Mathématiques & Abstraction

Chapitre 3 : Les applications

❖ *Preuve n°1 : Le complémentaire*

Propriétés

Soient E et F deux ensembles non vides, $A, A' \subset E, B, B' \subset F$ et $f: E \to F$ une application. On a :

1. $f\langle\emptyset\rangle = \emptyset$ et $f^{-1}\langle\emptyset\rangle = \emptyset$
2. $A \subset A' \Rightarrow f\langle A\rangle \subset f\langle A'\rangle$
3. $B \subset B' \Rightarrow f^{-1}\langle B\rangle \subset f^{-1}\langle B'\rangle$
4. $f\langle A \cap A'\rangle \subset f\langle A\rangle \cap f\langle A'\rangle$
5. $f\langle A \cup A'\rangle = f\langle A\rangle \cup f\langle A'\rangle$
6. $f^{-1}\langle B \cap B'\rangle = f^{-1}\langle B\rangle \cap f^{-1}\langle B'\rangle$
7. $f^{-1}\langle B \cup B'\rangle = f^{-1}\langle B\rangle \cup f^{-1}\langle B'\rangle$

1. $f\langle\emptyset\rangle = \emptyset$ et $f^{-1}\langle\emptyset\rangle = \emptyset$

Il n'y a pas d'image ou d'antécédent d'éléments de l'ensemble vide puisque l'ensemble vide n'a pas d'élément.

2. $A \subset A' \Rightarrow f\langle A\rangle \subset f\langle A'\rangle$

Soit $y \in f\langle A\rangle$. Alors $\exists x \in A \ tq \ y = f(x)$. Mais comme $A \subset A'$, $x \in A'$et donc $y \in f\langle A'\rangle$.

3. $B \subset B' \Rightarrow f^{-1}\langle B\rangle \subset f^{-1}\langle B'\rangle$

Soit $x \in f^{-1}\langle B\rangle$. Alors $\mathrm{f(x)} \in B$. Mais comme $B \subset B'$, $f(x) \in B'$et $x \in f^{-1}\langle B'\rangle$.

4. $f\langle A \cap A'\rangle \subset f\langle A\rangle \cap f\langle A'\rangle$

Soit $y \in f\langle A \cap A'\rangle$. Alors $\exists x{\in}A{\cap}A'$Soit $y \in f\langle A \cap A'\rangle$. Alors $\exists x \in A \cap A' \ tq \ y = f(x)$. Mais comme $x \in A$ et $x \in A'$, $f(x) \in f\langle A\rangle$ et $f(x) \in f\langle A'\rangle$, donc $y = f(x) \in f\langle A\rangle \cap f\langle A'\rangle$.

5. $f\langle A \cup A'\rangle = f\langle A\rangle \cup f\langle A'\rangle$

Soit $y \in f\langle A \cup A'\rangle$. Alors $\exists x \in A \cup A' \ tq \ y = f(x)$ et on a :

$$x \in A \cup A' \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \quad ou \\ x \in A' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in f\langle A\rangle \\ \quad ou \\ y \in f\langle A'\rangle \end{cases} \Leftrightarrow y \in f\langle A\rangle \cup f\langle A'\rangle$$

Soit $x \in E$

6. $f^{-1}\langle B \cap B'\rangle = f^{-1}\langle B\rangle \cap f^{-1}\langle B'\rangle$

$$x \in f^{-1}\langle B \cap B'\rangle \Leftrightarrow f(x) \in B \cap B' \Leftrightarrow f(x) \in B \ et \ f(x) \in B' \Leftrightarrow x \in f^{-1}\langle B\rangle \ et \ x \in f^{-1}\langle B'\rangle$$
$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}\langle B\rangle \cap f^{-1}\langle B'\rangle$$

7. $f^{-1}\langle B \cup B'\rangle = f^{-1}\langle B\rangle \cup f^{-1}\langle B'\rangle$

$$x \in f^{-1}\langle B \cup B'\rangle \Leftrightarrow f(x) \in B \cup B' \Leftrightarrow f(x) \in B \ ou \ f(x) \in B' \Leftrightarrow x \in f^{-1}\langle B\rangle \ ou \ x \in f^{-1}\langle B'\rangle$$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}\langle B\rangle \cup f^{-1}\langle B'\rangle$$

❖ *Preuve n°2 : Associativité de la composition*

Proposition

Soient E, F, G et H quatre ensembles non vides et soient $f: E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ trois applications.
Alors on a :

$$h\ o\ (g\ o\ f) = (h\ o\ g)\ o\ f$$

Soit $x \in E$. On a :

$$\big(h\ o\ (g\ o\ f)\big)(x) = h\big((g\ o\ f)(x)\big) = h\Big(g\big(f(x)\big)\Big)$$

Et

$$((h\ o\ g)o\ f)(x) = (h\ o\ g)\big(f(x)\big) = h\Big(g\big(f(x)\big)\Big)$$

❖ *Preuve n°3 : Bijection réciproque*

Proposition

Soient E, F et g trois ensembles non vides et soient $f: E \to F$ et $g : F \to G$ deux bijections. Alors $g\ o\ f$ est une bijection et $(g\ o\ f)^{-1} = f^{-1}o\ g^{-1}$.

- Montrons que $g\ o\ f$ est une bijection.
  - $g\ o\ f$ est injective : soient $x, x' \in E$ tq $(\mathrm{g\ o\ f})(\mathrm{x}) = (\mathrm{g\ o\ f})(\mathrm{x}')$. On a alors $g\big(f(x)\big) = g\big(f(x')\big)$ et donc $f(x) = f(x')$ car g est injective. Mais alors $x = x'$ car f est injective.
  - $g\ o\ f$ est surjective : on a $g\ o\ f\langle E\rangle = g\big\langle f\langle E\rangle\big\rangle = g\langle F\rangle$ car f est surjective. Mais alors $g\ o\ f\langle E\rangle = g\langle F\rangle = G$ car g est surjective.

- On a :

$$(g\ o\ f)^{-1}o(g\ of) = (f^{-1}og^{-1})o(gof) = f^{-1}oId_F of = f^{-1}of = Id_E$$

Et

$$(gof)o(gof)^{-1} = (gof)\ o(f^{-1}og^{-1}) = goId_F og^{-1} = gog^{-1} = Id_G$$