((\binom{P'_1}{2} + \binom{P'_2}{2} + \dots + \binom{P'_s}{2})(P_1 + P_2 + \dots + P_r)$ triangles.

2.4 Cocircuit d'un matroïde orienté

Dans tous ce qui précède, on utilise le sens d'un triangle formé à partir d'un segment et d'un point qui nous donne la position d'un point dans l'un ou l'autre des demi-plan formé par la droite qui passe par le segment choisis. En termes de matroïde orienté cela rejoint la notion de cocircuit d'un matroïde orienté.

Les cocircuits sont les circuits du dual du matroïde. (Les cocircuits sont en fait les complémentaires des hyperplans du matroïde)

Définition 2.5 *Circuits (et cocircuits) signés* Soit \mathcal{C} un ensemble de partie signées de $E=1 : :n$. Alors \mathcal{C} est un ensemble des circuits des matroïde orienté si et seulement si :

(C1) $\emptyset \notin \mathcal{C}$

(C2) $\forall C \in \mathcal{C}, -C \in \mathcal{C}$

(C3) $\forall C, C' \in \mathcal{C}^2$, si $C' \subseteq C$ alors $C' = C$.

(C4) $\forall C, C' \in \mathcal{C}, C \neq C', e \in C^+ \cap C'^-$ et $f \in (C^+ - C'^-) + (C^- + C'^+)$, il existe $C'' \in \mathcal{C}$ tel que $C''^+ \subseteq (C^+ \cap C'^+) - e$, $C''^- \subseteq (C^- \cap C'^-)$ et $f \in C''$.

Sans les signes, \underline{C} est appelé le support de $C \in \mathcal{C}$. Les supports des circuits orientés définissent les circuits d'un matroïde non orienté.

Remarque 2.7 Sans les signes, dans les graphes, les circuits sont les cycles du graphe, dans les familles de vecteurs les circuits sont les dépendants minimaux etc...

Dans notre cas, nous nous intéressons aux cocircuits associés au matroïde orienté d'une configuration de points dans un espace affines. Les ensembles de points qui engendrent un hyperplan et sont maximaux pour cette propriété sont les complémentaires des cocircuits. En dimension 3, étant donné un segment ab , les points qui ne sont pas dans la droite ab forment donc un cocircuit et le signe de chacun de ses éléments dépend de quel côté de la droite ils se trouvent.

En fait, lorsque l'on parlait de prendre un point p et un segment ab dans M_1 et un point p' dans M_2 et de regarder si $\text{sign}(abp) = \text{sign}(abp')$ on regardait en fait si p et p' était du même côté par rapport à la droite engendré par ab .

Remarque 2.8 Dans le problème de trouver les SMC les plus significatifs pour choisir nos recouvrements, une possibilité est aussi de minimiser le nombre de d -uplets pour calculer les propriétés qui nous intéressent (par exemple pour l'intersection il faut minimiser le nombre de sommet de chaque polytope, pour l'intrication il faut minimiser le nombre de sommet de chaque cellule)

Proposition 2.6 Soit P un ensemble de points. Les cocircuits positifs (càd dont tous les signes sont $+$) nous donnent les facettes (arêtes ou sommet en dimension 2) du polytope convexe. En effet, soit H le complémentaire d'un tel cocircuit, alors tous les points de P sont du même côté de H . Comme H engendre un hyperplan alors H est contenu dans une face du polytope.

3 Partie Algorithmique

Un autre but de ce stage est d'implémenter ces définitions abstraites sur le logiciel OM-SMO, cela demande en plus de réfléchir à une vision algorithmique de ces définitions. Plus particulièrement, l'information principale que l'on utilise est $\mathcal{X}_{\mathcal{M}}$ càd les signes des d -uplets. En fait on cherche à utiliser le moins possible de ces d -uplets.

Cette section est donc une proposition de point de vu que l'on peut prendre dans le but de programmer les critères d'interactions entre deux SMC.

Proposition 3.1 Soient M_1 un SMC de E et $p \in E - M_1$. Soit $\text{conv}(P)$ une cellule de M_1 et soit une ordonnance e_1, e_2, \dots, e_r des arêtes de $\text{fr}(P)$. Alors il existe une suite de signe

s_1, s_2, \dots, s_r (+,-) tel que $p \in \text{conv}(P)$ si et seulement si $\text{sign}(e_1, p) = s_1, \text{sign}(e_2, p) = s_2, \dots, \text{sign}(e_r, p) = s_r$. On propose d'appeler coordonnées relatives à e_1, e_2, \dots, e_r la suite de signe s_1, s_2, \dots, s_r .

Remarque 3.1 En connaissant \mathcal{X}_M et les coordonnées relatives aux arêtes de M_1 (dans n'importe quel ordre) alors pour savoir si un point $p \in E$ est dans $\text{conv}(M_1)$ il suffit alors de regarder le signe des triangles correspondants.

Remarque 3.2 D'un point de vue abstrait on utilisait un point de référence pour avoir les signes des coordonnées relatives aux arêtes d'un SMC. D'un point de vue pratique, on peut enregistrer cette suite de signe pour chaque SMC. Tout dépend de si on calcul le signe des d-uplets en pré-traitement ou non.

Remarque 3.3 Tout ce qui précède est toujours vrai si l'on remplace "SMC" par "cellule d'un SMC". Cela vient du fait que les cellules sont aussi des SMC. Donc pour mesurer l'intrication de deux sous-modèles, on peut enregistrer les coordonnées relatives aux arêtes des cellules imbriquées.

3.1 Vision "moteur d'application"

Une façon de réfléchir est d'adopter le point de vue des moteurs d'application. Dans l'optique idéal, on souhaiterait calculer une partie de \mathcal{X}_M à chaque frame de l'application. Cette partie serait la plus petite possible. D'abord on retirerait tous les d-uplets contenus dans un SMC. Ensuite, on définirai un certain nombre d'application et un ordre d'apparition de ces applications. Par exemple, supposons que l'on ait dans notre scène deux SMC M_1 et M_2 . Pour une raison quelconque, à une certaine frame de l'application on décide qu'il faut regarder si les deux SMC s'intersectent. On va alors actualiser la liste des d-uplets à calculer. Tant qu'il n'y a pas d'intersections, et si on continue de croire qu'il peut y en avoir une alors on garde cette liste de d-uplet. S'il y a une intersection, on peut demandé de mesurer l'intrication entre les deux modèles. On pourrait alors actualiser la liste des d-uplets à calculer et rajouter ceux qui concernent l'intersection des premières membranes, puis des deuxièmes et ainsi de suite...Ainsi, toutes les informations seraient calculés à chaque frame et les différentes fonctions du moteur seraient juste de déterminer quels sont les informations dont on aura besoin à la frame suivante.

Un tel moteur pourrait être très efficace si chaque d-uplet que l'on calcule peut servir à plusieurs fonctions. Ainsi la liste des d-uplets calculé serait toujours minimale par rapport aux informations nécessaires tout en donnant énormément d'informations.

3.1.1 Notion de position

Pour nous, la notion de position a peu d'importance. Néanmoins, nous pouvons artificiellement créer une grille en rajoutant des points "fictifs", tels que l'ensemble des signes des triangles que forme un point avec toutes les droites de cette grille nous donne la position du point dans la grille. De cette manière nous pouvons toujours, théoriquement, passer des relations du matroïdes (avec les points fictifs) aux positions des points dans l'espace affine. Cette astuce donne aussi lieu à la possibilité d'utiliser des structures de données comme des grilles, des kd-tree, des octree etc...

Cette notion de "points fictifs" peut largement être utilisé et développé dans le cas pratique, par exemple on pourrait rajouter des centres aux SMC. Cela pourrait donner par exemple une piste sur les réponses physique liées aux interactions via des notions d'angles...Mais ce n'est pas le but actuel du sujet.

3.1.2 Notion de rotation

Cette notion sera développée dans la prochaine section.

4 En dimension 3 (d=4)

4.1 Rotation

Comme dit dans la section 1, une grande partie des résultats précédents en deux dimensions fonctionnent toujours en trois dimension. Il suffit dans ce cas de remplacer toutes les occurrences des mots "triangle" par "tétraèdre" et "arête" par "face". Les intersections et l'intrication entre deux SMC fonctionnent donc de la même manière. Cependant, en dimension 3 on a un deuxième type de d-uplets. Ces d-uplets sont ceux qui ont exactement deux points dans chaque SMC. On propose ici d'étudier les liens entre la rotation de M_2 par rapport à M_1 et les changements de signes de ces 4-uplets.

Proposition 4.1 *Soit $e_1 \in M_1^2$ et $e_2 \in M_2^2$. On dira que e_1 est "fixe" pour dire que l'on se place dans le référentiel de M_1 . Alors $\text{sign}(e_1, e_2)$ est le signe de la rotation de e_2 par rapport à e_1 .*

En fait, en posant $e_2 = ab$ avec $a, b \in M_2$ alors il s'agit de regarder la position de b par rapport au plan $e_1 a$. (ou la position de a par rapport au plan $e_1 b$).

Remarque 4.1 *Étant donné e_1 fixe, deux modèles M et $M' \in \mathcal{M}$ (rappel : modèles = configuration de points, SM = ensemble de points) et $\mathcal{X}_M, \mathcal{X}_{M'}$ les signes des 4-uplets dans ces modèles. On peut mesurer la rotation par rapport à l'axe engendré par e_1 de M à M' par le nombre de changements de signe des tétraèdres du type e_1, e_2 où $e_2 \in M_2^2$.*

Proposition 4.2 *(repère de rotation) Soit M_1, M_2 deux SMC et soit $R = ab, ac, ad \in M_1^4$ un tétraèdre tel que $\text{sign}(R) = +$. Alors les signes de tous $e_2 \in M_2^2$ par rapport à ab, ac et ad donne la rotation de M_2 dans le référentiel R .*

On a choisi ici de prendre R dans M_1 mais on pourrait très bien prendre R dans E . Voir rajouter le simplexe unitaire (tétraèdre de côté de taille 1 centré en 0) comme repère pour tous les SMC.