Université de Versailles – Saint-Quentin-en-Yvelines
Université Paris Saclay
Master 1 Informatique
2023 – 2024

Mise à Niveau de Maths – TD

Version du 23 septembre 2024

Franck Quessette – franck.quessette@uvsq.fr

Table des matières

1 TD 1 – Combinatoire

Exercice 1.1 *Des bouts*
Soit $E = \{a, b, c, d\}$ un ensemble fini de 4 éléments, on dit aussi de taille 4.

Pour toutes les questions, vous donnerez la réponse pour l'ensemble E et vous généraliserez pour un ensemble de taille n.

1. Permutations : Combien y a-t-il de façon d'ordonner les éléments de E, lister toutes les permutations.
2. Combinaison : Combien y a-t-il de sous-ensembles de E de taille 0, 1, 2, 3, 4 ?
3. Parties de E : Combien y a-t-il de sous-ensembles possibles de E ?

Exercice 1.2 *La base*
Dans cet exercice, on cherchera à bien comprendre l'énoncé en répondant d'abord aux questions pour la base dix avant de généraliser à une base quelconque.

Pour écrire des nombres entiers en base $B > 1$, on utilise B symboles dont le zéro.

1. Combien y a-t-il de nombres entiers qui s'écrivent avec exactement k chiffres significatifs (le premier chiffre n'est pas zéro sauf pour le nombre zéro).
2. Combien y a-t-il de nombres entiers qui s'écrivent avec au plus k chiffres significatifs, calculer ce nombre en sommant les valeurs du résultat précédent.
3. Comment répondre très rapidement à la question précédente sans faire de somme.

Exercice 1.3 *La base 2*

1. En reprenant l'exercice précédent, que donnent les résultats quand la base est 2 ($B = 2$).
2. Faites le lien avec l'ensemble des parties, comment définir l'ensemble E de l'exercice 1.1 pour retrouver ces résultats ?

Exercice 1.4 *Tournoi*
On considère un tournoi de tennis. Il y a au départ 2^n joueurs. Le tournoi se déroule en tours successifs. À chaque tour chaque joueur en affronte un autre, le perdant est définitivement éliminé et le gagnant est qualifié pour le tour suivant. Le tournoi s'arrête quand tous les joueurs sont éliminés sauf un.

1. Combien de joueurs sont qualifiés pour le second tour ? Combien pour le troisième tour ?
2. Combien y a-t-il de tours ?
3. Chaque joueur qualifié correspond à un match. Sommez les résultats précédents pour connaitre le nombre de matchs.
4. Comment répondre très rapidement à la question précédente sans faire de somme ?

Exercice 1.5 *Le binôme de Pascal*

1. Montrer que pour tout k, n entiers $1 < k < n$:
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$
2. Développer $(x + y)^n$ pour n de 0 à 3.
3. Construire le triangle de Pascal. Que constatez-vous quand on somme les valeurs ligne par ligne ?
4. Prouver par récurrence sur n que :
$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ (x + y)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

5. En déduire que :
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Exercice 1.6 *Gauss a 9 ans*
On veut calculer :
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} i$$

Pour $n = 10$:

1. Écrire sur une ligne les nombres de 1 à 10 les uns à la suite des autres.
2. Écrire, en dessous, sur une ligne les nombres de 10 à 1 les uns à la suite des autres. Chaque nombre de la deuxième ligne doit être exactement en dessous d'un nombre de la première ligne.
3. Écrire sur une troisième ligne les 10 nombres qui sont la somme des deux nombres juste au dessus.
4. En déduire la valeur de S_{10}
5. En déduire la valeur de S_n vue en cours.

Exercice 1.7 *Diviser, diviser, ...*
On dit qu'un ensemble de droites est en position générale si aucune droite n'est parallèle à une autre et si tout triplet de droites a une intersection vide.

1. Combien une droite fait-elle de régions dans le plan ?
2. Même question pour 0, 2, 3 et 4 droites en position générale.
3. Faites une hypothèse pour n droites en position générale et prouvez le par récurrence.

Exercice 1.8 *Faut que ça brille !*
Considérons une classe de n étudiants. Supposons qu'à la fin de chaque cours, 3 étudiants restent pour laver l'amphi. À la fin du semestre les étudiants réalisent que chaque paire d'étudiant est restée exactement une fois. Combien y a-t-il eu de cours ? Pour quelles valeurs de n est-ce possible ?

Exercice 1.9 *Mettre des pigeons dans des tiroirs*

1. Sachant qu'un être humain a environ 150 000 cheveux, montrez qu'à Paris il y a deux personnes qui ont le même nombre de cheveux.
2. Montrer que dans un graphe non orienté connexe sans boucles il y a toujours deux sommets de même degré.
3. Même question en supprimant l'hypothèse de connexité.
4. Montrer la généralisation suivante du principe des tiroirs :
Si on répartit $kn + 1$ objets dans k tiroirs, il y a un tiroir qui contient au moins $n + 1$ objets.

2 TD 2 – Probabilités

2.1 Probabilités discrètes

Exercice 2.1 *Convolons discrètement*
Soit X_1 et X_2 sont deux va indépendantes qui suivent une loi uniforme$(1,6)$ discrète (ce sont des dés). On suppose que leur fonction de densité est étendue sur $\mathbb{Z}$.

1. Calculer la fonction de densité de la variable $Y = X_1 + X_2$
2. Donner une formule générale si les deux lois sont uniformes sur (a, b)

Exercice 2.2 *Faire trois avec deux*
On a deux pièces de monnaies différentes (1€ et 2€ par exemple). On veut générer une v.a. aléatoire uniforme$(1,3)$.

1. on lance les deux pièces simultanément et on associe à un lancer qui donne deux faces la valeur 1, un pile et un face la valeur 2 et à deux piles la valeur 3. A-t-on bien une uniforme$(1,3)$?
2. On propose une solution **avec rejet** : Comme les pièces sont différentes, on a 4 événements possibles, on associe une valeur (1, 2 et 3) à trois des quatre événements. Pour le 4$^{\text{ème}}$ événement, on relance. Combien faut-il de lancers en moyenne ?
3. Comment faire si les deux pièces sont identiques ?
4. Ferait-on mieux avec 4 pièces.

Exercice 2.3 *Je ne suis pas en transe*
On considère trois dés A, B et C.

— Le dé A peut prendre comme valeurs $E_A = \{3, 3, 3, 3, 3, 6\}$.
— Le dé B peut prendre comme valeurs $E_B = \{2, 2, 2, 5, 5, 5\}$.
— Le dé C peut prendre comme valeurs $E_C = \{1, 4, 4, 4, 4, 4\}$.

Lors d'un lancer simultané d'un dé X et d'un dé Y, on dit que X gagne si la valeur de X est supérieur à la valeur de Y, sinon on dit que Y gagne.
De plus on note $X > Y$ si $\mathbb{P}(X \text{ gagne}) > \mathbb{P}(Y \text{ gagne})$.

1. Calculer la valeur moyenne de chaque dé.
2. Montrer que $A > B$.
3. Montrer que $B > C$.
4. Qu'en déduisez vous sur le dé A contre le dé C.
5. Maintenant on lance deux dés A et deux dés B. On compare la somme des deux dés A (notée $2A$) avec la somme des deux dés B (notée $2B$). Comparer $2A$ et $2B$.
6. Même question pour $2A$ contre $2C$ et $2B$ contre $2C$.

Exercice 2.4 *Probabilités et tiroirs*
Considérons 10 entiers différents pris au hasard entre 1 et 100. Existe-t-il toujours deux sous ensembles disjoints non vides de ces 10 nombres qui ont la même somme ?

2.2 Probabilités continues

Exercice 2.5 *Convolons continuement*
Soit X_1 et X_2 sont deux va indépendantes qui suivent une loi uniforme$(0,1)$ continue. On suppose que leur fonction de densité est étendue sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer la fonction de densité de la variable $Y = X_1 + X_2$.
2. On ajoute une nouvelle va X_3 toujours indépendante et uniforme$(0,1)$, calculer la fonction de densité de la variable $Z = X_1 + X_2 + X_3$.
3. Pouvez-vous donner une idée de la densité si on ajoutait une 4ème, une 5ème, ... variable ?
4. Quel lien y voyez-vous avec le théorème central limite ?

Exercice 2.6 *Sans mémoire*
Soit X une va qui suit une loi $\exp(\lambda)$.

1. Rappeler l'ensemble des valeurs que peut prendre X.
2. Donner sa fonction de densité f.
3. Calculer sa moyenne.
4. Calculer sa variance.
5. Donner sa fonction de répartition F.
6. On rappelle que la propriété sans mémoire est :

$$\forall t > 0, t_0 \geq 0, \quad \mathbb{P}\left(X < t + t_0 | X > t_0\right) = \mathbb{P}\left(X < t\right)$$

   Montrer que la propriété sans mémoire est vérifiée pour l'exponentielle.

Exercice 2.7 *J'aime dEnser*
Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0,a]$ avec a réel strictement positif par :

$$\forall x \in [0,a], f(x) = \alpha x(x-a)$$

1. Pour a quelconque, calculer la valeur de α (en fonction de a) pour que f soit une fonction de densité.

Exercice 2.8 *un dé pendant*
On considère un lancer de deux dés X_1 et X_2 et les événements suivants :

- Événement A : X_1 est pair
- Événement B : X_2 est pair
- Événement C : $X_1 + X_2$ est impair

1. Les événements sont ils indépendants deux à deux ?
2. Les événements sont-ils indépendants les trois ensembles ?

Exercice 2.9 *Dernier exo, tu Bayes*
Dans l'amphi A1, il y a 40 étudiants qui passent un examen. Sur ces 40 10 ont en dessous de la moyenne et 30 ont au dessus.

Dans l'amphi A2, aussi 40 étudiants qui passent un examen. 20 ont la moyenne et 20 ne l'ont pas.

On mélange toutes les copie et on en tire une au hasard. Cette copie a la moyenne. Quelle proba a-t-elle de venir de l'amphi A1 ?

Exercice 2.10 *Faux positifs*
Pour une maladie X, on a un test qui est très fiable :

- Si un patient a la maladie le teste est positif avec une proba de 0,99.
- Si un patient est sain le test est négatif avec une proba de 0,95.

De plus la maladie ne touche que une personne sur mille soit avec une proba de 0,001.
On pose les événements suivants :

— A le patient a la maladie.

— B le test est positif.

1. Donner les probabilités suivantes : $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(\overline{A})$, $\mathbb{P}(B|A)$ et $\mathbb{P}(B|\overline{A})$.
2. Rappeler la formule de Bayes qui permet de calculer $\mathbb{P}(A|B)$ en fonction des probas de la question précédente.
3. Quelle est l'interprétation en français de $\mathbb{P}(A|B)$?
4. Calculer $\mathbb{P}(A|B)$. Que pensez-vous du résultat ?

Ce résultat contre-intuitif s'appelle l'« Oubli de la fréquence de base », voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Oubli_de_la_frÃľquence_de_base.