

# **Compte rendu**

## **Projet Numérique**

### **Différences Finies**

**MONTREUIL Yannis**  
**ATHARI Keivan**

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Problème étudié</b>	<b>2</b>
1	Problème de Dirichlet	2
<b>II</b>	<b>Résolutions</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Maillage classique</b>	<b>3</b>
2.1	Description de la méthode . . . . .	3
2.2	Résolution du système . . . . .	3
2.2.1	Discretisation du problème continu . . . . .	3
2.3	Consistance et ordre du schéma . . . . .	4
2.4	Résolution avec la décomposition LU . . . . .	6
2.5	Résolution avec la méthode itérative SOR . . . . .	6
2.6	Comparaison des méthodes de résolution . . . . .	6
2.6.1	Erreurs de convergence et consistance . . . . .	6
2.6.2	Temps d'exécution . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Maillage décalé</b>	<b>8</b>
3.1	Description de la méthode . . . . .	8
3.2	Résolution du système . . . . .	8
3.2.1	Équation discrète . . . . .	8
3.3	Consistance et ordre du schéma . . . . .	9
3.4	Résolution avec la décomposition LU et méthode itérative SOR . . . . .	10
3.5	Comparaison des méthodes de résolution . . . . .	10
3.5.1	Erreurs de convergence et consistance . . . . .	10
3.5.2	Temps d'exécution . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Comparaison des schémas</b>	<b>11</b>
4.1	Erreurs de convergence et consistance . . . . .	11
4.2	Temps d'exécution . . . . .	12

# Introduction

Ce compte-rendu a pour but de montrer nos compétences en matière de résolution de problèmes et de recherche dans le cadre d'un projet numérique. Il s'agit de résoudre un problème de Dirichlet à l'aide de la méthode des différences finies. Cette méthode consiste à approximer les dérivées et à utiliser un maillage, qui nous permet de passer d'un problème continu à un problème discret. Pour cela, nous utilisons les deux schémas de résolution suivants :

1. maillage classique
2. maillage décalé

Nous poserons d'abord le problème de Dirichlet, avant d'expliquer les démarches de discrétisation du problème à l'aide d'un maillage classique. On étudiera ensuite l'erreur de consistance de ce schéma.

Pour résoudre le problème de Dirichlet, nous utiliserons d'abord une méthode directe puis itérative, avant de les comparer. Ensuite, nous résoudrons encore ce problème en utilisant la même démarche, mais cette fois à l'aide d'un schéma décalé.

Pour finir, nous comparerons les deux types de schémas, à savoir le maillage classique et le maillage décalé.

## Première partie

# Problème étudié

## 1 Problème de Dirichlet

Soit le problème de Dirichlet, uni-dimensionnel :

$$\begin{cases} -u''(x) + u'(x) + 2u(x) = f(x) & \forall x \in ]0, \pi[ \\ u(0) = 0 \\ u(\pi) = 1 \end{cases} \quad (1)$$

Pour l'étude de notre problème, nous choisissons  $f(x) = -\cos(x)$ . Soit  $\phi(x)$  la solution analytique de notre problème, tel que :

$$\begin{cases} \phi(x) = \alpha(\exp(-x) - \exp(2x)) + \frac{3}{10}\exp(2x) - \frac{3}{10}\cos(x) - \frac{1}{10}\sin(x) & \forall x \in ]0, \pi[ \\ \alpha = \frac{7-3\exp(2\pi)}{10(\exp(-\pi)-\exp(2\pi))} \end{cases} \quad (2)$$

Afin de résoudre ce problème avec la méthode des différences finies, nous devons discrétiser le problème, afin de pouvoir utiliser nos différents schémas.

## Deuxième partie

# Résolutions

## 2 Maillage classique

### 2.1 Description de la méthode

Le maillage classique est un maillage uniforme de pas  $h$  constant, tel que pour notre problème  $h = \frac{\pi}{nx}$  où  $nx$  est le nombre de pas de notre domaine  $]0, \pi[$ .

Les nœuds du maillage sont définis tel que :  $x_i = i \times h$  avec  $0 \leq i \leq nx$

Les bords de notre système sont situés en  $x_0$  et  $x_{nx}$  du maillage. Ils coïncident respectivement avec les limites  $x = 0$  et  $x = \pi$  du domaine d'étude  $]0, \pi[$ .  $x_0$  et  $x_{nx}$  étant les nœuds extérieurs, ils constituent le bord de notre domaine d'étude. Les nœuds intérieurs sont donc les  $x_i$  tel que  $1 \leq i \leq nx - 1$ .

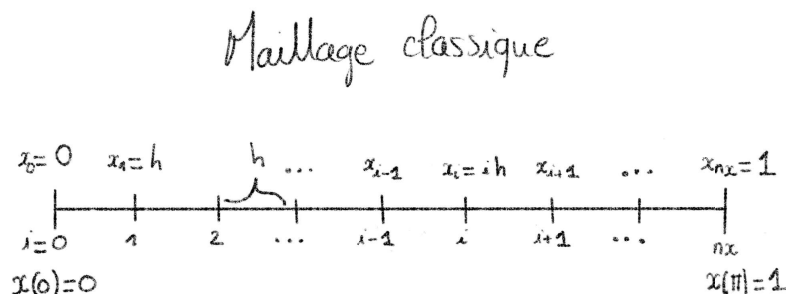


FIGURE 1 – Maillage classique

On va rechercher en chacun de ces points une valeur approchée de  $u^{(1)}(x_i)$  que l'on notera  $u_i^{(1)}$ .  $u^{(1)}$  désigne la solution via le maillage classique,  $u^{(2)}$  avec le maillage décalé.

### 2.2 Résolution du système

#### 2.2.1 Discrétisation du problème continu

On souhaite approcher le problème (1), par un problème dit discret. Pour cela nous allons approcher les dérivées, dans le cas d'un maillage classique, par des dérivées centrées, tel qu'avec les développements limités :

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2!}u''(x_i) + \Theta(h^2) \quad (3)$$

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2!}u''(x_i) + \Theta(h^2) \quad (4)$$

On soustrait (4) à (3), afin d'obtenir l'expression de la dérivée première centrée :

$$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + \Theta(h^2) \quad (5)$$

On utilise le même procédé pour la dérivée seconde sauf que l'on somme (4) et (3), tel que :

$$u''_i = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + \Theta(h^2) \quad (6)$$

Il suffit ensuite de réinjecter dans l'équation (1), ainsi :

$$\begin{cases} -u_{i-1}(1 + \frac{h}{2}) + u_i(2 + 2h^2) + u_{i+1}(\frac{h}{2} - 1) = h^2 f_i & \forall 1 \leq i \leq nx - 1 \\ u_0 = 0 \\ u_{nx} = 1 \end{cases} \quad (7)$$

On pose tout de suite  $a_1 = 1 + \frac{h}{2}$ ,  $a_2 = 2 + 2h^2$  et  $a_3 = \frac{h}{2} - 1$ , nous avons le système linéaire pour  $nx = 5$  :

$$\begin{cases} -a_1 u_0 + a_2 u_1 + a_3 u_2 = h^2 f_1 & i = 1 \\ -a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = h^2 f_2 & i = 2 \\ -a_1 u_2 + a_2 u_3 + a_3 u_4 = h^2 f_3 & i = 3 \\ -a_1 u_3 + a_2 u_4 + a_3 u_5 = h^2 f_4 & i = 4 \end{cases} \quad (8)$$

Nous avons d'après les conditions aux limites pour un maillage classique :  $u_0 = u(x = 0) = 0$  et  $u_{nx} = u(x = \pi) = 1 \implies u_5 = 1$

$$\begin{cases} 0 + a_2 u_1 + a_3 u_2 = h^2 f_1 & i = 1 \\ -a_1 u_3 + a_2 u_4 = h^2 f_4 - a_3 & i = 4 \end{cases}$$

On en déduit alors pour une valeur  $nx$  quelconque la matrice de notre problème :

$$A = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ -a_1 & a_2 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & a_3 \\ 0 & 0 & -a_1 & a_2 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{nx} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} h^2 f_1 \\ h^2 f_2 \\ \vdots \\ h^2 f_{nx} - a_3 \end{bmatrix}$$

Pour améliorer notre vitesse de résolution, nous utiliserons les vecteurs diagonaux  $Ap$ ,  $Aw$  et  $Ae$  pour exprimer la matrice  $A$ , tel que :

$$Aw = \begin{bmatrix} 0 \\ -a_1 \\ \vdots \\ -a_1 \end{bmatrix} \quad Ap = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_2 \end{bmatrix} \quad Ae = \begin{bmatrix} a_3 \\ \vdots \\ a_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### 2.3 Consistance et ordre du schéma

Afin d'étudier la convergence de la solution approchée  $u^{(1)}$  vers la solution exacte  $\phi$  quand  $h \rightarrow 0$ , on étudie l'erreur de consistance, tel que :

$$\|E^{(1)}(\phi)\|_\infty = A_h(\pi_h(\phi)) - b_h \quad \text{avec } \pi_h(\phi) = \begin{bmatrix} \phi(x_1) \\ \phi(x_2) \\ \vdots \\ \phi(x_{nx}) \end{bmatrix}$$

$A_h$  étant la matrice  $A$  de notre système linéaire et  $b_h$  notre second membre.  $\pi_h(\phi)$  représente la projection de la solution exacte sur notre maillage. Le schéma est consistant pour la norme  $\|\cdot\|$  de  $\mathbb{R}^N$  si  $\lim_{h \rightarrow 0} \|E^{(1)}(\phi)\|_\infty = 0$ . De plus si la relation suivante est vérifiée :

$$\|E^{(1)}(\phi)\|_\infty \leq Ch^p \quad (9)$$

On dit que le schéma est d'ordre  $p$  pour la norme  $\|\cdot\|$ .

Nous devons donc réinjecter notre solution exacte  $\phi$  dans l'équation discrète. Nous obtenons ainsi l'erreur de consistance :

$$\|E^{(1)}(\phi)\|_{\infty} = f(x_i) + \frac{\phi(x_{i-1}) - 2\phi(x_i) + \phi(x_{i+1}))}{h^2} + \frac{-\phi(x_{i+1}) + \phi(x_{i-1}))}{2h} - 2\phi(x_i) \quad (10)$$

On réalise le calcul plusieurs fois en faisant varier  $h$ , afin d'observer l'évolution de  $\|E^{(1)}(\phi)\|_{\infty}$ .

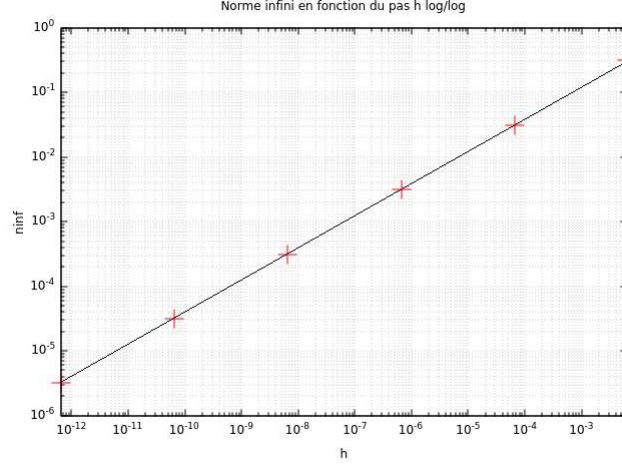


FIGURE 2 – Graphique de  $\|E(\phi)\|$  en fonction de  $h$  en échelle log/log pour le maillage classique

On observe bien que quand  $h \rightarrow 0$  alors  $\|E^{(1)}(\phi)\|_{\infty} \rightarrow 0$ . Nous traçons en échelle log/log afin de déterminer la puissance reliant  $\|E^{(1)}(\phi)\|_{\infty}$  à  $h$ . Nous obtenons ainsi :

$$\log(\|E^{(1)}(\phi)\|_{\infty}) \approx p \log(h) + C$$

On trouve  $p = 2$  ainsi :

$$\|E^{(1)}(\phi)\|_{\infty} \approx Ch^p \approx Ch^2 \quad (11)$$

Le schéma est donc d'ordre  $p = 2$  pour la norme  $\|\cdot\|_{\infty}$

Nous voulons maintenant trouver la constante  $C$ , pour cela :

$$\|E^{(1)}(\phi)\|_{\infty} \approx Ch^2 \implies \frac{\|E^{(1)}(\phi)\|_{\infty}}{h^2} \approx C \text{ or } h = \frac{\pi}{nx} \text{ et donc } h^2 = \frac{\pi^2}{nx^2}, \text{ nous réinjectons alors :}$$

$\|E^{(1)}(\phi)\|_{\infty}(nx)^2 \approx C\pi^2$  étant donné que  $\|E^{(1)}(\phi)\|_{\infty}$  est de l'ordre de  $h^2$ , le rapport des deux, nous permettra de trouver notre constante  $C$ .

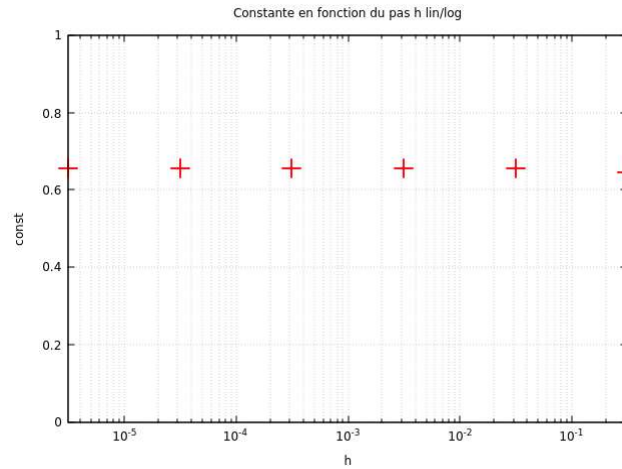


FIGURE 3 – Graphique de  $\|E(\phi)\|_{\infty}(nx)^2$  en fonction de  $h$  en échelle lin/log pour le maillage classique

Nous trouvons alors  $C\pi^2 \approx 0,654 \implies C = 0,066$  d'où :

$$\|E(\phi)\|_{\infty} \approx 0,066h^2$$

## 2.4 Résolution avec la décomposition LU

Nous utilisons la méthode directe LU afin de résoudre l'équation :  $Au_{LU} = b$

Pour cela nous adaptons notre algorithme de décomposition afin de le réaliser avec seulement des vecteurs. Ainsi nous avons l'algorithme vu en TD :

---

### Algorithme 1 LU

---

Initialiser les vecteurs diagonaux des matrices  $L$  et  $U$

Descente, en posant  $v$  un vecteur quelconque tel que  $Lv = b$

Remonté, en posant  $u_{LU}$  notre vecteur solution tel que  $Uu_{LU}^{(1)} = v$

Solution trouvée  $u_{LU}$

---

Nous avons donc  $u_{LU}^{(1)}$  étant la solution de notre problème (1) trouvé à partir du maillage classique et de la méthode de décomposition  $LU$ .

*Voir annexe, figure 10 pour la solution tracée*

## 2.5 Résolution avec la méthode itérative SOR

Les méthodes itératives permettent normalement de limiter la propagation d'erreurs. Néanmoins, nous le verrons dans notre prochaine partie au moment des comparaisons des deux méthodes de résolution ; que cela n'est pas forcément vrai tout le temps. Pour résoudre notre problème, il nous suffit de reprendre la matrice calculée (8). Nous adaptons l'algorithme SOR afin de ne pas l'utiliser sur une matrice. Nous obtenons alors l'algorithme suivant :

On prend :  $w = \frac{2}{1+\sin(h\pi)}$  et  $u_i^{(0)} = dU_i^{(0)} = 0$

---

### Algorithme 2 SOR

---

$r_i^k = b_i - Aw_i u_{i-1}^k - Ap_i u_i^k - Ae_i u_{i+1}^k$

si  $\|r^k\| < \epsilon = 1E^{-20}$  alors stop

sinon  $dU_i^{k+1} = \frac{w}{Ap_i} [r_i^k - Aw_i dU_{i-1}^{k+1}]$

$u_i^{k+1} = u_i^k + dU_i^{k+1}$

$u_i^k = u_i^{k+1}$

On recommence

---

On obtient ainsi la solution avec la méthode itérative  $u_{SOR}^{(1)}$

*Voir annexe, figure 11 pour la solution tracée*

## 2.6 Comparaison des méthodes de résolution

Dans cette partie, nous voulons connaître quelle est la meilleure méthode de résolution pour notre problème. Pour cela nous comparerons le temps de résolution de nos méthodes, ainsi que les erreurs de convergences de nos méthodes de résolution.

### 2.6.1 Erreurs de convergence et consistance

On calcule ici l'erreur de convergence permettant de quantifier l'erreur entre la solution numérique  $u^{(1)}$  et la solution exacte  $\phi$  de notre problème. On cherche à déterminer l'ordre de convergence. Pour cela, nous calculons :

$$E_{c_i}^{(1)} = \phi_i - u_i^{(1)} \quad (12)$$

En prenant respectivement  $u_{LU}^{(1)}$  et  $u_{SOR}^{(1)}$  :

Pour que notre schéma soit convergent, nous devons vérifier  $\lim_{h \rightarrow 0} E_{c_i} = 0$ . Nous décidons donc de tracer  $\|E_{c_i}\|_\infty$  en fonction du pas  $h$  afin de déterminer l'ordre de convergence.

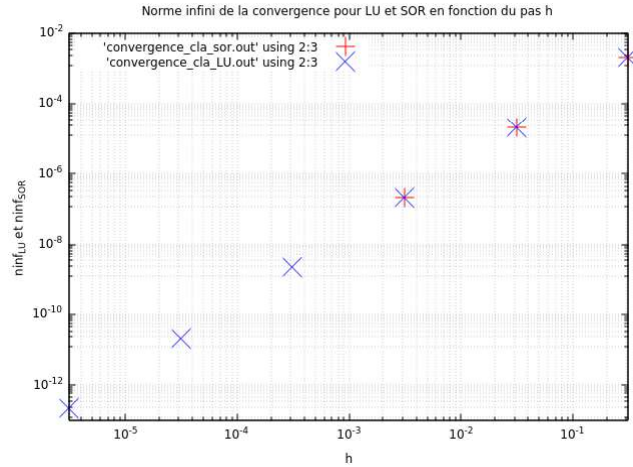


FIGURE 4 – Graphique de la norme infini de la convergence pour LU et SOR en fonction du pas  $h$  pour le maillage classique

Tout d'abord les erreurs de convergence entre les deux méthodes sont les mêmes. On ne peut donc pas en privilégier une, via ce critère. On remarque qu'encore une fois :

$$\|E_{c_i}^{(1)}\|_\infty \approx Kh^2, \text{ de plus } \lim_{h \rightarrow 0} \|E_{c_i}^{(1)}\|_\infty = 0$$

Ainsi le schéma est convergent d'ordre 2 pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$

Calculer la consistance pour une solution numérique n'est pertinent, que dans la mesure où nous voudrions contrôler le fait que notre solution numérique calculée n'est pas erronée. La solution numérique étant « presque solution » de nos équations discrètes, la consistance calculée est donc 0. Il est cependant intéressant de connaître l'erreur que notre méthode apporte pour la résolution de notre problème. (*Voir annexe 13 pour graphique*)

Les erreurs de consistance sont très proches de l'erreur machine. Cependant, on observe assez clairement qu'il existe un écart de l'ordre de  $10^8$ . Ce qui nous permet de dire que la méthode directe est dans cette configuration bien plus précise que la méthode itérative.

## 2.6.2 Temps d'exécution

$nx$	10	100	1000	10000	100000
$t_{LU}$ en s	$6,00 \times 10^{-6}$	$2,69 \times 10^{-5}$	$2,43 \times 10^{-4}$	$2,32 \times 10^{-3}$	$2,48 \times 10^{-2}$
$t_{SOR}$ en s	$2,66 \times 10^{-4}$	0,12	96,05	/	/

TABLE 1 – Temps d'exécution des méthodes de résolution

La méthode itérative est beaucoup plus couteuse en temps CPU que la méthode directe, pour finalement très peu de différence au niveau de l'erreur de convergence.

Pour résoudre ce type de problème, nous préférons utiliser la méthode directe. Dans la suite, nous utiliserons un schéma décalé.



### 3 Maillage décalé

#### 3.1 Description de la méthode

Le maillage décalé est caractérisé par un pas constant  $h = \frac{\pi}{nx}$ , identique à celui du maillage classique, et par des nœuds à l'extrémité qui ne coïncident plus avec les bords  $x(0) = 0$  et  $x(\pi) = 1$  du domaine d'étude, ainsi  $x_0 \neq x(0)$  et  $x_{nx} \neq x(\pi)$ . Les nœuds  $x_i$  du maillage sont définis par la relation suivante :

$$x_i = -\frac{h}{2} + i \times h, \quad \forall 0 \leq i \leq nx + 1 \quad (13)$$

Les nœuds  $i = 0$  et  $i = nx + 1$  sont ainsi des nœuds "fictifs" car situés en dehors du domaine d'étude  $\Omega = [0, \pi]$  :  $x_0 = -\frac{h}{2}$  et  $x_{nx+1} = 1 + \frac{h}{2}$ .

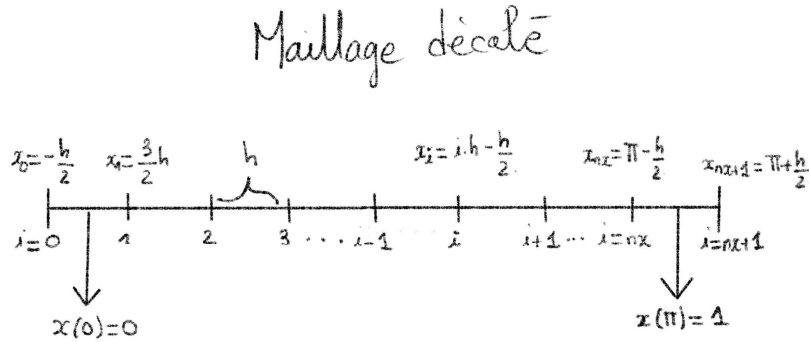


FIGURE 5 – Maillage décalé

#### 3.2 Résolution du système

##### 3.2.1 Équation discrète

On souhaite approcher le problème (1), par un problème dit discret. Pour cela nous réutilisons la même démarche que pour le maillage classique. Nous obtenons ainsi l'équation :

$$\begin{cases} -u_{i-1} + u_i(2 + 2h^2 - h) + u_{i+1}(h - 1) = h^2 f_i & \forall 1 \leq i \leq nx \\ u_0 = 0 \\ u_{nx} = 1 \end{cases} \quad (14)$$

On pose tout de suite  $b_1 = -1$ ,  $b_2 = 2 + 2h^2 - h$  et  $b_3 = h - 1$ , nous avons le système linéaire pour  $nx = 5$  :

$$\begin{cases} b_1 u_0 + b_2 u_1 + b_3 u_2 = h^2 f_1 & i = 1 \\ b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3 = h^2 f_2 & i = 2 \\ b_1 u_2 + b_2 u_3 + b_3 u_4 = h^2 f_3 & i = 3 \\ b_1 u_3 + b_2 u_4 + b_3 u_5 = h^2 f_4 & i = 4 \\ b_1 u_4 + b_2 u_5 + b_3 u_6 = h^2 f_5 & i = 5 \end{cases} \quad (15)$$

Il nous faut maintenant extrapoler  $u_0$  et  $u_6$  étant donné qu'ils ne sont pas dans notre domaine d'étude  $\Omega$ . Nous avons ainsi au voisinage de  $x = 0$ , et en négligeant les termes en  $h^2$  :

$$u_1 = u(0) + \frac{h}{2} u'(0) + \frac{h^2}{2!} u''(0) + \dots \quad (16)$$

$$u_0 = u(0) - \frac{h}{2}u'(0) + \frac{h^2}{2!}u''(0) + \dots \quad (17)$$

On somme (16) et (17), de même pour  $u_{nx+1}$  au voisinage de  $x = \pi$  pour obtenir la relation :

$$\begin{cases} u_0 = 2u(0) - u_1 = -u_1 \\ u_{nx+1} = 2u(\pi) - u_{nx} = 2 - u_{nx} \end{cases} \quad (18)$$

On injecte notre extrapolation dans (14) :

$$\begin{cases} 0 + (b_2 + 1)u_1 + b_3u_2 = h^2f_1 & i = 1 \\ b_1u_4 + (b_2 - b_3)u_5 = h^2f_5 - 2b_3 & i = 5 \end{cases}$$

On en déduit alors pour une valeur  $nx$  quelconque la matrice de notre problème avec  $b_i$  étant les coefficients calculés précédemment.

$$A = \begin{bmatrix} b_2 - b_1 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 & (b_2 - b_3) \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_2 \\ u_{nx} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} h^2f_1 \\ h^2f_2 \\ \vdots \\ h^2f_{nx-1} \\ h^2f_{nx} - 2b_3 \end{bmatrix}$$

### 3.3 Consistance et ordre du schéma

Afin d'étudier la convergence de la solution approchée  $u^{(2)}$  vers la solution exacte  $\phi$  quand  $h \rightarrow 0$ , on étudie l'erreur de consistance vue dans la partie précédente. On calcule alors  $E^{(2)}(x_i)$ , afin de déterminer l'erreur de consistance et son ordre :

$$E^{(2)}(x_i) = f(x_i) + \frac{\phi(x_{i-1}) - 2\phi(x_i) + \phi(x_{i+1}))}{h^2} + \frac{-\phi(x_{i+1}) + \phi(x_{i-1}))}{2h} - 2\phi(x_i) \quad (19)$$

On réalise le calcul plusieurs fois en faisant varier  $h$ , afin d'observer l'évolution de  $\|E^{(2)}(\phi)\|$ .

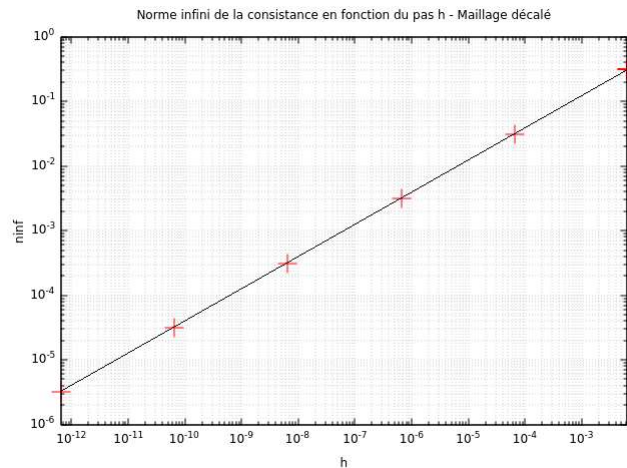


FIGURE 6 – Graphique de  $\|E^{(2)}(\phi)\|$  en fonction de  $h$  en échelle log/log pour le maillage décalé

En suivant la même démarche réalisée pour le maillage décalé, nous trouvons que l'ordre de la consistance est de  $p = 2$  telle que :

$$\|E^{(2)}(\phi)\|_{\infty} \approx C_2 h^p \approx C_2 h^2 \quad (20)$$

Afin de trouver la constante, nous traçons encore une fois,  $\|E^{(2)}(\phi)\|_{\infty}(nx)^2$  en fonction de  $h$  :

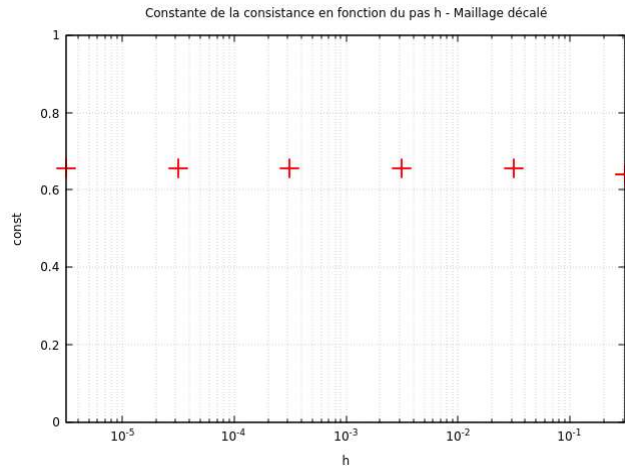


FIGURE 7 – Graphique de  $\|E^{(2)}(\phi)\|_{\infty}(nx)^2$  en fonction de  $h$  en échelle lin/log pour le maillage décalé

Nous trouvons alors  $C_2\pi^2 \approx 0,639 \implies C \approx 0,064$  d'où :

$$\|E^{(2)}(\phi)\|_{\infty} \approx 0,064h^2$$

### 3.4 Résolution avec la décomposition LU et méthode itérative SOR

Il nous suffit maintenant de résoudre notre système linéaire par la méthode directe, puis itérative. En appliquant un algorithme adapté à notre schéma (*Algorithme 1*), on résout avec la méthode LU afin d'obtenir  $u_{LU}^{(2)}$ . Avec SOR (*Algorithme 2*) nous obtenons  $u_{SOR}^{(2)}$ .

*Voir annexe 12, pour le tracé des deux solutions*

Nous allons maintenant comparer les méthodes de résolution pour le maillage décalé.

### 3.5 Comparaison des méthodes de résolution

Dans cette partie, nous voulons connaître quelle est la meilleure méthode de résolution pour notre problème. Pour cela nous comparerons le temps de résolution de nos méthodes, ainsi que les erreurs produites.

#### 3.5.1 Erreurs de convergence et consistance

L'erreur de convergence  $E_{c_i}^{(2)}$  se calcule de la même manière que pour la maillage classique. Ainsi :

$$E_{c_i} = \phi_i - u_i^{(2)} \quad (21)$$

En prenant respectivement  $u_{LU}^{(2)}$  et  $u_{SOR}^{(2)}$  :

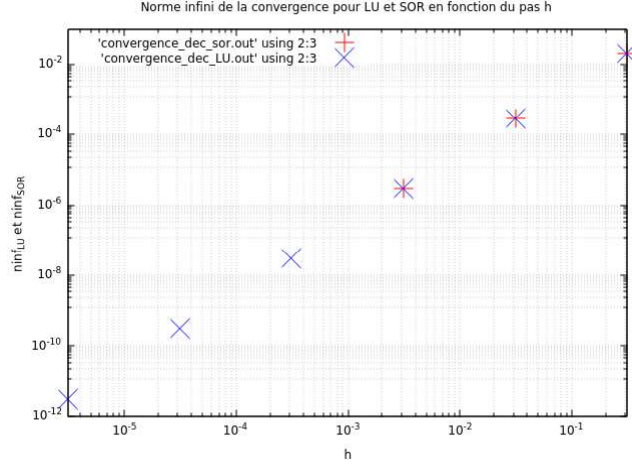


FIGURE 8 – Graphique de la norme infinie de la convergence pour LU et SOR en fonction du pas  $h$  pour le maillage décalé

Tout d'abord les erreurs de convergence entre les deux méthodes sont les mêmes. On ne peut donc pas en privilégier une, par le biais de ce critère. On remarque qu'encore une fois :

$$\|E_{c_i}^{(2)}\|_{\infty} \approx K_2 h^2, \text{ de plus } \lim_{h \rightarrow 0} \|E_{c_i}^{(2)}\|_{\infty} = 0$$

Ainsi le schéma est convergent d'ordre 2 pour la norme  $\|\cdot\|_{\infty}$

On retrouve la même chose pour la consistance que dans le maillage classique. SOR est donc aussi moins consistant.

### 3.5.2 Temps d'exécution

$nx$	10	100	1000	10000	100000	1000000
$t_{LU}$ en s	$6,00 \times 10^{-6}$	$2,60 \times 10^{-5}$	$2,44 \times 10^{-4}$	$2,35 \times 10^{-3}$	$2,26 \times 10^{-2}$	0,234
$t_{SOR}$ en s	$4,66 \times 10^{-4}$	$3,34 \times 10^{-2}$	2,91	256,95	/	/

TABLE 2 – Temps d'exécution des méthodes de résolution

La méthode directe est encore une fois beaucoup plus couteuse en temps que la méthode itérative, pour finalement très peu de différence au niveau de l'erreur de consistance.

La méthode directe est encore la plus adaptée pour notre schéma. Cela s'explique par le peu d'opération à exécuter dans le cas d'une matrice tri-diagonale.

Nous voulons maintenant comparer nos différents schémas, pour une même méthode de résolution qui sera LU étant donné que c'est la plus efficace.

## 4 Comparaison des schémas

### 4.1 Erreurs de convergence et consistance

Nous avons calculé précédemment la consistance pour chaque schéma. Nous avons alors les consistances :

$$\|E^{(1)}(\phi)\|_{\infty} \approx 0,066h^2$$

$$\|E^{(2)}(\phi)\|_{\infty} \approx 0,064h^2$$

Bien que les deux schémas soient consistants d'ordre 2, on observe que  $\|E^{(2)}(\phi)\|_\infty < \|E(\phi)\|_\infty$ , le schéma décalé est ainsi plus consistant que le classique de 9,69 %.

Pour la convergence, on compare les deux méthodes en prenant les solutions  $u^{(i)}$  calculées via la méthode directe LU. On peut ainsi tracer les erreurs de convergence  $E_{c_i}^{(i)}$ . On trace  $\|E_{c_i}^{(i)}\|_\infty$  en fonction de  $h$  tel que :

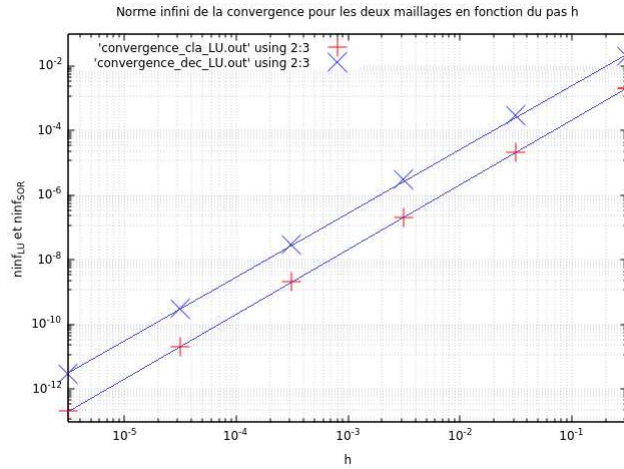


FIGURE 9 – Comparaison de l'erreur de convergence entre les deux schémas

On observe très clairement que le maillage classique est plus précis que le maillage décalé. Bien que les deux maillages soient d'ordre 2, l'erreur de convergence du maillage décalé est toujours plus grande que celle du maillage classique. Ainsi :

$$\|E_{c_i}^{(2)}(\phi)\|_\infty > \|E_{c_i}(\phi)\|_\infty$$

Pour  $nx = 10^6$ , nous avons  $\|E_{c_i}^{(2)}(\phi)\|_\infty = 0,303 \times 10^{-11}$  et  $\|E_{c_i}^{(1)}(\phi)\|_\infty = 0,212 \times 10^{-12}$

Le schéma classique est 7 fois plus précis.

## 4.2 Temps d'exécution

On compare le temps d'exécution des schémas avec la méthode de résolution LU.

$nx$	10	100	1000	10000	100000	1000000
$t_{décalé}$ en s	$6,00 \times 10^{-6}$	$2,60 \times 10^{-5}$	$2,44 \times 10^{-4}$	$2,35 \times 10^{-3}$	$2,26 \times 10^{-2}$	0,234
$t_{classique}$ en s	$6,00 \times 10^{-6}$	$2,69 \times 10^{-5}$	$2,43 \times 10^{-4}$	$2,32 \times 10^{-3}$	$2,48 \times 10^{-2}$	0,269

TABLE 3 – Temps d'exécution des deux schémas

Les deux schémas sont assez proches en terme de temps d'exécution. Le schéma décalé est un peu plus rapide.

**Remarque :** En comparant avec la méthode SOR, le schéma décalé est extrêmement plus rapide que le schéma classique. Pour  $h = 10^3$ , on obtient un  $t_{décalé} = 2,91$  s contre  $t_{classique} = 96,05$  s. De même pour les autres valeurs de  $h$ . Le maillage classique avec SOR est environ 15 fois plus rapide que SOR adapté au maillage classique.

# Conclusion

Pour conclure, nous avons résolu cette équations de deux manières différentes. La première en utilisant le maillage classique, et ensuite le maillage décalé. Les deux schémas sont d'ordre 2 en convergence et consistance.

Pour chaque schémas, nous avons résolu nos équations discrètes à l'aide de la méthode LU et de SOR.

La méthode LU est très clairement plus adaptée à notre problème. La méthode itérative est surpassée dans tous les domaines par la méthode LU (temps exécution, consistance, convergence).

Le maillage classique est plus facile à adapter à notre problème. Il est aussi plus précis, mais moins consistant. Il est aussi légèrement plus lent pour résoudre notre équation.

Le maillage décalé quant à lui est un peu plus délicat à adapter, étant donné que nous effectuons des extrapolations aux bords du maillage. Cependant, il est plus consistant et aussi plus rapide pour résoudre notre problème. Cependant, pour notre problème, il est beaucoup moins précis que le maillage classique. On préférera alors le maillage classique pour sa précision, et sa facilité d'élaboration, ainsi que pour de petites concessions sur le temps d'exécution et pour l'erreur de consistance.

## ANNEXE

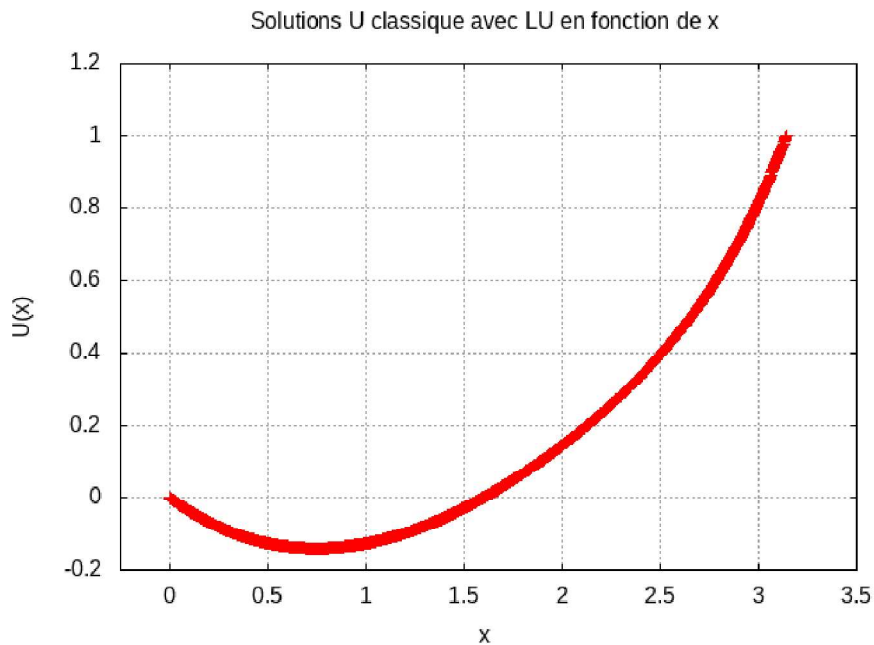


FIGURE 10 – Graphique de  $u_{LU}^{(1)}$  en fonction de  $x_i$  pour  $nx = 1000$

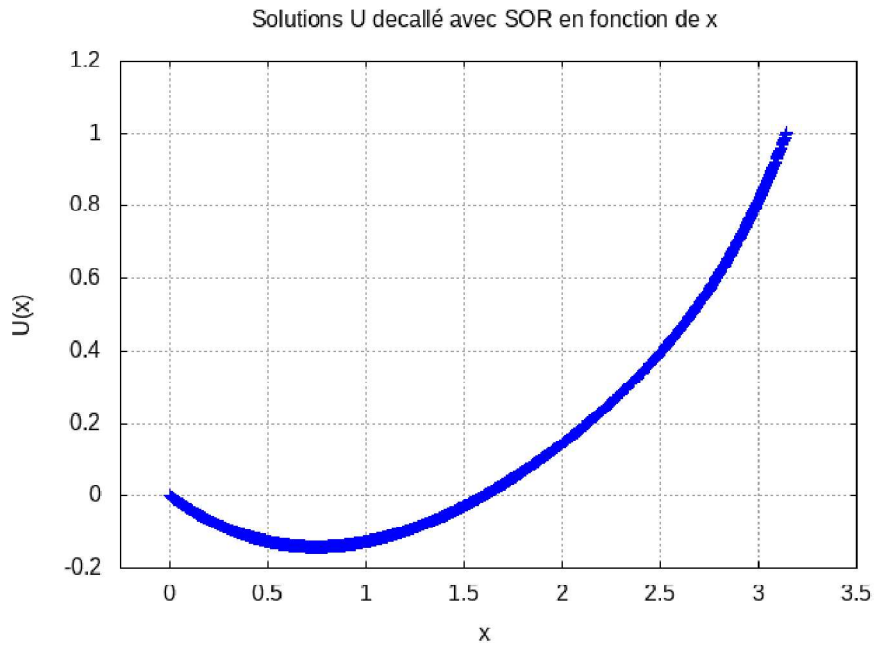


FIGURE 11 – Graphique de  $u_{SOR}^{(1)}$  en fonction de  $x_i$  pour  $nx = 1000$

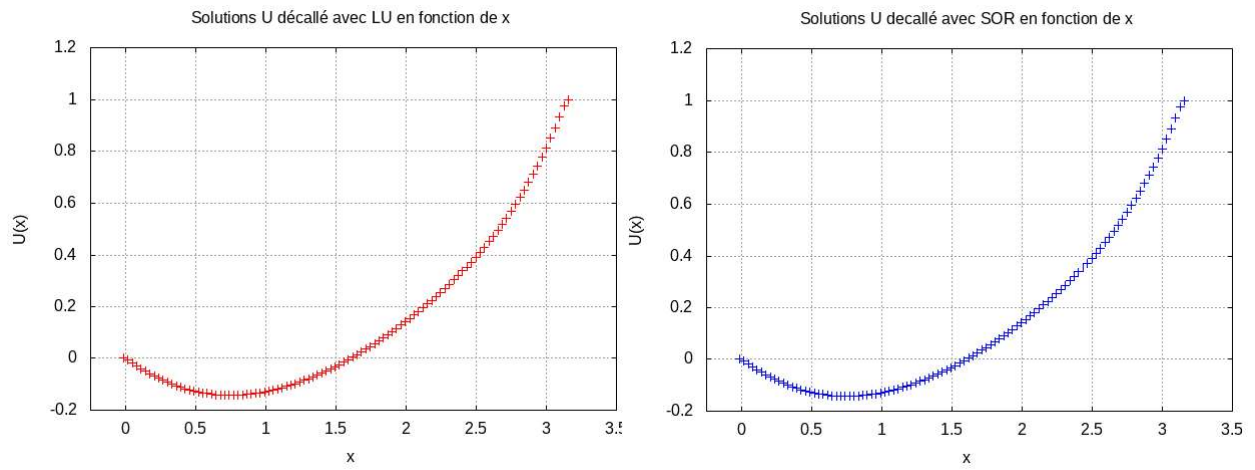


FIGURE 12 – Graphique solution  $u_{LU}^{(2)}$  et  $u_{SOR}^{(2)}$  en fonction de  $x_i$  pour  $nx = 100$

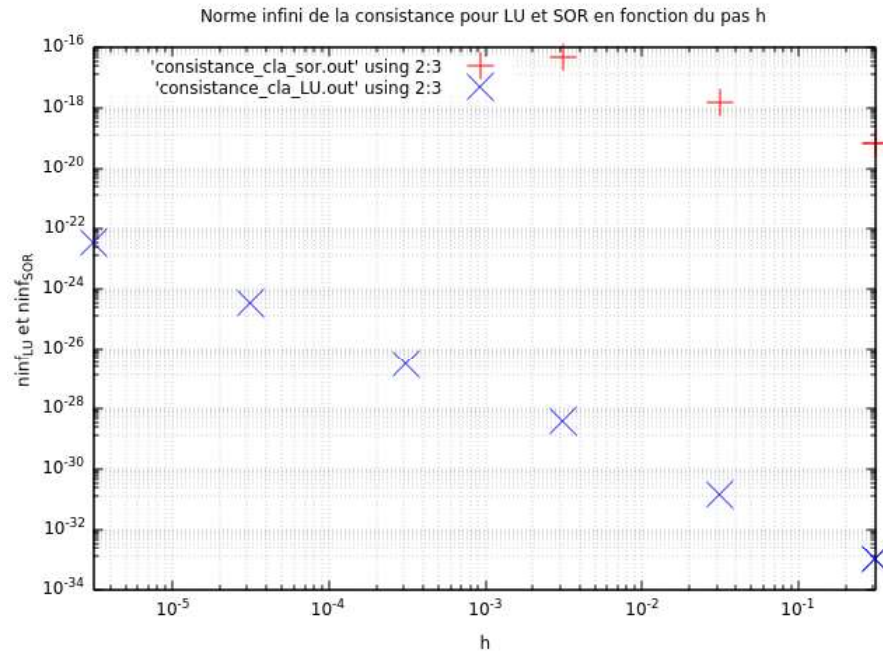


FIGURE 13 – Graphique de la norme infini de la consistance pour LU et SOR en fonction du pas  $h$  pour le maillage classique