Mathématiques & Abstraction

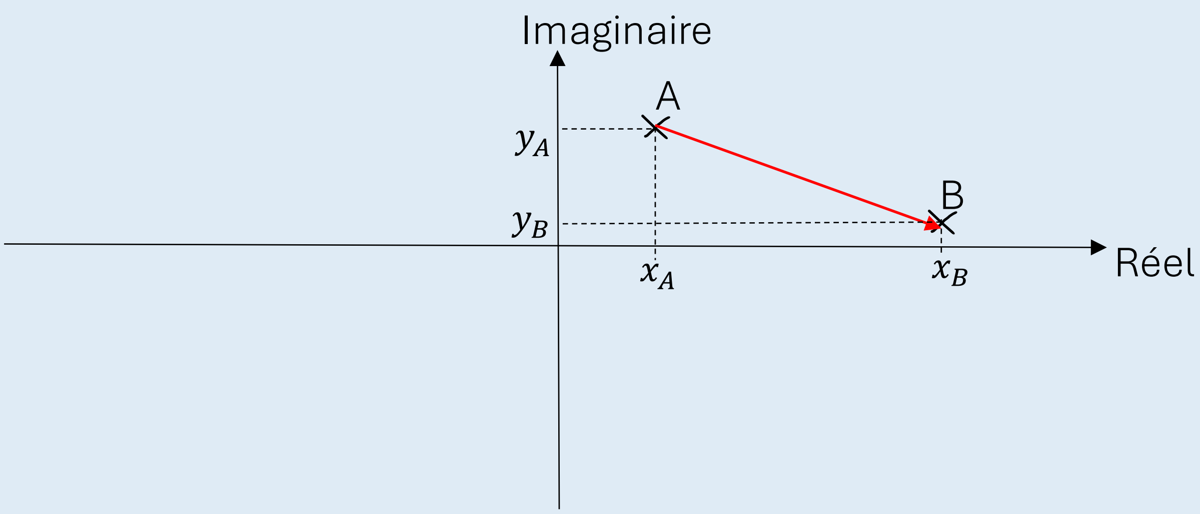
Chapitre 0 : Trigonométrie et Nombres Complexes

❖ *Preuve n°1 : Affixe d'un vecteur*

Théorème

Si Z_A est l'affixe de A et Z_B est l'affixe de B, alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{Ab}$ est $Z_B - Z_A$.

Notons $A(\, x_A \,;\, y_A \,)$ et $B(\, x_B \,;\, y_B \,)$.



Alors $Z_A = x_A + y_A \times \boldsymbol{i}$ et $Z_B = x_B + y_B \times \boldsymbol{i}$.

Nous savons que les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont : $\begin{cases} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{cases}$

Or :

$$Z_B - Z_A = x_B + y_B \times \boldsymbol{i} - x_A - y_A \times \boldsymbol{i} = (x_B - x_A) + (y_B - y_A) \times \boldsymbol{i}$$

Donc l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $Z_B - Z_A$.

❖ *Preuve n°2 : Conjugué d'un nombre complexe*

Théorème

Critère pour qu'un nombre complexe soit réel (resp. imaginaire pur)

$Z + \overline{Z} = 2Re(Z)$ et $Z - \overline{Z} = 2\boldsymbol{i}Im(Z)$

Z est réel ⇔ $Z = \overline{Z}$ et Z est imaginaire pur ⇔ $Z = -\overline{Z}$

Notons $Z = a + b \times \boldsymbol{i}$ (avec a et b réels). Ainsi :

$$Z + \overline{Z} = a + b\boldsymbol{i} + a - b\boldsymbol{i} = 2a = 2Re(Z)$$

$$Z - \overline{Z} = a + b\boldsymbol{i} - (a - b\boldsymbol{i}) = 2b\boldsymbol{i} = 2\boldsymbol{i}Im(Z)$$

On en déduit alors :

$$Z \text{ est réel} \Leftrightarrow Im(Z) = 0 \Leftrightarrow Z - \overline{Z} = 0 \Leftrightarrow Z = \overline{Z}$$

$$Z \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow Re(Z) = 0 \Leftrightarrow Z + \overline{Z} = 0 \Leftrightarrow Z = -\overline{Z}$$

❖ *Preuve n°3 : Propriétés de la conjugaison*

Théorème

Pour tous nombres complexes Z et Z', on a :

$\overline{Z+Z'} = \overline{Z} + \overline{Z'}$ $\qquad \overline{-Z} = -\overline{Z}$ $\qquad \overline{ZZ'} = \overline{Z}\,\overline{Z'}$ $\qquad \overline{Z^n} = \overline{Z}^n$ $\qquad \overline{\left(\frac{Z}{Z'}\right)} = \frac{\overline{Z}}{\overline{Z'}}\ (Z \neq 0)$

Posons $Z = a + b\boldsymbol{i}$ et $Z' = a' + b'\boldsymbol{i}$ (avec a, b, a' et b' réels). Alors :

$$\overline{Z+Z'} = \overline{a + b\boldsymbol{i} + a' + b'\boldsymbol{i}} = \overline{(a+a') + (b+b')\boldsymbol{i}} = (a+a') - (b+b')\boldsymbol{i}$$

$$\overline{Z} + \overline{Z'} = \overline{a+b\boldsymbol{i}} + \overline{a'+b'\boldsymbol{i}} = (a - b\boldsymbol{i}) + (a' - b'\boldsymbol{i}) = (a+a') - (b+b')\boldsymbol{i}$$

Donc $\overline{Z+Z'} = \overline{Z} + \overline{Z'}$. Les autres égalités se démontrent de façon analogue.

❖ *Preuve n°4 : Écriture trigonométrique des Nombres Complexes*

Théorème

Si $Z = r(\cos(\theta) + \boldsymbol{i} \times \sin(\theta))$ avec $r > 0$ alors $r = |Z|$ et $\theta = \arg(Z)\ [2\pi]$

On a : $$|Z|^2 = r^2cos^2(\theta) + r^2sin^2(\theta) = r^2$$

Or $r > 0$, donc : $$|Z| = r$$

Soit θ' un argument de Z, alors :

$$Z = r\big(\cos(\theta') + \boldsymbol{i}\sin(\theta')\big) = rcos(\theta') + \boldsymbol{i}rsin(\theta')$$

Or, par hypothèse :

$$Z = r\big(\cos(\theta) + \boldsymbol{i}\sin(\theta)\big) = rcos(\theta) + \boldsymbol{i}rsin(\theta)$$

Et d'après un autre théorème ; si $a' + b'\boldsymbol{i} = a + b\boldsymbol{i}$ équivaut à $a = a'$ et $b = b'$.

Donc :

$$rcos(\theta') = rcos(\theta) \text{ et } rsin(\theta') = rsin(\theta)$$

D'où :

$$cos(\theta') = cos(\theta) \text{ et } sin(\theta') = sin(\theta)$$

Ce qui implique :

$$\theta' = \theta\ [2\pi]$$

Donc :

$$\theta = \arg(Z)\ [2\pi]$$

❖ *Preuve n°5 : Propriétés des arguments*

Théorème

Pour tous les nombres complexes Z et Z' non nuls, on a :

$$\arg(ZZ') = \arg(Z) + \arg(Z')\ [2\pi]$$
$$\arg\left(\frac{1}{Z}\right) = -\arg(Z)[2\pi]$$
$$\arg\left(\frac{Z}{Z'}\right) = \arg(Z) - \arg(Z')\ [2\pi]$$
$$\arg(Z^n) = n \times \arg(Z)\ [2\pi]\ pour\ tous\ n \in \mathbb{Z}$$

Remarque : Nous pouvons faire l'analogie avec la fonction logarithme

Utilisons des formes trigonométriques de Z et Z'.

$$Z = r(\cos(\theta) + \boldsymbol{i}sin(\theta)) \text{ et } Z' = r'(\cos(\theta') + \boldsymbol{i}sin(\theta'))$$

Ainsi

$$ZZ' = rr'(\cos(\theta) + \mathbf{i}\sin(\theta))(\cos(\theta') + \boldsymbol{i}sin(\theta'))$$

$$ZZ' = rr'(\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') + \boldsymbol{i}(\sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta')))$$

Ce qui d'après les formules trigonométriques d'addition, donne :

$$ZZ' = rr'(\cos(\theta + \theta') + \boldsymbol{i}sin(\theta + \theta'))$$

Comme $rr' > 0$, on en déduit que :

$$|ZZ'| = rr' \text{ et } \arg(ZZ') = \theta + \theta' = \arg(Z) + \arg(Z')\ [2\pi]$$

D'où la première relation :

$$\boldsymbol{\arg(ZZ') = \arg(Z) + \arg(Z')[2\pi]}$$

En spécialisant $Z' = \frac{1}{Z}$ dans cette relation, cela donne :

$$\arg(1) = \arg\left(\frac{1}{Z}\right) + \arg(Z)[2\pi]$$

Or $\arg(1) = 0\ [2\pi]$, d'où la deuxième relation :

$$\boldsymbol{\arg\left(\frac{1}{Z}\right) = -\arg(Z)[2\pi]}$$

En remarquant que $\frac{Z}{Z'} = Z \times \frac{1}{Z'}$, on obtient la troisième relation :

$$\boldsymbol{\arg\left(\frac{Z}{Z'}\right) = \arg(Z) + \arg\left(\frac{1}{Z'}\right) = \arg(Z) - \arg(Z')\ [2\pi]}$$

Pour la dernière relation, nous distinguons 3 cas :

$n > 0$	$n < 0$	$n = 0$
$\arg(Z^n) = \arg(Z \times Z \times \ldots \times Z)$ $= n \times \arg(Z)\ [2\pi]$ Faire une récurrence	Nous posons $m = -n > 0 *$ $\arg(Z^n) = arg\left(\frac{1}{Z^m}\right)$ $\Leftrightarrow m \arg\left(\frac{1}{z}\right)$ $\Leftrightarrow -m \arg(Z)$ $\Leftrightarrow n \arg(Z)\ [2\pi]$	La relation $\arg(Z^n) = n \times \arg(Z)\ [2\pi]$ est triviale.

❖ *Preuve n°6 : Formules de Moivre et Formules d'Euler*

Théorème

Formules de Moivre : $\forall\ \theta \in \mathbb{R}\ et\ \forall\ n \in \mathbb{Z}$

$$(\cos(\theta) + \boldsymbol{i}\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + \boldsymbol{i}\sin(n\theta)$$
$$(\cos(\theta) - \boldsymbol{i}\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) - \boldsymbol{i}\sin(n\theta)$$

Formules d'Euler :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{\boldsymbol{i}\theta} + e^{-\boldsymbol{i}\theta}}{2}\ et\ \sin(\theta) = \frac{e^{\boldsymbol{i}\theta} - e^{-\boldsymbol{i}\theta}}{2\boldsymbol{i}}$$

Utilisons les formes exponentielles :

$$(\cos(\theta) + \boldsymbol{i}\sin(\theta))^n = \left(e^{\boldsymbol{i}\theta}\right)^n = e^{\boldsymbol{i}n\theta} = \cos(n\theta) + \boldsymbol{i}\sin(n\theta)$$

D'où la première formule de Moivre.

La seconde formule est obtenue en remplaçant θ par $-\theta$.

En ce qui concerne les formules d'Euler :

$$e^{\boldsymbol{i}\theta} + e^{-\boldsymbol{i}\theta} = \cos(\theta) + \boldsymbol{i}\sin(\theta) + \cos(-\theta) + \boldsymbol{i}\sin(-\theta) = \cos(\theta) + \boldsymbol{i}\sin(\theta) + \cos(\theta) - \boldsymbol{i}\sin(\theta) = 2\cos(\theta)$$

$$e^{\boldsymbol{i}\theta} - e^{-\boldsymbol{i}\theta} = \cos(\theta) + \boldsymbol{i}\sin(\theta) - \cos(-\theta) - \boldsymbol{i}\sin(-\theta) = \cos(\theta) + \boldsymbol{i}\sin(\theta) - \cos(\theta) + \boldsymbol{i}\sin(\theta) = 2\boldsymbol{i}\sin(\theta)$$

D'où les deux formules d'Euler.