

# 双臂电桥测量低电阻

唐延宇 PB22030853

2024 年 1 月 28 日

## 摘要

在低电阻测量中,导线接触电阻往往不能忽略,而应设计方案消除它们的影响.本实验通过四端接法和双臂电桥电路实现了较为精确的低电阻测量,并进而测定了铜、铝棒的电阻率.

关键词:四端接法 双臂电桥 电阻率 低电阻

## 1 引言

### 1.1 实验目的

在半导体的制造与加工、集成电路设计等与电子学相关的领域内,如何精确测量低电阻(电阻值小于  $1\Omega$  乃至更低)始终是制作、检验产品特性过程中必须面对的一个重要课题.由于常规生产工艺下产出的导线、接口等电路元器件本身的阻值往往已与待测电阻处于同一数量级,若仍按照传统思路将其忽略,将不可避免地给测量结果带来较大误差.本实验的目的即是采用四端接法以及双臂电桥,设计能够较为精确地测量低电阻的电路,并进行测量实践,进而感受四端接法(四探针法)这一当前在半导体生产中广为使用的工艺监测手段的显著效用.

### 1.2 实验原理 [1, 2]

如1.1节所述,如果采用传统的伏安法测定低电阻,误差将会比较难以接受.这是因为,从等效电路图(图2)中,我们可以看出电压表两端的压降实为  $R_{ix1}, R_x, R_{ix2}$  三电阻串联两端的电压降.其中  $R_{ix1}, R_{ix2}$  表示电路的接触电阻,它们与  $R_x$  处于同一量级,造成了电压测量的误差.而与电压表内阻相比,导线电阻  $R_{x1}, R_{x2}$  较小,可以忽略它们的分流效应,进而认为电流测量基本准确.

在此基础上,我们可以给出如图3所示的四端接法电路,将待测电阻与主回路的接触点置于电压测量回路之外,这样便消除了接触电阻对测量的影响,其等效电路图如图4所示.

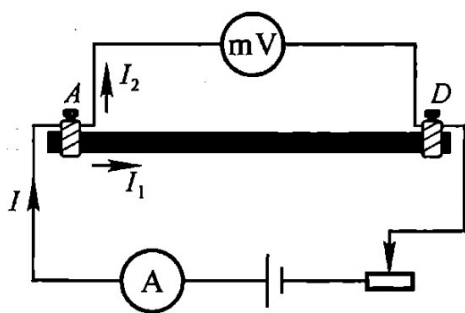


图 1: 两端接法电路原理图

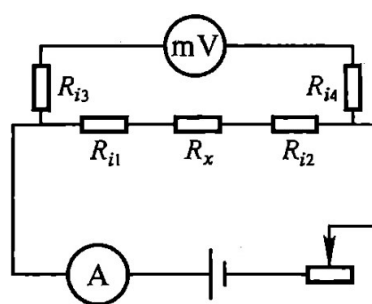


图 2: 两端法等效电路图

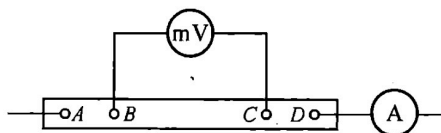


图 3: 四端接法电路原理图

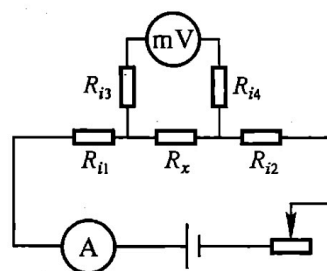


图 4: 四端法等效电路图

为进一步提高测量的精确度, 我们可以考虑使用较为灵敏的电桥法配合四端接法, 进行电阻测量, 这样的测电阻装置便被称为双臂电桥. 其电路原理图与等效电路图分别如图5,6所示.

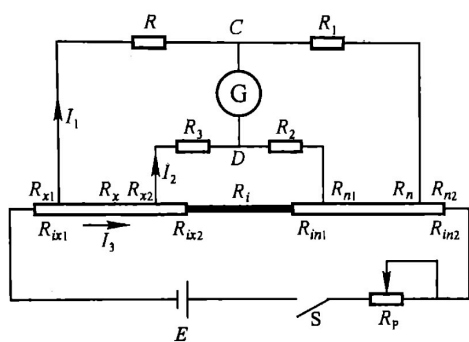


图 5: 双臂电桥电路图

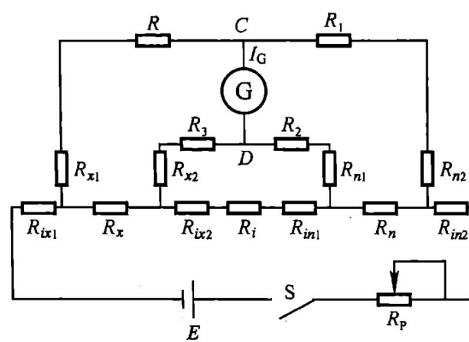


图 6: 双臂电桥等效电路图

当电桥平衡, 亦即检流计示数  $I_G = 0$  时, 有 C, D 两点等电势:  $\varphi_C = \varphi_D$ . 记  $R_i$  为  $R_x$  与  $R_n$  的接触电阻  $R_{ix2}, R_{in1}$  及其之间连续电阻的和. 此时, 据基尔霍夫定律, 分析图中标出的三个回路, 可得:

$$\begin{cases} I_1 R = I_3 R_x + I_2 R_3 \\ I_1 R_1 = I_3 R_n + I_2 R_2 \\ (I_3 - I_2) R_i = I_2 (R_2 + R_3) \end{cases} \quad (1)$$

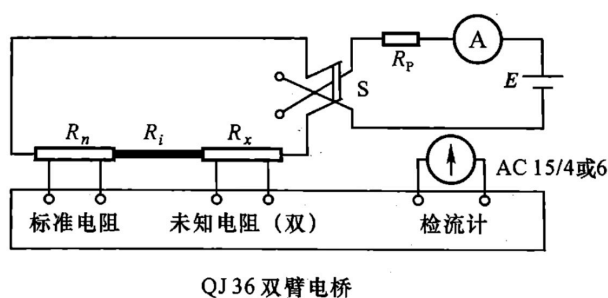


图 7: 电路接线示意图

解方程, 得到:

$$R_x = \frac{R}{R_1} \cdot R_n + \frac{R \cdot R_i}{R_3 + R_2 + R_i} \left( \frac{R_2}{R_1} - \frac{R_3}{R} \right) \quad (2)$$

若有:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_3}{R} \quad (3)$$

则 (2) 式中的  $R_i$  项可消去, 从而得到:

$$R_x = \frac{R}{R_1} \cdot R_n \quad (4)$$

在具体实验中, 即便使用联动转换开关, 也很难保证 (3) 式的条件成立. 因而在实验中应使用尽可能粗的导线连接  $R_x$  与  $R_n$ , 从而使  $R_i$  尽可能小, 进而降低 (2) 式中第二项带来的误差.

## 2 实验内容

### 2.1 实验仪器及参数

本实验使用的仪器主要有: QJ36 型双臂电桥 (0.02 级); 直流复射式检流计 (AC15/4 或 /6 型); JWY 型直流稳压电源 (5 A 15 V); 低电阻四端测试架; 待测铜、铝棒各一根; 5 A 量程电流表; 千分尺 (最大允差  $\Delta_D = 0.004 \text{ mm}$ ); 限流电阻; 双刀双掷换向开关; 超低电阻连接线; 标准电阻 ( $1 \times 10^{-3} \Omega$ , 0.01 级); 导线若干.

### 2.2 实验步骤

1. 如图7所示连接电路, 将铜棒安装至四端测试架上, 调节右侧电压头位置, 使得待测铜棒长度为 30 cm, 并设置电阻  $R_1, R_2$  为  $1000 \Omega$ .
2. 先粗调, 后细调; 先低精度, 后高精度调节电阻  $R$  值, 使检流计示数为零, 记录此时电阻  $R$  读数. 调节换向开关反向后再次使检流计示数为零, 记录此时电阻  $R$  读数. 改变电压头、电流头连接状态, 重复上述步骤三次, 共计录六组数据.

表 1: 电阻测量数据记录表

$R/\Omega$	1		2		3	
通电方向	正向	反向	正向	反向	正向	反向
10 cm 铜棒	403.10	400.40	401.42	406.50	402.35	404.05
20 cm 铜棒	807.21	804.12	806.14	803.52	801.34	809.35
30 cm 铜棒	1214.02	1210.10	1211.31	1210.30	1211.30	1212.00
40 cm 铜棒	1626.62	1612.22	1618.23	1619.62	1619.44	1624.14
30 cm 铝棒	560.00	560.31	556.00	560.00	562.30	561.31

表 2: 直径测量数据记录表

$D/\text{mm}$	1	2	3	4	5	6
铜棒	4.964	4.963	4.962	4.962	4.961	4.965
铝棒	4.966	4.972	4.974	4.975	4.975	4.972

3. 将铜棒换为铝棒, 重复步骤2.
4. 改变右侧电压头位置, 使得铜棒接入主回路长度分别为 10 cm, 20 cm, 40 cm, 重复步骤2.
5. 用千分尺测定铜棒、铝棒直径, 在接入电路的不同位置分别测量 6 次.

### 3 数据处理与分析

#### 3.1 数据记录

实验中测得的电阻数据记录如表1所示. 铜、铝棒直径数据如表2所示, 表中的数据已计入螺旋测微器的零点读数  $D_0 = -0.004 \text{ mm}$ . 所有实验原始数据请参见报告后附件.

#### 3.2 实验结果

铜棒电阻率计算 铜棒直径平均值为:

$$\hat{D}_{\text{Cu}} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n D_i = 4.963 \text{ mm} \quad (5)$$

桥臂电阻  $R$  测量平均值为:

$$\hat{R} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n R_i = 1211.505 \Omega \quad (6)$$

从而根据式 (3), 可得待测电阻测量均值为:

$$\begin{aligned}\hat{R}_x &= \frac{\hat{R}\hat{R}_n}{\hat{R}_1} \\ &= \frac{1211.505 \times 0.001}{1000} = 1.2115 \times 10^{-3} \Omega\end{aligned}\quad (7)$$

进而可得铜棒电阻率测量均值为:

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= \frac{\hat{R}_x S}{\hat{L}} = \frac{\pi \hat{R}_x \hat{D}_{\text{Cu}}^2}{4 \hat{L}} \\ &= \frac{\pi \times 1.2115 \times 10^{-3} \times (4.963 \times 10^{-3})^2}{4 \times 30 \times 10^{-2}} \\ &= 7.812 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}\end{aligned}\quad (8)$$

**铝棒电阻率计算** 铝棒直径平均值为:

$$\hat{D}_{\text{Al}} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n D_i = 4.972 \text{ mm} \quad (9)$$

桥臂电阻  $R$  测量值为:

$$\hat{R} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n R_i = 559.99 \Omega \quad (10)$$

从而根据式 (3), 可得待测电阻测量值为:

$$\begin{aligned}\hat{R}_x &= \frac{\hat{R}\hat{R}_n}{\hat{R}_1} \\ &= \frac{559.99 \times 0.001}{1000} = 5.600 \times 10^{-4} \Omega\end{aligned}\quad (11)$$

进而可得铝棒电阻率测量值为:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{\text{Al}} &= \frac{\hat{R}_x S}{\hat{L}} = \frac{\pi \hat{R}_x \hat{D}_{\text{Al}}^2}{4 \hat{L}} \\ &= \frac{\pi \times 5.600 \times 10^{-4} \times (4.972 \times 10^{-3})^2}{4 \times 30 \times 10^{-2}} \\ &= 3.62 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}\end{aligned}\quad (12)$$

则铝棒电阻率最终测量值为:

$$\rho_{\text{Al}} = 3.62 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m} \quad (13)$$

则根据本实验测量结果, 铝棒电阻率相对铜棒较小.

**铜棒电阻均匀度分析** 仿照上述过程, 分别计算各个长度下铜棒电阻率测量均值, 得到表3. 则铜棒电阻率的极大不均匀度为:

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{\rho_{\max} - \rho_{\min}}{\hat{\rho}} \times 100\% \\ &= 0.87\% < 1\%\end{aligned}\quad (14)$$

故可基本认为铜棒电阻均匀.

表 3: 铜棒电阻率对比表

$L/\text{cm}$	$R/\Omega$	$\rho/\Omega \cdot \text{m}$
10	402.97	$7.796 \times 10^{-8}$
20	805.28	$7.789 \times 10^{-8}$
30	1211.5	$7.812 \times 10^{-8}$
40	1620.0	$7.864 \times 10^{-8}$

### 3.3 不确定度计算

下面计算铜棒电阻率的不确定度:

$D$  直径测量 A 类不确定度为:

$$\begin{aligned}
 u_{A,D} &= \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^6 (D_i - \hat{D})^2} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{6(6-1)} [(4.964 - 4.963)^2 + 2(4.962 - 4.963)^2} \\
 &\quad + (4.961 - 4.963)^2 + (4.965 - 4.963)^2]} \\
 &= 6.1 \times 10^{-4} \text{ mm}
 \end{aligned} \tag{15}$$

千分尺允差取  $\Delta_D = 0.004 \text{ mm}$ . 又直径误差服从正态分布, 取  $C = 3$ . 查表可知, 当  $p = 0.95, \nu = n - 1 = 5$  时, 有  $t_{0.95} = 2.571, k_{0.95} = 1.960$ . 故直径测量的合成不确定度为:

$$\begin{aligned}
 U_D &= \sqrt{(t_{0.95} u_{A,D})^2 + \left(k_{0.95} \frac{\Delta_D}{C}\right)^2} \\
 &= \sqrt{(2.571 \times 6.1 \times 10^{-4})^2 + \left(1.960 \times \frac{0.004}{3}\right)^2} \\
 &= 3.0 \times 10^{-3} \text{ mm} \quad (p = 0.95)
 \end{aligned} \tag{16}$$

故直径  $D$  的最终测量结果为:

$$D = (4.963 \pm 0.003) \text{ mm} \quad (p = 0.95) \tag{17}$$

$R, R_1, R_n$  下面计算当铜棒接入电路长度为 30 cm 时,  $R, R_1, R_n$  的不确定度.  $R$  的 A 类不确定度为:

$$\begin{aligned}
 u_{A,R} &= \frac{\sigma_R}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^6 (R_i - \hat{R})^2} \\
 &= 0.58 \Omega
 \end{aligned} \tag{18}$$

根据电阻的级数,可如下计算  $R$  的 B 类不确定度: [2]

$$\begin{aligned}\Delta_R &= a\%\hat{R} + n \cdot b \\ &= 0.02\% \times 1211.505 + 6 \times 0.002 = 0.25 \Omega\end{aligned}\quad (19)$$

$R, R_n, R_1$  误差均服从正态分布, 取  $C = 3$ . 查表可知, 当  $p = 0.95, \nu = n - 1 = 5$  时, 有  $t_{0.95} = 2.571, k_{0.95} = 1.960$ . 故电阻测量的合成不确定度为:

$$\begin{aligned}U_R &= \sqrt{(t_{0.95}u_{A,R})^2 + \left(k_{0.95} \frac{\Delta_R}{C}\right)^2} \\ &= \sqrt{(2.571 \times 0.58)^2 + \left(1.960 \times \frac{0.25}{3}\right)^2} \\ &= 1.5 \Omega \quad (p = 0.95)\end{aligned}\quad (20)$$

故  $R$  的最终测量结果可表示为:

$$R = (1211.5 \pm 1.5) \Omega \quad (p = 0.95) \quad (21)$$

标准电阻  $R_n$  均值为  $\hat{R}_n = 0.001 \Omega$ , 级数为 0.01;  $R_1$  均值为  $\hat{R}_1 = 1000 \Omega$ , 级数为 0.02, 则它们的相对不确定度可如下计算:

$$\begin{aligned}\frac{U_{R_n}}{R_n} &= k_{0.95} \frac{a\%}{C} = 1.960 \times \frac{0.01\%}{3} = 6.5 \times 10^{-5} \\ \frac{U_{R_1}}{R_1} &= k_{0.95} \frac{a\%}{C} = 1.960 \times \frac{0.02\%}{3} = 1.3 \times 10^{-4}\end{aligned}\quad (22)$$

$L$  由于  $L$  为一次测量值, 仅考虑 B 类不确定度. 取钢板尺允差  $\Delta_{\text{app}} = 0.1 \text{ mm}$ , 人的估计误差  $\Delta_{\text{est}} = 0.05 \text{ mm}$ . 又误差正态分布, 取  $C = 3, k_{0.95} = 1.960$ , 则  $L$  的不确定度为:

$$U_L = k_{0.95} \frac{\sqrt{\Delta_{\text{app}}^2 + \Delta_{\text{est}}^2}}{C} = 1.960 \frac{\sqrt{0.1^2 + 0.05^2}}{3} = 0.0073 \text{ cm} \quad (p = 0.95) \quad (23)$$

故  $L$  的最终测量结果为:

$$L = (30.000 \pm 0.007) \text{ cm} \quad (p = 0.95) \quad (24)$$

$\rho$  综合以上计算结果以及电阻率表达式:

$$\rho = \frac{\pi R R_n D^2}{4 R_1 L} \quad (25)$$

可得, 不确定度将以如下方式传递:

$$\begin{aligned}
 \frac{U_\rho}{\rho} &= \sqrt{\left(\frac{U_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{U_{R_n}}{R_n}\right)^2 + \left(\frac{U_{R_1}}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{U_L}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{U_D}{D}\right)^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{1.5}{1211.5}\right)^2 + (6.5 \times 10^{-5})^2 + (1.3 \times 10^{-4})^2 + \left(\frac{0.007}{30.000}\right)^2 + \left(\frac{0.003}{4.963}\right)^2} \\
 &= 1.4 \times 10^{-3} \\
 (p = 0.95) U_\rho &= \hat{\rho} \cdot \frac{U_\rho}{\rho} = 1.1 \times 10^{-10} \Omega \cdot \text{m} \quad (p = 0.95)
 \end{aligned} \tag{26}$$

故铜棒电阻率测量值最终可表示为:

$$\rho = (7.812 \pm 0.011) \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m} \quad (p = 0.95) \tag{27}$$

## 4 分析与讨论

1. 如果将标准电阻和待测电阻电流头电压头互换, 等效电路有何变化, 有什么不好?

此时接触电阻  $R_{ix1}, R_{ix2}$  仍然被接入了电压测量回路, 电压表测量所得仍为待测电阻与接触电阻上的总电压降, 即与二端接法没有本质差异, 从而会带来较大的误差.

2. 在测量时, 如果被测低电阻的电压头接线电阻较大(例如被测电阻远离电桥, 所用引线过细过长等), 对测量准确度有无影响?

一般情况下, 电压测量回路的接线电阻相对电桥中的桥臂电阻而言小几个数量级, 可以忽略其对测量的影响. 但若接线电阻过大, 则参与电桥平衡的电阻本质为桥臂电阻与接线电阻的串联, 此时再调节桥臂电阻使电桥平衡时得到的数据就会存在较大偏差, 进而导致计算得出的低电阻存在较大误差.

3. 根据测量误差分析情况, 实验中电阻率测量精度影响最大的是什么?

根据3.3中的计算可知, 电阻率  $\rho$  的不确定度最大分量为  $R$  的不确定度, 这说明  $\rho$  的测量精度主要受  $R$  的测量精度影响. 而实验中对  $R$  测量影响较大的因素主要为电桥本身精度以及电桥调节平衡时的随机误差.

4. 电阻测量中四端接法用于什么情况? 如何提高电阻测量精度?

四端接法主要用于测量较小的电阻. 若要提高电阻测量精度, 可从提高电桥、检流计的精度入手, 亦可换用受温度影响较小的桥臂电阻和限流电阻, 在实验中只在测量时接通回路等, 从而降低电阻发热对测量造成的影响.



## 5 总结

本实验针对测量低电阻时接触电阻不可忽略的问题, 采取了四端接法和双臂电桥的方式, 降低了其测量误差, 并用于铝棒和铜棒电阻率的测量, 最终得到:  $\rho_{\text{Cu}} = (7.812 \pm 0.011) \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$  ( $p = 0.95$ ),  $\rho_{\text{Al}} = 3.62 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ . 同时对铜棒电阻的不均匀度进行了简要分析.

## 参考文献

- [1] 中国科学技术大学物理实验教学中心. 双臂电桥(实验讲义). 2022.09.28.
- [2] 谢行恕, 康士秀, 霍剑青主编. 大学物理实验第二册(第 2 版). 北京: 高等教育出版社, 2005. pp.47-50.