

切变模量测量

唐延宇 PB22030853

2023 年 10 月 21 日

1 实验目的

切变模量是指材料在受到剪切形变时, 其单位面积所受的力与单位长度上的切形变量的比值. 它是反映材料所具有的扭转能力大小的一个重要物理量. 因此, 在实际生产中, 产品的切变模量可以作为检验其质量的一个指标. 本实验的目的正是使用扭摆法测定金属丝的切变模量.

2 实验原理

通过力学分析计算可知, 金属丝的切变模量 G 与钢丝扭矩 M 存在如下关系:

$$G = \frac{2ML}{\pi R^4 \varphi} \quad (1)$$

其中, L 是金属丝的长度, 即上夹具下端与下夹具上端间的距离, R 是金属丝的半径. 在钢丝下端固定一圆盘, 可制成扭摆, 钢丝的扭矩与它扭过的角度满足如下关系:

$$M = D\varphi \quad (2)$$

其中, D 即金属丝的扭转模量. 依据转动定律可得:

$$M = I_0 \ddot{\varphi} \quad (3)$$

其中 I_0 是圆盘的转动惯量. 整理上述各式可得金属丝转动的运动方程, 如下:

$$\ddot{\varphi} + \frac{D}{I_0} \varphi = 0 \quad (4)$$

这表明扭摆的运动是一个简谐振动, 其角频率为 $\omega = \sqrt{\frac{D}{I_0}}$, 则其周期可表示为:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{D}} \quad (5)$$

周期的测量数据如表 3 所示.

表 3: 周期测量数据记录表

序号	1	2	3
t_1 (N = 55)/s	204.91	205.41	205.20
t_0 (N = 40)/s	88.63	88.59	88.57

4.2 误差分析与不确定度计算

钢丝直径的平均值为 $\bar{D} = 0.780 \text{ mm}$, 则钢丝半径 $\bar{R} = 0.390 \text{ mm}$. 其 A 类不确定度可如下计算:

$$\begin{aligned}
 u_{A,R} &= \frac{\sigma_R}{\sqrt{8}} \\
 &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^8 (R_i - \bar{R})^2}{8(8-1)}} \\
 &= \sqrt{\frac{(0.3895 - 0.39)^2 + 2 \times (0.3905 - 0.39)^2 + (0.3925 - 0.39)^2 + (0.389 - 0.39)^2}{8 \times (8-1)}} \\
 &= 3.78 \times 10^{-4} \text{ mm}
 \end{aligned} \tag{9}$$

查表可知, 当 $p = 0.95, \nu=7$ 时,

$$t_{0.95} = 2.365 \tag{10}$$

则 R 的 A 类扩展不确定度为:

$$\begin{aligned}
 U_{A,R} &= t_{0.95} u_{A,R} \\
 &= 2.365 \times 3.78 \times 10^{-4} \text{ mm} \\
 &= 8.94 \times 10^{-4} \text{ mm} \quad (p = 0.95)
 \end{aligned} \tag{11}$$

螺旋测微器的最大允差为 $\Delta_D = 0.004 \text{ mm}$, 则 $\Delta_R = 0.002 \text{ mm}$, 又螺旋测微器的误差为正态分布, 取 $C = 3$, 则 R 的 B 类不确定度为:

$$\begin{aligned}
 u_{B,R} &= \frac{\Delta_R}{C} \\
 &= \frac{0.002 \text{ mm}}{3} \\
 &= 6.67 \times 10^{-4} \text{ mm}
 \end{aligned} \tag{12}$$

查表可知, 当 $p = 0.95$ 时,

$$k_{0.95} = 1.960 \tag{13}$$

则 R 的 B 类扩展不确定度为:

$$\begin{aligned} U_{B,R} &= k_{0.95} u_{B,R} \\ &= 1.960 \times 6.67 \times 10^{-4} \text{ mm} \\ &= 1.31 \times 10^{-3} \text{ mm} \quad (p = 0.95) \end{aligned} \quad (14)$$

综上, 合成不确定度为:

$$\begin{aligned} U_R &= \sqrt{U_{A,R}^2 + U_{B,R}^2} \\ &= \sqrt{(8.94 \times 10^{-4})^2 + (1.31 \times 10^{-3})^2} \text{ mm} \\ &= 1.59 \times 10^{-3} \text{ mm} \quad (p = 0.95) \end{aligned} \quad (15)$$

则 R 的测量值为:

$$R = (0.3900 \pm 0.0016) \text{ mm} \quad (p = 0.95) \quad (16)$$

相对不确定度为:

$$\frac{U_R}{R} = 4.1 \times 10^{-3} \quad (p = 0.95) \quad (17)$$

下面一并计算 m, r, L 的 B 类不确定度: 由于圆环内外径 r 由游标卡尺测定, 它的误差分布式为均匀分布, 应取 $C = \sqrt{3}, k_{0.95} = \sqrt{3} \times 0.95 = 1.645$. 而对于其他两个物理量, 其误差分布均为正态分布, 取 $C = 3, k_{0.95} = 1.960$. 各仪器允差为: 钢卷尺 $\Delta_L = 0.2 \text{ cm}$, 天平 $\Delta_m = 0.08 \text{ g}$, 螺旋测微器 $\Delta_D = 0.004 \text{ mm}$, 游标卡尺 $\Delta_d = 0.02 \text{ mm}$. 则这三个物理量的 B 类扩展不确定度可分别计算如下:

$$\begin{aligned} Ur &= k_{0.95} ur = k_{0.95} \frac{\Delta_d}{2C} \\ &= 1.645 \times \frac{0.01}{\sqrt{3}} \\ &= 9.50 \times 10^{-3} \text{ mm} \\ &= 9.50 \times 10^{-4} \text{ cm} \quad (p = 0.95) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} Um &= k_{0.95} um = k_{0.95} \frac{\Delta_m}{C} \\ &= 1.960 \times \frac{0.08}{3} \\ &= 0.05 \text{ g} \quad (p = 0.95) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} UL &= k_{0.95} uL = k_{0.95} \frac{\Delta_L}{C} \\ &= 1.960 \times \frac{0.2}{3} \\ &= 0.13 \text{ cm} \quad (p = 0.95) \end{aligned} \quad (20)$$

那么, 这三个物理量的最终测量值可表示为:

$$r_{\text{in}} = (4.2000 \pm 0.0009) \text{ cm} \quad (p = 0.95) \quad (21)$$

$$r_{\text{out}} = (5.2100 \pm 0.0009) \text{ cm} \quad (p = 0.95) \quad (22)$$

$$m = (564.50 \pm 0.05) \text{ g} \quad (p = 0.95) \quad (23)$$

$$L = (44.35 \pm 0.13) \text{ cm} \quad (p = 0.95) \quad (24)$$

下面计算周期测量的不确定度: T_1, T_0 的测量均值分别为: $\bar{T}_1 = 3.730 \text{ s}, \bar{T}_0 = 2.215 \text{ s}$.
则 T_1, T_0 的 A 类不确定度可如下计算:

$$\begin{aligned} u_{A,T_1} &= \frac{\sigma_{T_1}}{\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^3 (T_{1i} - \bar{T}_1)^2}{3(3-1)}} \\ &= \sqrt{\frac{(3.726 - 3.73)^2 + (3.735 - 3.73)^2 + (3.731 - 3.73)^2}{3 \times (3-1)}} \text{ s} \\ &= 2.6 \times 10^{-3} \text{ s} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} u_{A,T_0} &= \frac{\sigma_{T_0}}{\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^3 (T_{0i} - \bar{T}_0)^2}{3(3-1)}} \\ &= \sqrt{\frac{(2.216 - 2.215)^2 + (2.215 - 2.215)^2 + (2.214 - 2.215)^2}{3 \times (3-1)}} \text{ s} \\ &= 5.7 \times 10^{-4} \text{ s} \end{aligned} \quad (26)$$

查表可知, 当 $p = 0.95, \nu=2$ 时,

$$t_{0.95} = 4.303 \quad (27)$$

故周期测量的 A 类扩展不确定度为:

$$\begin{aligned} U_{A,T_1} &= t_{0.95} u_{A,T_1} \\ &= 4.303 \times 2.6 \times 10^{-3} \text{ s} \\ &= 0.011 \text{ s} \quad (p = 0.95) \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} U_{A,T_0} &= t_{0.95} u_{A,T_0} \\ &= 4.303 \times 5.7 \times 10^{-4} \text{ s} \\ &= 2.48 \times 10^{-3} \text{ s} \quad (p = 0.95) \end{aligned} \quad (29)$$

对于周期测量的 B 类不确定度, 由于 $\Delta_t \gg \Delta_T$, 故可以只考虑人的计时误差. 由于人开始与结束计时时存在两次操作, 可取 $\Delta_t = 0.2 \text{ s}$. 由于误差分布为正态分布, 取 $C = 3, k_{0.95} = 1.960$, 可得 T_1, T_0 的 B 类不确定度为:

$$\begin{aligned} U_{B,T_1} &= k_{0.95} \frac{\Delta_{T_1}}{C} = k_{0.95} \frac{\Delta_t}{55C} \\ &= 1.960 \times \frac{0.2}{3 \times 55} \\ &= 2.4 \times 10^{-3} \text{ s} \quad (p = 0.95) \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} U_{B,T_0} &= k_{0.95} \frac{\Delta_{T_0}}{C} = k_{0.95} \frac{\Delta_t}{40C} \\ &= 1.960 \times \frac{0.2}{3 \times 40} \\ &= 3.3 \times 10^{-3} \text{ s} \quad (p = 0.95) \end{aligned} \quad (31)$$

由上可知, T_1, T_0 的合成不确定度可计算如下:

$$\begin{aligned} U_{T_1} &= \sqrt{U_{A,T_1}^2 + U_{B,T_1}^2} \\ &= \sqrt{(0.011)^2 + (2.4 \times 10^{-3})^2} \text{ s} \\ &= 0.011 \text{ s} \quad (p = 0.95) \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} U_{T_0} &= \sqrt{U_{A,T_0}^2 + U_{B,T_0}^2} \\ &= \sqrt{(2.48 \times 10^{-3})^2 + (3.3 \times 10^{-3})^2} \text{ s} \\ &= 0.0004 \text{ s} \quad (p = 0.95) \end{aligned} \quad (33)$$

故 T_1, T_0 的测量值最终可表示为:

$$T_1 = (3.730 \pm 0.011) \text{ s} \quad (p = 0.95) \quad (34)$$

$$T_0 = (2.2150 \pm 0.0004) \text{ s} \quad (p = 0.95) \quad (35)$$

由前所述公式, 可得 D, G 的平均值为:

$$\begin{aligned} \overline{D} &= \frac{2\pi^2 \hat{m} (\hat{r}_{\text{in}}^2 + \hat{r}_{\text{out}}^2)}{\hat{T}_1^2 - \hat{T}_0^2} \\ &= \frac{2\pi^2 \times 0.5645 (0.042^2 + 0.0521^2)}{3.73^2 - 2.215^2} \text{ Pa} \\ &= 5.54 \times 10^{-3} \text{ Pa} \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \overline{G} &= \frac{4\pi \hat{L} \hat{m} (\hat{r}_{\text{in}}^2 + \hat{r}_{\text{out}}^2)}{\hat{R}^4 (\hat{T}_1^2 - \hat{T}_0^2)} \\ &= \frac{4\pi \times 0.4435 \times 0.5645 \times (0.042^2 + 0.0521^2)}{(0.39 \times 10^{-3})^4 \times (3.73^2 - 2.215^2)} \text{ Pa} \\ &= 6.76 \times 10^{10} \text{ Pa} \end{aligned} \quad (37)$$

扭转模量 D 与切变模量 G 的相对不确定度可如下计算:

$$\begin{aligned}\frac{U_D}{D} &= \left(\left(\frac{U_m}{m} \right)^2 + \left(\frac{2r_{\text{in}}U_r}{r_{\text{in}}^2 + r_{\text{out}}^2} \right)^2 + \left(\frac{2r_{\text{out}}U_r}{r_{\text{in}}^2 + r_{\text{out}}^2} \right)^2 + \left(\frac{2T_1U_{T_1}}{T_1^2 - T_0^2} \right)^2 + \left(\frac{2T_1U_{T_1}}{T_1^2 - T_0^2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 9.1 \times 10^{-3} \quad (p = 0.95)\end{aligned}\quad (38)$$

$$U_D = D \frac{U_D}{D} = 0.05 \times 10^{-3} \text{ Pa} \quad (p = 0.95) \quad (39)$$

$$\begin{aligned}\frac{U_D}{D} &= \left(\left(\frac{U_L}{L} \right)^2 + \left(\frac{4U_R}{R} \right)^2 + \left(\frac{U_m}{m} \right)^2 + \left(\frac{2r_{\text{in}}U_r}{r_{\text{in}}^2 + r_{\text{out}}^2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2r_{\text{out}}U_r}{r_{\text{in}}^2 + r_{\text{out}}^2} \right)^2 + \left(\frac{2T_1U_{T_1}}{T_1^2 - T_0^2} \right)^2 + \left(\frac{2T_1U_{T_1}}{T_1^2 - T_0^2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 0.019 \quad (p = 0.95)\end{aligned}\quad (40)$$

$$U_G = G \frac{U_G}{G} = 0.13 \times 10^{10} \text{ Pa} \quad (p = 0.95) \quad (41)$$

故本实验的最终测量结果为:

$$D = (5.54 \pm 0.05) \times 10^{-3} \text{ Pa} \quad (p = 0.95) \quad (42)$$

$$G = (6.76 \pm 0.13) \times 10^{10} \text{ Pa} \quad (p = 0.95) \quad (43)$$

5 思考题

1. 满足. 根据实验讲义中给出的公式 $\gamma = R \frac{d\varphi}{dl} = \frac{\varphi}{L}$, 代入实验时使用的摆角 $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ 可得: $\gamma = 4.14 \times 10^{-3}$, 较 1 小三个数量级, 可以认为 $\gamma \ll 1$.

2. 为提高测量精度, 本实验在设计时做了如下安排:

- 先进行预实验, 确定各物理量误差的数量级, 从而确定主要误差与次要误差.
- 对于可以控制的周期项带来的误差, 通过控制所测周期数来控制其大小, 使其不超过主要误差的 $\frac{1}{5}$.
- 将 T_1, T_0 视作独立变量, 在尽可能减少误差的同时减少实验者工作量, 防止因疲倦引起计时误差增加.

在具体测量时, 应注意:

- 实验前, 要保证钢丝竖直, 圆盘水平.

- 测量钢丝直径时, 因其为主要误差项, 可多测几次以减少 A 类不确定度; 同时也要注意在钢丝的各个部位取样, 以不失一般性.
- 螺旋测微器读数时, 应注意其刻度线的位置, 避免因刻度线被旋钮杆遮挡而导致读数错误.
- 测量内外径时, 要注意不要把游标卡尺与圆环卡的太死, 防止二者间的摩擦对仪器产生损伤.
- 进行周期测量时, 要在圆盘上确定一较明显的参照物用来标定圆盘的平衡位置, 以保证圆盘转动时开始与停止计时的时刻均是转速较大的时刻, 以减少计时误差.
- 在转动圆盘时, 最好让它的摆动角度较大, 以保证终止计时时圆盘的速度较大, 减少计时误差.