



高等数学

考研数学阶段总结 1

作者：YGM

时间：2023/6/20

版本：1.0



感觉光做题而没有总结和感悟是不行滴，所以特来码字

目录

第一章 函数、极限、连续	1
第二章 一元函数微分学及其应用	2
第三章 一元函数积分学及其应用	3
第四章 空间解析几何	5
第五章 多元函数微分学及其应用	6
第六章 重积分及其应用	7
第七章 微分方程	8
第八章 无穷级数	9
第九章 曲线积分与曲面积分	10

第一章 函数、极限、连续

本章内容较为基础，由于精力有限，本章仅选两道题目作为本章内容

题目 1.1

证明：设 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续，且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$, 证明： $f(x)$ 在 (a, b) 内有最大值

解 1.1

题目 1.2

证明： $\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n$

解 1.2

令 $f(x) = \frac{1}{x}$, 由于 $f(x)$ 是单调递减的函数，所以有

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{k} dx \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx$$

不等式左边 $k=1$ 到 $k=n$ 求和，右边由于 $k=1$ 时是被积函数的瑕点，所以从 $k=2$ 开始求和，于是就有

$$\sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{k} dx \leq 1 + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx$$

合并可有

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx$$

即

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n$$

第二章 一元函数微分学及其应用

内容提要

□ 拐点

□ 曲率

□ 拉格朗日中值定理

□ 柯西中值定理

总结 2.1 (拐点)

曲线凹凸性变化的点, 即二阶导为 0 且在该点左右函数值异号的点

总结 2.2 (曲率与曲率半径)

曲率 $k = \frac{d\alpha}{ds}$, $\begin{cases} \tan \alpha = y' \Rightarrow \frac{d\alpha}{1+y'} = y'' \Rightarrow \frac{d\alpha}{dx} = \frac{y''}{1+y'^2} \\ \frac{ds}{dx} = \sqrt{1+y'^2} \end{cases}$, 故 $k = \left| \frac{d\alpha/dx}{ds/dx} \right| = \left| \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right|$, 若是参数方程 $\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases}$, 根据参数方程的求导法则可以得到 $k = \left| \frac{v''u' - v'u''}{(v'^2 + u'^2)^{\frac{3}{2}}} \right|$, 曲率半径 $R = \frac{1}{k}$

题目 2.1 (拉格朗日中值定理)

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, $0 < a < b$, 且 $f(a) = 0$, 证明 \exists 一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $af(\xi) + (\xi - b)f'(\xi) = 0$

解 2.1

构造 $h(x) = (x - b)^a f(x)$, $h'(x) = a(x - b)^{a-1} f(x) + (x - b)^a f'(x)$, 易知 $h(a) = 0$, $h(b) = 0$, 故 \exists 一点 $\xi \in (a, b)$ 使得 $h'(\xi) = 0$

$$a(\xi - b)^{a-1} f(\xi) + (\xi - b)^a f'(\xi) = 0$$

两边约分, 即 $af(\xi) + (\xi - b)f'(\xi) = 0$

题目 2.2 (柯西中值定理)

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, $0 < a < b$, 证明: $\exists \xi, \eta \in (a, b)$, 使得 $2\eta f'(\xi) = (b + a)f'(\eta)$

解 2.2

设 $g(x) = x^2$, 有 $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f(b) - f(a)}{b^2 - a^2} = \frac{f'(\eta)}{2\eta} = \frac{(b - a)f'(\xi)}{b^2 - a^2}$, 整理即为结果

第三章 一元函数积分学及其应用

内容提要

- 弧长
- 定积分计算
- 旋转体体积和侧面积
- 柯西积分不等式
- 泰勒不等式

总结 3.1 (弧长)

弧长: $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$

面积 (极坐标): $dS = \frac{1}{2} \rho^2 d\theta$

总结 3.2 (定积分计算)

非常常用的两种计算技巧

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2} \int_a^b f(x) + f(a+b-x) dx \quad (3.1)$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^a f(x) + f(-x) dx \quad (3.2)$$

总结 3.3 (旋转体体积和侧面积)

旋转曲线以 $y = f(x)$ 为例

旋转体积 (绕 x 轴): $dV = \pi f^2(x) dx$

旋转体积 (绕 y 轴): $dV = \pi x^2 dy$

旋转侧面积 (绕 x 轴): $dS = 2\pi f(x) ds$

旋转侧面积 (绕 y 轴): $dS = 2\pi g(y) ds$

总结 3.4 (柯西积分不等式)

$$\left(\int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx$$

证明:

$$(f(x)t + g(x))^2 \geq 0 \quad (3.3)$$

$$f^2(x)t^2 + 2f(x)g(x)t + g^2(x) \geq 0 \quad (3.4)$$

$$\left(\int_a^b f^2(x) dx \right) t^2 + \left(\int_a^b 2f(x)g(x) dx \right) t + \int_a^b g^2(x) dx \geq 0 \quad (3.5)$$

$$b^2 - 4ac \leq 0 \quad (3.6)$$

$$\left(\int_a^b 2f(x)g(x) dx \right)^2 - 4 \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx \leq 0 \quad (3.7)$$

$$\left(\int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx \quad (3.8)$$

总结 3.5 (泰勒不等式)

这个不等式主要利用了曲线在某一段的凹凸性构建而成, 我们假设 $f(x)$ 在某段 (假设包含原点) 是凸曲线, 那么有

$$f''(x) < 0 \quad (3.9)$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)x^2}{2} \quad (3.10)$$

$$f(x) < f(0) + f'(0)x \quad (3.11)$$



第四章 空间解析几何

内容提要

□ 空间曲面

□ 空间直线的距离

总结 4.1 (空间曲面)

- 1. 椭圆锥面: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$
- 2. 椭球面: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
- 3. 单叶双曲面: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
- 4. 双叶双曲面: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
- 5. 椭圆抛物面: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$
- 6. 双曲抛物面 (马鞍面): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$

总结 4.2 (空间直线的距离)

求直线 A 与直线 B 之间的距离, 应先求过直线 B 且与直线 A 平行的平面, 转化为线面距离

第五章 多元函数微分学及其应用

1. 切向量与法平面
2. 法向量与切平面
3. 多元函数极值点求法 ($AC - B^2$)
4. 拉格朗日乘数法 (解决条件极值)
5. 全微分是否存在: $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$ ($\rho = \sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y}$)

第六章 重积分及其应用

1. 重积分的计算经常利用积分区域的对称性
2. 面面所围的体积，适当的情况下可以转化到二重积分上去
3. 质心坐标： $\bar{x} = \frac{\iint xf(x,y)dxdy}{\iint f(x,y)dxdy}$, $\bar{y} = \frac{\iint yf(x,y)dxdy}{\iint f(x,y)dxdy}$

第七章 微分方程

内容提要

□ 伯努利方程

□ 欧拉方程

总结 7.1 (伯努利方程)

形如 $y' + p(x)y = q(x)y^n$, 令 $u = y^{1-n}$, 可以化为 $\frac{u'}{1-n} + p(x)u = q(x)$, 即将伯努利方程转化为一阶微分方程

总结 7.2 (欧拉方程)

形如 $x^2y' + pxy' + qy = f(x)$, 令 $x = e^t$, 使用微分算子的表达形式为 $D^2Y + (p-1)DY + qY = f(e^t)$, 即将欧拉方程化为常系数微分方程

第八章 无穷级数

内容提要

- 级数判定
- 函数项级数

- 傅里叶级数

总结 8.1 (级数判定)

正向级数：比较审敛法，比值审敛法，极限审敛法

交错级数：莱布尼茨判定法

总结 8.2 (函数项级数)

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ ($|x| < 1$)，表达式很好看，也是个人认为最重要的一个展开

总结 8.3 (傅里叶级数)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(a_i \cos \frac{n\pi x}{l} + b_i \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \text{ 其中 } \begin{cases} a_i = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \\ b_i = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \end{cases}$$

第九章 曲线积分与曲面积分

1. 一二类曲线积分的转化: $\int_L f(x, y)ds = \int_L P \cos \alpha + Q \sin \beta ds$
2. 格林公式使用时注意曲线所围内部是否有奇点
3. 第一类曲面积分 $\iint f(x, y, z)dS = \iint f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}dxdy$
4. 第二类曲面积分可利用高斯公式转化为三重积分