

卢瑟福散射

唐延宇 PB22030853

2024 年 7 月 29 日

摘要

卢瑟福散射实验是物理学史上最负盛名的实验之一，卢瑟福及他的助手和学生通过对约 1/8000 粒子出现大角度散射现象的观察，提出了卢瑟福原子核式结构模型。本实验意在采用真空系统，对卢瑟福散射实验进行复现，并检验卢瑟福散射公式的正确性，并初步分析实验偏差的可能产生原因。

关键词：原子核 真空系统 散射截面

1 引言

1.1 实验背景

卢瑟福散射实验是近代物理学发展过程中具有极其重要的基础性意义的实验之一。1897 年，汤姆逊 (J.J.Thomson) 测定了电子的荷质比，提出了原子的“枣糕”模型，即原子所带的正电荷均匀分布于原子所占据的空间区域之内，电子如同一粒粒“枣核”，镶嵌在正电荷之内。这一模型后来正是被卢瑟福 (E.Rutherford) 以及他的助手盖革 (H. Geiger) 及学生马斯登 (E.Marsden) 进行的散射实验所否定。 α 粒子的反常大角度散射启发了卢瑟福在 1911 年提出了原子的核式模型，这是近代物理学发展历史上的重大里程碑。

1.2 实验原理

卢瑟福微分散射截面公式的推导 [3] 设靶核质量为 M ，带电 $+Ze$ ，散射粒子质量为 m ，带电 $+ze$ ，且有近似条件 $M \gg m$ ，因此仅考虑靶核对粒子的散射作用。假设靶核与散射 α 粒子间仅有库仑静电相互作用， α 粒子流入射总能量为 E_0 。以靶核所处的位置为坐标原点设置坐标系，如图 1 所示，则任意位置粒子所受库仑斥力可写为：

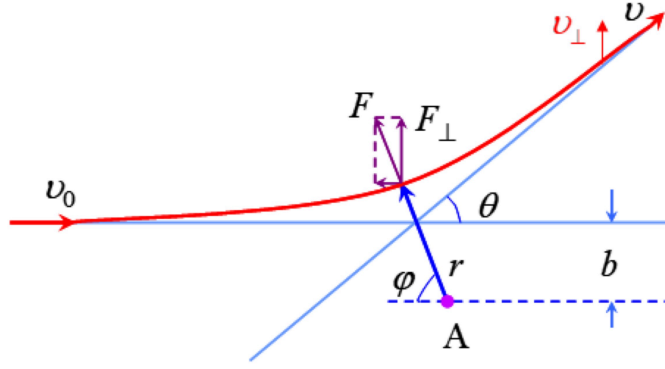


图 1: 卢瑟福散射物理图象

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (1)$$

式中 r 为粒子与靶核间的距离. 考虑粒子运动的全过程, 粒子的总能量守恒; 且由于库仑力场为有心势场, 故 α 粒子的角动量守恒, 因此有:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times (m\mathbf{v} \times \mathbf{r}) = m\mathbf{v}_0 \times \mathbf{r}_0 \quad (2)$$

对式 (2) 取模, 可得:

$$\begin{aligned} mr^2 \frac{d\varphi}{dt} &= mv_0 b \\ \Rightarrow dt &= \frac{r^2}{bv_0} d\varphi \end{aligned} \quad (3)$$

考虑全程, 库仑力沿与初速度垂直方向上的分量 F_{\perp} 对粒子的总冲量带来了粒子垂直方向上的速度变化:

$$\begin{aligned} F_{\perp} dt &= F \sin \varphi dt = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{r^2} \\ \Rightarrow dv_{\perp} &= \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 mbv_0} \sin \varphi d\varphi \end{aligned} \quad (4)$$

从而:

$$\begin{aligned} v_0 \sin \theta &= v_{\perp\infty} - v_0 = \int_0^{\pi-\theta} dv_{\perp} \\ &= \int_0^{\pi-\theta} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 mbv_0} \sin \varphi d\varphi = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 mbv_0} (1 + \cos \theta) \end{aligned} \quad (5)$$

故:

$$\cot \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{2b}{D} \quad (6)$$

其中:

$$D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{E_0}, \quad E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (7)$$

然而,由于瞄准距离 b 并非可观测量.因此我们引入 θ 方向的立体角元 $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$, 实验上可测量的是对应于一定的入射粒子数 n , 散射到 θ 方向立体角元 $d\Omega$ 内的粒子数 dn , 且粒子散射到 θ 方向立体角元 $d\Omega$ 内的概率 $P = \frac{dn}{nd\Omega}$. 下计算微分散射截面: 由于入射到 $d\sigma = 2\pi b|db|$ 内的粒子, 一定会被散射到 $\theta \rightarrow \theta - d\theta$ 方向上, 如图2所示, 故:

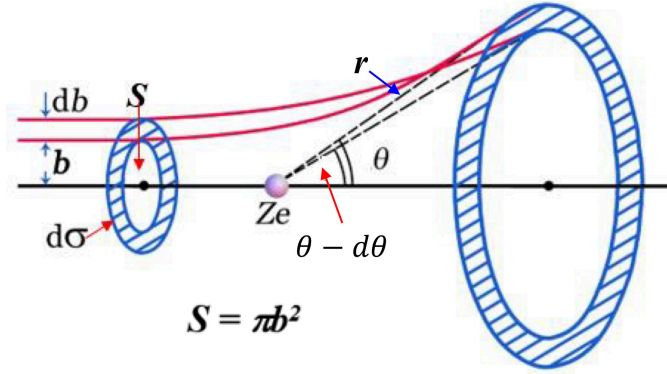


图 2: 微分散射截面物理模型

$$\frac{dn}{nd\Omega} \propto \frac{d\sigma}{Sd\Omega} \quad (8)$$

其中 $S = \pi b^2$ 为入射靶面积. 由式 (6) 有:

$$|db| = \frac{D}{4} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad (9)$$

从而:

$$d\sigma = 2\pi b db = \frac{\pi b D}{2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta \quad (10)$$

$$d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{1}{2\pi \sin\theta} d\Omega \quad (11)$$

联合式 (10,11) 可得, 微分散射截面:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{D^2}{16} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (12)$$

再考虑实际散射时, 粒子实际是与多个靶核发生了相互作用, 设单位体积内靶原子核数密度为 N , 靶厚度为 t , 则有:

$$\frac{dn}{n} = \frac{d\Sigma}{S} = \frac{N S t d\sigma}{S} = N t d\sigma \quad (13)$$

从而, 单位方向上单位时间内散射的粒子数可写为:

$$\frac{dn}{d\Omega} = n N t \frac{d\sigma}{d\Omega} = n N t \frac{D^2}{16} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (14)$$

$$= n N t \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{4E_0} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (15)$$

以上便是完整的卢瑟福微分散射界面与散射公式的推导过程.

2 实验仪器与方法 [1]

2.1 实验仪器

本实验中采用的实验仪器包括散射真空室、步进电机的控制系统和数据采集系统。散射真空室内包括 α 放射源、散射样品台、 α 粒子探测器、步进电机和传动机构，如图3所示。

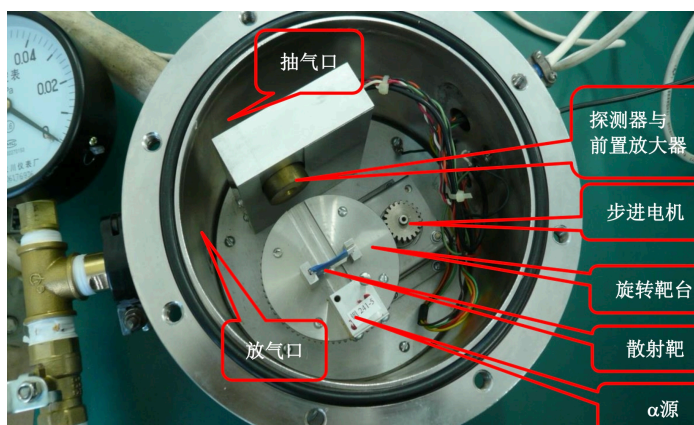


图 3: 散射真空室结构图

2.2 实验方法与步骤

本实验的主要步骤如下：

2.2.1 测量 α 粒子束的强度及在空气中的射程，计算 α 粒子的能量

1. 将空靶插入空槽，测量靶到探头的距离 l_1 、源到探头的距离 l_2 ，记录室温 T ；
2. 将真空室抽真空，在 $[-5^\circ, 5^\circ]$ 间以 1° 为步长测量粒子的能谱峰区计数，找到物理零度；
3. 将靶台转到物理零度，测量 ROI 计数 120 秒，改变真空度，在 $6 \sim 30$ kPa 间选取 4 个点，各测量 120 秒，并绘制 $N \sim p$ 曲线，求出初始强度 N_0
4. 拟合出 α 粒子在标准大气压下射程 R ，并根据公式求出 α 粒子能量。

2.2.2 $N \propto \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$ 的验证

1. 更换金靶，将真空室抽真空，在 $[-3^\circ, 3^\circ]$ 间以 1° 为步长测量粒子的能谱峰区计数，找到物理零度；

2. 在 $[10^\circ, 22^\circ]$ 间按不同时间测量 5 个角度, 绘制 $\frac{N}{t} \sim \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$ 曲线, 验证卢瑟福散射定律; 根据

$$K = 4.8065 \times 10^{-34} \frac{N_0}{E^2 l_1^2} \quad (16)$$

计算 K 的理论值, 并与实验值 $K = N \cdot \sin^4 \frac{\theta}{2}$ 比较.

3 实验结果与数据处理

3.1 α 粒子束的强度、在空气中的射程以及初始能量测量

实验测量得到 $l_1 = 42.0 \text{ mm}$, $l_2 = 67.0 \text{ mm}$, 实验时室内温度为 29°C . 测量物理零度所得数据以及粒子数与气压关系所得数据分别如表1所示:

表 1: 物理零度的确定

$\theta/^\circ$	-5	-4	-3	-2	-1	0
N	46558	68702	82827	98774	107341	110538
$\theta/^\circ$	1	2	3	4	5	
N	111594	101938	83233	72256	51248	

表 2: 粒子数与气压数据表

p/kPa	0	6	14	22	30
N	220375	210170	184005	155083	118167

由表可知物理零度为 1° . 利用 Origin 软件拟合得到的 $N \sim p$ 关系曲线如图4所示, 由图可知:

$$N = -3436.45p(\text{kPa}) + 227044, r = -0.9906 \quad (17)$$

根据拟合结果可得, $N_0 = 227044$; $N = \frac{1}{2}N_0$ 时, $p = 33.03 \text{ kPa}$. 此时 α 粒子的射程 $R' = l_2 = 6.7 \text{ cm}$. 根据:(粒子射程与空气密度呈反比)[2]

$$\frac{R'}{R} = \frac{\rho}{\rho'} \quad (18)$$

以及:

$$\rho = 1.293 \times \frac{p}{101.325} \times \frac{273}{T} \quad (19)$$

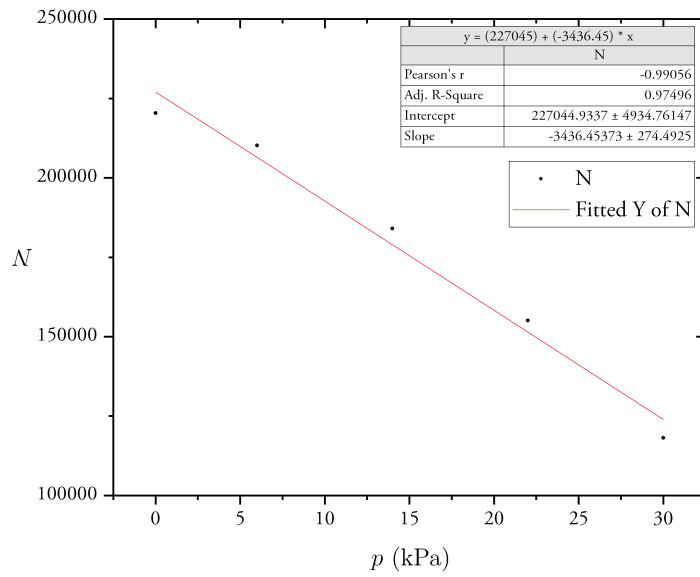


图 4: $N \sim p$ 关系拟合结果

可得 $p = 101.325 \text{ kPa}$, $T = 273 \text{ K}$ 时,

$$\begin{aligned}
 R &= R' \frac{\rho'}{\rho} \\
 &= 6.7 \times \frac{33.03}{101.325} \times \frac{273}{302} \\
 &= 1.9743 \text{ cm}
 \end{aligned} \tag{20}$$

再代入前人的经验公式: [1]

$$R = (0.285 + 0.005E)E^{1.5} \tag{21}$$

式中 E 的单位为 MeV, R 的单位是 cm. 得到:

$$(0.285 + 0.005E)E^{1.5} = 1.9743 \tag{22}$$

我们采用二分法和牛顿切线法来求解此超越方程, 如下:

令 $f(E) = (0.285 + 0.005E)E^{1.5} - 1.9743$, 则 $f(3) = -0.42 < 0$, $f(4) = 0.47 > 0$, 从而 $3 < E < 4$; $f(3.5) = 6.44 \times 10^{-3} > 0$, 从而 $3 < E < 3.5$, 且由于 $f(3.5)$ 非常接近于 0, 可知 E 的解非常接近于 3.5. 设 $x_0 = 3.5$, 利用牛顿切线法, 有:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{23}$$

又 $f'(E) = 0.005E^{1.5} + 1.5(0.285 + 0.005E)E^{0.5}$, 则有

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (24)$$

$$= 3.5 - \frac{6.44 \times 10^{-3}}{0.8816} \quad (25)$$

$$= 3.493 \quad (26)$$

精度已经较高, 可满足要求, 故 $E = 3.493 \text{ MeV}$.

3.2 卢瑟福散射公式的验证

换用金靶后, 重新寻找物理零度获得的数据以及验证卢瑟福散射公式中角度部分的数据分别如表所示

表 3: 金靶条件下物理零度的确定

$\theta/^\circ$	-3	-2	-1	0	1	2	3
N	12496	12836	12722	12674	11472	10457	9174

表 4: 卢瑟福散射公式验证数据记录表

$\theta/^\circ$	10	13	16	19	22
t/s	200	300	600	900	1200
N	7820	5577	5263	3220	2139

根据表可得物理零度为 -2° , 利用 Origin 软件拟合得到的 $\frac{N}{t} \sim \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$ 图线如图5所示. 由图可得,

$$N = 0.00221 \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} + 1.90669, r = 0.9906 \quad (27)$$

皮尔逊相关系数 r 极其接近于 1, 因此可以认为 $\frac{N}{t} \sim \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$ 呈现比较好的线性关系, 故验证了卢瑟福散射公式.

K 的理论值可如下计算: [1]

$$\begin{aligned} K &= 4.8065 \times 10^{-34} \frac{N_0}{E^2 l_1^2} \\ &= 4.8065 \times 10^{-34} \times \frac{227044}{(3.493e \times 10^6)^2 \times (4.2 \times 10^{-2})^2} \\ &= 0.197525 \end{aligned} \quad (28)$$

实验实际得到的 $K = N \cdot \sin^4 \frac{\theta}{2}$ 结果如表所示:

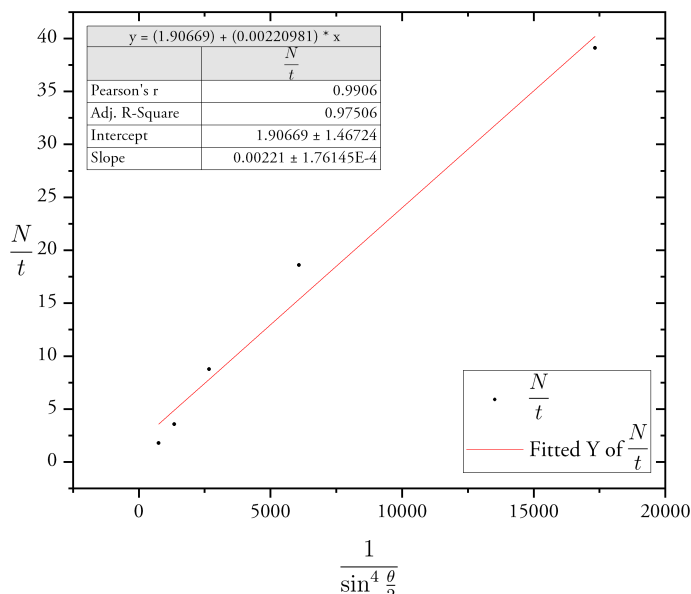


图 5: $\frac{N}{t} \sim \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$ 关系拟合结果

表 5: $K \sim \theta$ 关系数据表

$\theta/^\circ$	10	13	16	19	22
K	0.1354	0.1832	0.1974	0.1593	0.1418

利用数据绘制得到的 $K \sim \theta$ 理论与实际对比如图6所示. 由图可知, 无论是 θ 较大还是较小时, 实验值与理论值之间都存在偏差, 而且实验值往往相对理论值偏小, 具体原因将在实验讨论部分分析.

4 实验讨论(思考题)

1. 卢瑟福散射实验中的实验数据误差应如何计算?

本实验的误差来源主要有以下几个方面:

- 步进电机分度值仅仅为 1° , 两次确定物理零度时都可能存在误差;
- 气压计的测量可能存在一定误差;
- 对 l_1, l_2 的测量精度不足;
- 真空系统气密性不够好或存在瑕疵.

2. 根据卢瑟福公式 $N \cdot \sin^4 \frac{\theta}{2}$ 应为常数, 本实验的结果有偏差吗? 试分析原因.

本题需要讨论的即 K 所存在的偏差, 实验得到的 K 并非常数, 而是存在波动, 且往往相对理论值偏小, 可能原因如下:

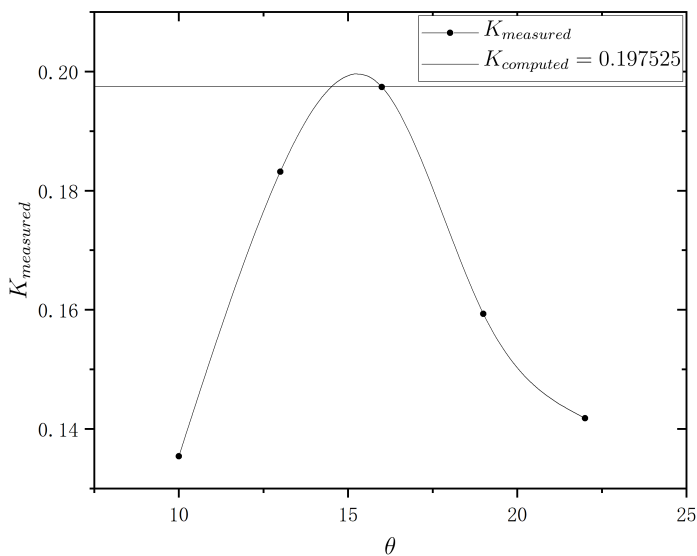


图 6: $K \sim \theta$ 关系理论与实验对比图

- 步进电机对 θ 值的控制可能不够精确导致实际测量获得的角度值与读数不同；
- 实验所使用的真空系统真空度较低，空气散射可能对实验产生影响；
- 本实验中所有计数均只进行了一次，可能存在随即偏差。

实际上，本实验中得到的 K 的极大不均匀度为：

$$\eta = \frac{0.197525 - 0.1354}{0.197525} \times 100\% = 31.4\% \quad (29)$$

并非不均匀度特别大的情况，因此，可以认为本实验较好的达到了实验目的。

3. 若人体肌肉组织的密度为 $1.10 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ ，根据实验内容 4 的结果估算本实验中的 α 粒子在人体肌肉组织中的射程，单位取 cm。

根据介质密度与射程呈反比，可得：

$$\begin{aligned} R &= R' \frac{\rho'}{\rho} \\ &= 6.7 \times \frac{3.81 \times 10^{-4}}{1.1} \\ &= 2.32 \times 10^{-3} \text{ cm} \end{aligned} \quad (30)$$

4. 结合附录 III 的内容，讨论在小角度散射时实验结果与理论值的偏离原因。

附录 III 给出了卢瑟福散射公式失效的临界角与靶厚度以及 α 粒子入射能量间

的关系, 结合图分析可知, 小角度下实验值与理论值之间存在偏差的可能原因有:

- 实验中使用的金靶较厚, 使得临界角增大, 实验进入了失效的角度范围;
- 本实验中 α 粒子入射能量较大, 使得临界角增大;
- 散射角较小时, 意味着 α 粒子几乎正对金靶原子入射, 则此时不能完全忽略核外电子对 α 粒子的库仑作用, 此时原子近乎中性, 采用原子物理中使用的中心势场近似核外电子的库仑作用可能更加合适.

5 总结与致谢

本实验利用粗真空系统, 基本复现了卢瑟福散射实验. 实验利用空气靶, 测量了 α 粒子在空气中的平均射程, 并由此推算出了 α 粒子的入射能量值; 此后利用金靶对卢瑟福公式中粒子数与半角正弦值负四次方的正比关系进行了验证, 并检验了实验值与理论值的差异, 对其出现原因进行了简要分析. 实验中, 尤其感谢蔡俊老师在操作与多道分析仪系统上对实验者的指导与帮助!

附录(原始数据)(见下页)

卢瑟福散射

唐延宇 PB22030853

 l_1/cm 4.2 温度 $t=29^\circ\text{C}$

蔡俊

5/27

 l_2/cm 6.7

θ -5° -4° -3° -2° -1° 0° 1° 2° 3° 4° 5°
 N 4658 68702 82827 98774 107341 110538 111594 101938 83233 72256 51248
 $6 \sim 30 \text{ kPa}$ 物理零度

P/kPa 0 6 14 22 30
 N 220375 210170 184005 153083 118167

 $N \propto \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$ 验证

$\theta/^\circ$ -3 -2 -1 0 1 2 3
 N 12496 12836 12722 12674 11472 10457 9174
物理零度

相对 $\theta/^\circ$ 10 13 16 19 22
 t/s 200 300 600 900 1200
 N 7820 5577 5263 3220 2139



参考文献

- [1] 中国科学技术大学物理实验教学中心. 卢瑟福散射实验(实验讲义). 2024.03.
- [2] 汪晓莲, 李澄, 邵明, 陈宏芳. 粒子探测技术. 中国科学技术大学出版社, 合肥, 2009.
- [3] 徐克尊, 陈向军, 陈宏芳. 近代物理学(第三版). 中国科学技术大学出版社, 合肥, 2014.