MP.Cuminal — # Rappels sur les nombres complexes

- L'écriture d'un nombre complexe sous la forme $z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ est appelée forme algébrique
  - Le réel x est appelé **partie réelle** de z : $x = Re(z)$
  - Le réel y est appelé **partie imaginaire** de z : $y = Im(z)$

On appelle <u>conjugué</u> du nombre complexe $z = x + iy$ le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$ $\begin{cases} Re(z) = Re(\bar{z}) \\ Im(z) = \quad Im(\bar{z}) \end{cases}$

$z \times \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 > 0$

z	$Re(z)$	$Im(z)$	$\bar{z}$	$z\,\bar{z}$
$z = 2 + 3i$	$Re(z) = 2$	$Im(z) = 3$	$\bar{z} = 2 - 3i$	$z\,\bar{z} = 2^2 + 3^2 = 13$
$z = \sqrt{2} + \frac{i}{2}$	$Re(z) = \sqrt{2}$	$Im(z) = \frac{1}{2}$	$\bar{z} = \sqrt{2} - \frac{i}{2}$	$z\,\bar{z} = \sqrt{2}^2 + (\frac{1}{2})^2 = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

Le quotient de deux nombres complexes est aussi un nombre complexe $\frac{z}{z'} = \frac{z\,\bar{z}'}{z'\,\bar{z}'}$

$$\frac{1+i}{2+3i} = \frac{(1+i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{5-i}{2^2+3^2} = \frac{5}{13} - \frac{1}{13}i$$

L'écriture d'un nombre complexe sous la forme $z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ est appelée forme trigonométrique

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow z = x + iy = r\cos\theta + i\,r\sin\theta$$

r est appelé module de z $r = |z| = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$

θ est appelé argument de z : $\theta = \arg(z) = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ à 2π près $\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{|z|} \\ \sin\theta = \frac{y}{|z|} \end{cases}$

Propriétés du module	Propriétés de l'argument
$\lvert zz' \rvert = \lvert z \rvert \times \lvert z' \rvert$	$arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\quad [2\pi]$
$\lvert z^n \rvert = \lvert z \rvert^n$	$arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi]$
$\lvert \frac{1}{z} \rvert = \frac{1}{\lvert z \rvert}$	$\arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$
$\lvert \frac{z}{z'} \rvert = \frac{\lvert 1 \rvert}{\lvert z' \rvert}$	$\arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$
$\lvert \bar{z} \rvert = \lvert z \rvert$	$\arg(\bar{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$
$\lvert -z \rvert = \lvert z \rvert$	$\arg(-z) = \pi + \arg(z)\ [2\pi]$

ATTENTION !! la somme des modules n'est pas égale au module de la somme $|\boldsymbol{z}| + |\boldsymbol{z}'| \neq |\boldsymbol{z} + \boldsymbol{z}'|$

L'écriture d'un nombre complexe sous la forme $z = |z|\, e^{i\theta}$ est appelée forme exponentielle

La forme trigonométrique est souvent utilisée comme intermédiaire pour passer de l'écriture exponentielle à l'écriture algébrique.

Forme algébrique	Forme trigonométrique	Forme exponentielle
$z = 1 + i$	$z = \sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$	$z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$
$z = 1 - i\sqrt{3}$	$z = 2\,(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3}))$	$z = 2\, e^{-i\frac{\pi}{3}}$
$z = 3 - 3i$	$z = 3\sqrt{2}\,(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))$	$z = 3\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$
$z = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$	$z = 2\sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$	$z = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{6}}$
$z = 2i$	$z = 2\,(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$	$z = 2\, e^{i\frac{\pi}{2}}$

Formule de **MOIVRE** : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = e^{ni\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Formules d'**EULER** : $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$