高数上

函数与极限

1. 数列极限

- 判定：【1】单调递增有上界或递减有下界【2】子数列分别收敛于同一极限
- 极限求法：【1】求通项公式【2】根据递推公式

2. 函数极限

- 利用等价无穷小或等价无穷大
- 夹逼准则
- 洛必达法则
- 拉格朗日中值定理（很少用）

3. 间断点

- 第一类间断点：左右极限存在【跳跃间断点】【可去间断点】
- 第二类间断点： 左右极限不存在【无穷间断点】【振荡间断点】

4. 渐近线

竖直渐进线、水平渐近线、斜渐近线

导数与微分

参数方程求导 $\begin{cases} x=\alpha(t) \\ y=\beta(t) \end{cases}$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} \\ &= \frac{\beta'(t)}{\alpha'(t)} \end{aligned}$$

微分中值定理

1. 拉格朗日中值定理

$f(x)$在a到b内闭区间连续，开区间可导

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi) \quad \xi\in(a,b)$$

2. 柯西中值定理

$f(x)$，$g(x)$在a到b内闭区间连续，开区间可导

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \xi\in(a,b) \tag{1}$$

3. 泰勒公式

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n \quad (\text{个人认为最重要的一个泰勒展开})$$

4. 拐点

拐点：函数曲线凹凸性变化的点，$\begin{cases}\text{凸曲线，} f''(x)<0\\ \text{凹曲线，} f''(x)>0\end{cases}$

5. 泰勒不等式

若函数$f(x)$在(a,b)内二阶可导且为凹函数，那么

$$\begin{cases}f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(\xi)(x-x_0)^2}{2} \quad (\text{泰勒公式})\\ f''(x)\geq 0 \quad (\text{凹性})\end{cases}$$

根据上述两个式子有

$$f(x)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \quad (\text{泰勒不等式})$$

同理若$f(x)$为凸函数：

$$f(x)\leq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \quad (\text{泰勒不等式})$$

这里给出一道例题辅助理解【高数同济课本第七版，183页，19题】

> **题目**：设$f(x)$在(a,b)内二阶可导，且$f''(x)\geq 0$，证明对于(a,b)内任意两点 >x_1,x_2及$0\leq t\leq 1$，有：$f\left[(1-t)x_1+tx_2\right]\leq(1-t)f(x_1)+tf(x_2)$
> **证明如下**：
> 由泰勒不等式可知：
>
> $$\begin{cases}f(x_1)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0) \quad (1)\\ f(x_2)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0) \quad (2)\end{cases}$$
>
> 根据待证明的不等式，进行构造变形 (1-t)（1）+t（2）：
>
> $$(1-t)f(x_1)+tf(x_2)\geq f(x_0)+f'(x_0)\left[(x_1-x_0)(1-t)+t(x_2-x_0)\right] \quad (3)$$
>
> 不妨令$x_0=(1-t)x_1+tx_2$，化简可以得到（3）式右端$f'(x_0)$的系数为0，即为所证不等式
> 证毕

不定积分

- 换元积分
- 分部积分

定积分

1. 积分常用技巧

$$(1)\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$$

$$(2)\quad \int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}\int_a^b f(x)+f(a+b-x)dx$$

$$(3)\quad \int_{-a}^a f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^a f(x)+f(-x)dx$$

$$(4)\quad \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx\quad (\text{由}(2)\text{推出})$$

$$(5)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2}, & \text{n为偶数}\\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & \text{n为奇数}\end{cases}$$

2. 柯西-施瓦兹不等式

【高数同济课本第七版，272页，9题】

> **证明**:
>
> $$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\leq\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$$
>
> 证明如下:
>
> $$\begin{aligned}(f(x)+g(x)t)^2\geq 0\\ f^2(x)+g^2(x)+2f(x)g(x)t\geq 0\\ \int_a^b f^2(x)dx+\int_a^b g^2(x)dx*t^2+\int_a^b 2f(x)g(x)dx*t\geq 0\\ \text{根据二次函数性质}\quad b^2-4ac\leq 0\\ 4\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\leq 4\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx\end{aligned}$$
>
> 证毕

定积分的应用

元素法求旋转体体积或面积

微分方程

1. 一阶微分方程

- 可分离变量和齐次式
- 一阶线性微分方程，通解【$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}+C\right)$】
- 伯努利方程： $y'+P(x)y=Q(x)y^n$【解法：换元，令$t=y^{1-n}$，转化为一阶微分方程】

2. 二阶可降阶微分方程

- $y'' = f(x, y')$
- $y'' = f(y, y')$

3. 常系数微分方程

根据特征根求解

4. 欧拉方程

解法：换元$x = e^t$，转化为常系数微分方程