# Rappels sur les nombres complexes

- L'écriture d'un nombre complexe sous la forme $z=x+iy$ avec $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ est appelée forme algébrique
  - Le réel $x$ est appelé **partie réelle** de $z$ : $x=Re(z)$
  - Le réel $y$ est appelé **partie imaginaire** de $z$ : $y=Im(z)$

On appelle conjugué du nombre complexe $z=x+iy$ le nombre complexe $\overline{z}=x-iy$ $\begin{cases} Re(z)=Re(\overline{z}) \\ Im(z)=-Im(\overline{z}) \end{cases}$

$z\times\overline{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2>0$

| $z$ | $Re(z)$ | $Im(z)$ | $\overline{z}$ | $z\,\overline{z}$ |
|---|---|---|---|---|
| $z=2+3i$ | $Re(z)=2$ | $Im(z)=3$ | $\overline{z}=2-3i$ | $z\overline{z}=2^2+3^2=13$ |
| $z=\sqrt{2}+\frac{i}{2}$ | $Re(z)=\sqrt{2}$ | $Im(z)=\frac{1}{2}$ | $\overline{z}=\sqrt{2}-\frac{i}{2}$ | $z\overline{z}=\sqrt{2}^2+\frac{1}{2}^2=2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$ |

Le quotient de deux nombres complexes est aussi un nombre complexe $\frac{z}{z'}=\frac{z\,\overline{z'}}{z'\,\overline{z'}}$

$\frac{1+i}{2+3i}=\frac{(1+i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\frac{5-i}{2^2+3^2}=\frac{5}{13}-\frac{1}{13}i$

L'écriture d'un nombre complexe sous la forme $z=r\ (\cos\theta+i\sin\theta)$ est appelée forme trigonométrique

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow z=x+iy=r\cos\theta+i\ r\sin\theta$$

$r$ est appelé module de $z$, $r=|z|=OM=\sqrt{x^2+y^2}>0$

$\theta$ est appelé argument de $z$ : $\theta=\arg(z)=(\vec{i},\vec{OM})$ à $2\pi$ près $\begin{cases} \cos\theta=\frac{x}{|z|} \\ \sin\theta=\frac{y}{|z|} \end{cases}$

| Propriétés du module | Propriétés de l'argument |
|---|---|
| $\lvert zz'\rvert=\lvert z\rvert\times\lvert z'\rvert$<br>$\lvert z^n\rvert=\lvert z\rvert^n$<br>$\left\lvert\frac{1}{z}\right\rvert=\frac{1}{\lvert z\rvert}$<br>$\left\lvert\frac{z}{z'}\right\rvert=\frac{\lvert 1\rvert}{\lvert z'\rvert}$<br>$\lvert\overline{z}\rvert=\lvert z\rvert$<br>$\lvert -z\rvert=\lvert z\rvert$ | $arg(zz')=arg(z)+arg(z')\quad[2\pi]$<br>$arg(z^n)=n\,arg(z)\quad[2\pi]$<br>$arg(\frac{1}{z})=-arg(z)\quad[2\pi]$<br>$arg(\frac{z}{z'})=arg(z)-arg(z')\quad[2\pi]$<br>$arg(\overline{z})=-arg(z)\quad[2\pi]$<br>$arg(-z)=\pi+arg(z)\quad[2\pi]$ |

**ATTENTION !!** la somme des modules n'est pas égale au module de la somme $|z|+|z'|\neq|z+z'|$

L'écriture d'un nombre complexe sous la forme $z=|z|\ ei\theta$ est appelée forme exponentielle

La forme trigonométrique est souvent utilisée comme intermédiaire pour passer de l'écriture exponentielle à l'écriture algébrique.

| Forme algébrique | Forme trigonométrique | Forme exponentielle |
| --- | --- | --- |
| $z = 1 + i$ | $z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ | $z = \sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{4}}$ |
| $z = 1 - i\sqrt{3}$ | $z = 2(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}))$ | $z = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ |
| $z = 3 - 3i$ | $z = 3\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})$ | $z = 3\sqrt{2}\ e^{-i\frac{\pi}{4}}$ |
| $z = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$ | $z = 2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$ | $z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$ |
| $z = 2i$ | $z = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$ | $z = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ |

Formule de **MOIVRE** : $(\cos\theta + i\sin\theta)n = eni\theta = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Formules d'**EULER** : $\cos\theta = \frac{ei\theta + e-\ i\ \theta}{2}$ $\sin\theta = \frac{ei\ \theta - e-\ i\ \theta}{2i}$