

理论力学 A 第十五次作业答案

助教 唐延宇 李伟霆

2025 年 1 月 10 日

1 HW14

Problem 1.

已知 Hamilton 量描述的体系为：

$$H = \frac{1}{2m}(p^2 + m\omega^2 q^2) \cos(\Omega t)$$

利用 Hamilton-jacobi 方法求解 $p(t), q(t)$, 其中给定 $p(0) = p_0, q(0) = 0$

解：H-J 方程可写为：

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + m\omega^2 q^2 \right] \cos(\Omega t)$$

令 $t' = \frac{1}{\Omega} \sin(\Omega t)$, 则：

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = \cos(\Omega t) \frac{\partial S}{\partial t'}$$

从而可分离变量： $S(q, p, t') = T(t') + W(q)$ ：

$$\begin{aligned} -\frac{\partial T}{\partial t'} &= \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + m\omega^2 q^2 \right] = P \\ \Rightarrow S &= \int \sqrt{2mP - m^2\omega^2 q^2} dq - \frac{P}{\Omega} \sin(\Omega t) \end{aligned}$$