TRIGONOMÉTRIE ET FONCTIONS CIRCULAIRES

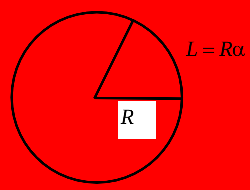
I) Le radian

Le radian est une unité de mesure des angles choisie de façon que l'angle plat (180°) mesure π radians.

Ainsi, un arc de cercle de rayon R et d'angle α (en radians) a pour longueur : $L = \alpha R$

Le tableau de proportionnalité ci-dessous permet de convertir un angle de x degrés en un angle de α radians (ou inversement).

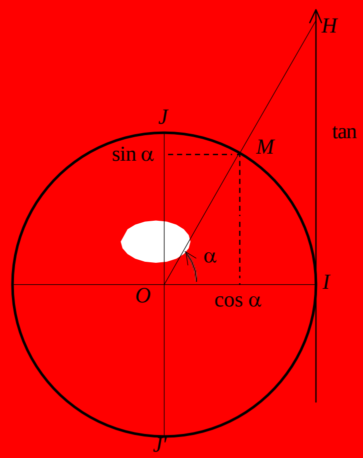
degrés	180	x
radians	π	α



Exemple : convertir 60° en radians : cela donne $\alpha = \dfrac{60\pi}{180} = \dfrac{\pi}{3}$ rad.

II) Cercle trigonométrique et définition du sinus, du cosinus et de la tangente

Munissons le plan d'un repère orthonormé $(O ; I, J)$. Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1 orienté dans le sens direct (sens contraire des aiguilles d'une montre). Soit M un point du cercle tel que α soit une mesure, en radians, de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right)$.



Définition du sinus et du cosinus :

On appelle cosinus et sinus de α, et on note cos α et sin α, les coordonnées du point M dans le repère $(O ; I, J)$: $\overrightarrow{OM} = (\cos\alpha)\,\overrightarrow{OI} + (\sin\alpha)\,\overrightarrow{OJ}$.

Définition de la tangente :

Soit Δ la droite (verticale) d'équation $x = 1$ dans le repère $(O ; I, J)$ et H le point défini par $(OM) \cap \Delta$.

Ce point H existe dès lors que Δ et (OM) ne sont pas parallèles, c'est-à-dire dès que M n'est ni en $J(0 ; 1)$, ni en $J'(0 ; -1)$, c'est-à-dire dès que $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

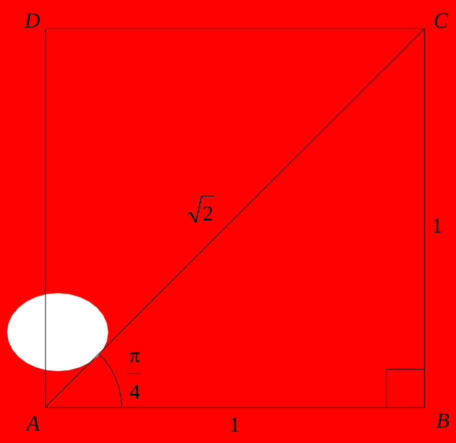
On appelle tangente de α, et on note tan α, l'ordonnée du point H dans le repère $(O ; I, J)$

Le tableau ci-dessous rappelle les valeurs du sinus, du cosinus et de la tangente pour des valeurs particulières de l'angle α (en radians) :

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	NON DÉFINIE !

<u>Démonstration</u> :

Pour calculer les valeurs de $\sin\frac{\pi}{4}$ et $\cos\frac{\pi}{4}$, on exploite la diagonale du carré (de côté 1) :

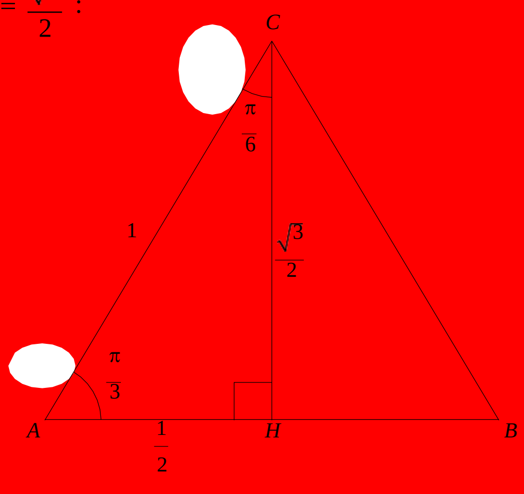


Dans le triangle ABC rectangle en B, on a : $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\frac{\pi}{4} = \frac{BC}{AB} = 1$$

Pour calculer les valeurs du sinus, du cosinus et de la tangente de $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$, on exploite naturellement la configuration du triangle équilatéral de côté 1 avec une de ses hauteurs qui au passage d'après le théorème de Pythagore mesure $\sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

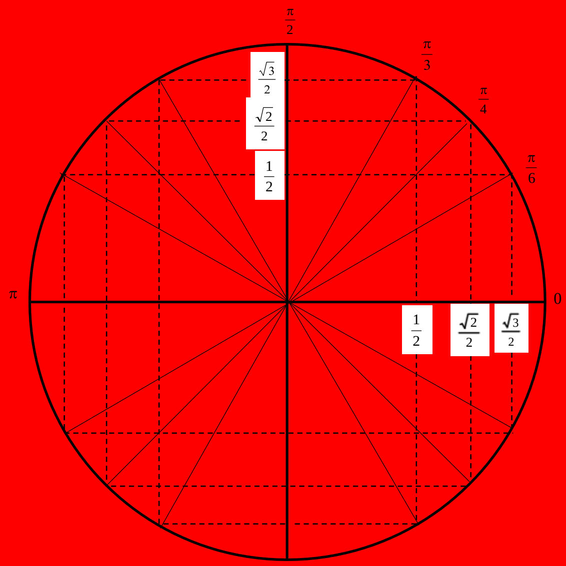


Dans le triangle AHC rectangle en H, on a :

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{AH}{AC} = \frac{1}{2} \;;\; \cos\frac{\pi}{6} = \frac{CH}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \;;\; \tan\frac{\pi}{6} = \frac{AH}{CH} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{CH}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \;;\; \cos\frac{\pi}{3} = \frac{AH}{AC} = \frac{1}{2} \;;\; \tan\frac{\pi}{3} = \frac{CH}{AH} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Pour les autres cas d'angles remarquables, on retrouve les valeurs du sinus, du cosinus et de la tangente par symétrie comme l'illustre le cercle ci-dessous :



<u>Propriétés élémentaires du sinus et du cosinus :</u>

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$$

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

<u>Exercice</u> : sachant que $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, calculer la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{12}$.

Nous disposons d'une relation entre le sinus et le cosinus :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

En particulier, avec $x = \frac{\pi}{12}$: $$\cos^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{\pi}{12} = 1$$

Calculons $\cos^2\frac{\pi}{12}$: $$\cos^2\frac{\pi}{12} = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{6+2\sqrt{12}+2}{16} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

D'où : $$\sin^2\frac{\pi}{12} = 1 - \cos^2\frac{\pi}{12} = 1 - \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

(Remarque : $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$ est bien un nombre positif puisque $2 > \sqrt{3}$)

Tenant compte de la relation $\sqrt{A^2} = |A|$, nous obtenons :

$$\left|\sin\frac{\pi}{12}\right| = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

Or, $\sin\frac{\pi}{12} \geq 0$ car $\frac{\pi}{12} \in [0 ; \pi]$. Donc : $$\sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

On peut remarquer que : $$4 - 2\sqrt{3} = 1 - 2\sqrt{3} + 3 = (1-\sqrt{3})^2$$

Donc : $$2 - \sqrt{3} = \frac{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}{2}$$

Et $$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\left|1-\sqrt{3}\right|}{2\sqrt{2}}$$

Et comme $\sqrt{3} > 1$: $$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\left|1-\sqrt{3}\right|}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

III) Fonctions sinus et cosinus

Définition : une fonction f est dite périodique, de période T si pour tout réel x on a : $f(x + T) = f(x)$.

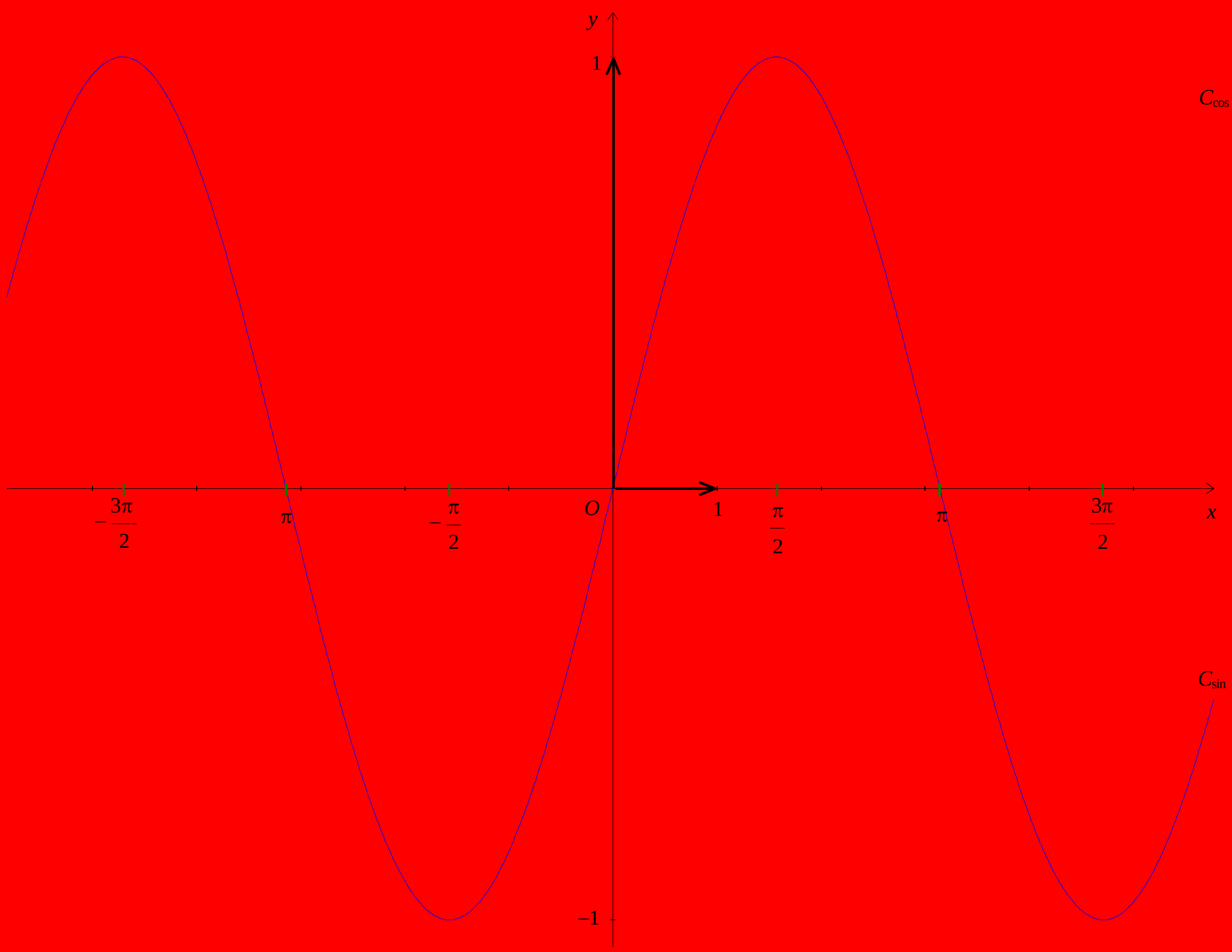
Notons que si T est une période, tout multiple de T en est une autre :

$$\dots = f(x + 2T) = f(x + T) = f(x) = f(x - T) = f(x - 2T) = \dots$$

Pour étudier (ou tracer) une fonction périodique, on se limite à une période.

Théorème : Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π. De plus, la fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire ($\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$)

Représentation graphique des fonctions sinus et cosinus :



Les courbes ci-dessus sont appelées des sinusoïdes.

Exercice : dresser le tableau de variations de la fonction sinus sur l'intervalle [-π ; π], et le tableau de variations de la fonction cosinus sur l'intervalle [0 ; π].

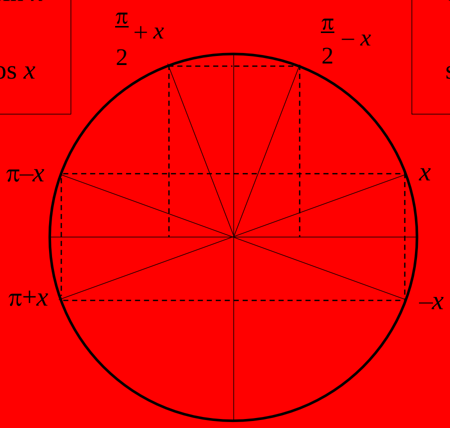
IV) Relations entre le sinus et le cosinus

Une lecture efficace du cercle trigonométrique permet de retrouver les relations suivantes :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$$

$$\cos(\pi-x)=-\cos x \qquad \sin(\pi-x)=\sin x$$



$$\cos(\pi+x)=-\cos x \qquad \sin(\pi+x)=-\sin x$$

$$\cos(-x)=\cos x \qquad \sin(-x)=-\sin x$$

V) Fonction tangente

Soit x un réel tel que $\cos x \neq 0$. On appelle tangente de x le réel noté **tan** x et défini par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

De ce fait, tan x est définie lorsque $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ (où k est un entier relatif).

VI) Fonctions dérivées des fonctions circulaires

Fonction	Dérivée
$\sin t$	$\cos t$
$\cos t$	$-\sin t$
$\sin(\omega t + \varphi)$	$\omega \cos(\omega t + \varphi)$

Fonction	Dérivée
$\cos(\omega t + \varphi)$	$-\omega \sin(\omega t + \varphi)$
$\tan t$	$1 + \tan^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t}$

Exercice 1 : en utilisant la formule de la dérivée d'un quotient, démontrer le résultat ci-dessus concernant la dérivée de la fonction tangente.

Exercice 2 : dériver les fonctions suivantes : $f(x) = \sin 2x$; $g(x) = 2 \sin x \cos x$; $h(x) = \sin^2 x$

VII) Formulaire de trigonométrie

Formules d'addition

$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$	$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$	$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

En utilisant ces formules d'addition et en mettant a=b , on déduit les formules de duplication ci-après: Noter que l'on a utilisé la formule: $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ pour trouver les deux dernières égalité dans cos2a.

Formules de duplication

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$ $\qquad$ $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

En utilisant les formules de duplication de cos2a, on obtient les formules de linéarisation suivantes. On peut déduire d'autres formules de linéarisation grâce aux nombres complexes.

Formules de linéarisation

$\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos 2a}{2}$ $\qquad$ $\sin^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{2}$

VIII) Résolution des équations $\cos x = a$ et $\sin x = a$ $(x \in \mathbb{R})$

Si $a \notin [-1 ; 1]$ alors ces équations n'ont pas de solutions (car $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$) Si $a \in [-1 ; 1]$, elles en ont une infinité :

Pour $\cos x = a$: on résout déjà l'équation sur l'intervalle $[0 ; 2\pi[$ en cherchant à l'aide du cercle trigonométrique les deux angles α et $-\alpha$ dont le cosinus vaut a. On trouve les autres solutions de l'équation en ajoutant les multiples de 2π.

$$\boxed{\cos x = a \iff x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = -\alpha + 2k\pi ,\ k \in \mathbb{Z}}$$

Pour $\sin x = a$: on résout déjà l'équation sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ en cherchant à l'aide du cercle trigonométrique les deux angles α et $\pi - \alpha$ dont le sinus vaut a. On trouve les autres solutions de l'équation en ajoutant les multiples de 2π.

$$\boxed{\sin x = a \iff x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \alpha + 2k\pi ,\ k \in \mathbb{Z}}$$

Exercice : Résoudre les équations suivantes :

$\cos x = -0{,}5$ pour $x \in \mathbb{R}$; $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

On résout l'équation : $cos x = -0.5 = -\frac{1}{2}$

On Remarque que $-\frac{1}{2} = \cos(\frac{2\pi}{3})$, donc notre équation est équivalente à :

$$cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

On obtient ainsi toutes les solutions sur $\mathbb{R}$.

Les solutions sur l'intervalle $]-\pi, \pi]$ sont : $-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

Par contre sur l'intervalle $[0,2\pi[$, on ne peut pas prendre $-\frac{2\pi}{3}$ puisque cette solution n'appartient pas à cet intervalle, donc on choisira plutôt $\frac{4\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi$ qui correspond au même point sur le cercle trigonométrique que $-\frac{2\pi}{3}$

Donc sur l'intervalle $[0,2\pi[$ les solutions sont : $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$

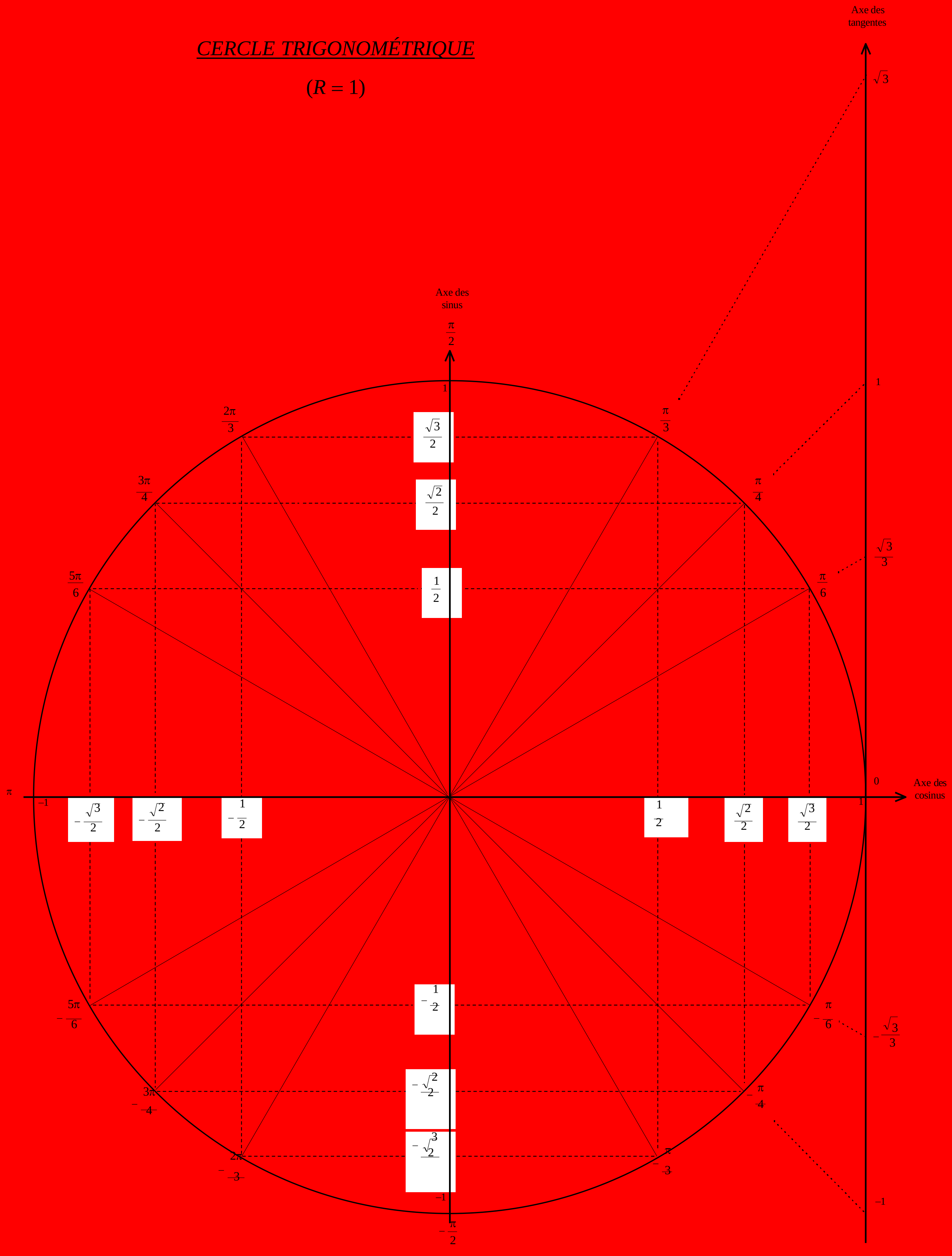
Remarque :

Pour résoudre une équation trigonométrique, on commence par la résolution sur $\mathbb{R}$, ensuite on choisit uniquement les solutions appartenant à l'intervalle demandé.

Par conséquent, il est important de savoir placer sur le cercle trigonométrique toutes les valeurs usuelles des angles. (Voir le cercle trigonométrique ci-après).

CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

$(R = 1)$



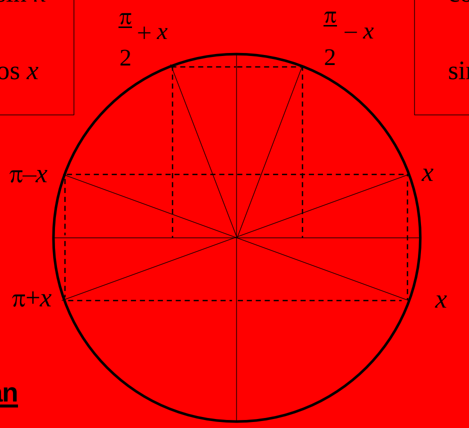
TRIGONOMÉTRIE : FORMULAIRE

Angles associés

Une lecture efficace du cercle trigonométrique permet de retrouver les relations suivantes :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$$



$$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \sin(-x) = -\sin x$$

Relations entre cos, sin et tan

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Formules d'addition

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \qquad \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \qquad \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \qquad \tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

Formules de duplication

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \qquad \sin(2a) = 2 \sin a \cos a \qquad \tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

Formules de linéarisation

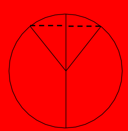
$$\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2} \qquad \sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2} \qquad \tan^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{1+\cos(2a)}$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b)+\cos(a+b)] \qquad \cos a \sin b = \frac{1}{2}[\sin(a+b)-\sin(a-b)] \qquad \sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

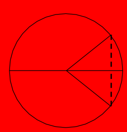
Résolution d'équations trigonométriques



sin U = sin V

$$\cos U = \cos V \iff (U = V\ [2\pi] \text{ ou } U = -V\ [2\pi])$$

$$\sin U = \sin V \iff (U = V\ [2\pi] \text{ ou } U = \pi - V\ [2\pi])$$



cos U = cos V

Expression du cosinus, sinus et tangente en fonction de la tangente de l'angle moitié

Si $t = \tan\frac{a}{2}$, on a : $\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $\sin a = \frac{2t}{1+t^2}$; $\tan a = \frac{2t}{1-t^2}$