

重力加速度的测定

唐延宇 PB22030853

2023 年 4 月 7 日

1 实验目的

重力加速度 g 与我们的生活高度相关. 在我们所生活的地球上, 几乎所有与重力相关的现象均可归结为对 g 的探讨; 同时, g 作为重力场性质的表征量, 明确它的数值对于研究万有引力及我们的宇宙也有着极其重大的意义. 从更实际的角度, 由于地球并非正球体, 精确测定重力加速度的数值对于矿质勘探、提高卫星导弹精度等应用领域也存在一定意义. 与此同时, 与其他物理量相比, 重力加速度的测量相对简单, 易于上手, 将它作为物理实验的发轫, 有助于我们熟悉基本实验仪器、实验方法的使用, 同时培养实验设计的能力.

2 自由落体法测定重力加速度

2.1 实验原理

实验原理分析 据自由落体高度-时间公式:

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

可得: 当光电门 1 的高度固定时, v_0 的值确定; 通过改变光电门 2 的高度, 可改变物体通过光电门 1、2 所用的时间, 从而可得:

$$h_1 = v_0 t_1 + \frac{1}{2}gt_1^2 \quad (1)$$

$$h_2 = v_0 t_2 + \frac{1}{2}gt_2^2 \quad (2)$$

$$h_3 = v_0 t_3 + \frac{1}{2}gt_3^2 \quad (3)$$

...

其中 v_0 是物体通过光电门 1 时的速度大小. 两端同时除以 t_i 可得:

$$\frac{h_1}{t_1} = v_0 + \frac{1}{2}gt_1 \quad (4)$$

$$\frac{h_2}{t_2} = v_0 + \frac{1}{2}gt_2 \quad (5)$$

$$\frac{h_3}{t_3} = v_0 + \frac{1}{2}gt_3 \quad (6)$$

...

因此通过测定一系列的 h 和 t 值, 可绘制 $\frac{h}{t} - t$ 图线, 其斜率的 2 倍即 g 值.

2.2 实验方案

本实验的方案为: 使用双光电门分别测定物体通过两个光电门时距释放经历的时间, 从而得到物体通过两个光电门的时间差, 同时再测定两光电门间的距离, 使用实验原理中的方法即可得到 g 的测量值.

2.3 实验器材

本实验使用的器材有钢卷尺、数字毫秒计、立柱、电磁铁、纸杯等.

2.4 实验数据

数据记录 本实验测定了圆柱、小球、大球三种物体运动时的重力加速度. 将所得数据列表如下: 注: 下落时间采用了所测三组数据的平均值.

表 1: 自由落体法测定重力加速度数据表

序号	1	2	3	4	5	6
光电门 1-2 间距/cm	39.85	44.21	46.98	48.96	54.61	59.44
圆柱体下落用时/s	0.1401	0.1520	0.1591	0.1646	0.1792	0.1912
小球下落用时/s	0.1403	0.1520	0.1591	0.1648	0.1793	0.1912
大球下落用时/s	0.1408	0.1526	0.1597	0.1654	0.1800	0.1920

数据处理 本实验采用作图法以及最小二乘法拟合两种方法进行处理. 作图法所绘图像及计算所得重力加速度值请见附件 3. 利用 Origin 软件进行最小二乘拟合结果如下:

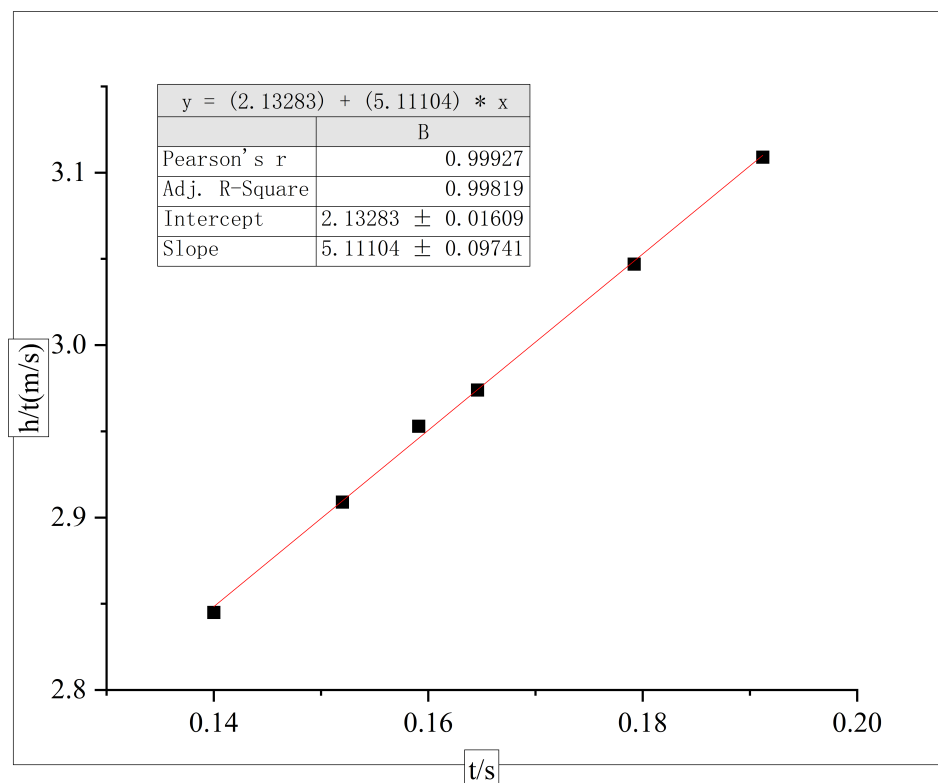


图 1: 圆柱体自由落体拟合结果

2.5 误差分析

最小二乘线性拟合给出的结果为:圆柱体: $g = 10.22 \text{ m/s}^2$, 小球: $g = 10.37 \text{ m/s}^2$, 大球: $g = 10.23 \text{ m/s}^2$. 三个物体的平均测量值为: $\bar{g} = 10.27 \text{ m/s}^2$. 取真值为 $\hat{g} = 9.79 \text{ m/s}^2$, 可得相对误差 $\delta = \frac{|\bar{g} - \hat{g}|}{\hat{g}} \times 100\% = 5\%$. 本实验的误差较大, 但三个物体的线性回归 R 值都非常接近 1, 表明线性相关性很强. 由此可推测得知本实验中的误差应是近乎始终存在的, 故应从仪器系统本身的问题这一角度进行考量, 而几乎可忽略实验中的随机误差. 据我自己分析可能的原因如下:

1. 由于物体本身具有高度, 光电门所测时间差可能并非物体质心实际通过两个光电门时的时间差, 因而存在一定误差.
2. 立柱摆放存在问题. 可能立柱存在倾斜, 导致物体时即通过的高度相比所测高度较小, 从而导致测得重力加速度值偏大.
3. 测量过程存在瑕疵. 在测量高度的过程中, 实验者可能并未将卷尺与立柱完全对齐, 导致测量出现误差; 同时, 光电门对于时间的测定可能也存在延迟.

在本次实验中, 若换用质量更大、体积更小的物体, 可以在一定程度上减小误差; 更重要的是提高光电门的计时精度, 也可以大大减小误差.

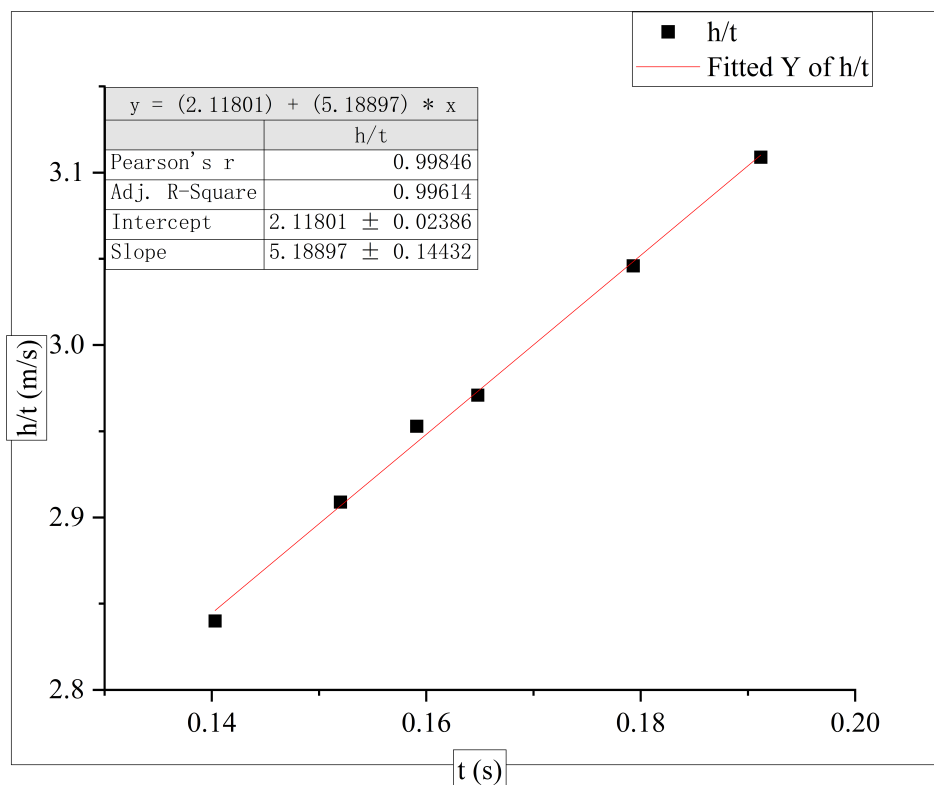


图 2: 小球自由落体拟合结果

2.6 思考题

1. 由于重力加速度较大, 物体下落很快, 人手动计时误差较大; 若使用电磁铁, 则由于剩磁现象的存在, 物体释放的初始时刻难以确定, 因而难以测定准确的重力加速度值.
2. 应当确保两个光电门间的距离不能过小, 也不能过大. 若距离过小, 则时间较短, 时间测量的相对误差增加; 若距离过大, 则物体下落过程增加, 空气阻力影响加剧.
3. 可增加 2-3 个光电门, 构成一组光电门, 从而可以得知物体通过每两个光电门的时间差, 再利用逐差法也可测出 g .

3 单摆法测定重力加速度

3.1 实验原理

实验原理分析 本实验的原理即在一级近似及单摆摆角较小时, 其周期仅与摆长 L 与重力加速度 g 有关. 根据牛顿第二定律, 可对单摆的运动列出如下方程:

$$mg \sin \theta = -mL\ddot{\theta} \quad (7)$$

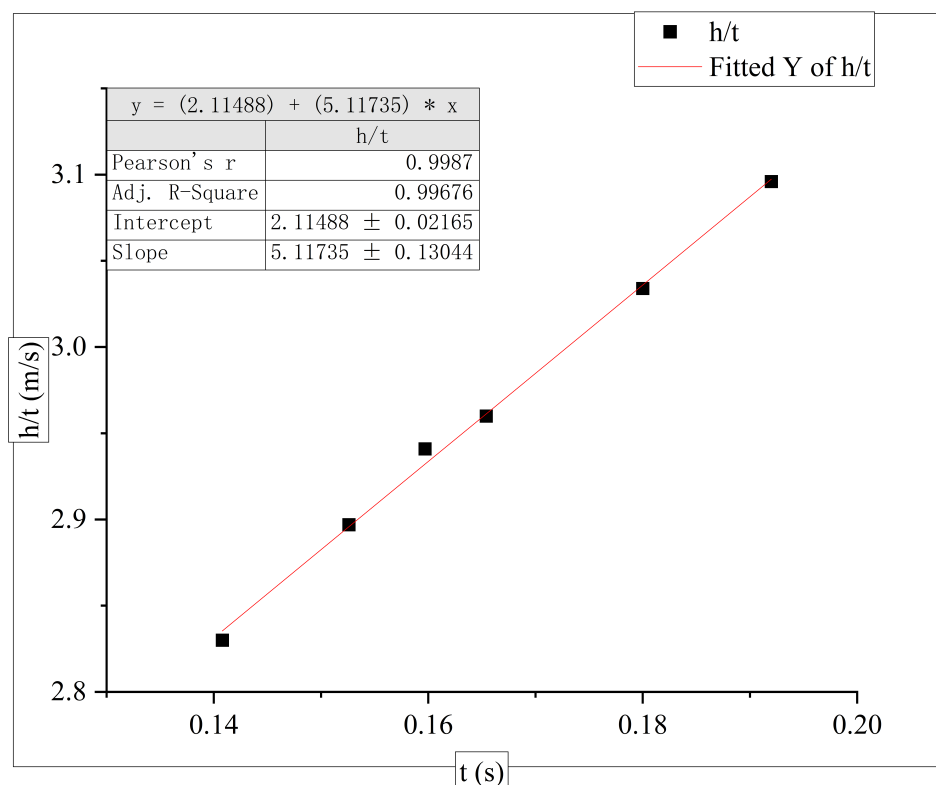


图 3: 大球自由落体拟合结果

其中 m 为小球质量, L 为摆长, θ 为摆角大小. 当 θ 很小时 ($\theta < 5^\circ$), 有如下近似关系:

$$\sin \theta \approx \theta \quad (8)$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0 \quad (9)$$

可知, 此时单摆的运动为简谐振动, 则其周期公式为:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (10)$$

$$\Rightarrow g = \frac{4\pi^2}{T^2}L \quad (11)$$

因此, 可通过测定摆长与摆角来确定重力加速度的值.

3.2 实验设计

见附件 1. 在实际实验中, 实验者发现小球直径若用钢卷尺测量, 摆长的不确定度可以满足实验要求, 因此在实际实验中本人采用了钢卷尺测量了小球直径, 而放弃了原本设计中游标卡尺的使用.

3.3 实验器材

本实验使用的器材有: 钢卷尺、电子秒表、单摆 (带标尺、平面镜, 摆线长度可调).

各仪器的最大允差:

钢卷尺 $\Delta_{尺}=0.2\text{ cm}$ 秒表 $\Delta_{秒}=0.01\text{ s}$

实验人员测量时间的估计误差 $\Delta_{人}=0.2\text{ s}$

3.4 实验数据

数据记录 本实验共测定了五组小球直径、摆线长度、周期数据, 列表如下:

表 2: 小球直径/cm

序号	1	2	3	4	5
长度	2.13	2.15	2.11	2.12	2.13

表 3: 摆线长度/cm

序号	1	2	3	4	5
长度	70.81	70.77	70.79	70.81	70.79

表 4: N=70 个周期的总时间/s

序号	1	2	3	4	5
时间	119.25	119.36	119.30	119.46	119.37

数据处理 小球直径的平均值为:

$$\bar{d} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 d_i = 2.13\text{ cm}$$

摆线长度平均值为:

$$\bar{l} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 l_i = 70.79\text{ cm}$$

周期的平均值为:

$$\bar{T} = \frac{1}{70} \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 t_i = 1.70\text{ s}$$

3.5 误差分析

不确定度计算 由上可知, 摆长 $\bar{L} = \bar{l} + \frac{\bar{d}}{2} = 71.86 \text{ cm}$, $\bar{l} = 70.79 \text{ cm}$, $\bar{d} = 2.13 \text{ cm}$, $\bar{T} = 1.70 \text{ s}$. 则摆线长度的 A 类不确定度为:

$$u_{lA} = \frac{\sigma_l}{\sqrt{5}} \quad (12)$$

$$= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 (l_i - \bar{l})^2}{5(5-1)}} \quad (13)$$

$$= 7.6 \times 10^{-3} \text{ cm}$$

小球直径的 A 类不确定度为:

$$u_{dA} = \frac{\sigma_d}{\sqrt{5}} \quad (14)$$

$$= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 (d_i - \bar{d})^2}{5(5-1)}} \quad (15)$$

$$= 6.7 \times 10^{-3} \text{ cm}$$

查表可知, 当 $p = 0.95, \nu = 4$ 时,

$$t_{0.95} = 2.776 \quad (16)$$

故摆线长度和小球直径的 A 类扩展不确定度为:

$$U_{lA} = t_{0.95} u_{lA} \quad (17)$$

$$= 2.2 \times 10^{-2} \text{ cm} \quad (18)$$

$$U_{dA} = t_{0.95} u_{dA}$$

$$= 1.9 \times 10^{-2} \text{ cm} \quad (p = 0.95)$$

长度测量的 B 类不确定度仅需考虑钢卷尺的允差, 有:

$$u_{LB} = \frac{\Delta_B}{C} \quad (19)$$

$$= 6.7 \times 10^{-2} \text{ cm}$$

查表可知, 当 $p = 0.95, \nu = 4$ 时,

$$k_{0.95} = 1.960 \quad (20)$$

故长度测量的 B 类扩展不确定度为:

$$U_{LB} = k_{0.95} u_{BL} = 0.13 \text{ cm} \quad (p = 0.95) \quad (21)$$

又根据 $\bar{L} = \bar{l} + \frac{\bar{d}}{2}$ 可知, 摆长 L 的不确定度为:

$$U_l = \sqrt{U_{lA}^2 + U_{LB}^2} \quad (22)$$

$$= 0.132 \text{ cm}$$

$$U_d = \sqrt{U_{dA}^2 + U_{LB}^2} \quad (23)$$

$$= 0.131 \text{ cm}$$

$$U_L = \sqrt{U_l^2 + \frac{1}{4}U_d^2} \quad (24)$$

$$= 0.15 \text{ cm}$$

周期测量的 A 类不确定度为:

$$u_{TA} = \frac{\sigma_T}{\sqrt{5}} \quad (25)$$

$$= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 (T_i - \bar{T})^2}{5(5-1)}} \quad (26)$$

$$= 5.1 \times 10^{-4} \text{ s}$$

其 A 类扩展不确定度为:

$$U_{TA} = t_{0.95} u_{TA} \quad (27)$$

$$= 1.4 \times 10^{-3} \text{ s} \quad (p = 0.95)$$

由于时间测量的 B 类不确定度来源于秒表允差以及估计误差, 故时间测量的 B 类不确定度为:

$$u_{tB} = \frac{\Delta_B}{C} \quad (28)$$

$$= \frac{\sqrt{\Delta_{app}^2 + \Delta_{est}^2}}{C} \quad (29)$$

$$= 0.067 \text{ s}$$

其 B 类扩展不确定度为:

$$U_{tB} = k_{0.95} u_{tB} \quad (30)$$

$$= 0.13 \text{ s} \quad (p = 0.95)$$

故时间测量的不确定度为:

$$U_t = \sqrt{U_{tA}^2 + U_{tB}^2} \quad (31)$$

$$= 0.13 \text{ s}$$

$$U_T = \frac{1}{70} U_t \quad (32)$$

$$= 1.9 \times 10^{-3} \text{ s}$$

根据 $g = \frac{4\pi^2}{T^2} L$ 以及不确定度传递公式可知:

$$\frac{U_g}{g} = \sqrt{\left(\frac{U_L}{L}\right)^2 + 4\left(\frac{U_T}{T}\right)^2} \quad (33)$$

$$= 3.1 \times 10^{-3} \quad (p = 0.95) \quad (34)$$

故 g 的测量值 $\hat{g} = 9.82 \text{ m/s}^2$, 从而 $U_g = 0.03 \text{ m/s}^2$. 满足要求. 故最终本实验的测量结果为:

$$g = (9.82 \pm 0.03) \text{ m/s}^2 \quad (p = 0.95)$$

误差分析与讨论 合肥地区重力加速度真值可取为 $g = 9.7947 \text{ m/s}^2$, 则本实验的相对误差 $\delta = 0.25\%$, 表明本实验测得的重力加速度已较为精确. 可能的误差来源有:

1. 测量小球直径时, 由于小球是球体, 而实验者采用了钢卷尺测量. 即使实验者采用了特殊方法以提高测量精度, 人眼观测仍然具有一定的不准确性, 这带来了一定的误差. 如果改用游标卡尺测量, 该误差可能被减小.
2. 人在利用秒表计时时, 也不可避免地存在一定误差.