Signaux et Systèmes physiques

Chapitre 4 – Oscillations libres, amorties

1) Equations du mouvement

Dans ce cas, les frottements de l'air sont pris en compte.

Soit la force de frottement fluide : $\boxed{\vec{f} = -\alpha\vec{v}}$

Avec $\vec{v}$ le vecteur vitesse de la masse et α la constante de frottement fluide en N.s/m

En appliquant le PFD au point M :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{f} \Leftrightarrow m\ddot{x}\overrightarrow{e_x} = -mg\overrightarrow{e_y} + R\overrightarrow{e_y} - kx\overrightarrow{e_x} - \alpha\dot{x}\overrightarrow{e_x}$$

En projetant sur l'axe (O_x) :

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) - \alpha\dot{x}(t)$$

En posant $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $2\lambda = \frac{\alpha}{m}$, l'équation devient :

$$\ddot{x}(t) + 2\lambda\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

La solution de l'équation différentielle s'écrit sous la forme :

$$\boxed{x(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi)}$$

Avec $\omega \neq \omega_0$, la pseudo-pulsation du système.

Soit le système d'équations suivant : $\begin{cases} x(0) = A\cos(\varphi) = x_0 > 0 \\ \dot{x}(0) = -A\lambda\cos(\varphi) - A\omega\sin(\varphi) = 0 \end{cases}$

L'équation finale s'écrit alors :

$$\boxed{x(t) = \frac{x_0\omega_0}{\omega} e^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi)} \quad avec\ \omega = \arccos\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

Dans le cas d'un régime pseudo-périodique :

- Mouvement de la masse : oscillations sinusoïdales dont l'amplitude décroit exponentiellement avec le temps.
- Frottements de faible amplitude : apparition d'oscillations mais diminution de l'amplitude avec le temps.

Soit la pseudo-période :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

Soit le temps caractéristique d'amortissement :

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{2m}{\alpha}}$$