Mathématiques & Abstraction

Chapitre 1 : Notions de logique et raisonnement

❖ *Preuve n°1 : La contraposée*

> Théorème
>
> L'implication $P \Rightarrow Q$ et sa contraposée sont équivalentes :
>
> $$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$$

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \neg(P \land \neg Q) \Leftrightarrow \neg(\neg Q \land \neg\neg P) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$$

❖ *Preuve n°2 : Equivalences*

> Théorème
>
> Les équivalences suivantes sont vraies :
>
> 1. $\neg(P \land Q) \Leftrightarrow (\neg P) \lor (\neg Q)$
> 2. $\neg(P \lor Q) \Leftrightarrow (\neg P) \land (\neg Q)$
> 3. $\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \land \neg Q \lor$

Les équivalences n^{os} 1 et 2 sont établies en comparant les tables de vérité

Pour l'équivalence n°3 :

$$\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \neg(\neg(P \land \neg Q)) \Leftrightarrow P \land \neg Q \lor$$

❖ *Preuve n°3 : Savoir faire une récurrence*

Montrons la proposition : $\forall n \in N^*, \sum_{p=1}^{n} p = \frac{n(n+1)}{2}$

- Initialisation : on montre l'égalité pour n=1

On a $\sum_{p=1}^{n} p = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$

- Hérédité :

On suppose $\sum_{p=1}^{n} p = \frac{n(n+1)}{2}$ vraie pour un certain n (HR).

Montrons alors $\sum_{p=1}^{n+1} p = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ (Astuce : Faire apparaître la propriété au rang n.

$$\sum_{p=1}^{n+1} p = \sum_{p=1}^{n} p + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = (n+1)\left(\frac{n+2}{2}\right)$$

- Conclusion : la propriété $\sum_{p=1}^{n} p = \frac{n(n+1)}{2}$ est donc vrai pour tout n entier non-nul.