Modellierung und Simulation in der Mechatronik - Weihnachtsprojekt

Yanpeng Mei

1. EINFÜHRUNG

Der CRS 465-Roboter wird als planer 2-Arm-Roboter angenommen. Die Arme werden als runde Stäbe mit Masse m_1, m_2 und Länge L_1, L_2 modelliert.

Zu sehen ist eine schematische Darstellung des Roboters.

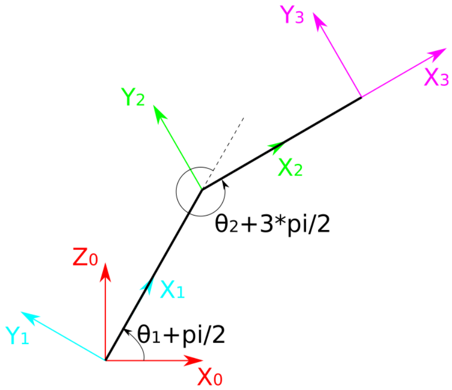

Fig. 1. Koordinaten

2. MODELLIERUNG

2.1 DH-Tabelle

Die DH-Tabelle der ersten 3 Achsen des Roboters ist:

a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\theta_1 + \frac{\pi}{2}$
L_1	0	0	$\theta_2 + \frac{\pi}{2}$
L_2	0	0	0

2.2 Kinematik

Benutze hier "Modified DH-Konvention".

$$T_{01} = \begin{pmatrix} -\sin\theta_1 & -\cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$T_{12} = \begin{pmatrix} \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & L_1 \\ -\cos\theta_2 & \sin\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$T_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & L_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$T_{02} = T_{01}T_{12} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) & 0 & -L_1\sin\theta_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) & 0 & L_1\cos\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Die Positionen der Schwerpunkte von arm i (r_1 und r_2) und Endeffektor (r_3) in der Basis kann berechnet werden als:

$$r_1 = T_{01}\begin{pmatrix}\frac{L_1}{2} & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}\frac{-L_1\sin\theta_1}{2} & 0 & \frac{L_1\cos\theta_1}{2} & 1\end{pmatrix}^T \tag{5}$$

$$r_2 = T_{02}\begin{pmatrix}\frac{L_2}{2} & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}\frac{L_2\cos(\theta_1+\theta_2)}{2} - L_1\sin\theta_1 & 0 & \frac{L_2\sin(\theta_1+\theta_2)}{2} + L_1\cos\theta_1 & 1\end{pmatrix}^T \tag{6}$$

$$r_3 = T_{02}\begin{pmatrix}L_2 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}L_2\cos(\theta_1+\theta_2) - L_1\sin\theta_1 & 0 & L_2\sin(\theta_1+\theta_2) + L_1\cos\theta_1 & 1\end{pmatrix}^T \tag{7}$$

Dann sind die Jacobimatrizen des Roboters:

$$J_{T1} = \frac{\partial p_1}{\partial y} = \begin{pmatrix}\frac{-L_1\cos\theta_1}{2} & 0\\ 0 & 0\\ \frac{-L_1\sin\theta_1}{2} & 0\end{pmatrix} \tag{8}$$

$$J_{T2} = \frac{\partial p_2}{\partial y} = \begin{pmatrix}-\frac{L_2\sin(\theta_1+\theta_2)}{2} - L_1\cos\theta_1 & -\frac{L_2\sin(\theta_1+\theta_2)}{2}\\ 0 & 0\\ \frac{L_2\cos(\theta_1+\theta_2)}{2} - L_1\sin\theta_1 & \frac{L_2\cos(\theta_1+\theta_2)}{2}\end{pmatrix} \tag{9}$$

$$J_{T3} = \frac{\partial p_3}{\partial y} = \begin{pmatrix}-L_2\sin(\theta_1+\theta_2) - L_1\cos\theta_1 & -L_2\sin(\theta_1+\theta_2)\\ 0 & 0\\ L_2\cos(\theta_1+\theta_2) - L_1\sin\theta_1 & L_2\cos(\theta_1+\theta_2)\end{pmatrix} \tag{10}$$

Nach der Beobachtung von Fig.1 wissen wir:

$$J_{R1} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \tag{11}$$

$$J_{R2} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \tag{12}$$

Damit kann die Geschwindigkeitsbeziehung geschrieben werden als:

$$\begin{pmatrix}\dot{x_3}\\ \dot{y_3}\\ \dot{z_3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-L_2\sin(\theta_1+\theta_2) - L_1\cos\theta_1 & -L_2\sin(\theta_1+\theta_2)\\ 0 & 0\\ L_2\cos(\theta_1+\theta_2) - L_1\sin\theta_1 & L_2\cos(\theta_1+\theta_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\theta_1}\\ \dot{\theta_2}\end{pmatrix} \tag{13}$$

2.3 Bewegunsgleichung

Wir wählen die geeignete generalisierte Koordinaten als:

$$y = \begin{pmatrix}\theta_1 & \theta_2\end{pmatrix}^T \tag{14}$$

Dann bestimmen wir Schritt für Schritt die Bewegungsgleichung des Roboters mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichung . Die Rotation Matrizen der Schwerpunkte der Arme sind:

$$S_{01} = \begin{pmatrix}-\sin\theta_1 & -\cos\theta_1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0\end{pmatrix} \tag{15}$$

$$S_{02} = \begin{pmatrix}\cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) & 0\\ 0 & 0 & -1\\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) & 0\end{pmatrix} \tag{16}$$

Die Trägheitstensor von Arm i bzgl. Schwerpunkt sind:

$$I_{1s} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_1 L_1^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_1 L_1^2}{12} \end{pmatrix} \tag{17}$$

$$I_{1s} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2 L_2^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2 L_2^2}{12} \end{pmatrix} \tag{18}$$

Die Trägheitsmomente der zwei Arme in Basiskoordination sind:

$$I_{1s,0} = S_{01} I_{1s} S_{01}^T = \begin{pmatrix} \frac{m_1 L_1^2 \cos^2\theta_1}{12} & 0 & \frac{m_1 L_1^2 \sin 2\theta_1}{24} \\ 0 & \frac{m_1 L_1^2}{12} & 0 \\ \frac{m_1 L_1^2 \sin 2\theta_1}{24} & 0 & \frac{m_1 L_1^2 \sin^2\theta_1}{12} \end{pmatrix} \tag{19}$$

$$I_{2s,0} = S_{02} I_{2s} S_{02}^T = \begin{pmatrix} \frac{m_2 L_2^2 \sin^2(\theta_1+\theta_2)}{12} & 0 & -\frac{m_2 L_2^2 \sin(2\theta_1+2\theta_2)}{24} \\ 0 & \frac{m_2 L_2^2}{12} & 0 \\ -\frac{m_2 L_2^2 \sin(2\theta_1+2\theta_2)}{24} & 0 & \frac{m_2 L_2^2 \cos^2(\theta_1+\theta_2)}{12} \end{pmatrix} \tag{20}$$

Nach der Definition sind die Massenmatrizen der Arme:

$$M_i = m_i J_{Tis}^T J_{Tis} + J_{Ris}^T I_{is,0} J_{Ris} \tag{21}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{m_1 L_1^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{22}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} m_2(\frac{L_2^2}{3} + L_1^2 + L_1 L_2 \sin\theta_2) & m_2(\frac{L_2^2}{3} + \frac{L_1 L_2 \sin\theta_2}{2}) \\ m_2(\frac{L_2^2}{3} + \frac{L_1 L_2 \sin\theta_2}{2}) & \frac{m_2 L_2^2}{3} \end{pmatrix} \tag{23}$$

$$M = M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} m_2(\frac{L_2^2}{3} + L_1^2 + L_1 L_2 \sin\theta_2) + \frac{m_1 L_1^2}{3} & m_2(\frac{L_2^2}{3} + \frac{L_1 L_2 \sin\theta_2}{2}) \\ m_2(\frac{L_2^2}{3} + \frac{L_1 L_2 \sin\theta_2}{2}) & \frac{m_2 L_2^2}{3} \end{pmatrix} \tag{24}$$

Jetzt berechnen wir jede Elemente der Dämpfungsmatrix. Das $(k,j)^{th}$ Element von D ist definiert als:

$$D_{kj} = \sum_{i=1}^{n} h_{ijk}(y)\dot{y}_i \tag{25}$$

für $k = 1, j = 1$

$$\begin{aligned} D_{11} &= \sum_{i=1}^{2} (\frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_i} + \frac{\partial M_{1i}}{\partial \theta_1} - \frac{\partial M_{i1}}{\partial \theta_1}) \\ &= \frac{1}{2} m_2 L_1 L_2 \cos\theta_2 \dot{\theta}_2 \end{aligned} \tag{26}$$

für $k = 1, j = 2$

$$\begin{aligned} D_{12} &= \sum_{i=1}^{2} (\frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_i} + \frac{\partial M_{1i}}{\partial \theta_2} - \frac{\partial M_{i2}}{\partial \theta_1}) \\ &= \frac{1}{2} m_2 L_1 L_2 \cos\theta_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{aligned} \tag{27}$$

für $k = 2, j = 1$

$$
\begin{aligned}
D_{21} &= \sum_{i=1}^{2}(\frac{\partial M_{21}}{\partial \theta_i} + \frac{\partial M_{2i}}{\partial \theta_2} - \frac{\partial M_{i1}}{\partial \theta_2}) \\
&= \frac{1}{2} m_2 L_1 L_2 \cos\theta_2 (\dot{\theta_1})
\end{aligned} \tag{28}
$$

für $k = 2, j = 2$

$$
\begin{aligned}
D_{22} &= \sum_{i=1}^{2}(\frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_i} + \frac{\partial M_{2i}}{\partial \theta_2} - \frac{\partial M_{i2}}{\partial \theta_2}) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{29}
$$

$$
D(y, dot(y)) = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} \tag{30}
$$

Die potentielle Energie V ist:

$$
\begin{aligned}
V &= \sum_{i=1}^{2} m_i g P_{is,0} \\
&= m_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{L_1}{2}\sin\theta_1 \\ 0 \\ \frac{L_1}{2}\cos\theta_1 \end{pmatrix} + m_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{L_2}{2}\cos(\theta_1+\theta_2) - L_1\sin\theta_1 \\ 0 \\ \frac{L_1}{2}\sin(\theta_1+\theta_2) + L_1\cos\theta_1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{L_1}{2} m_1 g \cos\theta_1 + m_2 g (\frac{L_2}{2}\sin(\theta_1+\theta_2) + L_1\cos\theta_1)
\end{aligned} \tag{31}
$$

Gravitationsvektor ist als g(y) definiert.

$$
\begin{aligned}
g(y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial \theta_1} & \frac{\partial V}{\partial \theta_2} \end{pmatrix}^T \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{L_1}{2} m_1 g \sin\theta_1 + m_2 g (\frac{L_2}{2}\cos(\theta_1+\theta_2) - L_1\sin\theta_1) \\ \frac{L_2}{2} m_2 g \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{32}
$$

Das Reibmoment bestehet aus viskoser Reibung und statischer Reibung:

$$
\tau_{Reib} = F_v \dot{y} + F_s = \begin{pmatrix} F_{v1} & 0 \\ 0 & F_{v2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta_1} \\ \dot{\theta_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{s1} \\ F_{s2} \end{pmatrix} \tag{33}
$$

Schließlich schreiben wir die Bewegungsgleichung als:

$$
M(y)\ddot{y} + D(y, \dot{y})\dot{y} + g(y) = \tau_M - \tau_{Reib} \tag{34}
$$

Durch Einsatz die Parameters des Roboters in die Lagrangeschen Gleichung, können wir die Bewegungsgleichung festlegen.

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 0.5\sin\theta_2 + 0.731 & 0.25\sin\theta_2 + 0.208 \\ 0.25\sin\theta_2 + 0.208 & 0.208 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta_1} \\ \ddot{\theta_2} \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 0.25\cos\theta_2\dot{\theta_2} & 0.25\cos\theta_2(\dot{\theta_1} + \dot{\theta_2}) \\ -0.25\cos\theta_2\dot{\theta_2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta_1} \\ \dot{\theta_2} \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 6.131\cos(\theta_1+\theta_2) - 14.323\sin\theta_1 \\ 6.131\cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \tau_{M1} \\ \tau_{M2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta_1} \\ \dot{\theta_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{35}
$$

2.4 Trajektorie

Wir nehmen an, dass die Winkel θ_1 und θ_2 zeitlich Polynom mit Ordnung 3 sind.

$$\theta_1 = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \tag{36}$$

$$\theta_2 = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 \tag{37}$$

Damit berechnen wir erste und zweite Ableitungen der Winkel:

$$\begin{pmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & t_0^3 \\ 0 & 1 & 2t_0 & 3t_0^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_0 \\ 1 & t_s & t_s^2 & t_s^3 \\ 0 & 1 & 2t_s & 3t_s^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1^0 \\ \dot{\theta}_1^0 \\ \ddot{\theta}_1^0 \\ \theta_1^s \\ \dot{\theta}_1^s \\ \ddot{\theta}_1^s \end{pmatrix} \tag{38}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & t_0^3 \\ 0 & 1 & 2t_0 & 3t_0^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_0 \\ 1 & t_s & t_s^2 & t_s^3 \\ 0 & 1 & 2t_s & 3t_s^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_2^0 \\ \dot{\theta}_2^0 \\ \ddot{\theta}_2^0 \\ \theta_2^s \\ \dot{\theta}_2^s \\ \ddot{\theta}_2^s \end{pmatrix} \tag{39}$$

wobei t_0, θ_i^0 die Anfangszeit und Anfangsbedingung sind und t_s θ_i^s die Endzeit und Endebedingung sind.

Wir setzen die Position des Endeffektors ein:

$$\begin{pmatrix} L_2 \cos(\theta_1^0 + \theta_2^0) - L_1 \sin \theta_1^0 \\ 0 \\ L_2 \sin(\theta_1^0 + \theta_2^0) + L_1 \cos \theta_1^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0.4 \end{pmatrix} \tag{40}$$

$$\begin{pmatrix} L_2 \cos(\theta_1^s + \theta_2^s) - L_1 \sin \theta_1^s \\ 0 \\ L_2 \sin(\theta_1^s + \theta_2^s) + L_1 \cos \theta_1^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0 \\ 0.4 \end{pmatrix} \tag{41}$$

Es gibt mehr als eine Lösung, für die Vereinfachung nehmen wir die Folgende Lösung:

$$\begin{cases} \theta_1^0 = \dot{\theta_1}^0 = 0 \\ \theta_2^0 = \dot{\theta_2}^0 = 0 \end{cases} \tag{42}$$

$$\begin{cases} \theta_1^s = -14.5 \\ \theta_2^s = 16 \\ \dot{\theta_1}^s = 0 \\ \dot{\theta_2}^s = 0 \\ t_0 = 0 \\ t_s = 1 \end{cases} \tag{43}$$

Und die anguläre Trajektorie der zwei Gelenke sind dann:

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -43.5t^2 + 29t^3 \\ 48t^2 - 32t^3 \end{pmatrix} \tag{44}$$

3. SIMULINK MODELL

Das Numerische Modell ist nach der folgende Figur aufgebaut:

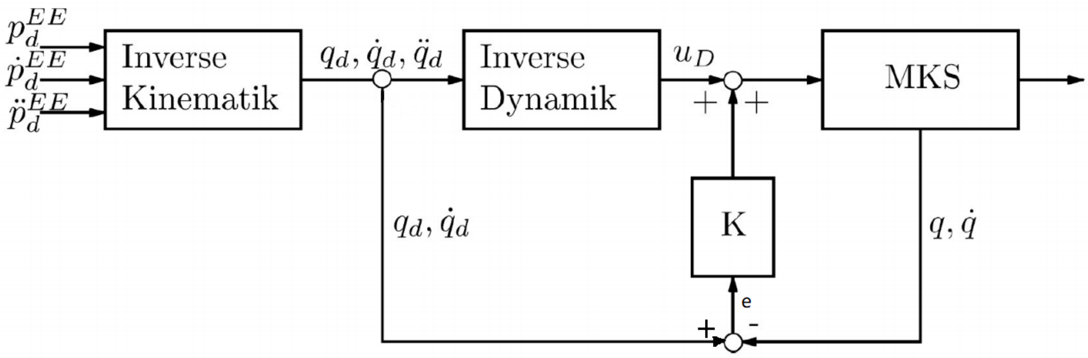

Fig. 2. Schematische Darstellung des Reglerstruktur

Die Struktur des Systems in Simulink ist:

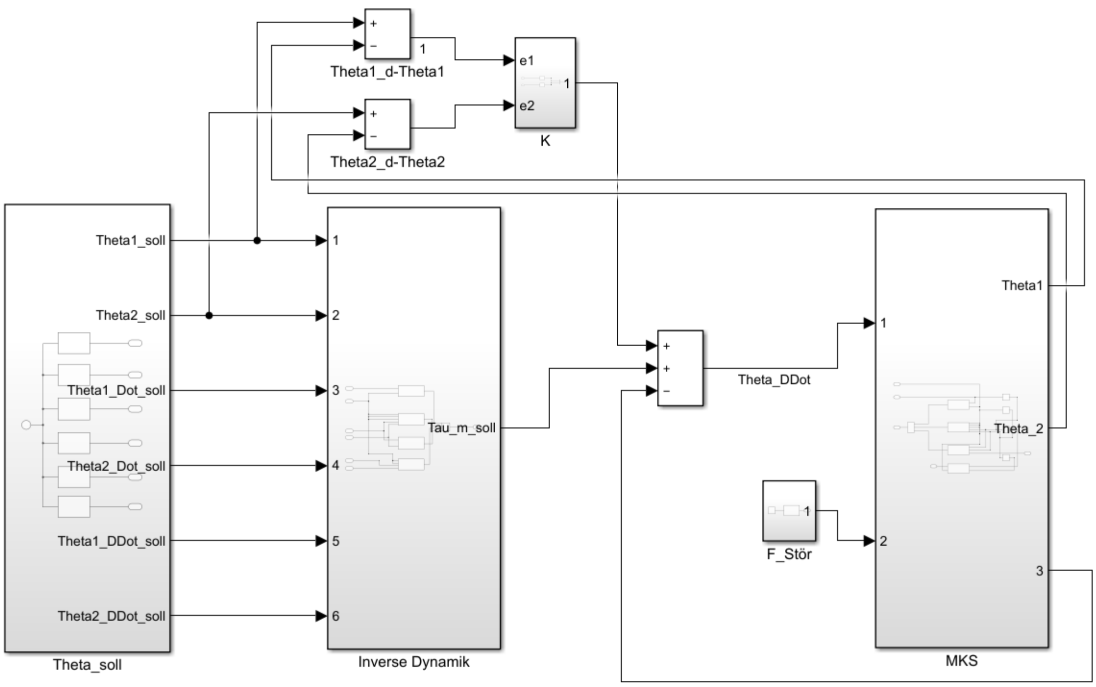

Fig. 3. Struktur des Systems in Simulink

4. ERGEBNISSE

Die Beziehung zwischen $q1_{soll}$ und $q1_{ist}$ sieht so aus, wenn wir keinen PID-Regeler benutzen

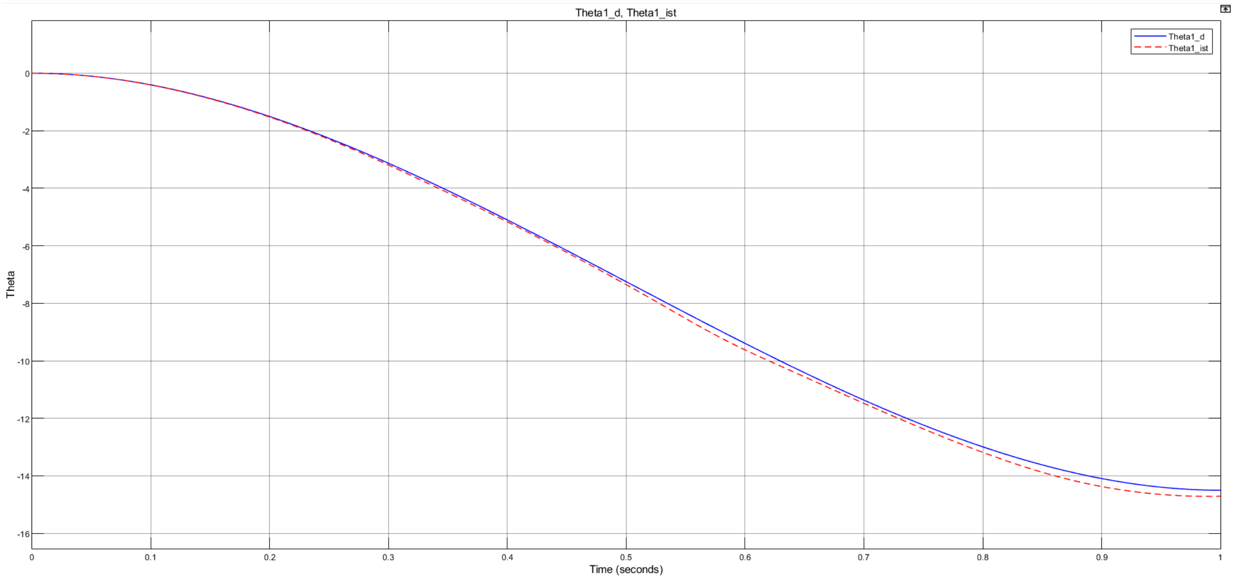

Fig. 4. $q1_{soll}$ und $q1_{ist}$ ohne Regler

Die Beziehung zwischen $q2_{soll}$ und $q2_{ist}$ sieht so aus, wenn wir keinen PID-Regeler benutzen

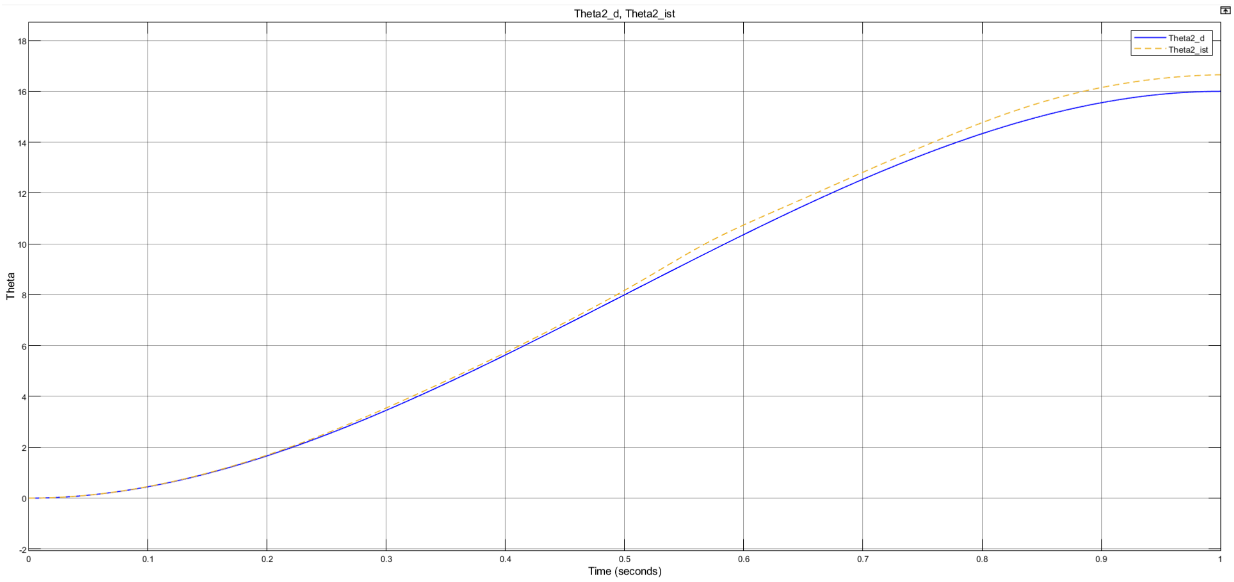

Fig. 5. $q2_{soll}$ und $q2_{ist}$ ohne Regler

Die Beziehung zwischen $q1_{soll}$ und $q1_{ist}$ sieht so aus, wenn wir einen PID-Regeler benutzen

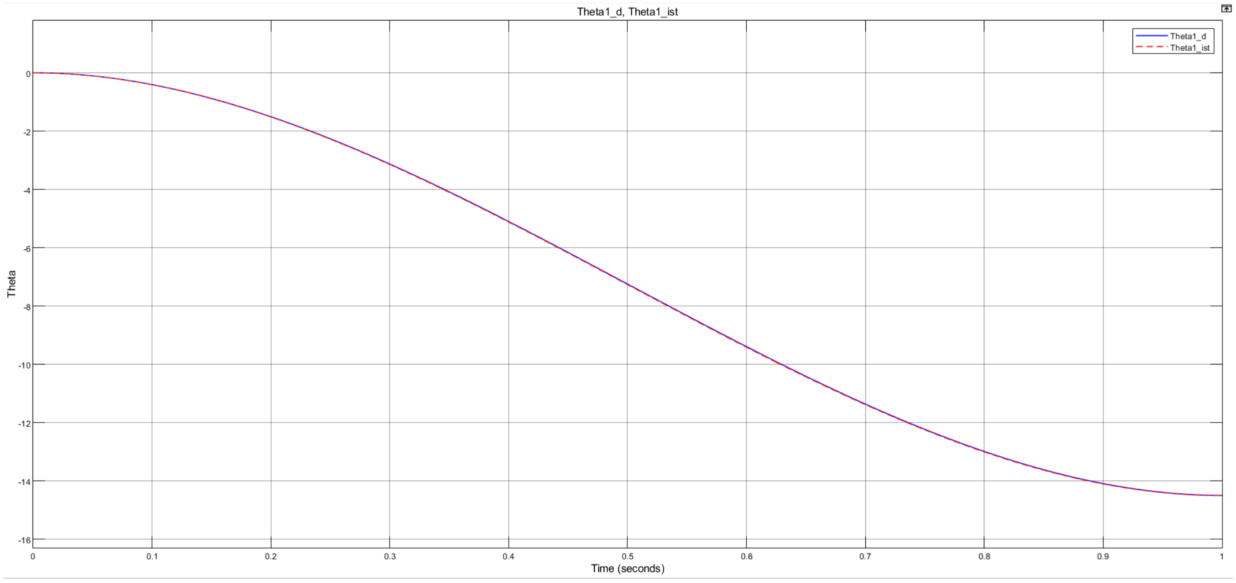

Fig. 6. $q1_{soll}$ und $q1_{ist}$ mit Regler

Die Beziehung zwischen $q2_{soll}$ und $q2_{ist}$ sieht so aus, wenn wir einen PID-Regeler benutzen

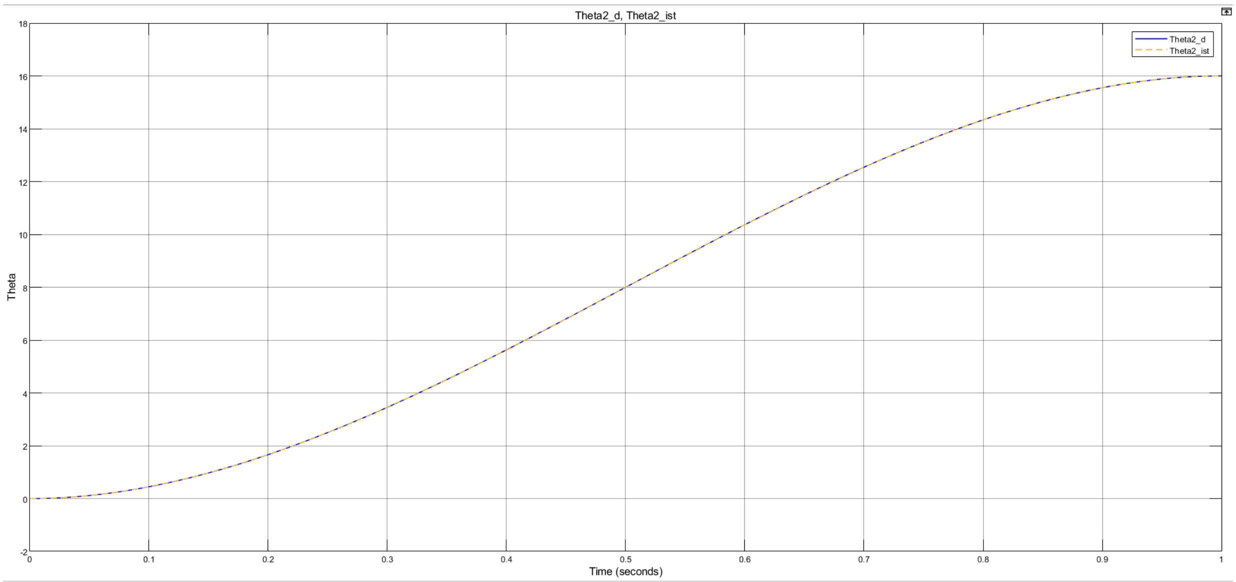

Fig. 7. $q2_{soll}$ und $q2_{ist}$ mit Regler

Folgerung: 2 PID-Regler funktionierert sehr gut, um die Störungen von Gelenken unterzudrücken