

# 直流非平衡电桥

唐延宇\*PB22030853

2024 年 3 月 9 日

## 摘要

直流非平衡电桥利用了电桥平衡后,桥臂电阻的微小变化能够带来桥电压的显著变化,从而利用桥电压的变化测量桥臂电阻的变化,进而对一些连续变化的物理量进行测量.本实验利用电阻箱搭建了等臂电桥,并在不同的桥臂电阻值下测量其线性范围与灵敏度,最终利用该装置测量了铜丝电阻随温度的变化关系.

**关键词:** 非平衡电桥 电阻温度系数 电桥线性范围

## 1 引言

### 1.1 实验背景

电桥电路由其精确性,具有较大的实际应用价值.然而由于平衡状态的电桥只能测量处于相对平衡状态的物理量,而对于连续变化的物理量无能为力,我们引入直流非平衡电桥:通过电桥电阻的改变,引发并测量桥电压的改变,进而测定其他物理量,如温度、压力、形变等,在工程与测量领域具有重要应用价值.本实验的目的及了解非平衡电桥的原理,测量其线性范围并利用之测量金属铜的电阻温度系数.

### 1.2 实验原理

直流非平衡电桥电路如图1所示.由基尔霍夫定律可得电桥平衡条件为:

$$U_g = 0 \Leftrightarrow \frac{R_4}{R_1} = \frac{R_3}{R_2} \quad (1)$$

当  $R_4$  出现一微小改变量  $\Delta R$  时,利用高精度电压表测量 C, D 间电势差值  $U_g$ , 其应满足如下方程:

$$U_g = \frac{R_2 \Delta R + R_2 R_4 - R_1 R_3}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3) + \Delta R(R_2 + R_3)} U_s \quad (2)$$

---

\*中国科学技术大学物理学院 2022 级本科生

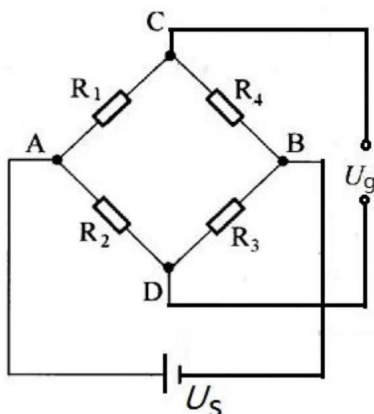


图 1: 非平衡电桥电路图

如果电桥四臂电阻相等 ( $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 := R_0$ ), 此时的电桥称为等臂电桥. 此时则可将式 (2) 化简为:

$$U_g = \frac{U_s}{4} \delta \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\delta} \quad (3)$$

式中  $\delta := \frac{\Delta R}{R_0}$  为电阻的应变变量; 若有  $\Delta R \ll R_0$  成立, 则:

$$U_g = \frac{U_s}{4} \delta = \frac{U_s}{4R_0} \delta \quad (4)$$

满足式 (4) 的  $\delta$  的范围即称为电桥的线性范围. 当  $\Delta R$  较大时, 该式不再成立. [1]

## 2 实验内容

### 2.1 实验仪器

本实验使用的仪器主要包括: 电阻箱四台 (三台精度为  $0.1 \Omega$ , 一台精度为  $0.01 \Omega$ ); 恒压源; Keithy2000 型高精度台式万用表; 加热炉; 铜丝; 金属烧杯; 导线若干.

### 2.2 实验步骤

本实验的主要步骤如下:

#### 1. 在 $R_0$ 的不同取值下, 测量非平衡电桥的线性范围及精度

- (a) 保持电源输出电压为  $U_s = 2.0 \text{ V}$  不变, 接通电路后微调  $R_3$  大小, 以使电桥平衡, 记录此时  $R_3$  的值, 从而消除导线电阻、接触电阻对测量的影响;
- (b) 在  $R_0 \pm 20\%$  范围内改变  $R_4$  的大小, 测量并记录对应的  $U_g$  值;
- (c) 作出  $U_g^{Ideal} \sim \delta$  曲线, 并与实验测得的  $U_g^{Measured} \sim \delta$  曲线对比, 确认电桥的线性范围 i.e.  $\text{Relative Error} := \left| \frac{U_g^{Measured} - U_g^{Ideal}}{U_g^{Ideal}} \right| \leq 0.05$  成立的  $\delta$  的取值范围;

- (d) 分别取  $R_0 = 1000\ \Omega, 5000\ \Omega, 50\ \Omega$ , 重复以上测量, 计算并比较电桥的灵敏度.

## 2. 利用非平衡电桥测定铜丝电阻

- (a) 取桥臂电阻  $R_0 = 50\ \Omega$ , 为消除导线电阻带来的影响, 可先将铜丝短接入电路, 再调整电桥平衡, 记录此时  $R_3$  的值;
- (b) 将铜丝与  $R_4$  串联后放入陶瓷杯水浴加热, 每隔  $5\ ^\circ\text{C}$  记录一次温度与桥电压  $U_g$  的值, 至水温达到  $85\ ^\circ\text{C}$  附近, 计算不同温度下的铜丝电阻.

# 3 实验结果及分析

## 3.1 实验数据

本实验获得的主要数据经处理后, 如表1,2所示. 原始数据请参见报告后附的原始数据记录表.

## 3.2 数据处理与不确定度分析

### 3.2.1 非平衡电桥线性范围与灵敏度分析

$R_0 = 1000\ \Omega$  利用 Origin 软件得到的  $U_g^{Measured} \sim \delta$  曲线与  $U_g^{Ideal} \sim \delta$  曲线, 以及相对误差分析曲线如图2所示.

从图中数据可得,  $R_0 = 1000\ \Omega$  电桥线性范围为:

$$\delta \in [-0.09111, 0.10591] \quad (5)$$

零点附近的绝对灵敏度可计算如下:

$$\begin{aligned} S_{U_a}^{Measured} &= \lim_{\Delta R \rightarrow 0} \frac{\Delta U_g}{\Delta R} \\ &= \frac{1}{1000} \times \frac{0.0099}{0.02} \\ &= 4.95 \times 10^{-4} \text{ A} \end{aligned} \quad (6)$$

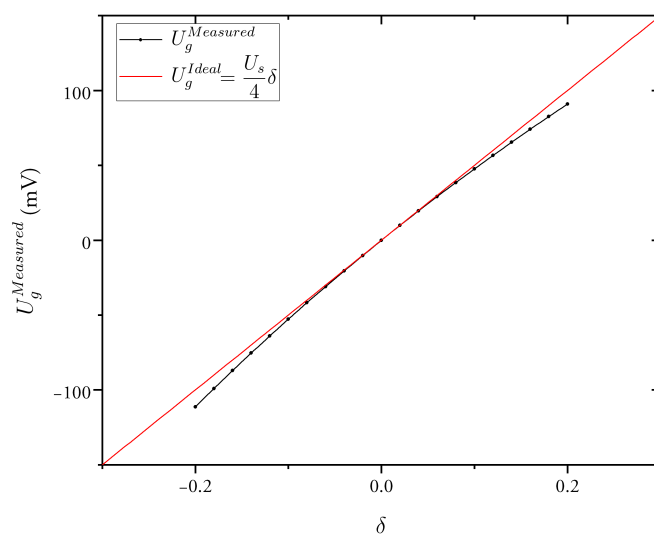
$$\begin{aligned} S_{U_a}^{Ideal} &= \frac{U_s}{4R_0} \\ &= \frac{2}{4 \times 1000} \\ &= 5 \times 10^{-4} \text{ A} \end{aligned} \quad (7)$$

表 1: 非平衡电桥数据记录表

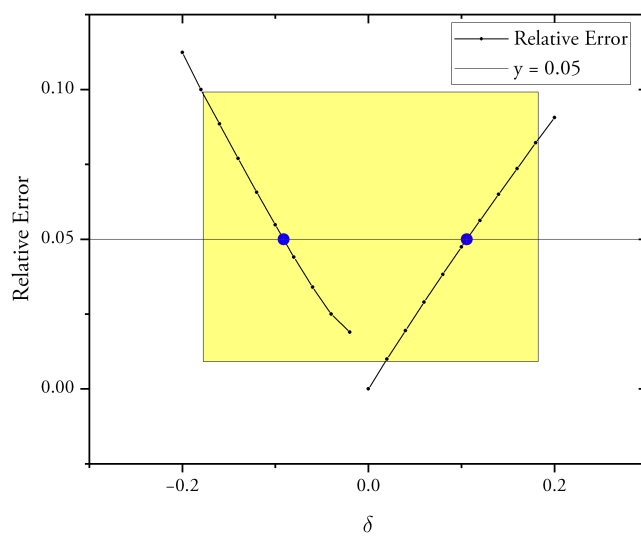
$\delta$	$U_g(\text{mV})$ $R_0 = 1000 \Omega$	相对误差	$U_g(\text{mV})$ $R_0 = 5000 \Omega$	相对误差	$U_g(\text{mV})$ $R_0 = 50 \Omega$	相对误差
-0.2	-111.24	0.1124	-111.16	0.1116	-110.91	0.1091
-0.18	-99.03	0.1	-98.94	0.099	-98.7	0.0967
-0.16	-87.08	0.0885	-86.99	0.874	-86.77	0.084625
-0.14	-75.39	0.077	-75.3	0.0757	-75.09	0.0727
-0.12	-63.94	0.6567	-63.85	0.0642	-63.65	0.0608
-0.1	-52.74	0.0548	-52.65	0.053	-52.46	0.0492
-0.08	-41.76	0.044	-41.68	0.042	-41.5	0.0375
-0.06	-31.02	0.034	-30.94	0.0313	-30.77	0.02567
-0.04	-20.5	0.025	-20.41	0.0205	-20.26	0.013
-0.02	-10.19	0.019	-10.1	0.01	-9.96	0.0004
0	0	0	0	0	0.09	0.0009
0.02	9.9	0.01	9.91	0.009	9.99	0.0001
0.04	19.61	0.0195	19.62	0.019	19.69	0.0155
0.06	29.13	0.029	29.14	0.287	29.21	0.0263
0.08	38.47	0.03825	38.48	0.038	38.54	0.0365
0.1	47.63	0.0474	47.64	0.0472	47.7	0.046
0.12	56.63	0.0562	56.63	0.0562	56.68	0.0553
0.14	65.45	0.065	65.45	0.065	65.49	0.0644
0.16	74.11	0.736	74.11	0.0736	74.14	0.07325
0.18	82.6	0.0822	82.61	0.082	82.63	0.08189
0.2	90.94	0.0906	90.95	0.00905	90.92	0.0908

表 2: 桥电压与温度变化数据记录表

$T(^{\circ}\text{C})$	21.5	25	30	35	40	45	50
$U_g(\text{mV})$	2.21	2.21	2.26	2.3	2.34	2.38	2.43
$T(^{\circ}\text{C})$	55	60	65	70	75	80	85
$U_g(\text{mV})$	2.47	2.52	2.56	2.6	2.65	2.69	2.74



(a)  $U_g^{Measured} \sim \delta$  曲线与  $U_g^{Ideal} \sim \delta$  曲线图



(b) 相对误差  $\sim \delta$  比较图

相交快捷分析(12/18/2023 20:48:02)

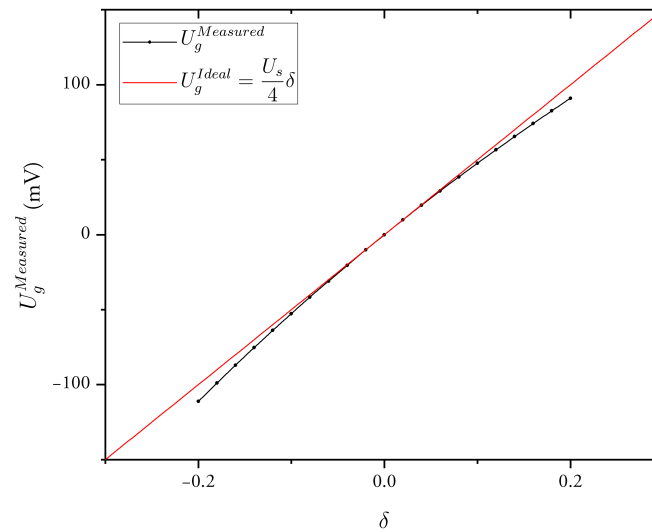
结果

交点X 2:  $\{-0.09111, 0.10591\}$

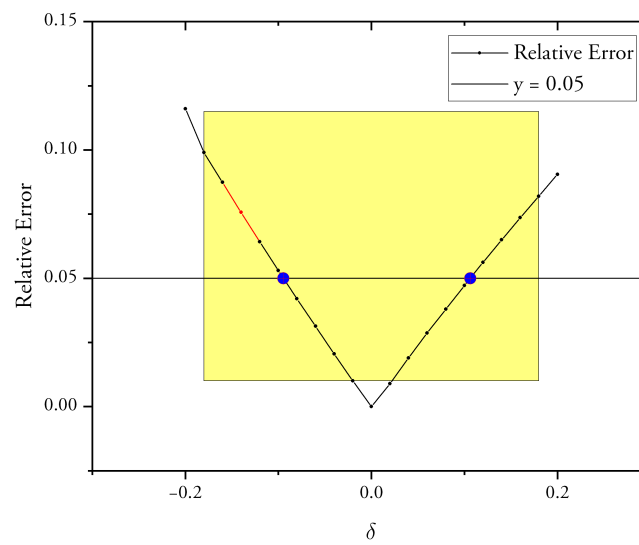
交点Y 2:  $\{0.05, 0.05\}$

(c) 交点数据

图 2:  $R_0 = 1000 \Omega$  时电桥线性范围分析数据



(a)  $U_g^{Measured} \sim \delta$  曲线与  $U_g^{Ideal} \sim \delta$  曲线图



(b) 相对误差  $\sim \delta$  比较图

相交快捷分析(12/18/2023 21:28:59)

结果

交点X 2:  $\{-0.09455, 0.10622\}$

交点Y 2:  $\{0.05, 0.05\}$

(c) 交点数据

图 3:  $R_0 = 5000 \Omega$  时电桥线性范围分析数据

$R_0 = 5000 \Omega$  利用 Origin 软件得到的  $U_g^{Measured} \sim \delta$  曲线与  $U_g^{Ideal} \sim \delta$  曲线, 以及相对误差分析曲线如图3所示.

从图中数据可得,  $R_0 = 5000 \Omega$  电桥线性范围为:

$$\delta \in [-0.09455, 0.10622] \quad (8)$$

零点附近的绝对灵敏度和相对灵敏度可计算如下:

$$\begin{aligned} S_{U_a}^{Measured} &= \lim_{\Delta R \rightarrow 0} \frac{\Delta U_g}{\Delta R} \\ &= \frac{1}{5000} \times \frac{0.00991}{0.02} \\ &= 9.91 \times 10^{-5} \text{ A} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} S_{U_a}^{Ideal} &= \frac{U_s}{4R_0} \\ &= \frac{2}{4 \times 5000} \\ &= 1 \times 10^{-4} \text{ A} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} S_{U_r}^{Measured} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\Delta U_g}{\delta} \\ &= \frac{0.00991}{0.02} \\ &= 0.496 \text{ A} \end{aligned} \quad (11)$$

$$S_{U_r}^{Ideal} = \frac{U_s}{4} = 0.5 \text{ A} \quad (12)$$

$R_0 = 50 \Omega$  利用 Origin 软件得到的  $U_g^{Measured} \sim \delta$  曲线与  $U_g^{Ideal} \sim \delta$  曲线, 以及相对误差分析曲线如图3所示.

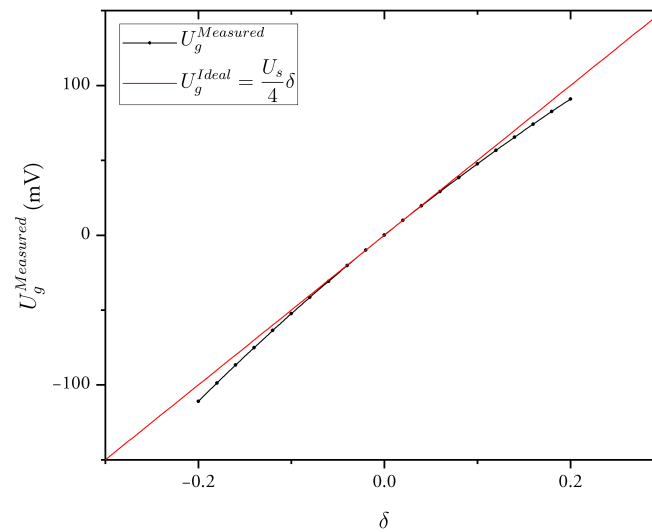
从图中数据可得,  $R_0 = 5000 \Omega$  电桥线性范围为:

$$\delta \in [-0.10138, 0.1086] \quad (13)$$

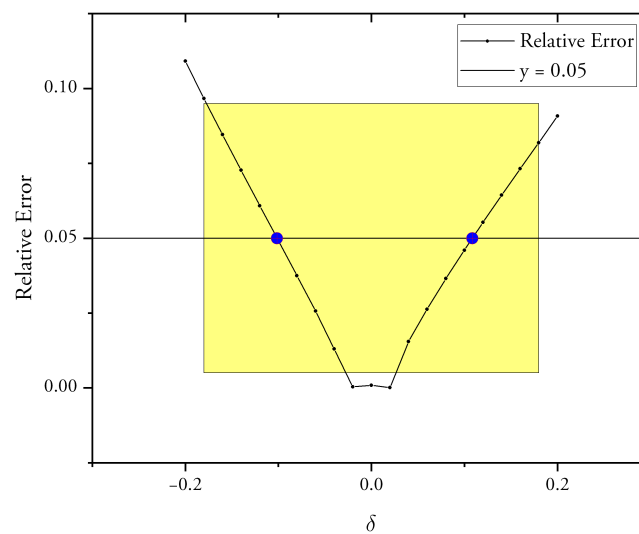
零点附近的绝对灵敏度和相对灵敏度可计算如下:

$$\begin{aligned} S_{U_a}^{Measured} &= \lim_{\Delta R \rightarrow 0} \frac{\Delta U_g}{\Delta R} \\ &= \frac{1}{50} \times \frac{0.0099}{0.02} \\ &= 9.9 \times 10^{-3} \text{ A} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} S_{U_a}^{Ideal} &= \frac{U_s}{4R_0} \\ &= \frac{2}{4 \times 50} \\ &= 0.01 \text{ A} \end{aligned} \quad (15)$$



(a)  $U_g^{Measured} \sim \delta$  曲线与  $U_g^{Ideal} \sim \delta$  曲线图



(b) 相对误差  $\sim \delta$  比较图

相交快捷分析(12/18/2023 21:43:14)

结果

交点X 2:  $\{-0.10138, 0.1086\}$

交点Y 2:  $\{0.05, 0.05\}$

(c) 交点数据

图 4:  $R_0 = 50 \Omega$  时电桥线性范围分析数据



$$\begin{aligned}
S_{U_r}^{Measured} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\Delta U_g}{\delta} \\
&= \frac{0.0099}{0.02} \\
&= 0.495 \text{ A}
\end{aligned} \tag{16}$$

$$S_{U_r}^{Ideal} = \frac{U_s}{4} = 0.5 \text{ A} \tag{17}$$

结果讨论 计算可得：

$$\begin{aligned}
R_0 &= 50 \Omega, \Delta\delta = 0.10138 + 0.1086 = 0.20998 \\
R_0 &= 1000 \Omega, \Delta\delta = 0.10591 + 0.09111 = 0.19702 \\
R_0 &= 5000 \Omega, \Delta\delta = 0.10622 + 0.09455 = 0.20077
\end{aligned} \tag{18}$$

则总体而言随桥臂电阻增加, 线性范围变窄, 零点灵敏度减小.  $R_0 = 5000 \Omega$  时的反常增加, 可能是实验随机误差所致, 且较  $R_0 = 1000 \Omega$  增加不多, 而  $R_0 = 1000 \Omega$  时的线性范围相对  $R_0 = 50 \Omega$  有显著缩窄, 因而上述结论是可靠的.

### 3.2.2 铜丝电阻温度系数的测量

根据

$$R_{Cu}(t) = \Delta R = 4R_0 \frac{U_g(t) - U_{g0min}}{U_s} \tag{19}$$

所得数据如表3所示：

表 3: 铜丝电阻与温度数据记录表

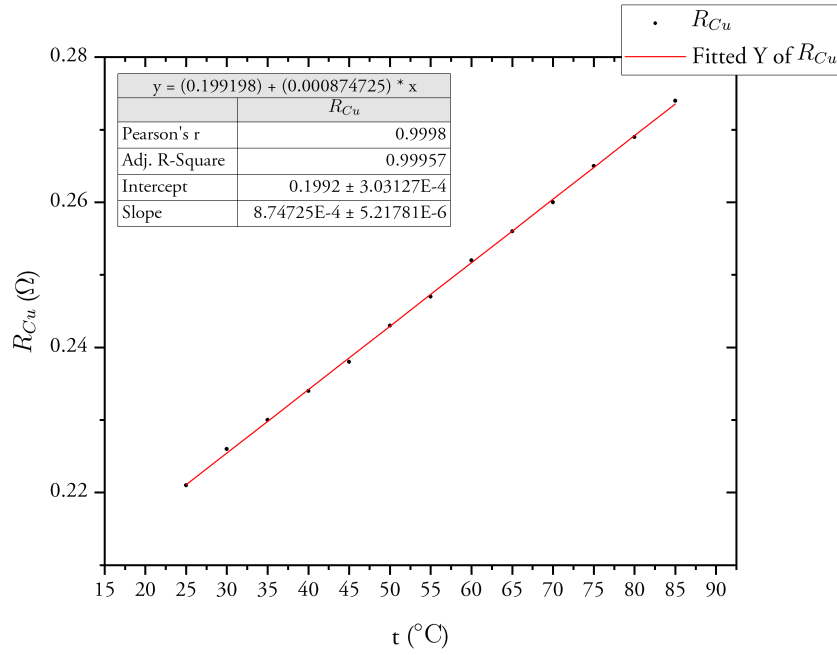
$T(^{\circ}\text{C})$	21.5	25	30	35	40	45	50
$R_{Cu}(\Omega)$	0.221	0.221	0.226	0.23	0.234	0.238	0.243
$T(^{\circ}\text{C})$	55	60	65	70	75	80	85
$R_{Cu}(\Omega)$	0.247	0.252	0.256	0.26	0.265	0.269	0.274

分析数据可知,  $t = 21^{\circ}\text{C}$  的数据明显不正常, 分析可能是刚开始加热时温度计示数存在一定程度的延缓与不准确所致. 舍去该组数据后利用 Origin 拟合得到的  $R_{Cu} \sim t$  曲线如图5所示:

从图中可得拟合斜率  $k = 8.74725 \times 10^{-4} \Omega/^{\circ}\text{C}$ , 将  $0^{\circ}\text{C}$  和  $20^{\circ}\text{C}$  代入拟合直线, 可如下计算  $0^{\circ}\text{C}$  和  $20^{\circ}\text{C}$  时的铜丝电阻:

$$\hat{R}_0 = b = 0.1992 \Omega \tag{20}$$

$$\hat{R}_2 = 20 \times 8.74725 \times 10^{-4} + 0.1992 = 0.2167 \Omega \tag{21}$$

图 5:  $R_{Cu} \sim t$  拟合结果图

由  $\alpha_t = \frac{k}{R_t}$ , 铜丝的电阻温度系数为:

$$\alpha_{0^\circ\text{C}} = \frac{8.74725 \times 10^{-4}}{0.1992} = 4.39 \times 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \quad (22)$$

$$\alpha_{20^\circ\text{C}} = \frac{8.74725 \times 10^{-4}}{0.2167} = 4.03 \times 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \quad (23)$$

其不确定度可如下计算: 由

$$\frac{u_{\alpha_0}}{\alpha_0} = \sqrt{\left(\frac{u_k}{k}\right)^2 + \left(\frac{u_b}{b}\right)^2 - 2\rho_{k,b}\left(\frac{u_k}{k}\right)\left(\frac{u_b}{b}\right)} \quad (24)$$

本实验得到:

$$u_b = 3.03127 \times 10^{-4} \text{ } \Omega, u_k = 5.21781 \times 10^{-6} \text{ } \Omega/^\circ\text{C}, \rho_{k,b} = 0.9998$$

则:

$$\begin{aligned} \frac{u_{\alpha_0}}{\alpha_0} &= \sqrt{\left(\frac{u_k}{k}\right)^2 + \left(\frac{u_b}{b}\right)^2 - 2\rho_{k,b}\left(\frac{u_k}{k}\right)\left(\frac{u_b}{b}\right)} \\ &= \sqrt{\left(\frac{5.21781 \times 10^{-6}}{8.74725 \times 10^{-4}}\right)^2 + \left(\frac{3.03127 \times 10^{-4}}{0.1992}\right)^2 - 2 \times 0.9998 \left(\frac{5.21781 \times 10^{-6}}{8.74725 \times 10^{-4}}\right) \left(\frac{3.03127 \times 10^{-4}}{0.1992}\right)} \\ &= 4 \times 10^{-3} \quad (p = 0.95) \end{aligned} \quad (25)$$

绝对不确定度为:

$$u_{\alpha_0} = 4 \times 10^{-3} \times 4.39 \times 10^{-3} = 1.8 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \quad (p = 0.95) \quad (26)$$

故最终结果可表示为:

$$\alpha_0 = (4.39 \pm 0.02) \times 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \quad (p = 0.95) \quad (27)$$

利用电阻定律可如下计算  $20^\circ\text{C}$  时的铜丝电阻:

$$\begin{aligned} R &= \rho \frac{L}{S} = \rho \frac{4L}{\pi \phi^2} \\ &= 0.0175 \times \frac{4 \times 3}{\pi (0.6 \times 10^{-3})^2} \\ &= 0.186 \Omega \end{aligned} \quad (28)$$

实验测得结果与之相比偏大,主要原因可能是铜丝长期与水接触生锈,电阻率增大;拟合本身存在一定误差等.

### 3.3 实验讨论(思考题)

#### 1. 简述直流非平衡电桥与直流平衡电桥的关系.

二者电路结构基本相同,但平衡电桥主要是通过电桥平衡时,桥臂电阻之间的比例关系来获得一个确定的电阻值,从而只能对处于较为稳定的平衡态的物理量进行测量;而非平衡电桥是通过桥臂电阻变化与桥电压间的(近似)线性关系来对桥电阻变化进行测量,因而可以处理连续变化的物理量,适用范围更广.二者都具备电桥电路较为精密的特点.

#### 2. 为什么在实验内容 1 中, $\Delta R_4$ 的绝对值相同时, $R_4$ 小于 $1000 \Omega$ 时的 $U_g$ 值比 $R_4$ 大于 $1000 \Omega$ 时的 $U_g$ 值,绝对值大?

据式 (3), 变形可得:

$$\begin{aligned} U_g &= \frac{U_s}{4} \delta \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\delta} \\ &= \frac{U_s}{2} \frac{\delta}{2 + \delta} \end{aligned} \quad (29)$$

令  $f(x) = \frac{x}{2+x}$ , 则  $f'(x) = -\frac{2}{(2+x)^2}$ ,  $f''(x) = \frac{4}{(2+x)^3}$ . 当  $x \in [-0.2, 0.2]$  时, 有  $f''(x) > 0$ , 曲线为凹, 导函数单调减少. 故左边的点的斜率较右边的点大, 从而在横轴变化量相同时, 偏离理想直线更多, 表现为纵轴绝对值更大.

#### 3. 假设用非平衡电桥来测量一个热敏电阻的电阻值随温度的变化, $U_s = 2.0 \text{ V}$ , 毫伏表最小刻度为 $1 \text{ mV}$ , 在室温 ( $35^\circ\text{C}$ ) 到 $85^\circ\text{C}$ 度范围内, 热敏电阻的电阻值改变 $50 \Omega$ . 取等臂电桥, 为了保证测量的灵敏度(即: 每隔 $5^\circ\text{C}$ 读一次输出电压值, 变化量不小于 $1 \text{ mV}$ ) 并且保持(与理论线性之间的)误差小于 $5\%$ 的线性范围, 请问 $R_0$ 取多少比较合适?(指取值范围的上、下限)

不妨该热敏电阻电阻值随温度变化均匀, 即:

$$\Delta R_4 = \frac{50}{85 - 35} = 1 \Omega \cdot ^\circ\text{C}^{-1} \quad (30)$$

灵敏度要求:

$$\begin{aligned}\Delta U_g &= \frac{U_s}{4} \frac{\Delta R_4}{R_0} \geq 1 \text{ mV} \\ \Rightarrow R_0 &\leq \frac{2 \times 5}{41 \times 10^{-3}} = 2500 \Omega\end{aligned}\quad (31)$$

线性范围要求:(不妨取极端情形,  $\Delta R_4 = 50 \Omega$ )

$$\begin{aligned}\left| \frac{U_g^{\text{Measured}} - U_g^{\text{Ideal}}}{U_g^{\text{Ideal}}} \right| &\leq 0.05 \\ \Rightarrow \left| \frac{\frac{U_s}{2} \frac{\delta}{2+\delta} - \frac{U_s}{4} \frac{\Delta R_4}{R_0}}{\frac{U_s}{4} \frac{\Delta R_4}{R_0}} \right| &\leq 0.05 \\ \Rightarrow \delta &\leq \frac{2}{19}\end{aligned}\quad (32)$$

负值已舍去, 上式意味着:

$$R_0 \geq 475 \Omega \quad (33)$$

故  $R_0$  的范围可取为:

$$R_0 \in [475 \Omega, 2500 \Omega] \quad (34)$$

4. 把计算出来的 Cu 丝电阻温度系数 ( $t = 20^\circ\text{C}$ ) 与参考值  $0.00393^\circ\text{C}^{-1}$  进行比较, 并分析测量的精确程度, 以及产生误差的可能原因.

实验测得  $\alpha_{20} = 0.00403^\circ\text{C}^{-1}$ , 相对误差

$$\eta = \frac{0.00403 - 0.00393}{0.00393} = 2.5\%$$

实验误差处于可接受范围之内, 可能的误差来源有:

- 因电桥调整平衡时的电压表读数处于  $0.01 \text{ mV}$  量级, 与实验中的桥电压变化相比较小, 故并未记录, 而直接以  $0$  代替, 这可能带来了一些误差;
- 铜丝与水接触生锈, 电阻率一定程度增大;
- 温度计示数变化与实际温度变化相比存在一定延后;
- 部分导线被灼烧变形可能对电桥精度产生一定影响.

## 4 总结

本实验利用电阻箱搭建了直流非平衡电桥, 测定了在不同桥臂电阻值下的线性范围及灵敏度, 并利用之测定了  $0^\circ\text{C}$  下铜丝的电阻温度系数为  $\alpha_0 = (4.39 \pm 0.02) \times 10^{-3}^\circ\text{C}^{-1}$  ( $p = 0.95$ ),  $20^\circ\text{C}$  下铜丝电阻温度系数与标准值之间相对误差  $\eta = 2.5\%$ , 实验效果较好.

## 参考文献

- [1] 中国科学技术大学物理实验教学中心. 非平衡电桥(实验讲义). 2023.09.