矢量场的正则量子化

唐延宇　PB22030853

2024 年 12 月 25 日

目录

1 引言 [1]

在量子场论中, 我们通常将场看作是时空坐标的函数, 即 $\phi(x)$, 其中 x 是时空坐标. 在量子力学中, 我们通常将坐标和动量看作是算符, 满足一定的对易关系. 在量子场论中, 我们也可以将场看作是算符, 满足一定的对易关系. 这种对场的量子化称为正则量子化. 本文中, 我们将讨论矢量场的正则量子化.

1.1 庞加莱群的幺正表示

我们要求量子场论的理论符合一些现实世界中存在的基本对称性. 首先, 由于时空中不存在任何特殊的点, 我们要求可观测量应具有时空平移不变性, 即 $\psi(x)$ 与 $\psi(x+a)$ 不应该有任何物理上的差异, 其中 a^ν 为任意常 4-矢量. 其次, 我们要求可观测量应具有洛伦兹不变性, 即我们的物理理论在不同的参考系下应该具有相同的形式. 洛伦兹变换与时空平移联合起来将构成庞加莱群 (Poincaré group), ISO$(1,3)$(the isometry group of Minkowski space). 在这样的意义下, 粒子可以被定义为一组在庞加莱变换下仅会与它们自身混合的一组态矢量. 一般地, 我们可以把态矢量的变换写为:

$$|\psi\rangle \to \mathcal{P}\,|\psi\rangle$$

其中 $\mathcal{P}$ 为庞加莱变换, 在一个变换下混合的态矢量的集合称为群的一个表示 (representation). 更一般地, 在一个确定的表示下, 态矢量应有一组基, 记作 $\{|\psi_i\rangle\}$, 其中 i 为离散的或连续的指标, 如此:

$$|\psi_i\rangle \to \mathcal{P}_{ij}\,|\psi_j\rangle$$

变换后的态矢量可以在最初的基下表出. 如果态矢量不存在仅仅在自身中变换的非平凡子集, 那么就称这种表示为不可约的 (irreducible). 此外, 我们还希望表示是幺正的, 也就是说, 要求两个态之间的跃迁矩阵元:

$$\mathcal{M} = \langle\psi_1|\psi_2\rangle$$

具有 Poincaré 不变性, 变换后的矩阵元为:

$$\mathcal{M}\,\langle\psi_1|\mathcal{P}^\dagger\mathcal{P}|\psi_2\rangle$$

从而 $\mathcal{P}^\dagger\mathcal{P}=1$, 这便是幺正的定义. 从而, 粒子将在庞加莱群的不可约幺正表示下进行变换. Wigner 在 1939 年对这类表示进行了分类, 并指出:庞加莱群不存在有限维的不可约幺正表示, 但所有的表示可以通过质量 m 和自旋 J 进行分类, 其中 m 是非负实数, J 为非负半整数, $J=0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\ldots$. 此外, Wigner 还指出, 对于 $J>0$ 且满足质壳条件 $p^2=m^2$ 的粒子, 若 $m>0$, 表示中最多只存在 $2J+1$ 个独立的态; 若

$m=0$, 则表示中最多只存在 2 个独立的态. 这些态与自旋 J 粒子线性独立的极化态数目有关, 它们同时也给出了粒子(场) 自由度数目的上限. 本文主要讨论的矢量场用于描述自旋为 1 的粒子, 从而有质量矢量场应有 3 个独立的自由度, 无质量矢量场应有 2 个独立的自由度.

1.2 粒子与场的联系

1.2.1 有质量 spin-1 粒子

对于一个矢量场 $A_\mu(x)$, 它显然有 4 个动力学自由度, 这超过了 Wigner 给出的上限. 由此可知, 我们必须引入约束来解决这个问题. 最一般的拉格朗日密度可写为如下形式:

$$\mathcal{L}=\frac{a}{2}A_\mu\Box A^\mu+\frac{b}{2}A_\nu\,\partial^\nu\,\partial_\nu A^\nu-\frac{1}{2}m^2A_\mu A^\mu$$

代入 Lagrange 方程, 可得运动方程为:

$$a\Box A_\mu+b\,\partial_\mu\,\partial^\nu A_\nu+m^2A_\mu=0$$

方程两端用 ∂_μ 作用, 可得:

$$[(a+b)\Box+m^2](\partial_\mu A^\mu)=0$$

当 $a+b=0$, 但 $m\neq 0$ 时, 我们可以得到约束条件: $\partial_\mu A^\mu=0$, 这成功消除了一个自由度, 也即去除了自旋为 1 度粒子对应的场的 0 自旋部分. 这样, 我们就得到了有质量矢量场的运动方程:

$$(\Box+m^2)A_\mu=0,\quad \partial_\mu A^\mu=0$$

这便是 Proca 方程. 不妨令 $a=1,b=-1$, 我们便得到了最终的有质量矢量场的拉氏量:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}&=\frac{1}{2}A_\mu\Box A^\mu-\frac{1}{2}A_\nu\,\partial^\nu\,\partial_\nu A^\nu+\frac{1}{2}m^2A_\mu A^\mu\\&=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2+\frac{1}{2}m^2A_\mu A^\mu\end{aligned}$$

这被称为 Proca Lagrangian, 其中 $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$ 为 Maxwell 场张量.

我们可以先使用 Fourier 变换的手段来求得该方程的平面波解, 如下:

$$A_\mu(x)=\sum_\lambda\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\tilde{a}_\lambda(\boldsymbol{p})\epsilon_\mu^\lambda(p)\mathrm{e}^{-ip\cdot x},\quad p_0=\omega_p=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}$$

若要要求 $A_\mu(x)$ 自动地符合于 Lorenz 规范条件 $\partial_\mu A^\mu=0$, 则 $\epsilon_\mu^\lambda(p)$ 应满足条件 $p^\mu\epsilon_\mu^\lambda(p)=0$. 对于任意一个确定的 p^μ, 此方程存在三个线性无关解, 也就是给出了三

个极化矢量. 由此, 上式中的求和范围取 $\lambda=1,2,3$ 即可. 习惯上, 我们还要求极化矢量满足归一化条件: $\epsilon_\mu^\star \epsilon^\mu=-1$. 我们不妨假设 $\boldsymbol{p}$ 沿着 z 方向, 可选择在一个正交坐标系下表出为:

$$p^\mu=(E,0,0,p_3), \quad E^2-p_3^2=m^2$$

此时, 我们可以取 $\epsilon_\mu^\lambda(p)$ 为:

$$\epsilon_\mu^1(p)=(0,1,0,0), \quad \epsilon_\mu^2(p)=(0,0,1,0), \quad \epsilon_\mu^3(p)=\frac{1}{m}(p_3,0,0,E)$$

前两个极化矢量分别类似于光学中的左旋与右旋极化光, 统称为横向极化 (transverse polarization), 第三个极化矢量称为纵向极化 (longitudinal polarization).

1.2.2 无质量 spin-1 粒子

对于无质量矢量场, 一个自然段想法是直接在上述有质量矢量场的拉氏中直接令 $m=0$, 得到:

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2$$

此时会出现几个问题: 首先, 约束方程 $m^2(\partial_\mu A^\mu)=0$ 在 $m=0$ 时自动成立, 无法给出有效的约束; 其次, 纵向极化矢量在 $m=0$ 时会发散. 在无质量极限下, $p_3\to E$, 动量矢量类光, 即 $p^\mu\to(E,0,0,E)$, 此时 $\epsilon_\mu^L\to p_\mu$, 至多相差一个归一化常数. 同时, Wigner 的理论指出, 无质量 spin-1 粒子仅应有两个独立的自由度, 因此, spin-0 的部分以及纵向极化部分最后总会以某种方式被排除在物理系统之外.

下面我们先开始考虑计算体系的自由度数, 无质量矢量场的拉氏量具有一个特殊的性质: 规范不变性, 即: 它具有变换:

$$A_\mu\to A_\mu+\partial_\mu\alpha(x)$$

下的不变性, 其中 $\alpha(x)$ 为任意标量函数. 因此, 任何两个 A_μ, 如果只相差一个标量函数, 那么它们所描写的物理应当是等价的. 从拉格朗日量中可导出如下运动方程:

$$\Box A_\mu-\partial_\mu(\partial^\nu A_\nu)=0$$

将方程的 0 分量和 i 分量分别明显地写出来, 可得:

$$-\partial_j\,\partial^j A_0+\partial_t\,\partial_j A^j=0$$
$$\Box A_i-\partial_i(\partial_t A_0-\partial_j A^j)=0$$

接下来我们可以使用所谓规范固定的程序, 来为 $A_\mu(x)$ 施加约束, 鉴于规范不变性给出: $\partial_i A_i\to\partial_i A_i+\partial_i^2\alpha$, 我们可以选择 α 使得 $\partial_i A_i=0$, 这便是所谓的 Coulumb 规范. 在这个规范下, 我们可以得到:

$$\partial_i^2 A_0=0$$

为了保证对称性, 我们同时还要求 $A_0=0$, 这样我们便得到了一个波动方程:

$$\Box A_i=0$$

这便是无质量矢量场的波动方程. 我们可以使用 Fourier 变换的方法来求解这个方程, 得到平面波解:

$$A_\mu(x)=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\epsilon_\mu(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}$$

有如下的几个约束条件需要满足:

$$p^2=0,\quad p_\mu\epsilon^\mu(p)=0,\quad \epsilon_0=0$$

选择一个参考系, 在其中有: $p_\mu=(E,0,0,E)$, 则可得到两个线性无关的极化矢量:

$$\epsilon^1_\mu(p)=(0,1,0,0),\quad \epsilon^2_\mu(p)=(0,0,1,0)$$

这两个极化矢量分别对应于左旋与右旋的横向极化. 这便是无质量矢量场的两个独立自由度, 也即无质量 spin-1 粒子的自由度数目, 我们也可以将这两个矢量等价地写为:

$$\epsilon^L_\mu(p)=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-\mathrm{i},0),\quad \epsilon^R_\mu(p)=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,\mathrm{i},0)$$

这便是圆偏光的左旋与右旋极化矢量, 也被称为螺旋度本征态.

我们也可以选择 Lorenz 规范, 即 $\partial_\mu A^\mu=0$, 来对无质量矢量场做规范固定, 这样我们可以得到三个满足约束条件 $p^\mu\epsilon_\mu$ 对极化矢量:

$$\epsilon^1_\mu(p)=(0,1,0,0),\quad \epsilon^2_\mu(p)=(0,0,1,0),\quad \epsilon^3_\mu(p)=(1,0,0,1)$$

但这并不意味着三个独立的自由度, 因为 $\epsilon^3_\mu(p)$ 并不满足归一化条件, 它的出现是纯规范带来的, 并非真正的物理自由度.

2 矢量场的正则量子化 [2, 3]

2.1 有质量矢量场的正则量子化

根据自旋-统计定理, 自旋为 1 的粒子是玻色子, 应当采用对易关系进行量子化, 仿照自由 Klein-Gordon 场的量子化, 我们可以将场变量算符化, 用产生湮灭算符展开如下:

$$A_\mu(x) = \sum_\lambda \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}} \left[\epsilon_\mu^\lambda(\boldsymbol{p}) a_{\boldsymbol{p}}^\lambda \mathrm{e}^{-ip\cdot x} + \epsilon_\mu^{\lambda\star}(\boldsymbol{p}) a_{\boldsymbol{p}}^{\lambda\dagger} \mathrm{e}^{ip\cdot x}\right]$$

以及与之共轭的动量密度算符:

$$\Pi^\mu(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = F^{\mu 0} = \partial^0 A^\mu - \partial^\mu A^0$$

其中 $\lambda = 1, 2, 3$ 为极化指标, $a_{\boldsymbol{p}}^\lambda$ 和 $a_{\boldsymbol{p}}^{\lambda\dagger}$ 为湮灭产生算符, 满足对易关系:

$$[a_{\boldsymbol{p}}^\lambda, a_{\boldsymbol{p}'}^{\lambda'\dagger}] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}') \delta^{\lambda\lambda'}$$
$$[a_{\boldsymbol{p}}^\lambda, a_{\boldsymbol{p}'}^{\lambda'}] = 0, \quad [a_{\boldsymbol{p}}^{\lambda\dagger}, a_{\boldsymbol{p}'}^{\lambda'\dagger}] = 0$$

ϵ_μ^λ 为一组极化矢量基, 满足正交完备条件:

$$g^{\mu\nu}\epsilon_\mu^\lambda(\boldsymbol{p})\epsilon_\nu^{\eta\star}(\boldsymbol{p}) = g^{\lambda\eta}, \quad \sum_\lambda \epsilon_\mu^\lambda(\boldsymbol{p})\epsilon_\nu^{\lambda\star}(\boldsymbol{p}) = -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2}$$

事实上, ϵ_μ 在物理上可作为螺旋度本征态, 来标记粒子自旋的方向. 由此出发, 可以定义真空态和单粒子态如下:

$$a_{\boldsymbol{p}}^\lambda |0\rangle = 0$$
$$a_{\boldsymbol{p}}^{\lambda\dagger} |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}} |\boldsymbol{p}, \lambda\rangle$$

之后便可以开始计算场算符之间的对易关系:

$$\begin{aligned}
[A_\mu(x), A_\nu(y)] = & \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}'}}} \times \\
& \sum_{\lambda,\lambda'} \left(\epsilon_\mu^\lambda(\boldsymbol{p})\epsilon_\nu^{\lambda'\star}[a_{\boldsymbol{p}}^\lambda, a_{\boldsymbol{p}'}^{\lambda'\dagger}](\boldsymbol{p}')\mathrm{e}^{-ip\cdot x}\mathrm{e}^{ip'\cdot y} + \epsilon_\mu^{\lambda\star}(\boldsymbol{p})\epsilon_\nu^{\lambda'\star}(\boldsymbol{p}')[a_{\boldsymbol{p}}^{\lambda\dagger}, a_{\boldsymbol{p}'}^{\lambda'}]\mathrm{e}^{ip\cdot x}\mathrm{e}^{-ip'\cdot y}\right) \\
= & \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}} \sum_\lambda \left(\epsilon_\mu^\lambda(\boldsymbol{p})\epsilon_\nu^{\lambda\star}(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{-ip\cdot(x-y)} - \epsilon_\mu^{\lambda\star}(\boldsymbol{p})\epsilon_\nu^\lambda(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{ip\cdot(x-y)}\right) \\
= & \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}} \left(-g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2}\right) \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-y)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}p(x-y)}\right) \\
= & \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}} \left(-g_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{m^2}\right) \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-y)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}p(x-y)}\right) \\
= & -\left(g_{\mu\nu} + \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{m^2}\right) \mathrm{i}\Delta(x-y)
\end{aligned}$$

其中 $\Delta(x-y)$ 为标量场两点关联函数, 满足如下定义:

$$[\phi(x),\phi(y)] = \mathrm{i}\Delta(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-y)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}p(x-y)}\right)$$

由此, 我们可以得到场算符的对易关系:

$$\begin{aligned}[A_\mu(x),A_\nu(y)] &= -\mathrm{i}\left(g_{\mu\nu} + \frac{\partial_\mu\partial_\nu}{m^2}\right)\Delta(x-y)\\ [A_\mu(t,\boldsymbol{x}),A_\nu(t,\boldsymbol{y})] &= 0\end{aligned}$$

类似地, 可以计算得到:

$$\begin{aligned}[F_{\mu\nu}(x),A_\rho(y)] &= [\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x), A_\rho(y)]\\ &= \partial_\mu[A_\nu(x),A_\rho(y)] - \partial_\nu[A_\mu(x),A_\rho(y)]\\ &= \partial_\mu\left(-g_{\nu\rho} - \frac{\partial_\nu\partial_\rho}{m^2}\mathrm{i}\Delta(x-y)\right) + \partial_\nu\left(g_{\mu\rho} + \frac{\partial_\mu\partial_\rho}{m^2}\mathrm{i}\Delta(x-y)\right)\\ &= (-g_{\nu\rho}\,\partial_\mu + g_{\mu\rho}\,\partial_\nu)\mathrm{i}\Delta(x-y)\end{aligned}$$

因此:

$$\begin{aligned}[\Pi^\mu(t,\boldsymbol{x}),A_\nu(t,\boldsymbol{y})] &= [F^{\mu 0}(t,\boldsymbol{x}),A_\nu(t,\boldsymbol{y})] = (-g_\nu^0\,\partial^\mu + g_\nu^\mu\,\partial^0)\mathrm{i}\Delta(t,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\\ &= -\mathrm{i}\delta_\nu^\mu\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\end{aligned}$$

以及:

$$\begin{aligned}[F_{\mu 0}(x),F_{\nu 0}(y)] &= [\partial_\mu^x A_0(x) - \partial_0^x A_\mu(x), \partial_\nu^y A_0(y) - \partial_0^y A_\nu(y)]\\ &= 0\end{aligned}$$

因此:

$$[\Pi^\mu(t,\boldsymbol{x}),\Pi^\nu(t,\boldsymbol{y})] = 0$$

最终, 我们给出了矢量场正则量子化的正则对易关系:

$$\begin{aligned}[\Pi^\mu(t,\boldsymbol{x}),A_\nu(t,\boldsymbol{y})] &= -\mathrm{i}\delta_\nu^\mu\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\\ [A_\mu(t,\boldsymbol{x}),A_\nu(t,\boldsymbol{y})] &= [\Pi^\mu(t,\boldsymbol{x}),\Pi^\nu(t,\boldsymbol{y})] = 0\end{aligned}$$

和对角化后的哈密顿量:(已忽略无穷大的真空能部分)

$$H = \int d^3x\mathcal{H} = \int d^3pE_{\boldsymbol{p}}\sum_\lambda a_{\boldsymbol{p}}^{\lambda\dagger}a_{\boldsymbol{p}}^\lambda$$

以及体系的总动量算符:

$$\boldsymbol{P} = -\int \mathrm{d}^3x\pi_i\nabla A^i = \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\boldsymbol{p}\sum_\lambda a_{\boldsymbol{p}}^{\lambda\dagger}a_{\boldsymbol{p}}^\lambda$$

2.2 无质量矢量场的正则量子化

我们可以仿照有质量矢量场的量子化程序, 将场算符展开为:

$$A_\mu(x) = \sum_\lambda \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}} \left[\epsilon_\mu^\lambda(\boldsymbol{p}) a_{\boldsymbol{p}}^\lambda \mathrm{e}^{-ip\cdot x} + \epsilon_\mu^{\lambda\star}(\boldsymbol{p}) a_{\boldsymbol{p}}^{\lambda\dagger} \mathrm{e}^{ip\cdot x}\right]$$

以及与之共额的动量密度算符:

$$\Pi^\mu(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = F^{\mu 0} = \partial^0 A^\mu - \partial^\mu A^0$$

与有质量矢量场相比, 在无质量情形下, 由于仅有两个动力学自由度, 极化矢量指标 λ 仅取 $\lambda = 1, 2$, 它们的正交归一关系可写为:

$$g^{\mu\nu}\epsilon_\mu^\lambda(\boldsymbol{p})\epsilon_\nu^{\eta\star}(\boldsymbol{p}) = g^{\lambda\eta}, \quad \sum_\lambda \epsilon_\mu^\lambda(\boldsymbol{p})\epsilon_\nu^{\lambda\star}(\boldsymbol{p}) = -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{|\boldsymbol{p}|^2}$$

如前所述, 此时存在约束条件:

$$A_0(x) = 0, \quad \Pi^0(x) = 0$$

因此事实上对无质量矢量场的讨论无需涉及四维指标, 仅取 $\mu, \nu \to i, j$ 即可, 正则量子化要求产生湮灭算符间的对易关系为:

$$[a_{\boldsymbol{p}}^\lambda, a_{\boldsymbol{p}'}^{\lambda'\dagger}] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')\delta^{\lambda\lambda'}$$
$$[a_{\boldsymbol{p}}^\lambda, a_{\boldsymbol{p}'}^{\lambda'}] = 0, \quad [a_{\boldsymbol{p}}^{\lambda\dagger}, a_{\boldsymbol{p}'}^{\lambda'\dagger}] = 0$$

如下定义真空胎与单粒子态:

$$a_{\boldsymbol{p}}^\lambda |0\rangle = 0$$
$$a_{\boldsymbol{p}}^{\lambda\dagger} |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}} |\boldsymbol{p}, \lambda\rangle$$

经过与上一节类似的演算, 可以得到场算符与动量算符间的对易关系:

$$[\Pi^i(t, \boldsymbol{x}), A_j(t, \boldsymbol{y})] = -\mathrm{i}\left(\delta_j^i - \frac{\partial^i \partial_j}{\nabla^2}\right)\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$$
$$[A_i(t, \boldsymbol{x}), A_j(t, \boldsymbol{y})] = [\Pi^i(t, \boldsymbol{x}), \Pi^j(t, \boldsymbol{y})] = 0$$

2.3 Feynman 传播子 [1, 3]

仿照标量场, 我们可以类似地定义矢量场的 Feynman 传播子 Δ:

$$\langle 0|\mathcal{T} A_\mu(x) A_\mu(y)|0\rangle = \mathrm{i}\int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p(x-y)} \Delta_{\mu\nu}(p)$$

2.3.1 有质量情形

在有质量情形下, 我们可以引入流 $J_\nu(x)$, 此时 Proca 拉氏量变为:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu - A^\mu J_\mu$$

代入 Lagrange 方程给出运动方程为:

$$\partial^\mu(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + m^2 A_\nu(x) = J_\nu(x)$$

对上述方程进行 Fourier 变换, 可得:

$$\{(-p^2 + m^2)g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu\}A_\mu = J_\nu$$

传播子的定义为: $A_\mu = \Delta^{\mu\nu}J_\nu$, 则此时问题等价于求矩阵 $M = (-p^2 + m^2)g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu$ 的逆矩阵, 先计算 M 的行列式:

$$\det M = m^2(-p^2 + m^2)^3$$

可见, 只有对于在壳情形, M 才具有奇异性, 因此我们可以引入 iε 项进行保护, 从而可以顺利地求出 Feynman 传播子:

$$\Delta_F^{\mu\nu}(p) = \frac{1}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\varepsilon}\left(-g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{m^2}\right)$$

2.3.2 无质量情形

无质量情形下, 运动方程即为 Maxwell 方程:

$$\partial^\mu(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = J_\nu(x)$$

或者在动量空间写为:

$$\{-p^2 g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu\}A_\mu = J_\nu$$

此时, 由于动能项系数矩阵具有一个 0 本征值, 它一定是不可逆的, 这是无质量矢量场规范不变性带来的代价. 即仅仅给定 J_μ 是无法唯一地确定 A_μ 的值; 同一个 J_μ 可对应不同规范中的 A_μ. 因此, 我们需要引入规范固定条件, 以消除规范自由度. 最常见的规范是 Lorenz 规范:

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

为了确保规范固定条件时刻被满足, 我们可以类比拉格朗日乘子的方法, 在拉氏量中加入一个辅助项, 将拉氏量改写为:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 - A^\mu J_\mu$$

ξ 的运动方程即为 Lorenz 约束条件:

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

可见, 在 ξ 很小时, 辅助项会为拉氏量施加一个非常强的约束以保证其满足 Lorenz 规范, A_μ 的运动方程为:

$$\left[-p^2 g^{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) p^\mu p^\nu\right] A_\nu = J_\mu$$

从而对算符求逆, 可得 Feynman 传播子:

$$\Delta_F^{\mu\nu}(p) = \frac{1}{p^2 + \mathrm{i}\varepsilon}\left(-g^{\mu\nu} - (1 - \xi)\frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right)$$

由于此时的 ξ 的作用类似于规范固定, 我们可以任意取它的值, 这也称为规范, 但其含义明显与之前提及的规范不同, 下面列举两个常用的 Lorentz 不变的规范:

- Feynman 规范: $\xi = 1$, 此时传播子为:

$$\mathrm{i}\Delta_F^{\mu\nu}(p) = \frac{-\mathrm{i}g^{\mu\nu}}{p^2 + \mathrm{i}\varepsilon}$$

- Lorenz 规范: $\xi = 0$, 此时传播子为:

$$\mathrm{i}\Delta_F^{\mu\nu}(p) = \frac{-\mathrm{i}}{p^2 + \mathrm{i}\varepsilon}\left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right)$$

有了这些内容, 我们在 QED 中对与光子有关的散射振幅计算可以更加轻松.

3 总结

在以上内容里, 我们按照正则量子化的流程, 从拉氏量出发给出运动方程, 然后对运动方程做量子化. 其间, 给出了平面波解意义下的算符展开, 并借助群论的自由度分析引入规范, 从而解决了自由度冗余的问题. 最后, 我们计算了基本的正则对易关系和 Feynman 传播子. 有了以上基础, 我们就可以更轻松地理解 QED 中与光子有关的散射振幅问题.

参考文献

[1] M. D. Schwartz. Quantum Field Theory and the Standard Model. 2013.

[2] G. G. Chen et al. Lectures of Sidney Coleman on Quantum Field Theory: Foreword by David Kaiser. 2018.

[3] M. E. Peskin and D. V. Schroeder. An Introduction to Quantum Field Theory. 1995.