CR1 Décomposition de matroïdes orientés.

MARIN Yann

28 janvier 2022

Résumé

Au cours de cette semaine, j'ai développé ma compréhension du problème demandé. De plus je me suis intéressé à un cadre théorique potentiellement intéressant qui rejoint la fin de mon stage de math-info (Matroïde de collection). De plus, j'ai programmé une première tentative pour trouver l'ensemble des sous-modèles fixes à partir des bases fixes d'un ensemble de modèle.

Table des matières

0.1 Glossaire :

— $E = \{1 :: n\}$ ensemble de n points.
— d la dimension d'un espace affine, par défaut d=4.
— B l'ensemble des $\binom{n}{d}$ d-uplets sur E munis de signe -,0 ou +.
— M=(E,B) un modèle.
— $\mathcal{M}$ un ensemble de modèle.
— $X \subseteq B$ un ensemble de d-uplets. En général, dont les signes sont fixes sur $\mathcal{M}$.
— $P \subseteq E$ un ensemble de points.
— $S_P \subseteq B$ l'ensemble des $\binom{|P|}{d}$ d-uplets dans P.
— $L = \{P \subseteq E | S_P \subseteq B\}$
— $\overline{X} = E - X$
— $E - L = \{P \subseteq E | \exists x \in \overline{X} \text{ tq } x \in S_P\}$
— $max(L) = \{P \in L | \text{ si } P \subseteq P' \in L \text{ alors } P = P'\}$

On dira que $P \subseteq E$ est un sous-modèles fixes de E ssi $S_P \subseteq X$. C'est à dire que tous d-uplets formés par les points de P sont de signes fixes dans $\mathcal{M}$.

1 Formalisation du problème :

Soit $\mathcal{M}$ un ensemble de sous-modèle sur E=1 : :n, et $X \subseteq B$ de signes fixes sur $\mathcal{M}$. On cherche :

1. $max(L) = \{P \in L | \text{ si } P \subseteq P' \in L \text{ alors } P = P'\}$, en d'autre termes les sous-modèles fixes de E.
2. Etant donné max(L), trouver les recouvrements/partitions de E par le minimum de P de max(L). C'est à dire les recouvrements en sous-modèles maximaux avec le moins de partie possibles.

3. Etant donné une partition ou un recouvrement par sous-modèles fixes, trouver comment mesurer certaines caractéristiques entre les sous-parties.

Cette semaine nous allons surtout traiter de la question (1).

Proposition 1.1 *Soit $P \subseteq E$. Alors $S_P \subseteq B$ l'ensemble des $\binom{|P|}{d}$ d-uplets dans P, détermine P.*

Proposition 1.2 *Soit $P \subseteq E$. Pour couvrir E il faut $|P| - d + 1$ d-uplets de S_P.*

Démonstration : On procède par récurrence :
-Pour couvrir d points, il suffit de d-d+1=1 d-uplets.
-Soit p un point de P et supposons que l'on puisse couvrir P/p avec $|P| - 1 - d + 1 = |P| - d$ d-uplets, alors pour couvrir P il faut rajouter un d-uplets qui contient p. Il nous faut donc $|P| - d + 1$ $d_u$plets.

Proposition 1.3 — *(Hérédité) Soit $P' \subseteq P \in L$, alors $P' \in L$.*
— *(Intersection) Soit $(P_1, P_2) \in L^2$ alors $P_3 = P_1 \cap P_2 \in L$*

Définition 1.1 (Matroïde de collection) *Tout ce qui suit dépend de la véracité de ma démonstration dans mon stage de M1 math info, mais cette partie est indépendante du reste du travail.*
On garde ici les notation du glossaire mais cela marche dans un cadre général.

Soit C une collection d'ensemble $S \subseteq B$ tel que $B \in C$ et tout S est muni d'un poids p(S) tel que :

— *Si S_1 et $S_2 \in C$ avec $|S_1| < |S_2|$ alors $p(S_1) < p(S_2)$.*
— *Si S_1 et $S_2 \in C$ alors $S_3 = S_1 \cap S_2 \in C$*
— *Si S_1 et $S_2 \in C$ et $S_1 \cap S_2 \emptyset$ et S_3 le plus petit ensemble de C tel que $S_1 \cup S_2 \subseteq S_3$. Alors $p(S_3) <= p(S_1) + p(S_2) - p(S_1 \cap S_2)$.*

Soit $X \subseteq B$ tel que $|X| = p(B)$ tel que pour tout $S \in C$, $|S \cap X| <= p(S)$. Alors X est une base du matroïde de collection M(C,B).

Je fais la démonstration dans mon papier de stage de math-info mais rien ne dit que ma démonstration est bonne, mais ce n'est pas tellement important pour la suite.

2 Cadre théorique :

Soit M un modèle sur E=1 : :n et B=1 : :$\binom{n}{d}$ l'ensembles des indices des d-uplets de E rangés par ordre lexicographique.
Soit M(C,B) le matroïde de collection C sur l'ensemble B tel que :
-C est l'ensemble des S_P pour $P \subseteq E$.
-Pour tout $S_P \in C$, $p(S_P) = |P| - d + 1$.

Alors les bases de M(C,B) sont précisément les ensembles $X \subseteq B$ tel que $|X| = |E| - d + 1$ qui recouvrent E.
En d'autre termes, un ensemble de d-uplets couvre E ssi pour tout $P \subseteq E$, $|X \cap S_P| <= |P| - d + 1$.
A partir de maintenant, on désignera C muni du poids p comme "la table des sous-modèles" ou "la table des recouvrements" de E.

Cette table n'est pas calculable en pratique. Elle ne dépend que du nombre de points de E et non pas des d-uplets fixes mais elle donnerait des informations intéressantes sur nos modèles. Par exemple, si l'on voulait savoir si un ensemble de bases fixes couvrent le modèle il suffirait de regarder si notre ensemble contient une base du matroïde non orienté M(C,B).

D'autres propriété peuvent ressortir, par exempe les sous-modèles fixes sont les ensembles $P \subseteq E$ tel que $S_P \subseteq X$.

Cette table est théoriquement très riche mais en pratique elle demanderait de calculer tous les sous-modèles faisable pour une taille n. Pour illustrer la difficulté, sur 10 points en dimension 4 il faudrait :

1. Calculer les $\binom{10}{4} = 210$ d-uplets.
2. Calculer les $\binom{5}{4}$ d-uplets dans les différentes façons de prendre $\binom{10}{5}$ points.
3. Calculer les $\binom{6}{4} = 15$ d-uplets dans les différentes façons de prendre $\binom{10}{6}$ d-uplets.
4. Calculer les $\binom{i}{4}$ dans les différentes façons de prendre $\binom{10}{d+i-1}$ pour i de 1 à 10..

l y a probablement un moyen de rendre cela plus efficace, voir de partir de la table de n-1 sommet pour avoir celle de n sommets, mais dans tout les cas on ne peut calculer et manipuler cette table que pour de très petit n en pratique.

Néanmoins, cette table pourrait servir pour étudier des sous-modèles de très petite taille.

Par exemple on peut se poser la question suivante :

Etant donné $\mathcal{M}$ un ensemble de modèle et X un ensemble de d-uplets fixés. Peut-on partitionner E en un ensemble de sous-modèles eux mêmes partitionnables en sous-modèles fixes ?

3 Un premier algorithme pour la question (1) :

Dans le TER, l'étudiant avait choisi de partir des sous-modèles fixes de taille d pour les augmenter en ajoutant des d-uplets de X jusqu'à trouver les sous-modèles fixes de taille maximum.

On va donc faire l'inverse et partir de l'ensemble X et retirer des bases jusqu'à avoir les sous-modèles fixes maximaux.

Dans le TER, l'étudiant pour savoir si $P \subseteq E$ était fixe regardait si S_p contenait un d-uplets de $\overline{X}$. Nous n'utilisons pas ce critère mais à la place, nous regarderons le nombre $|S_P \cap X|$. Si ce nombre est inférieur à $|S_p|$, alors c'est que P n'est pas un sous-modèles fixe.

Nous allons pour cela faire l'agorithme récursif suivant :

Algorithm 1 TROUVER-SOUS-MODELES-FIXES(X,P)

Require: X, P
Ensure: L
  if $|X \cap S_P| = |S_P|$ **then**
    $L = L \cup P$
  end if

  for $X' \in X$ tel que $|X'| = |X| - 1$ **do**
    On trouve P l'ensemble des points couvert par X'.
    TROUVER-SOUS-MODELES-FIXES(X',P)
  end for

Et on iniatialise la récursion sur TROUVER$_SOUS_MODELES_FIXES(X, E)$.

En fait cet algorithme va bêtement tester pour tout sous ensembles $X' \subseteq X$ si X' respecte le bon critère pour voir s'il existe P tel que $S_P = X'$ et si c'est le cas, il ajoute P dans L.

Cet algorithme trouve tous les sous-modèles fixes puisqu'il test tout les sous-ensembles de X qui ne sont pas contenus dans des sous-modèles fixes. On sait de plus qu'il s'arrête puisqu'à chaque récursion X recouvre un sommet de moins.

Par contre, sa complexité est très mauvaise, puisque dans le pire des cas, il test les $2^{X|}$ sous-ensembles de X.

Une autre version serait la suivante :

Algorithm 2 TROUVER-SOUS-MODELES-FIXESV2(X,P)

Require: X, P
Ensure: L
  for $p \in P$ **do**
    if $|S_{P-p} \cap X| = |S_{P-p}|$ **then**
      $L = L \cup (P - p)$
    end if

    TROUVER-SOUS-MODELES-FIXESV2(X,P-p)

  end for

Et alors le nombre de récursions serait $2^{|E|}$. Le code est disponnible sur github

4 Piste de choses à faire pour la semaine 2 :

4.1 Partie Informatique :

- Corriger et améliorer les programmes.
- optimiser les sous-fonctions en créant des structures.
- Enregistrer quelles bases sont sur quel sous-ensembles de points lors des calculs ?
- Tester l'algorithme du TER optimiser avec la condition sur la tialle ?
- Tester les algorithmes sur l'exemple du singe. COmparer leurs performances sur plusieurs algo.

4.2 Partie Mathématiques :

- Continuer les révisions sur les matroïdes orientés, la géométrie affine...
- Se pencher plus sérieusement sur le problème de partition.
- Se pencher sur le pb 4 ?
- Réfléchir à la notion de graphe orienté par rapport à la notion de matroïde de collection (des sous-modèles).

4.3 partie Idée qui ne servent pas pour le moment

- Etant donnée une liste de d-uplets signées, réfléchir comment compresser la liste :
  -Sans perte.
  -Avec perte.
  et réfléchir si la liste compressée peut permettre d'accélérer le processus de traitement.

4.4 Partie rédaction :

- Passer en latex.
- Faire ressortir la partie logique.
- Corriger/rappeller les notations.