Signaux et Systèmes physiques

Chapitre 3 – Oscillations libres, non-amorties

1) Oscillations

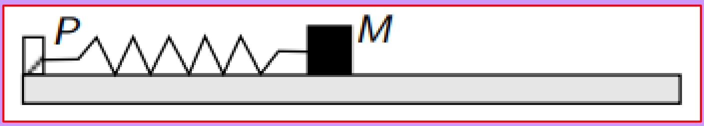
Système émettant des signaux = système oscillant.

Oscillateur harmonique : Modélisation de tout système physique oscillant autour d'une position d'équilibre (stable).

Il existe 3 types d'oscillations :

- Oscillations libres, non-amorties (chapitre 3)
- Oscillations libres, amorties (chapitre 4)
- Oscillations forcées (chapitre 5)

2) Force de rappel



- Point matériel M de masse m attaché à un ressort de longueur l dont l'autre extrémité est fixée en un point P.
- Système sur support horizontal, M déplacement unidirectionnel.
- M écarté de sa position initiale et relâché sans vitesse initiale.
- Tout type de frottement négligé.

Le point M subit une force de rappel exercée par le ressort :

$$\vec{F} = -k\overrightarrow{OM}$$

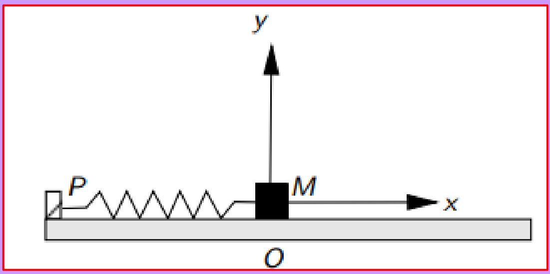
Avec O le point d’équilibre de la masse et k la constante de raideur du ressort (en N/m).

La force de rappel s’écrit aussi :

- Soit $l = \|\overrightarrow{PM}\|$ la longueur du ressort et $l_0 = \|\overrightarrow{PO}\|$
- Soit $\vec{\imath}$ un vecteur unitaire tel que $\overrightarrow{PM} = l\vec{\imath}$
- Soit $x = l - l_0$

On a alors : $\boxed{\vec{F} = -k\overrightarrow{OM} = -k\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}\right) = -k\left(\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{PO}\right) = -k(l - l_0)\vec{\imath} = -kx\,\vec{\imath}}$

3) Equation du mouvement



Soit la masse dans sa position d’équilibre, dans le repère R = (O,$\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$, $\overrightarrow{e_z}$).

Bilan des forces dans R :

- Poids de la masse : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\overrightarrow{e_y}$
- Réaction du support sur la masse : $\vec{R} = R\overrightarrow{e_y}$

- Force de rappel : $\vec{F} = -kx\overrightarrow{e_x}$
- Quantité de mouvement de M : $\vec{p} = m\vec{v} = m\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = m\dot{x}\overrightarrow{e_x}$

On applique alors le principe fondamental de la dynamique :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} \quad \Leftrightarrow \quad m\ddot{x}\overrightarrow{e_x} = -\,mg\overrightarrow{e_y} + R\overrightarrow{e_y} - kx\overrightarrow{e_x} \qquad \text{(E)}$$

On projette alors sur (O_x) et (O_y) :

$$\text{(E)} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = -kx \\ 0 = -mg + R \end{cases}$$

Ce qui donne finalement l'équation du mouvement :

$$\boxed{\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}}$$

On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ en rad/s

$$\boxed{\ddot{x}(t) + {\omega_0}^2 x(t) = 0}$$

Soit la solution de cette équation différentielle sous la forme :

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi), \quad \forall t \in \mathbb{R}}$$

4) <u>Problème de Cauchy</u>

On a le système suivant : $\begin{cases} x(0) = A\cos(\varphi) = x_0 > 0 & (1) \\ \dot{x}(0) = -A\omega_0 \sin(\varphi) = 0 & (2) \end{cases}$

Résolution :

- (2) : $\sin(\varphi) = 0$ ⇔ $\varphi = k\pi$, k un entier relatif
- (1) : $\cos(\varphi) > 0$ ⇔ k un entier pair

$$\boxed{x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)}$$

5) <u>Interprétation</u>

- A : amplitude du mouvement
  - ∀t ∈ R, −A ≤ x(t) ≤ +A
  - Unité : on a [A] = [x], A s'exprime en m
- ω_0 : pulsation propre du mouvement
  - Indépendante des CI
  - Unité : ω_0 s'exprime en rad/s car ω_0t en rad
- φ : phase à l'origine
  - Reliée à la position de la masse à t=0
  - Unité : φ s'exprime en rad