电磁场

$\sin(\pi/2+\alpha)=\cos\alpha \quad \cos(\pi/2+\alpha)=-\sin\alpha \quad e^{jwt}=\cos wt+j\sin wt \quad ,j=e^{j\frac{\pi}{2}},-j=e^{j(-\frac{\pi}{2})}$

$(\sinh)'=\cosh$，$(\cosh)'=\sinh$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{r^2+x^2}}\to\ln(x+\sqrt{r^2+x^2})$$
$$\int\frac{dx}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\to\frac{x}{r^2\sqrt{r^2}}$$

矢量代数

单位矢量不一定是常矢量

单位矢量 $\vec{e}_A=\dfrac{\vec{A}}{A}$ $\vec{A},\vec{B}$夹角：$\cos\theta=\dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$ $\vec{A}$在$\vec{B}$上的分量大小=$\dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{B}|}$

叉乘：$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{e}_nAB\sin\theta \qquad \vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$

矢量运算：

$$\begin{cases}(\vec{A}+\vec{B})\cdot\vec{C}=\vec{A}\cdot\vec{C}+\vec{B}\cdot\vec{C}\\(\vec{A}+\vec{B})\times\vec{C}=\vec{A}\times\vec{C}+\vec{B}\times\vec{C}\end{cases}\qquad\Delta\begin{cases}\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})=\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})\\\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}\end{cases}$$

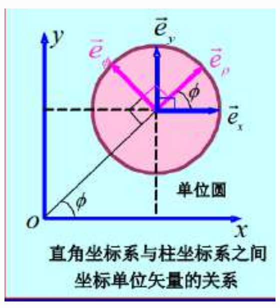
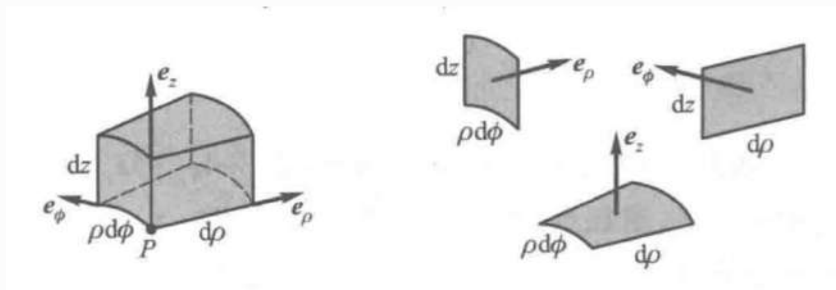
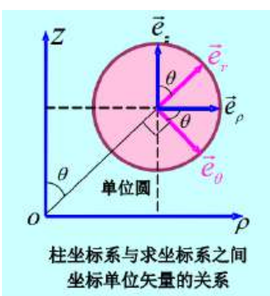
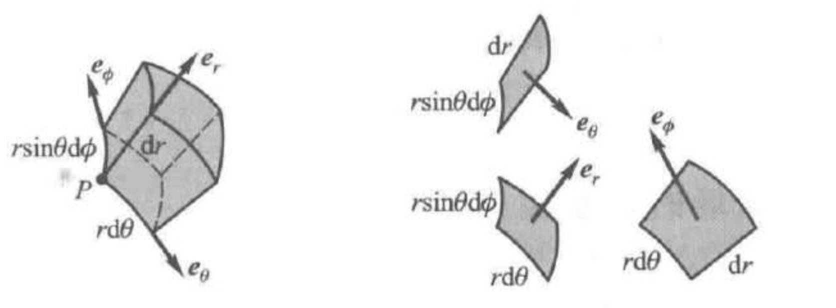
- 闭合面正方向：由内到外
- 开放面：边沿方向右手螺旋

坐标系

把通常认识的φ就是ϕ，两种写法都行

单位矢量顺序叉乘方向关系，$\rho\cos\phi=x \quad \rho\sin\phi=y \quad r\sin\theta=\rho \quad r\cos\theta=z$

除了e_x,e_y,e_z，其他的$e_\rho,e_\phi,e_r,e_\theta$方向都是不确定的，不是常矢量

圆柱坐标系 ρ,ϕ,z		 (a) 体积元 (b) 面积元	**体积元：** $dV=\rho d\rho d\phi dz$ **面积元：** $d\vec{S}=\vec{e}_z\rho d\rho d\phi$
球坐标系 r,θ,ϕ		 (a) 体积元 (b) 面积元	体积元：$dV=r^2\sin\theta dr\, d\theta d\phi$ 面积元：$d\vec{S}=\vec{e}_rr^2\sin\theta\, d\,\theta\, d\,\phi$

梯度

标量场的梯度是矢量场，描述标量函数在某点的**最大变化率**及其变化最大的方向$\vec{e}_l$，方向垂直于通过该点的等值面（或切平面，相当于表面的法向量 ）

> 标量场在某个方向上的方向导数，是梯度在该方向上的投影

$\operatorname{grad} u = \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) u = \nabla u \rightarrow$ 直角坐标系 $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

方向导数：$\frac{\partial u}{\partial l} = \nabla u \cdot \vec{e}_l$ 这之后的计算中：$\nabla^2 F = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) F$ **不能分开一次次求！！！**

梯度运算规则：

标量：$\begin{cases} \nabla(u \pm v) = \nabla u \pm \nabla v \qquad \nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v \\ \nabla\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v^2}(v\nabla u - u\nabla v) \qquad \nabla f(u) = f'(u)\nabla u \end{cases}$ 矢量：$\begin{cases} \nabla \cdot (f\vec{F}) = f\nabla \cdot \vec{F} + \vec{F} \cdot \nabla f \\ \nabla \cdot (\vec{F} \pm \vec{G}) = \nabla \cdot \vec{F} \pm \nabla \cdot \vec{G} \\ \nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A \end{cases}$ 若为叉乘将 · 换成 ×

通量 $\Phi = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$

对于闭合曲面，穿出为正，穿入为负

散度 $\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$

流出单位体积元封闭面的通量

代表了净元的数量，等于0可能是没有矢量线或者净穿过为0；

环流 $\Gamma = \oint_C \vec{F}(x,y,z) \cdot d\vec{l} = \int P\,dx + Q\,dy + R\,dz$

旋度 $\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F}$

斯托克斯定理 $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$

散度定理 $\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{F} dV$

矢量场的旋度的散度恒为零

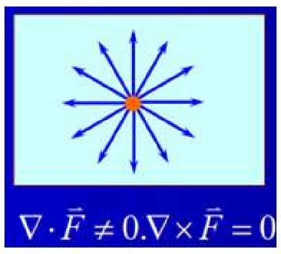
$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) \equiv 0$$

标量场的梯度的旋度恒为零

$$\nabla \times (\nabla u) \equiv 0$$

散度旋度的区别

无旋有散场
仅有散度源而无旋度源的矢量场



$\nabla \times \vec{F} \equiv 0$

$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$(环流为0)

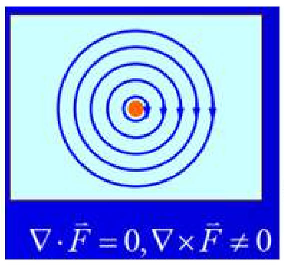
线积分与路径无关，是保守场

无旋场可以用标量场的梯度表示(符号代表方向)

$\vec{F} = -\nabla u \qquad \nabla \times \vec{F} = -\nabla \times (\nabla u) \equiv 0$

典例：静电场 $\nabla \times \vec{E} \equiv 0 \Rightarrow \vec{E} = -\nabla\varphi$

有旋无散场
仅有旋度源而无散度源的矢量场



$\nabla \cdot \vec{F} \equiv 0$

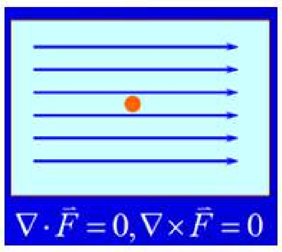
$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$(通量为0)

无散场可以用另一个矢量场的旋表示

$\vec{F} = \nabla \times \vec{A} \qquad \nabla \cdot \vec{F} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) \equiv 0$

典例：恒定磁场 $\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

无散无旋场
源在所讨论的区域之外



$\begin{cases} \nabla \times \vec{F} = 0 \rightarrow \vec{F} = -\nabla u \\ \nabla \cdot \vec{F} = 0 \rightarrow \nabla \cdot (-\nabla u) = 0 \end{cases} \rightarrow \nabla^2 u = 0$

标量的梯度为矢量
矢量的梯度为标量

矢量场旋度的散度为0
标量场梯度的旋度为0

$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) \equiv 0 \qquad \nabla \times (\nabla u) \equiv 0$

亥姆赫兹定理

在有限的区域V内，任一矢量场由它的散度、旋度和边界条件（即限定区域V的闭合曲面S上的矢量场的分布）唯一确定

电磁场的基本规律

电荷（习题2.1，注意面积的写法，球坐标系$dS=r^2\sin\theta d\theta d\phi$）

存在的形式（四种）：点电荷、 体分布电荷、 面分布电荷、 线分布电荷　$\rho_s(\boldsymbol{r},t)=\rho(\boldsymbol{r},t)\lim\limits_{h\to 0}h$

> 在$\rho(\vec r)$为有限值的表面上,其$\rho_s(\vec r)$必然为零，而在$\rho_s(\vec r)$不为零的表面上，其$\rho(\vec r)$的值则为无穷大。

电流

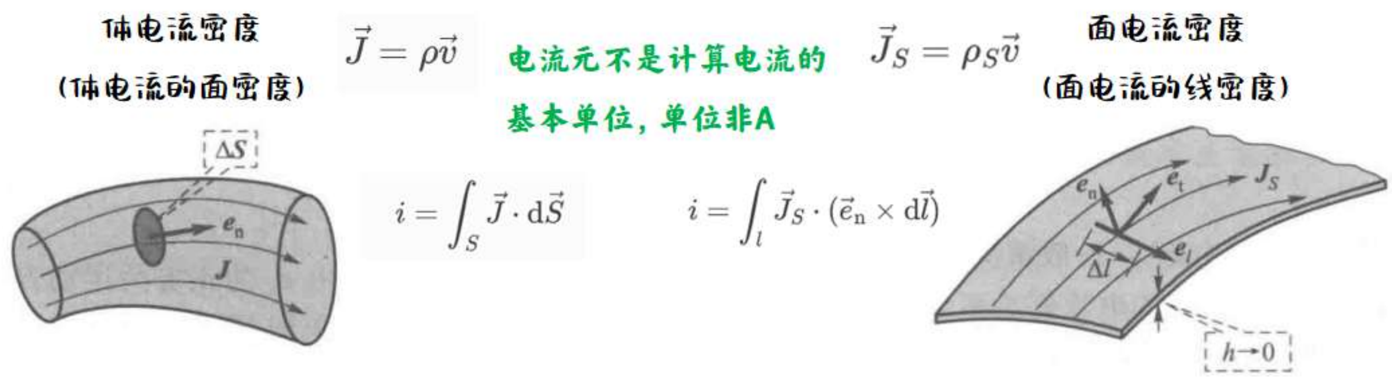
电荷的定向运动，电流为是一个标量，电流方向为正电荷的流动方向 $i=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(\Delta q/\Delta t)=\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$

不随时间变化的电流称为恒定电流，用I 表示（线电流无密度，就为I）

电流密度

$\vec e_n$为正电荷运动的方向 $\vec e_t=\vec e_\mathrm{n}\times\vec e_l$　$\mathrm{dq}=\rho v\mathrm{dSdt}\to J=\dfrac{dq}{dSdt}=\rho v$ (习题2.3，注意方向)

环形电流　$\vec v=\vec w\times\vec r=\vec e_z\times\vec e_r wr=\vec e_\phi wr\sin\theta$



电流连续性方程

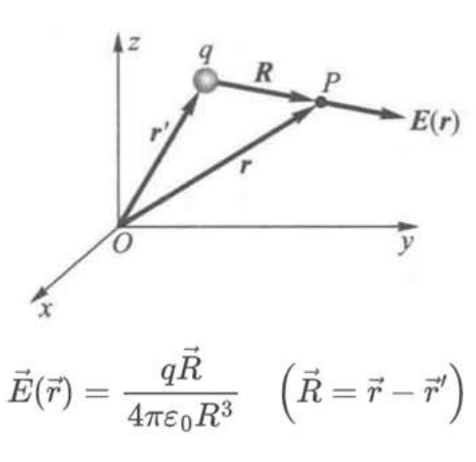
流出闭曲面S 的电流等于体积V内单位时间所减少的电荷量

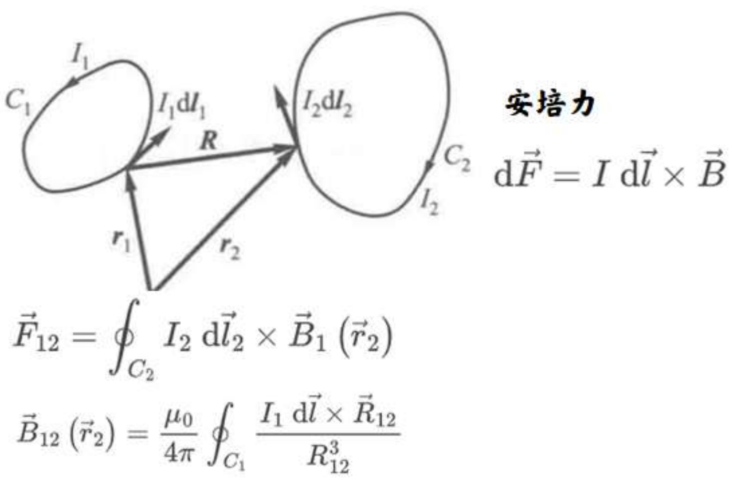
积分形式：$\oint_S\vec J\cdot\mathrm{d}\vec S=-\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\rho\mathrm{d}V$ 微分形式：$\nabla\cdot\vec J=-\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$

恒定电流的连续性方程 $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=0\Rightarrow\nabla\cdot\vec J=0$、$\oint_S\vec J\cdot\mathrm{d}\vec S=0$

恒定电流是**无散场**，电流线是**连续的闭合曲线**，既无起点也无终点

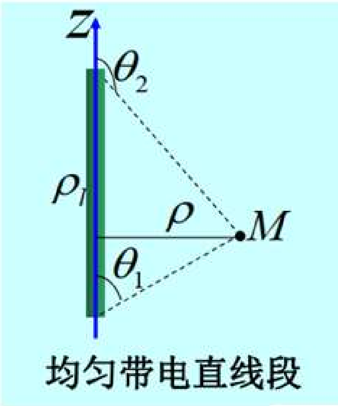
经典场例





导体内部电场为0；

均匀带电直线段

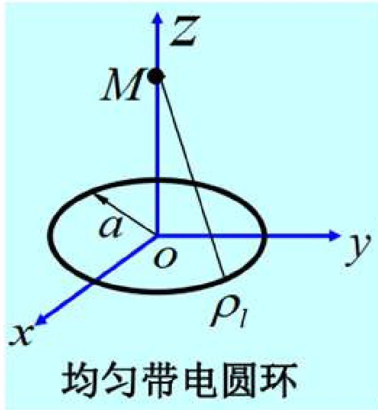


有限长：
$$\begin{cases}\vec{E}_\rho = \vec{e}_\rho \dfrac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0 \rho}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \\ \vec{E}_z = \vec{e}_z \dfrac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0 \rho}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)\end{cases}$$

$$\vec{B} = \vec{e}_\phi \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

无限长：
$$E_\rho = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0\rho} \qquad \vec{B} = \vec{e}_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$$

均匀带电圆环轴线



$$E_z(0,0,z) = \frac{a\rho_l z}{2\varepsilon_0(a^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\vec{B}(0,0,z) = \vec{e}_z \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}$$

$$z = 0: \quad \vec{B}(0) = \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2a}$$

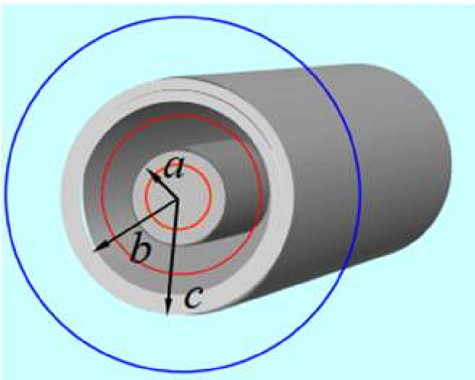
$$z \gg a: \quad \vec{B} = \vec{e}_z \frac{\mu_0 I a^2}{2z^3}$$

无限大带电平面 $\vec{E} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z$

无限大电流薄板 $\vec{B} = \vec{e}\dfrac{\mu J_s}{2}$

真空中均匀带电球体的场强分布
$$\begin{cases}\vec{E} = \vec{e}_r \dfrac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r^2} & (r \geq a) \\ \vec{E} = \vec{e}_r \dfrac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0} & (r \geq a)\end{cases}$$

无限大同轴电缆



$0 \leq \rho < a$

取安培环路 $(\rho < a)$ 交链的电流为 $I_1 = \dfrac{I}{\pi a^2} \cdot \pi\rho^2 = I\dfrac{\rho^2}{a^2}$ $\quad \vec{B}_1 = \vec{e}_\phi \dfrac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2}$

$a \leq \rho < b \quad \vec{B}_2 = \vec{e}_\phi \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$

$b \leq \rho < c \quad I_3 = I - I\dfrac{\rho^2 - b^2}{c^2 - b^2} = I\dfrac{c^2-\rho^2}{c^2-b^2} \quad \vec{B}_3 = \vec{e}_\phi \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \cdot \dfrac{c^2-\rho^2}{c^2-b^2}$

$c \leq \rho < \infty \quad \vec{B}_4 = 0$

若内、外导体间的电压为 U

在(a,b)范围内电场大小为：
$$\vec{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_r \quad U = \int_a^b E dr = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a} \rightarrow \rho_l = \frac{2\pi\varepsilon_0 U}{\ln\frac{b}{a}} \rightarrow \vec{E} = \frac{U}{r\ln\frac{b}{a}}\vec{e}_r$$

通量和散度

静电场的散度（微分形式）	$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon}$ $\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$	**静电场的旋度（微分形式）**	$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0$
高斯定律（积分形式）	$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \dfrac{1}{\varepsilon}q\Big\vert_{S内}$	静电场的环流（积分形式）	$\oint_C \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = 0$

恒定场的散度（微分形式）	$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0$	**恒定磁场的旋度（微分形式）**	$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu\vec{J}(\vec{r})$
磁通连续性原理（积分形式）	$\oint_S \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = 0$	**安培环路定理**（积分形式）	$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$

媒介的电磁特性

媒质对电磁场的响应可分为三种情况：**极化、 磁化和传导**

f代表自由电荷，p为极化，m为磁化

极化（磁化）强度的大小与介质材料有关，也与外加场的强度（E，B）有关； 产生是在介质外的区域

极化	磁化
介质极化后，将在空间中产生额外的电场$\vec{E}_P$ $\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}_P$	介质磁化后, 将在空间中产生额外的磁场 $\vec{B}_M$ $\vec{B}=\vec{B}_0+\vec{B}_M$
对于**线性、各向同性介质**，$\vec{P}$与$\vec{E}$成正比 即 $\vec{P}=\chi_e\varepsilon_0\vec{E}$，$\chi_e=\varepsilon_r-1$ $\vec{P}=\varepsilon\vec{E}-\varepsilon_0\vec{E}$	对于线性、各向同性介质, $\vec{M}$ 与 $\vec{H}$ 成正比 即$\vec{M}=\chi_m\vec{H}$，$\chi_m=\mu_r-1$ $\vec{M}=(\mu_r-1)\vec{H}$
极化体电荷密度：$\rho_P=-\nabla\cdot\vec{P}$ 极化面电荷密度：$\rho_{SP}=\vec{P}\cdot\vec{e}_n$ 自由电荷面密度：$\rho_S=\vec{e}_n\cdot\vec{D}$ 相差一个符号原因是极化体电荷表征剩余量，面电荷表征流出量	磁化体电流密度：$\vec{J}_M=\nabla\times\vec{M}$ 磁化面电流密度：$\vec{J}_{SM}=\vec{M}\times\vec{e}_n$ 极化为 · 磁化为 × ，体为加梯度，面为加法向量；
电位移矢量$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$	磁场强度$\vec{H}=\dfrac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}$
$\oint_S\vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=q_f\quad\nabla\cdot\vec{D}=\rho_f$	$\oint_C\vec{H}(\vec{r})\cdot\mathrm{d}\vec{l}=I\quad\nabla\times\vec{H}(\vec{r})=\vec{J}(\vec{r})$

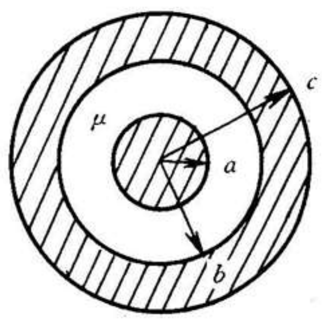
$$\nabla\cdot\vec{D}=\nabla\cdot(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P})=\varepsilon_0\nabla\cdot\frac{\vec{D}}{\varepsilon}+\nabla\cdot\vec{P}\rightarrow(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\rho=\nabla\cdot\vec{P}$$

求解（小测题）

2022 课堂测试1 答案.pdf

极化	磁化
$q_f\rightarrow\vec{D}\rightarrow\vec{E}\rightarrow\vec{P}\rightarrow\rho_{Sp}\quad(\rho_p)$	$\vec{J}/I\rightarrow\vec{H}\rightarrow\vec{B}\rightarrow\vec{M}\rightarrow\vec{J}_M\quad(\vec{J}_{SM})$
$\begin{cases}\oint_S\vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=q_f & (1)\\ \vec{D}=\varepsilon_0(1+\chi_\mathrm{e})\vec{E}=\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}\vec{E}=\varepsilon\vec{E} & (2)\\ \vec{P}=\chi_\mathrm{e}\varepsilon_0\vec{E}=\vec{D}-\varepsilon_0\vec{E} & (3)\\ \rho_{Sp}=\vec{P}\cdot\vec{e}_\mathrm{n},\rho_p=-\nabla\cdot\vec{P} & (4)\end{cases}$	$\begin{cases}\oint_C\vec{H}(\vec{r})\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_S\vec{J}(\vec{r})\cdot\mathrm{d}\vec{S}=I & (1)\\ \vec{B}=\mu_0(1+\chi_\mathrm{m})\vec{H}=\mu_0\mu_r\vec{H}=\mu\vec{H} & (2)\\ \vec{M}=\chi_m\vec{H}=\dfrac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{H} & (3)\\ \vec{J}_M=\nabla\times\vec{M}\qquad\vec{J}_{SM}=\vec{M}\times\vec{e}_n & (4)\end{cases}$
极化率χ_e无量纲($\chi_e=\varepsilon_r-1$) 介电常数ε有量纲	磁化率χ_m无量纲($\chi_m=\mu_r-1$) 磁导率μ有量纲

4.3同轴线的内导体半径为a，外导体的内半径为b，外半径为c，设内、外导体分别流过反向的电流I，两导体之间介质的磁导率为μ，求各区域的H、B、M。



解：以后如无特别声明，对良导体(不包括铁等磁性物质)一般取其磁导率为$\mu0$，因同轴线为无限长，则其磁场沿轴线无变化，该磁场只有ϕ分量，且其大小只是r的函数。分别在各区域使用介质中的安培环路定律 $\oint_C\vec{H}\cdot d\vec{l}=\oint_S\vec{J}\cdot d\vec{S}$

当$r\le a$时，电流I在导体内均匀分布，且流向+z方向。

$$\vec{H}=\vec{e}_\phi\frac{Ir}{2\pi a^2}\qquad\vec{B}=\vec{e}_\phi\frac{\mu_0 Ir}{2\pi a^2}\qquad\boxed{\vec{M}=0}$$

当$a<r\le b$时，与积分回路交链的电流为I，该区磁导率为μ，得

$$\vec{H}=\vec{e}_\phi\frac{I}{2\pi r}\qquad\vec{B}=\vec{e}_\phi\frac{\mu I}{2\pi r}\qquad\boxed{\vec{M}=\vec{e}_\phi\frac{\mu-\mu_0}{\mu_0}\frac{I}{2\pi r}}$$

当$b<r\le c$时，考虑到外导体电流均匀分布，可得出与积分回路交链的电流为

$$\vec{H}=\vec{e}_\phi\frac{1}{2\pi r}\frac{c^2-r^2}{c^2-b^2}\qquad\vec{B}=\vec{e}_\phi\mu_0 I\frac{c^2-r^2}{c^2-b^2}\qquad\boxed{\vec{M}=0}$$

当$r>c$时，这一区域的B、H、M为零。

媒质的传导特性

媒介的**电导率**σ，单位S/m，S：西门子是电导的标准单位，电阻的倒数

线性、各向同性介质，电流密度矢量和该点的电场强度的关系：$\vec{J}=\sigma\vec{E}$ （**欧姆定律的微分形式**）

电场所做功：$\mathrm{d}W=\mathrm{d}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\rho\,\mathrm{d}V\vec{E}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}t=\vec{J}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t$ $(\vec{J}=\rho\vec{v})$

整体积V中消耗功率为$P_L=\int_V\vec{J}\cdot\vec{E}dV=\int_V\sigma E^2dV$ (满足线性且各向同性)

电磁感应定律

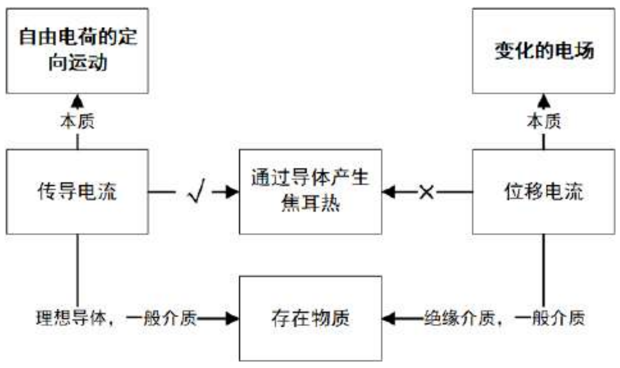
电场为库伦场和感应电场的总和 $\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}_{\text{in}}$ 感应电场为涡旋电场，闭合曲线

感应电动势：$\vec{E}=-\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$

回路不变，磁场随时间变化	**微分形式：** $\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$
导体回路在恒定磁场中运动	$\oint_C\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\oint_C(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l}$ 发动机的原理

全电流定律

对恒定磁场安培环路定律的修正（原本的时变场不适用）



修正后：$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ （自由空间$\vec{J}=0$）

传导电流密度：$\vec{J}=\sigma\vec{E}$，位移电流密度：$\vec{J}_{\mathrm{d}}=\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

6.2 自由空间的磁场强度为$\vec{H}=\vec{e}_xH_{\mathrm{m}}\cos(\omega t-kz)$ (A/m) **式中的 k 为常数。试求：位移电流密度和电场强度。**

解 自由空间的传导电流密度为0，故由式$\boxed{\nabla\times\vec{H}=\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}}$**，得**

$$\vec{J}_{\mathrm{d}}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\nabla\times\vec{H}=(\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z})\times\vec{e}_xH_x$$
$$=\vec{e}_y\frac{\partial H_x}{\partial z}=\vec{e}_y\frac{\partial}{\partial z}[H_{\mathrm{m}}\cos(\omega t-kz)]$$
$$=\vec{e}_ykH_{\mathrm{m}}\sin(\omega t-kz)\quad(\mathrm{A/m^2})$$

$$\boxed{\vec{E}=\frac{\vec{D}}{\varepsilon_0}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\mathrm{d}t}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int\vec{e}_ykH_{\mathrm{m}}\sin(\omega t-kz)\mathrm{d}t$$
$$=-\vec{e}_y\frac{k}{\omega\varepsilon_0}H_{\mathrm{m}}\cos(\omega t-kz)\quad(\mathrm{V/m})$$

麦克斯韦方程

自由空间则 $\vec{J}_f=0$

微分形式

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{H}=\vec{J}_f+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\cdot\vec{D}=\rho_f\end{cases}$$
$$\nabla\cdot\vec{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

积分形式

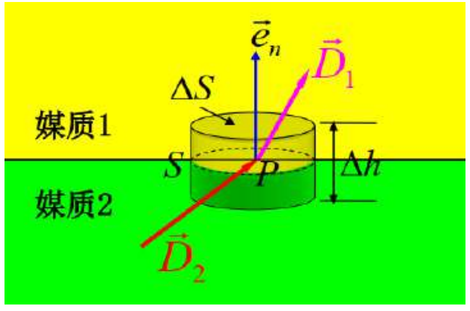
$$\begin{cases}\oint_C\vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_S\left(\vec{J}_f+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{S}\\ \oint_C\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-\int_S\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\\ \oint_S\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0\\ \oint_S\vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int_V\rho_fdV\end{cases}$$
$$\oint_S\vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=-\frac{d}{dt}q$$

各向同性线性媒质的本构关系为 $\begin{cases}\vec{D}=\varepsilon\vec{E}\\ \vec{B}=\mu\vec{H}\\ \vec{J}=\sigma\vec{E}\end{cases}$ 代入麦克斯韦方程 $\begin{cases}\nabla\times\vec{H}=\sigma\vec{E}+\dfrac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\vec{E})\\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial}{\partial t}(\mu\vec{H})\\ \nabla\cdot(\mu\vec{H})=0\\ \nabla\cdot(\varepsilon\vec{E})=\rho\end{cases}$

电磁场边界条件

一般情况的推导:

电磁场量的**法向**边界条件



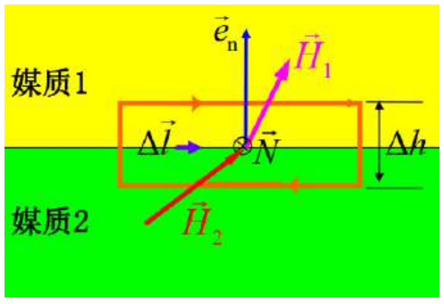
令$\Delta h\to 0$

由 $\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=q \quad\to\left(\vec{D}_1-\vec{D}_2\right)\cdot\vec{e}_n\Delta S=\rho_S\Delta S$

即$\vec{e}_n\cdot\left(\vec{D}_1-\vec{D}_2\right)=\rho_S$或$\vec{D}_{1n}-\vec{D}_{2n}=\rho_S$

同理, 由 $\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0\to\vec{e}_n\cdot\left(\vec{B}_1-\vec{B}_2\right)=0$或$\vec{B}_{1n}=\vec{B}_{2n}$

电磁场量的**切向**边界条件



令$\Delta h\to 0$

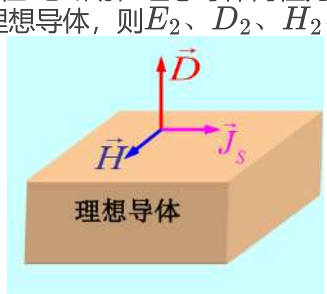
$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l}=\int_S\left(\vec{J}+\frac{\partial D}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}\to\left(\vec{H}_1-\vec{H}_2\right)\cdot\Delta\vec{l}=\vec{J}_S\cdot\vec{N}\Delta l$$

$$\Delta\vec{l}=\vec{N}\times\vec{e}_n\Delta l\to\left(\vec{H}_1-\vec{H}_2\right)\cdot\left(\vec{N}\times\vec{e}_n\right)\Delta l=\left[\vec{e}_n\times\left(\vec{H}_1-\vec{H}_2\right)\right]\cdot\vec{N}\Delta l$$

即$\vec{e}_n\times\left(\vec{H}_1-\vec{H}_2\right)=\vec{J}_S$或$H_{1t}-H_{2t}=J_S$

同理由 $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l}=0\to\vec{e}_n\times\left(\vec{E}_1-\vec{E}_2\right)=0$或$E_{1t}=E_{2t}$

一般表达式	两种理想介质分界面上的边界条件（$\sigma=0$）
$\begin{cases}\vec{H}_{1t}-\vec{H}_{2t}=\vec{J}_S\\ \vec{E}_{1t}=\vec{E}_{2t}\\ \vec{B}_{1n}=\vec{B}_{2n}\\ \vec{D}_{1n}-\vec{D}_{2n}=\rho_S\end{cases}$	没有电荷和电流分布J_S、$\rho_S=0$ $\begin{cases}\vec{H}_{1t}-\vec{H}_{2t}=0\\ \vec{E}_{1t}=\vec{E}_{2t}\\ \vec{B}_{1n}=\vec{B}_{2n}\\ \vec{D}_{1n}-\vec{D}_{2n}=0\end{cases}$

理想导体	理想导体表面上的边界条件
定义:电导率为无限大的导电媒质 特征:电磁场在理想导体内恒为零 设媒质2为理想导体，则E_2、D_2、H_2、B_2均为零 	$\begin{cases}\vec{e}_n\times\vec{H}=\vec{J}_S & \text{理想导体表面上的电流密度等于 }\vec{H}\text{ 的切向分量}\\ \vec{e}_n\times\vec{E}=0 & \text{理想导体表面上 }\vec{E}\text{ 的切向分量为 0}\\ \vec{e}_n\cdot\vec{B}=0 & \text{理想导体表面上 }\vec{B}\text{ 的法向分量为 0}\\ \vec{e}_n\cdot\vec{D}=\rho_S & \text{理想导体表面上的电荷密度等于 }\vec{D}\text{ 的法向分量}\end{cases}$

习题

2.1 已知半径为 a 的导体球面上分布着面电荷密度 $\rho_S=\rho_{S0}\cos\theta$ 的电荷，式中的 ρ_{S0} 为常数. 试计算球面上的总电荷量.

【解题过程】球面上的总电荷量为

$$q=\int_S \rho_s \mathrm{d}S=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\rho_{S0}\cos\theta r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=a^2\rho_{S0}\int_0^{\pi}\frac{\sin2\theta}{2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi=0$$

即球面上的总电荷量为 0.

2.3 电荷 Q 均匀分布在半径为 a 的导体球面上，当导体球面以匀角速度 ω 绕通过球心的 z 轴旋转，试计算导体球表面的电流密度.

【解题过程】以球心为坐标原点，转轴(一直径)为 z 轴. 设球面上任一点 P 的位置矢量为 $\boldsymbol{r}$，且 $\boldsymbol{r}$ 与 z 轴的夹角为 θ，则 P 点的线速度为

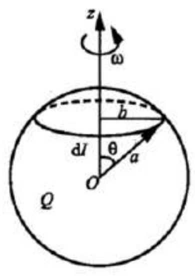
$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_\varphi\omega a\sin\theta$$

球面的上电荷面密度为

$$\sigma=\frac{Q}{4\pi a^2}$$

故 $$\boldsymbol{J}_S=\sigma\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_\varphi\frac{Q}{4\pi a^2}\omega a\sin\theta=\boldsymbol{e}_\varphi\frac{Q\omega}{4\pi a}\sin\theta$$

2.16 一个半径为 a 的导体球带电荷量为 Q，当球体以均匀角速度 ω 绕一个直径旋转，如题 2.16 图所示. 求球心处的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$.



题 2.16 图

【逻辑推理】 导体球的电荷只分布在表面上，当其转动时可看为一表面电流分布的球体，可将球面划分为无数个细圆环，先求出任一个细圆环在球心处的磁感应强度，然后利用叠加原理，对整个球面进行积分，即可求出球心处的磁感应强度.

【解题过程】半径为 R 的圆环电流，电流为 I，在轴线上产生的磁场为 $$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_z\frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}}$$

题 2.16 图中，取一圆环，宽为 $\mathrm{d}l=a\mathrm{d}\theta$

圆环半径 $b=a\sin\theta$

圆环电流 $\mathrm{d}I=J_s\mathrm{d}l=\omega\sigma a^2\sin\theta\mathrm{d}\theta$

圆环平面到球心 $z=a\cos\theta$

该圆环电流在球心处产生的磁场为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_z\frac{\mu_0(\omega\sigma a^2\sin\theta\mathrm{d}\theta)(a\sin\theta)^2}{2(a^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)^{3/2}}=\boldsymbol{e}_z\frac{1}{2}\mu_0\omega\sigma a\sin^3\theta\mathrm{d}\theta$$

磁场函数满足$\nabla\cdot\vec{B}=0$，则其源量$\vec{J}=\nabla\times\vec{H}$

2.22 通过电流密度为 $\boldsymbol{J}$ 的均匀电流的长圆柱导体中有一平行的圆柱形空腔，其横截面如题 2.22 图所示. 试计算各部分的磁感应强度，并证明空腔内的磁场是均匀的.

【解题过程】建立如解 2.22 图所示的坐标系，因为空腔中的电流密度为 0，可把该电流分布看做两个电流密度的合成.

设整个半径为 b 的圆柱导体内通有电流密度为 $J\boldsymbol{a}_z$ 的电流，半径为 a 的圆柱内通有电流密度为 $-J\boldsymbol{a}_z$ 的电流. 那么，这时整个空间的场是由这二者共同产生的.

对于大圆柱，由安培环路定律得

$$\boldsymbol{B}_{大}=\begin{cases}\dfrac{\mu_0 Jr}{2}\boldsymbol{e}_\varphi & (r<b)\\ \dfrac{\mu_0 Jb^2}{2r}\boldsymbol{e}_\varphi & (r\geqslant b)\end{cases}$$

同理，对于小圆柱有

$$\boldsymbol{B}_{小}=\begin{cases}-\dfrac{\mu_0 Jr'}{2}\boldsymbol{e}_\varphi & (r'<b)\\ -\dfrac{\mu_0 Ja^2}{2r'}\boldsymbol{e}_\varphi' & (r'\geqslant a)\end{cases}$$

空间任一点的磁感应强度应为二者的矢量和，所以在大圆柱体外时，

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 Jb^2}{2r}\boldsymbol{e}_\varphi-\frac{\mu_0 Ja^2}{2r'}\boldsymbol{e}_\varphi'=\frac{\mu_0 Jb^2}{2r^2}\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{r}-\frac{\mu_0 Ja^2}{2(r')_2}\cdot\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{r}'$$

$$=\frac{\mu_0 J}{2}\boldsymbol{e}_z\times\left(\frac{b^2}{r^2}\boldsymbol{r}\ \frac{a^2}{(r')^2}\boldsymbol{r}'\right)$$

在空腔和大圆柱之间时，

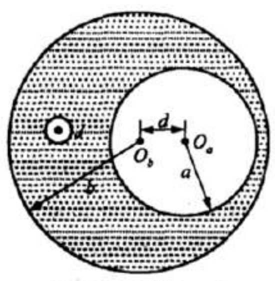
$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 Jr}{2}\boldsymbol{e}_\varphi-\frac{\mu_0 Ja^2}{2r'}\boldsymbol{e}'_\varphi=\frac{\mu_0 J}{2}\boldsymbol{e}_z\times\left(\boldsymbol{r}-\frac{a^2}{(r')^2}\boldsymbol{r}'\right)$$

在空腔内时，

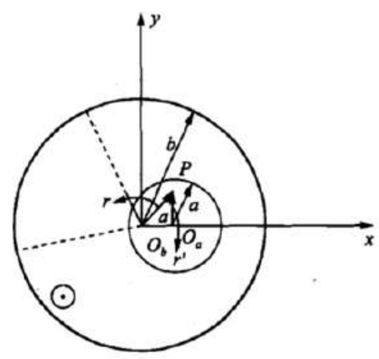
$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 Jr}{2}\boldsymbol{e}_\varphi-\frac{\mu_0 Jr'}{2}\boldsymbol{e}_\varphi'=\frac{\mu_0 J}{2}\boldsymbol{e}_z\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=\frac{\mu_0 J}{2}\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{d}$$

∵$\boldsymbol{d}$ 为一定值

∴空腔内的磁场是均匀的.



题 2.22 图



解 2.22 图

静态电磁场

恒定电场不能产生恒定磁场，恒定磁场也不能产生恒定电场；

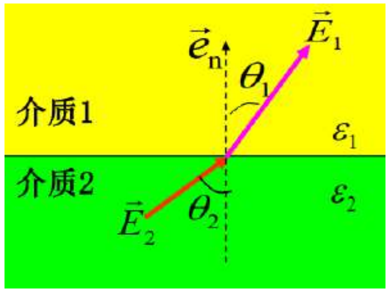
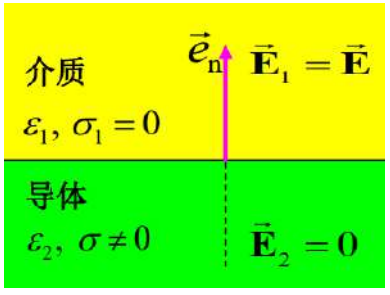
静电场

基本方程和边界方程

静电场基本方程：

微分形式: $\begin{cases}\nabla\cdot\vec{D}=\rho\\ \nabla\times\vec{E}=0\end{cases}$ 积分形式: $\begin{cases}\displaystyle\oint_S\vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=q\\ \displaystyle\oint_C\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0\end{cases}$

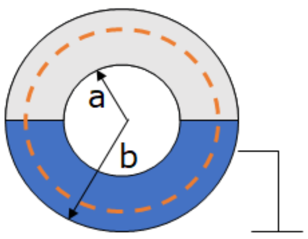
本构关系: $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ 一般边界条件$\begin{cases}D_{1\mathrm{n}}-D_{2\mathrm{n}}=\rho_S\\ E_{1\mathrm{t}}-E_{2\mathrm{t}}=0\end{cases}\to\begin{cases}\varepsilon_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}-\varepsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\rho_S\\ \varphi_1=\varphi_2\end{cases}$

两种电介质分界面($\sigma=0$，ρ_S=0)	**理想导体表面上有电介质**
	
$\dfrac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}=\dfrac{E_{1t}/E_{1n}}{E_{2t}/E_{2n}}=\dfrac{\varepsilon_1/D_{1n}}{\varepsilon_2/D_{2n}}=\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$	$\begin{cases}\vec{e}_n\cdot\vec{D}=\rho_S\\ \vec{e}_n\times\vec{E}=0\end{cases}$ $\begin{cases}D_n=\rho_S\\ E_t=0\end{cases}$

电位函数

$\vec{E}=-\nabla\varphi$ $\varphi(\vec{r})$ 称为静电场的标量电位函数或简称电位

> 求解方法：$q\rightarrow E\rightarrow\varphi$ 高斯



例 球形电容器的内导体的半径为a，外导体内半径为b，其间填充介电常数分别为ε_1和ε_2的两种均匀介质，如图所示：设内球带电荷为q，外球壳接地，

求：两球壳间的电场和电位分布：

解：由于电场方向沿径向，所以在介质1与介质2的分界面上，电场与分界面平行，即为切向分量。根据边界条件知：

$$\bar{E}_1=\bar{E}_2\text{但}\bar{D}_1\neq\bar{D}_2$$

$$\oint_s \bar{D}\cdot d\bar{S}=2\pi r^2(D_1+D_1)=q\quad(a<r<b)$$

$$\text{由}\bar{D}_1=\varepsilon_1\bar{E}_1,\bar{D}_2=\varepsilon_2\bar{E}_2\text{以及}\bar{E}_1=\bar{E}_2=\bar{E}$$

$$2\pi r^2(\varepsilon_1\bar{E}+\varepsilon_2\bar{E})=q$$

$$\Rightarrow\bar{E}(r)=\bar{e}_r\frac{q}{2\pi r^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\quad(a<r<b)$$

$$\boxed{\varphi(r)=\frac{q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\int_r^b\frac{1}{r^2}dr}$$

$$=\frac{q(b-r)}{2\pi br(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\quad(a<r<b)$$

在**均匀介质区域**中 $\left.\begin{array}{l}\nabla\cdot\vec{D}=\rho\Rightarrow\nabla\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon\\ \vec{E}=-\nabla\varphi\end{array}\right\}\Rightarrow\nabla^2\varphi=-\rho/\varepsilon$ (标量泊松方程)

在无源区域$\rho=0$，得到 拉普拉斯方程：$\nabla^2\varphi=0$

> 无限大均匀媒质空间中 $\varphi(\vec{r})=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon R}+C$

补：电偶极子的电位：$\varphi(\vec{r})=\dfrac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\dfrac{\vec{p}\cdot\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\dfrac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$

不同介质边界问题

例题：两块无限大接地导体平板分别置于$x=0$和$x=a$处,在两板之间的$x=b$处有一面密度为ρ_{s0}的均匀电荷分布(习题3.7)

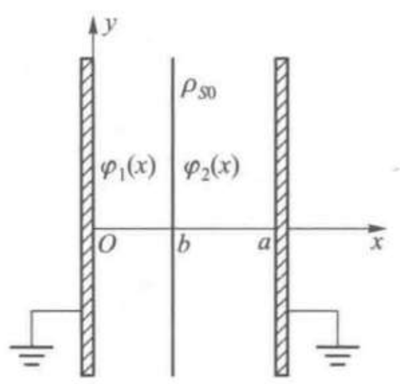


图 3.1.4 两块无限大平行板

解: 在两块无限大接地导体平板之间, 除 $x=b$ 处有均匀面电荷分布外,其余空间均无电荷分布, 故电位函数满足一维拉普拉斯方程

$$\begin{cases}\dfrac{d^2\varphi_1(x)}{dx^2}=0\quad(0<x<b)\\ \dfrac{d^2\varphi_2(x)}{dx^2}=0\quad(b<x<a)\end{cases}$$

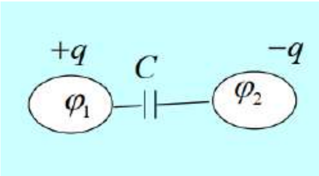
方程的通解为$\begin{cases}\varphi_1(x)=C_1x+D_1\\ \varphi_2(x)=C_2x+D_2\end{cases}$

利用边界条件得：(最后一条的符号是因为电位函数方向导致的)($\vec{e}_n(\vec{D}_1-\vec{D}_2)=\rho_{s0}$)，方向是2到1

$$\begin{cases}x=0\text{ 处}, \varphi_1(0)=0\\ x=a\text{ 处}, \varphi_2(a)=0\\ x=b\text{ 处}, \varphi_1(b)=\varphi_2(b)\\ \left[\dfrac{\partial\varphi_2(x)}{\partial x}-\dfrac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x}\right]_{x=b}=-\dfrac{\rho_{s0}}{\varepsilon_0}\end{cases}$$

如果介电常数不一样就要变成$\left[\varepsilon_2\dfrac{\partial\varphi_2(x)}{\partial x}-\varepsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x}\right]_{x=b}=-\rho_{s0}$

电容



两导体组成的电容：$C=\dfrac{Q}{U}=\dfrac{Q}{|\varphi_1-\varphi_2|}$

决定电容量大小的因素

> 导体系统的结构、尺寸、形状和其周围的电介质
>
> 与导体的带电量和电位无关

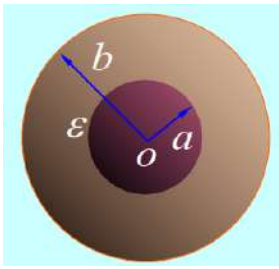
> **例题1**：同心球形电容器的内导体半径为a，外导体半径为b，其间填充介电常数为ε的均匀介质，求此球形电容器的电容

解：设内导体的电荷为q，则由**高斯定理**可求得内外导体间的电场$\vec{D}=\vec{e}_r\dfrac{q}{4\pi r^2}$，　$\vec{E}=\vec{e}_r\dfrac{q}{4\pi\varepsilon r^2}$

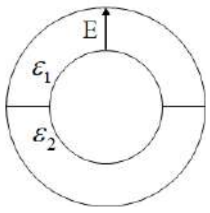
同心导体间的电压：

$$U=\int_a^b E\,\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{b-a}{ab}$$

同心球形电容器的电容　$C=\dfrac{q}{U}=\dfrac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}$



结论：球形电容器($b\to\infty$)：$C=4\pi\varepsilon a$ (定义可推)

延伸：

如果是两种不同的介质，由边界条件：$\begin{cases}D_{1\mathrm{n}}-D_{2\mathrm{n}}=\rho_S\\ E_{1\mathrm{t}}-E_{2\mathrm{t}}=0\end{cases}$ 确定利用切向电场相同

因为电场沿切向，电场无法向分量，所以**电容内电场相同**，由$\oint\vec{D}d\vec{S}=q\to D_1\cdot 2\pi r^2+D_2\cdot 2\pi r^2=q$

因为$\varepsilon_1E=D_1,\varepsilon_2E=D_2$，然后就可以求出$E$了，后续求法与同介质相同

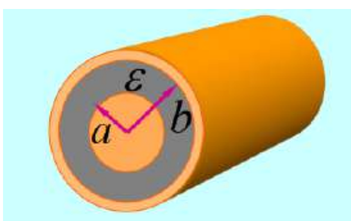
> **例题2**：同轴线内导体半径为a，外导体半径为b，内外导体间填充的介电常数为ε的均匀介质，求同轴线单位长度的电容

解：设同轴线的内、外导体单位长度带电量分别为$+\rho_l,-\rho_l$应用高斯定理可得到内外导体间任一点的电场强度为$\vec{E}(\rho)=\vec{e}_\rho\dfrac{\rho_l}{2\pi\varepsilon\rho}$

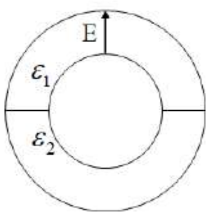
内外导体间的电位差

$$U=\int_a^b\vec{E}(\rho)\cdot\vec{e}_\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon}\int_a^b\frac{1}{\rho}\mathrm{d}\rho$$
$$=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon}\ln(b/a)$$

故得同轴线单位长度的电容为$C_1=\dfrac{\rho_l}{U}=\dfrac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)}$



同轴线

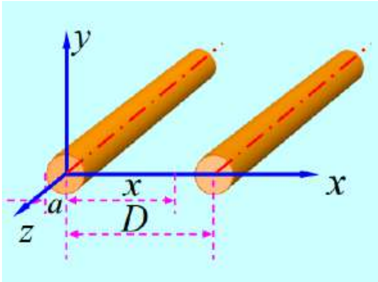
如果不是同一均匀介质，

确定边界条件$\begin{cases}D_{1\mathrm{n}}-D_{2\mathrm{n}}=\rho_S\\ E_{1\mathrm{t}}-E_{2\mathrm{t}}=0\end{cases}$确定利用$E_{1t}=E_{2t}=E$

同电容器，内部电场相同，$E_1=E_2=E$，由$\oint\vec{D}d\vec{S}=\rho_lL\to(D_1+D_2)\pi r=\rho_l\to(\varepsilon_1+\varepsilon_2)E\pi r=\rho_l$

求出E后按同介质求法　　结论：$C=\dfrac{\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{\ln(b/a)}$

> 例题3：如图所示的平行双线传输线，导线半径为a，两导线的轴线距离为D，且D >> a，求传输线单位长度的电容



设两导线上的带电量分别为$+\rho_l$和$-\rho_l$。由于，故可近似地认为电荷在各导线表面均匀分布。因此导线间x处的电场强度为

$\vec{E}(x)=\vec{e}_x\dfrac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{D-x}\right)$ 两导线间的电位差

$U=\int_1^2\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\dfrac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\int_a^{D-a}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{D-x}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{\rho_l}{\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{D-a}{a}$

故单位长度的电容为 $C_1=\dfrac{\rho_l}{U}=\dfrac{\pi\varepsilon_0}{\ln[(D-a)/a]}\approx\dfrac{\pi\varepsilon_0}{\ln(D/a)}(\mathrm{F/m})$

一般求解步骤：

> （1）假定两导体上分别带电荷 $+q$ 和 $-q$;
>
> 最关键步骤：（2）根据假定的电荷求出电场强度 E;
>
> （3）由 $\int_1^2 E\cdot\mathrm{d}l$ 求得电位差 U;
>
> （4）求出比值 $C=\dfrac{q}{U}$

静电场能量

通过电位计算

体分布电荷情况	面分布电荷	电容器的储能
$W_\mathrm{e}=\dfrac{1}{2}\int_V\rho\varphi\mathrm{d}V$	$W_\mathrm{e}=\dfrac{1}{2}\int_S\rho_S\varphi\mathrm{d}S$	$W_\mathrm{e}=\dfrac{1}{2}\sum_i\varphi_iq_i$

电场能量密度	电场的总能量	对于线性、各向同性介质
$w_\mathrm{e}=\dfrac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$	$W_\mathrm{e}=\dfrac{1}{2}\int_V\vec{D}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}V$	$w_\mathrm{e}=\dfrac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}=\dfrac{1}{2}\varepsilon E^2$ $W_\mathrm{e}=\dfrac{1}{2}\int_V\vec{D}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}V=\dfrac{1}{2}\int_V\varepsilon E^2\,\mathrm{d}V$

恒定电场

定义：

在静电场中，电场只存在于导电媒质以外的电介质中，导电媒质内部不存在电场。如果**将导电媒质与电源的两极相连接**，且**维持两电极间的电压不变**，则**导电媒质内将存在一个不随时间变化的电场**，称为恒定电场

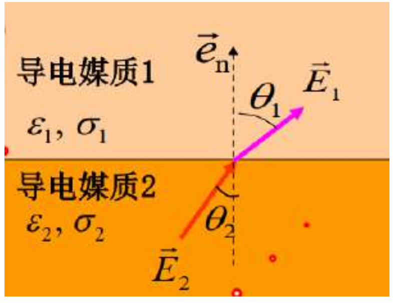
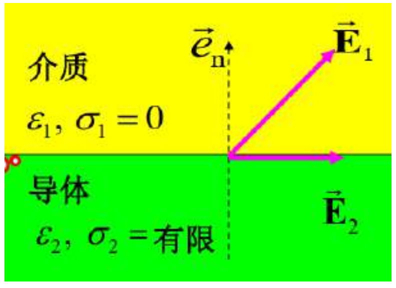
恒定电场是**电荷分布不随时间变化**的运动电荷产生的电场，而不是静止电荷产生的电场，$\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=0$

基本方程和边界方程

恒定电场基本方程：(静电场基本方程仍然满足，但主要利用电流连续方程得到的$\vec{J}$基本方程)

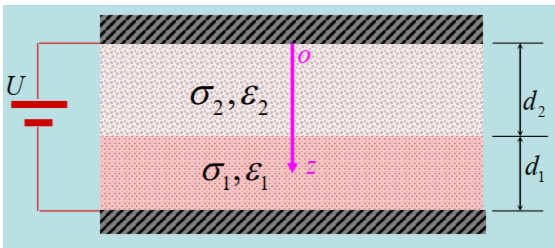
微分形式: $\begin{cases}\nabla\cdot\vec{J}=0\\ \nabla\times\vec{E}=0\end{cases}$ $(\nabla\cdot\vec{D}=\rho_s)$ 积分形式: $\begin{cases}\oint_S\vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0\\ \oint_C\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0\end{cases}$ $(\oint_S\vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=q)$

本构关系: $\vec{J}=\sigma\vec{E}(\vec{D}=\varepsilon E)$ 一般边界条件: $\begin{cases}J_{1\mathrm{n}}-J_{2\mathrm{n}}=0\\ E_{1\mathrm{t}}-E_{2\mathrm{t}}=0\end{cases}$ $(D_{1\mathrm{n}}-D_{2\mathrm{n}}=\rho_S)$ $\rightarrow$ $\begin{cases}\varphi_1=\varphi_2\\ \sigma_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\sigma_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\end{cases}$ $(\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}-\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\rho_S)$

两种导电煤质分界面($\sigma\neq 0$，存在ρ_S)	$\sigma_2\gg\sigma_1$
	
$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}=\frac{E_{1\mathrm{t}}/E_{1\mathrm{n}}}{E_{2\mathrm{t}}/E_{2\mathrm{n}}}=\frac{\sigma_1/J_{1\mathrm{n}}}{\sigma_2/J_{2\mathrm{n}}}=\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$	$\begin{cases}D_{1\mathrm{n}}=\rho_S\\ E_{2\mathrm{n}}=0\end{cases}$ 本科阶段忽略切向

不同介质边界问题

例: 一个有两层介质的平行板电容器, 其参数分别为 ε_1 、 σ_1 和 ε_2、σ_2, 外加电压 U 。求介质面上的自由电荷密度。



极板是理想导体，为等位面，电流沿z方向

由 $J_{1\mathrm{n}}=J_{2\mathrm{n}}\Rightarrow J_1=J_2=J$

由$E_1=\frac{J_1}{\sigma_1}=\frac{J}{\sigma_1},E_2=\frac{J_2}{\sigma_2}=\frac{J}{\sigma_2}\Rightarrow U=U_1+U_2=E_1d_1+E_2d_2=\left(\frac{d_1}{\sigma_1}+\frac{d_2}{\sigma_2}\right)J\Rightarrow J=U/\left(\frac{d_1}{\sigma_1}+\frac{d_2}{\sigma_2}\right)$

由$D_{1\mathrm{n}}-D_{2\mathrm{n}}=\rho_S\Rightarrow\quad\rho_S=\left(\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}-\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2}\right)J=\frac{\sigma_2\varepsilon_1-\sigma_1\varepsilon_2}{\sigma_2d_1+\sigma_1d_2}U$

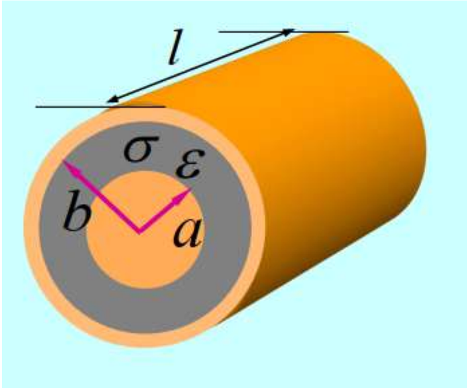
电阻和电导

计算方法: $G=\frac{1}{R}$ 通常是假设法

1. 假定两电极间的电流为 I; 2. 由 $U=\int_1^2\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$, 求出两导 体间的电位差; 3. 由定义求电导:$G=I/U$;	1. 假定两电极间的电位差为 U; 2. 由 $I=\int_S\vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$, 求出两导体间电流; 3. 由定义求电导:$G=I/U$	**静电比拟法:** $\frac{G}{C}=\frac{\sigma}{\varepsilon}$

例题: 求同轴电缆的绝缘电阻。设内外的半径分别为a、b，长度为l，其间媒质的电导率为σ 、介电常数为ε.

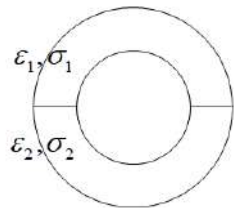
解: (电场方向由a到b) 直接用恒定电场的计算方法 设由内导体流向外导体的电流为 I(这个求的是l长度的电导)



$$I \Rightarrow J=\frac{I}{2\pi\rho l} \Rightarrow E=\frac{J}{\sigma}=\frac{I}{2\pi\rho l\sigma}$$

$$U=\int \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_a^b \frac{I}{2\pi\rho l\sigma}\mathrm{d}\rho=\frac{I}{2\pi\sigma l}\ln\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{电导}G=\dfrac{I}{U}=\dfrac{2\pi\sigma l}{\ln(b/a)} \\ \text{绝缘电阻}R=\dfrac{1}{G}=\dfrac{1}{2\pi\sigma l}\ln\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

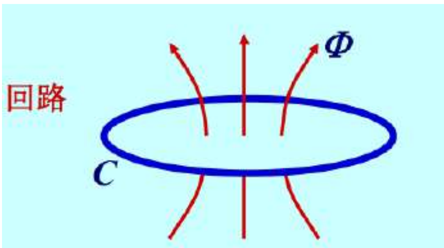
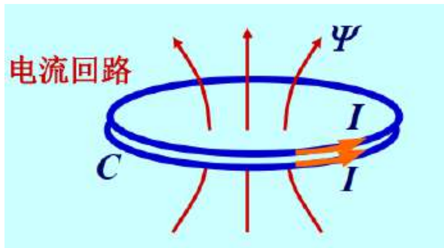
延伸：

如果是两种不同的介质，由边界条件 $\begin{cases} J_{1\mathrm{n}}-J_{2\mathrm{n}}=0 \\ E_{1\mathrm{t}}-E_{2\mathrm{t}}=0 \end{cases}$ 因为电场方向为切向(由内指外)

$J=\sigma E$代入 $I=\int_2 \vec{J}d\vec{S}=\pi\rho lJ_1+\pi\rho lJ_2=\pi\rho l(\sigma_1+\sigma_2)E$ 得到E之后再积分求U

(习题3.13)

电感

磁通Φ	磁链Ψ
	
$\Phi=\int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\int_S \nabla\times\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\oint_C \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$	$\Psi=n\Phi$，粗导线回路：$\Psi=\Psi_0+\Psi_i$(外磁链加内磁链) n 为磁场铰链的电流与回路电流I之比（**不一定为整数**）
特征：回路可以是任意几何回路	特征：1、回路是电流回路；2、计入电流存在的所有回路；3、每个回路是计入与之铰链的全部磁通

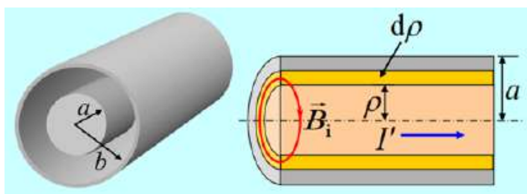
自感L

$L=\dfrac{\Psi}{I}$，称为导体回路的自感系数，简称自感，特征：磁链是I自已产生的

粗导体回路的自感: $L=L_{\mathrm{i}}+L_{\mathrm{o}}$ $L_{\mathrm{i}}=\dfrac{\Psi_{\mathrm{i}}}{I}$——内自感 $L_{\mathrm{o}}=\dfrac{\Psi_{\mathrm{o}}}{I}$——外自感

> 自感的特点：自感只与回路的几何形状、尺寸以及周围的磁介质有关，**与电流和磁链的大小无关**

例：**求同轴线单位长度的自感** ！！！（多重点）



先求内导体的内自感；设同轴线中的电流为I，由安培环路定理 $\oint_C \vec{H}_{\mathrm{i}}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=I'=\dfrac{I}{\pi a^2}\pi\rho^2=\dfrac{I}{a^2}\rho^2$

得 $H_{\mathrm{i}}=\dfrac{I}{2\pi a^2}\rho, B_{\mathrm{i}}=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a^2}\rho \quad (0\le\rho\le a)$ ρ 处面元的磁通为 $\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{i}}=B_{\mathrm{i}}\cdot\mathrm{d}S=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a^2}\rho l\,\mathrm{d}\rho$

因为与$\mathrm{d}\Phi_i$中，（易错）【这一部分磁通相交链的电流不是导体中的全部电流I，而只是I的部分I'】，两者的关系为$I'=\dfrac{\rho^2}{a^2}I$

则其磁链为 $\mathrm{d}\Psi_{\mathrm{i}}=\dfrac{I'}{I}\,\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{i}}=\dfrac{\mu_0 I\rho^3}{2\pi a^4}l\,\mathrm{d}\rho$

因此内导体中总的内磁链为 $\Psi_{\mathrm{i}}=\int\mathrm{d}\Psi_{\mathrm{i}}=l\int_0^a\dfrac{\mu_0 I\rho^3}{2\pi a^4}\,\mathrm{d}\rho=\dfrac{\mu_0 I}{8\pi}l$

故单位长度的内自感为 $L_{\mathrm{i}}=\dfrac{\Psi_{\mathrm{i}}}{Il}=\dfrac{\mu_0}{8\pi}$ (轴线内自感都是一样的)

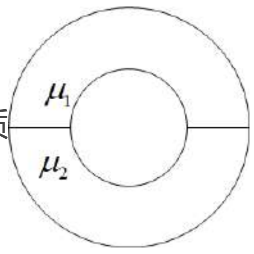
再求内、外导体间的外自感：$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\rightarrow \mathrm{d}\Psi_{\mathrm{o}}=\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{o}}=\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}l\,\mathrm{d}\rho$

则$\Psi_0=\int \mathrm{d}\Psi_0=l\int_a^b\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\mathrm{d}\rho=l\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$

故单位长度的外自感为 $L_0=\frac{\Psi_0}{Il}=\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$

单位长度的总自感为 $L=L_{\mathrm{i}}+L_0=\frac{\mu_0}{8\pi}+\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$

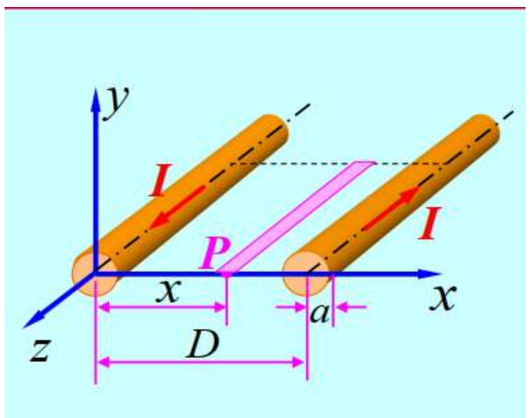
延伸：如果不是同一均匀介质



确定边界条件$\begin{cases}B_{1\mathrm{n}}-B_{2\mathrm{n}}=0\\ H_{1\mathrm{t}}-H_{2\mathrm{t}}=J_S\end{cases}$ 确定利用$B_{1n}=B_{2n}=B$

$\int_{L_1}\frac{\vec{B}_1}{\mu_1}d\vec{l}_1+\int_{L_2}\frac{\vec{B}_2}{\mu_2}d\vec{l}_2=I \quad \Rightarrow B\pi\rho(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2})=I$ 得到B之后计算和上面一样了(外自感，内自感计算无变化)

计算平行双线传输线单位长度的自感：



$\vec{B}(x)=\vec{e}_y\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{D-x}\right)$ 外磁链为$\Psi_{\mathrm{o}}=\int\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}l\int_a^{D-a}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{D-x}\right)\mathrm{d}x=\frac{\mu_0 I}{\pi}l\ln\frac{D-a}{a}$

单位长度的外自感为：$L_{\mathrm{o}}=\frac{\Psi_{\mathrm{o}}}{I}=\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{D-a}{a}\approx\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{D}{a}$

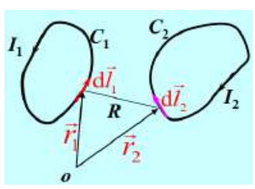
单位长度内自感为：$L_i=2\times\frac{\mu_0}{8\pi}$

互感M

$M_{21}=\frac{\Psi_{21}}{I_1}\quad(M_{11}=L_1)$ 回路C_1 对回路C_2的互感系数，简称互感，同理$M_{12}=\frac{\Psi_{12}}{I_2}\quad(M_{11}=L_1)$

互感下标后面是产生的源，前面的是产生场的区域

有纽曼公式：$\begin{cases}M_{21}=M_{12}=M\\ M=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{\mathrm{d}\vec{l}_1\cdot\mathrm{d}\vec{l}_2}{R}\end{cases}$



能量计算

电感储能（单个载流回路）：$W_{\mathrm{m}}=\frac{I}{2}\Psi_{总}=\frac{1}{2}I^2L$ 电感储能（N个载流回路）：$W_m=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}I_jI_kM_{jk}$

> 对2个载流回路：$W_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k}^{N}I_jI_kM_{jk}=\frac{1}{2}L_1I_1^2+\frac{1}{2}L_2I_2^2+MI_1I_2$

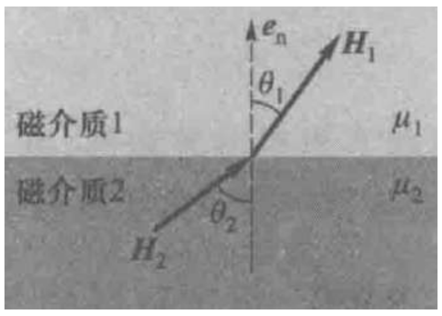
恒定磁场

基本方程和边界方程

恒定磁场的源(恒定电流)和场量(B、H)不随时间变化，基本方程：

微分形式: $\begin{cases}\nabla\times\vec{H}=\vec{J}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\end{cases}$ 积分形式: $\begin{cases}\oint_C\vec{H}\cdot d\vec{l}=\int_S\vec{J}\cdot d\vec{S}\\ \oint_S\vec{B}\cdot d\vec{S}=0\end{cases}$

本构关系: $\vec{B}=\mu\vec{H}$ 一般边界条件: $\begin{cases}B_{1n}-B_{2n}=0\\ H_{1t}-H_{2t}=J_S\end{cases}$ 矢量磁位的边界方程：$\vec{A}_1=\vec{A}_2\rightarrow A_{1t}=A_{2t},A_{1n}=A_{2n}$

不存在自由电流($\vec{J}=0$)

介质两侧矢量的方向关系$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}=\frac{H_{1t}/H_{1n}}{H_{2t}/H_{2n}}=\frac{\mu_1}{\mu_2}$

矢量磁位

$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$ $\vec{A}(\vec{r})$称为矢量磁位或简称磁矢位

在恒定磁场中通常规定$\nabla\cdot\vec{A}=0$，并称为库仑规范 **矢量泊松方程** $\nabla^2\vec{A}=-\mu\vec{J}$

在无源区：$\vec{J}=0$，得到矢量拉普拉斯方程$\nabla^2\vec{A}=0$

恒定磁场的能量

依据：$\vec{F}=\oint_c Id\vec{l}\times\vec{B}$ 哪里有磁场，哪里就有磁场能量！

磁场能量密度	磁场能量	对于线性各向同性媒质
$w_m=\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$	$W_m=\frac{1}{2}\int_V\vec{B}\cdot\vec{H}\,dV$	$w_m=\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}=\frac{1}{2}\mu H^2$ $W_m=\frac{1}{2}\int_V\vec{B}\cdot\vec{H}\,dV=\frac{1}{2}\int_V\mu H^2\,dV$

通过磁矢位计算磁场能量：

- 体分布电流 $W_m=\frac{1}{2}\int_V\vec{J}\cdot\vec{A}\,dV$
- 回路线电流 $W_m=\frac{I}{2}\oint_C\vec{A}\cdot d\vec{l}=\frac{I}{2}\Psi_{总}$

通过电感计算磁场能量：

电感储能（单个载流回路）：$W_m=\frac{I}{2}\Psi_{总}=\frac{1}{2}I^2L$ 电感储能（N个载流回路）：$W_m=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}I_jI_kM_{jk}$

> 对2个载流回路：$W_m=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k}^{N}I_jI_kM_{jk}=\frac{1}{2}L_1I_1^2+\frac{1}{2}L_2I_2^2+MI_1I_2$

镜像法

镜像法的理论基础：解的惟一性定理

> 方法： 在求解域外设置等效电荷，集中代表边界上分布电荷的作用
>
> 目的： 使复杂边值问题，化为无限大单一媒质空间的问题

掌握习题3.21并理解

总结

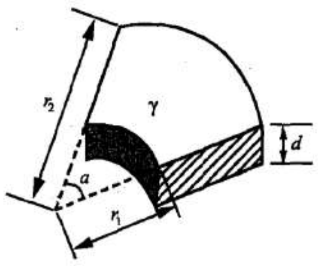
静电场ε	$\vec{E},\vec{D}$	$w_E=\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$	$C=\frac{Q}{U},\begin{cases}①Q\to E\to U\to C\\②U\to E\to Q\to C\end{cases}$
恒定电场ε,σ	$\vec{J},\vec{E}$	$P=\vec{E}\cdot J$	$G=\frac{I}{U},\begin{cases}①I\to J\to E\to U\to G\\②U\to E\to J\to I\to G\\③\text{静电比拟法}\end{cases}$
恒定磁场μ	$\vec{B},\vec{H}$	$w_m=\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$	$L=\frac{\Psi}{I}.I\to H\to B\to\Phi\to\Psi\to L$

同轴电容器单位长度	**双线 | |**	**球形电容器**
$C=\frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)}$	$C=\frac{\pi\varepsilon}{\ln(b/a)}$	$C=2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a$
$G=\frac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)}$		$G=2\pi(\sigma_1+\sigma_2)a$
$L_{外}=\frac{\mu}{2\pi}\ln(b/a)$	$L_{外}=\frac{\mu}{\pi}\ln(b/a)$	(C和G可以直接用静电比拟法)

静电场	**恒定电场**	**恒定磁场**
$\begin{cases}D_{1\mathrm{n}}-D_{2\mathrm{n}}=\rho_S\\E_{1\mathrm{t}}-E_{2\mathrm{t}}=0\end{cases}$	$\begin{cases}J_{1\mathrm{n}}-J_{2\mathrm{n}}=0\\E_{1\mathrm{t}}-E_{2\mathrm{t}}=0\end{cases}$ $(D_{1\mathrm{n}}-D_{2\mathrm{n}}=\rho_S)$	$\begin{cases}B_{1\mathrm{n}}-B_{2\mathrm{n}}=0\\H_{1\mathrm{t}}-H_{2\mathrm{t}}=J_S\end{cases}$
$\begin{cases}\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}-\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\rho_S\\\varphi_1=\varphi_2\end{cases}$	$\begin{cases}\varphi_1=\varphi_2\\\sigma_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\sigma_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\end{cases}$ $(\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}-\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\rho_S)$	

习题

3.13 在一块厚度 d 的导体板上，由两个半径为 r_1 和 r_2 的圆弧和夹角为 α 的两半径割出的一块扇形体，如题 3.13 图所示. 求：(1)沿导体板厚度方向的电阻；(2)两圆弧面之间的电阻；(3)沿 α 方向的两电极间的电阻. 设导电板的电导率为 γ.



题 3.13 图

【逻辑推理】求两圆弧面之间的电阻时，电流沿 e_r 方向，可按 $I\to \boldsymbol{J}\to \boldsymbol{E}\to U\to R$ 计算；求沿 α 方向的两电极的电阻时，电流沿 e_φ 方向，而且电流密度是随 r 变化的，所以可按 $U\to \boldsymbol{E}\to \boldsymbol{J}\to I\to R$ 计算.

主要是设U还是I，如何确定E或者J为关键

(1)设沿厚度方向的两电极的电压为 U_1，则有

$$E_1=\frac{U_1}{d}$$

$$J_1=\gamma E_1=\frac{\gamma U_1}{d}$$

$$I_1=J_1S_1=\frac{\gamma U_1}{d}\cdot\frac{\alpha}{2}(r_2^2-r_1^2)$$

故得到沿厚度方向的电阻为

$$R_1=\frac{U_1}{I_1}=\frac{2d}{\alpha\gamma(r_2^2-r_1^2)}$$

(2)设内外两圆弧面电极之间的电流为 I_2，则

$$J_2=\frac{I_2}{S_2}=\frac{I_2}{\alpha rd}$$

$$E_2=\frac{J_2}{\gamma}=\frac{I_2}{\gamma\alpha rd}$$

$$U_2=\int_{r_1}^{r_2}E_2\,dr=\frac{I_2}{\gamma\alpha d}\ln(\frac{r_2}{r_1})$$

故得到两圆弧面之间的电阻为

$$R_2=\frac{U_2}{I_2}=\frac{1}{\gamma\alpha d}\ln(\frac{r_2}{r_1})$$

(3)设沿 α 方向的两电极的电压为 U_3，则有

$$U_3=\int_0^{\alpha}E_3\,r\mathrm{d}\varphi$$

由于 E_3 与 φ 无关，所以得到

$$\boldsymbol{E}_3=\boldsymbol{e}_\varphi\frac{U_3}{\alpha r}$$

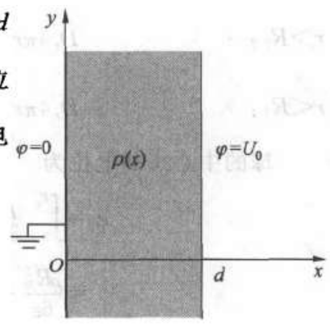
$$\boldsymbol{J}_3=\gamma\boldsymbol{E}_3=\boldsymbol{e}_\varphi\frac{\gamma U_3}{\alpha r}$$

$$I_3=\int_{S_3}\boldsymbol{J}_3\cdot\boldsymbol{e}_\varphi\mathrm{d}S=\int_{r_1}^{r_2}\frac{\gamma\mathrm{d}U_3}{\alpha r}\mathrm{d}r=\frac{\gamma dU_3}{\alpha}\ln(\frac{r_2}{r_1})$$

故得到沿 α 方向的电阻为

$$R_3=\frac{U_3}{I_3}=\frac{\alpha}{\gamma d\ln(r_2/r_1)}$$

3.7 两块无限大导体平板分别置于 $x=0$ 和 $x=d$ 处，板间充满电荷，其体电荷密度为 $\rho=\frac{\rho_0 x}{d}$，极板的电位分别设为 0 和 U_0，如题 3.7 图所示，求两导体板之间的电位和电场强度.



题 3.7 图

【解题过程】由泊松方程得

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho_0 x}{\varepsilon_0 d}$$

$$\therefore \varphi=-\frac{\rho_0 x^3}{6\varepsilon_0 d}+C_1x+C_2$$

又 $\because \varphi(0)=0,\varphi(d)=U_0$

$$\therefore\begin{cases}C_2=0\\-\frac{\rho_0 d^3}{6\varepsilon_0 d}+C_1d=U_0\end{cases}\qquad\therefore\begin{cases}C_1=\frac{\rho_0 d}{6\varepsilon_0}+\frac{U_0}{d}\\C_2=0\end{cases}$$

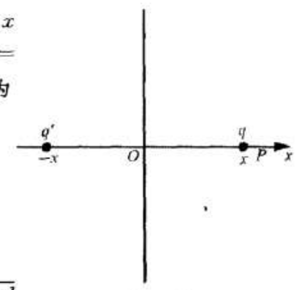
$$\therefore \varphi(x)=-\frac{\rho_0 x^3}{6\varepsilon_0 d}+\left(\frac{U_0}{d}+\frac{\rho_0 d}{6\varepsilon_0}\right)x$$

$$\therefore \boldsymbol{E}=-\nabla\varphi(x)=\left[\frac{\rho_0 x^2}{2\varepsilon_0 d}-\left(\frac{U_0}{d}+\frac{\rho_0 d}{6\varepsilon_0}\right)\right]\boldsymbol{e}_x$$

3.21 一个点电荷 q 与无限大导体平面距离为 d，如果把它移到无穷远处，需要作多少功？

【逻辑推理】点电荷位于接地导体平面附近时，导体平面上有感应电荷. 先利用镜像法求出感应电荷产生的电场 $\boldsymbol{E}$，然后由 $W_e=\int_0^{\infty}q\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}$ 计算出电场所作的功.

【解题过程】当点电荷 q 移动到距离导体平面为 x 的 P 点处时，其像电荷 $q'=-q$，与导体平面相距为 $x'=-x$，如题 3.21 图所示. 像电荷 q' 在 P 点处产生的电场为



题 3.21 图

$$\boldsymbol{E}'(x)=\boldsymbol{e}_x\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0(2x)^2}$$

所以将点电荷 q 移到无穷远处时，电场所作的功为

$$W_e=\int_d^{\infty}q\boldsymbol{E}'(x)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$=\int_d^{\infty}\frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0(2x)^2}\mathrm{d}x=-\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 d}$$

时变电磁场

波动方程

在无源空间中$\rho=0,\vec{J}=0$得到简化波动方程$\begin{cases}\nabla^2\vec{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0\\\vec{\nabla}^2\vec{H}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=0\end{cases}\quad(k=\mu\varepsilon)$

位函数方程

> 库仑规范：$\nabla\cdot\vec{A}=0$
>
> 洛仑兹规范：$\nabla\cdot\vec{A}=-\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}$

波动方程	位函数计算	位函数方程(洛伦兹规范后)
$\begin{cases}\nabla^2\vec{E}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0\\ \nabla^2\vec{H}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=0\end{cases}$	$\begin{cases}\vec{B}=\nabla\times\vec{A}\\ \vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\nabla\varphi\end{cases}$	$\begin{cases}\nabla^2\vec{A}-\varepsilon\mu\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu\vec{J}\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=-\dfrac{1}{\mu\varepsilon}\nabla\cdot\vec{A}\end{cases}$

对比波动方程和位函数方程，无源区两种方法一样简单，有源区位函数方程更简单

> 求解区无源，用场的波动方程　求解区有源，用位函数方程

电磁能量守恒定律

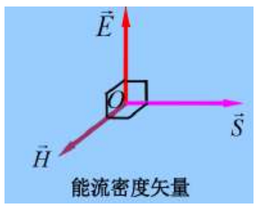
2、坡印廷定理是关于电磁能量转换过程的能量守恒定律。其中（ **E** ）表示单位时间进入**S**面包围的有限空间体积**V**中的电磁能量，（ **A** ）表示单位时间内体积**V**中电磁能量的增加，（ **C** ）表示单位时间体积**V**内损耗的电磁能量。

A. $\dfrac{\partial}{\partial t}\int_V\left(\dfrac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}+\dfrac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}\right)dV$ **B.** $\int_V\left(\dfrac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}+\dfrac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}\right)dV$ **C.** $\int_V\vec{E}\cdot\vec{J}\,dV$

D. $\oint_S\vec{E}\times\vec{H}\cdot d\vec{S}$ **E.** $-\oint(\vec{E}\times\vec{H})\cdot d\vec{S}$

（做功）功率：$P=\int_V\vec{J}\cdot\vec{E}dV$（表示单位时间**体积V内损耗**的电磁能量）

存储的电磁能量：$\begin{cases}w=w_{\mathrm{e}}+w_{\mathrm{m}}=\dfrac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}+\dfrac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}\\ W=\int_V w\,\mathrm{d}V=\int_V\left(\dfrac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}+\dfrac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}\right)\mathrm{d}V\end{cases}$



玻印亭矢量(**流过单位面积的功率**)：$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$

单位时间**进入S面**包围的有限空间体积V中的电磁能量$-\oint_S(\vec{E}\times\vec{H})\cdot\mathrm{d}\vec{S}$ (习题4.15)

> 这个符号是因为规定流入为负，流出为正，计算的是进入截面的能量

玻印亭定理(瞬时功率密度关系)（电磁场能量守恒）：$-\nabla\cdot\vec{S}=\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}+\dfrac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}\right)+\vec{E}\cdot\vec{J}$

简化形式：$P_{入}=\dfrac{d}{dt}W+P_{耗}$ 积分形式：$-\oint_S(\vec{E}\times\vec{H})\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\left(\dfrac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}+\dfrac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}\right)\mathrm{d}V+\int_V\vec{E}\cdot\vec{J}\,\mathrm{d}V$

> 单位时间流入体积V内的电磁能量 等于 体积V内增加的电磁能量与体积V内消耗的电场能量之和（焦耳热）

一般来说电容器$-\oint_S\vec{S}\cdot d\vec{S}=\int_V\vec{J}\cdot\vec{E}dV$ (习题4.15)　（进入的等于消耗的）

时谐电磁场

物理量随时间按正弦规律变化的问题，因此也叫正弦电磁场问题 $\dfrac{\partial}{\partial t}\rightarrow j\omega\quad\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\rightarrow-\omega^2$

传导电流和位移电流的相位差为90°

> 传导电流密度：$\vec{J}=\sigma\vec{E}$，位移电流密度：$\vec{J}_{\mathrm{d}}=\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}=jw\vec{D}$　一个j为90°相位

ε_c为等效复介电常数或等效复电容率，$\varepsilon_c=\varepsilon-j\dfrac{\sigma}{w}$

实数表示法或瞬时表示法$A(\vec{r},t)$　复数表示法$A(\vec{r})$改为实数表示法：$A(\vec{r},t)=\operatorname{Re}\left[A(\vec{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$ (习题4.11)

> 复矢量包含了任意时刻场量的空间变化情况
>
> 若为sin 转化，因为$\cos(x-\frac{\pi}{2})=\sin x$，只需在后带上$e^{j(-\frac{\pi}{2})}$
>
> 基本公式：$e^{jwt}=\cos wt+j\sin wt$　$,j=e^{j\frac{\pi}{2}},-j=e^{j(-\frac{\pi}{2})}$

求导	积分
$\frac{\partial}{\partial t}A(\vec{r},t)=\mathrm{Re}\left[j\omega A(\vec{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$	$\int dtA(\vec{r},t)=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{j\omega}A(\vec{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$
$\frac{\partial}{\partial t}A(\vec{r},t)\longleftrightarrow j\omega A(\vec{r})$	$\frac{\partial}{\partial t}A(\vec{r},t)\longmapsto j\omega A(\vec{r})$
$\frac{\partial}{\partial t}\longleftrightarrow j\omega$	$\int dt\longleftrightarrow\frac{1}{j\omega}$

媒质的损耗角正切：对电磁波而言，媒质复介电常数**虚部**的起对电磁波**衰减**的作用。因此对电磁波传播而言，介电常数/磁导率具有虚部的介质也叫**损耗介质**，其虚部与实部的比称为**损耗角正切**

> 电介质$\tan\delta_{\varepsilon}=\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$ 磁介质$\tan\delta_{\mu}=\frac{\mu''}{\mu'}$ 导电媒质$\tan\delta_{\sigma}=\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$(传导电流与位移电流的比)
>
> 导电媒质的分类：<<1 为弱导电媒质和良绝缘体，≈1 为普通导电媒质， >>1 为良导体

总结

共性问题

	$\frac{\partial}{\partial t}\neq 0$	$\frac{\partial}{\partial t}=jw$
Maxwell方程	$\begin{cases}\nabla\times\vec{H}(\vec{r},t)=\vec{J}(\vec{r},t)+\frac{\partial\vec{D}(\vec{r},t)}{\partial t}\\ \nabla\times\vec{E}(\vec{r},t)=-\frac{\partial\vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{B}(\vec{r},t)=0\\ \nabla\cdot\vec{D}(\vec{r},t)=\rho(\vec{r},t)\end{cases}$ $\nabla\cdot\vec{J}(\vec{r},t)=-\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t}$	$\begin{cases}\nabla\times\vec{H}(\vec{r})=\vec{J}(\vec{r})+\mathrm{j}\omega\vec{D}(\vec{r})\\ \nabla\times\vec{E}(\vec{r})=-\mathrm{j}\omega\vec{B}(\vec{r})\\ \nabla\cdot\vec{D}(\vec{r})=\rho(\vec{r})\\ \nabla\cdot\vec{B}(\vec{r})=0\end{cases}$ $\vec{J}(\vec{r})=-j\omega\rho(\vec{r})$

瞬时Poyting矢量	平均Poyting矢量
$\begin{aligned}\vec{S}(\vec{r},t)&=\vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{H}(\vec{r},t)\\&=\mathrm{Re}\left[\vec{E}(\vec{r})e^{j\omega t}\right]\times\mathrm{Re}\left[\vec{H}(\vec{r})e^{j\omega t}\right]\end{aligned}$	$\begin{aligned}\vec{S}_{av}(\vec{r})&=\frac{1}{T}\int_0^T\vec{S}(\vec{r},t)dt\\&=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{E}(\vec{r})\times\vec{H}^*(\vec{r})\right]\end{aligned}$
瞬时能量密度	平均能量密度
$w(\vec{r},t)=\frac{1}{2}\varepsilon E^2+\frac{1}{2}\mu H^2$	$w_{av}(\vec{r})=\frac{1}{4}\mathrm{Re}[\vec{D}(\vec{r})\cdot\vec{E}^*(\vec{r})+\vec{B}(\vec{r})\cdot\vec{H}^*(\vec{r})]=\frac{1}{4}(\varepsilon'E\cdot E^*+\mu'H\cdot H^*)$
瞬时功率密度消耗	平均焦耳损耗功率密度
$\begin{aligned}p_{\mathrm{loss}}&=\vec{E}(\vec{r},t)\cdot\vec{J}(\vec{r},t)\\&=\mathrm{Re}\left[\vec{E}(\vec{r})e^{j\omega t}\right]\cdot\mathrm{Re}\left[\vec{J}(\vec{r})e^{j\omega t}\right]\end{aligned}$	$\begin{aligned}p_{Jav}(\vec{r})&=\frac{1}{T}\int_0^T p_J(\vec{r},t)dt\\&=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\sigma\vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{E}^*(\vec{r})\right]=\frac{1}{2}\sigma\vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{E}^*(\vec{r})\end{aligned}$

习题

4、无源空间中（媒质参数为 ε，μ，σ=0），已知时谐磁场的复数表示式为
$\vec{H}(z)=10(\vec{e}_x+j\vec{e}_y)\ e^{-j25z}\quad A/m$，角频率为 ω

试求出：（1）对应电场的瞬时值表达式；
（2）瞬时坡印廷矢量；（3）平均坡印廷矢量。

解：(1) $\nabla\times\vec{H}=j\omega\varepsilon\vec{E}$ （2分）

$$\vec{E}(z)=\frac{1}{j\omega\varepsilon}\nabla\times\vec{H}=\frac{1}{j\omega\varepsilon}(\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z})\times10(\vec{e}_x+j\vec{e}_y)e^{-j25z}\quad（4分）$$

$$\vec{E}(z)=\frac{10}{j\omega\varepsilon}(-j25)(\vec{e}_y-j\vec{e}_x)e^{-j25z}=\frac{250}{\omega\varepsilon}(j\vec{e}_x-\vec{e}_y)e^{-j25z}\quad（4分）$$

电场的瞬时值为

$$\vec{E}(z,t)=\mathrm{Re}\left[\frac{250}{\omega\varepsilon}(j\vec{e}_x-\vec{e}_y)e^{-j25z}e^{j\omega t}\right]=-\vec{e}_x\frac{250}{\omega\varepsilon}\sin(\omega t-25z)-\vec{e}_y\frac{250}{\omega\varepsilon}\cos(\omega t-25z)$$

4.11 在横截面为 $a\times b$ 的矩形金属波导中，电磁场的复矢量为

$$\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{e}_yj\omega\mu\frac{a}{\pi}H_0\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\mathrm{e}^{-j\beta z}\ \mathrm{V/m}$$

$$\boldsymbol{H}=\left[\boldsymbol{e}_xj\beta\frac{a}{\pi}H_0\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)+\boldsymbol{e}_zH_0\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right]\mathrm{e}^{-j\beta z}\ \mathrm{A/m}$$

式中 H_0、ω、μ 和 β 都是实常数．求：(1)瞬时坡印廷矢量；(2)平均坡印廷矢量．

【解题过程】

(1)由题意可知，电磁场的瞬时值为

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\omega\mu\frac{a}{\pi}H_0\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_y\\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\beta\frac{a}{\pi}H_0\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos(\omega t-\beta z+\frac{\pi}{2})\boldsymbol{e}_x+H_0\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_z\end{cases}$$

$\therefore S=E\times H$

$$=\omega\mu\beta\left(\frac{a}{\pi}H_0\right)^2\sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin^2(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_z+\omega\mu\frac{a}{\pi}H_0^2\frac{\sin\frac{2\pi}{a}x}{2}\cdot$$
$$\frac{\sin(2\omega t-2\beta z)}{2}\boldsymbol{e}_x\ \mathrm{W/m^2}$$

$$(2)\boldsymbol{S}_{av}=\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\cdot\frac{1}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\omega\mu\frac{a}{\pi}H_0\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\mathrm{e}^{j(-\beta z)}\boldsymbol{e}_y\times\left[-j\beta\frac{a}{\pi}H_0\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\boldsymbol{e}_x+H_0\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\boldsymbol{e}_z\right]\mathrm{e}^{j\beta z}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\omega\mu\beta\left(\frac{a}{\pi}H_0\right)^2\sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)\boldsymbol{e}_z$$

4.15 在半径为 a、电导率为 σ 的无限长直圆柱导线中，沿轴向通以均匀分布的恒定电流 I，且导线表面上有均匀分布的电荷面密度 ρ_S．

(1)求导线表面外侧的坡印廷矢量 $\boldsymbol{S}$；

(2)证明：由导线表面进入其内部的功率等于导线内的焦耳热损耗功率．

【解题过程】

(1)由题意可得：

导体表面外侧的磁场强度$\boldsymbol{H}=\frac{I}{2\pi a}\boldsymbol{e}_\varphi$

设导线轴线与 z 轴叠合，长直圆柱导线内电流密度矢量为

$$\boldsymbol{J}=\frac{I}{\pi a^2}\boldsymbol{e}_z$$

由欧姆定律可知，导线内电场只有 z 分量，即

$$\boldsymbol{E}_1=\frac{\boldsymbol{J}}{\sigma}=\frac{I}{\pi a^2\sigma}\boldsymbol{e}_z$$

由边界条件 $E_{1t}=E_{2t}$ 可得，导线柱表面外侧的电场 z 分量为

$$E_z=\frac{I}{\pi a^2\sigma}\boldsymbol{e}_z$$

又因导线表面有均匀分布的电荷面密度 ρ_s，所以其表面外侧电场的径向分量

$\boldsymbol{E}_r=\frac{\rho_S}{\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_r$.

$\therefore$
$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_z+\boldsymbol{E}_r=\frac{I}{\pi a^2\sigma}\boldsymbol{e}_z+\frac{\rho_S}{\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_r$$

∴导线表面外侧的坡印廷矢量 $\boldsymbol{S}$ 为

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\left(\frac{I}{\pi a^2\sigma}\boldsymbol{e}_z+\frac{\rho_S}{\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_r\right)\times\frac{I}{2\pi a}\boldsymbol{e}_\varphi$$
$$=-\frac{I^2}{2\pi^2a^3\sigma}\boldsymbol{e}_r+\frac{\rho_SI}{2\pi\varepsilon_0a}\boldsymbol{e}_z$$

(2)单位时间进入长度为 L 的一段导线柱内的电磁能量为

$$-\oint_S\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\int_0^L\left[-\frac{I^2}{2\pi^2a^3\sigma}\boldsymbol{e}_r+\frac{\rho_SI}{2\pi\varepsilon_0a}\boldsymbol{e}_z\right]\cdot\boldsymbol{e}_r2\pi a\mathrm{d}z=\frac{I^2}{2\pi^2a^3\sigma}\cdot2\pi a\int_0^L\mathrm{d}z=\frac{I^2L}{\pi a^2\sigma}$$

该段导线内电流密度为 $J=\frac{I}{\pi a^2}\boldsymbol{e}_z$，在单位时间内引起的焦耳热为

$$\int_V\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}V=\int_V\sigma\boldsymbol{E}^2\mathrm{d}V=\sigma\cdot\left(\frac{I}{\pi a^2\sigma}\right)\pi\sigma^2L=\frac{I^2L}{\pi a^\sigma}$$

均匀平面波在无界空间中的传播

以下一般认为E为x方向，H为y方向

本章为 无界单一介质空间 ，因为利用的是简化波动方程，本章处于的区域为无源区，$\rho = 0, \vec{J} = 0$

均匀平面波($\frac{\partial}{\partial t} = jw$)

> 平面波：任意时刻**等相位面**（波阵面） 为平面的波
>
> 均匀： 电磁场的振幅在(每一)等相位面上不变
>
> 定义：电磁波的等相位面为平面， 且等相位面上电磁场的振幅也相等

特性：

> 均匀平面波的等相位面与**等振幅面重合或平行**
>
> 在等相位面上电场复矢量为常矢数
>
> 任一时刻等相位面上电磁场的**大小和方向不变**

理想介质中的均匀平面波

技巧：建立一个最好的坐标系！

> 将坐标面取为等相位面，如$x-y$平面，则$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(z)$ ($\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial y} = 0$)

上式变为:$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2\vec{E}}{\mathrm{d}z^2} + k^2\vec{E} = 0 \\ \frac{\mathrm{d}^2\vec{H}}{\mathrm{d}z^2} + k^2\vec{H} = 0 \end{cases}$ 特性(无源区$\rho = 0$): $\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Longrightarrow E_z = 0 \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \Longrightarrow H_z = 0 \end{cases}$

> 这表明沿z方向传播的均匀平面波的电场强度E和磁场强度H都没有沿传播方向的分量，即电场强度E和磁场强度H都与波的传播方向垂直，这种波又叫**横电磁波（TEM波）** ($\vec{e}_z \cdot \vec{E} = 0, \vec{e}_z \cdot \vec{H} = 0$)

沿z方向传播的**均匀平面波其电磁场复矢量解**为：$\vec{E}(z) = \vec{E}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}e^{j\phi} \quad \vec{H}(z) = \vec{H}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}e^{j\phi}$

瞬时解为：$E_x(z,t) = E_m \cos(\omega t - kz + \phi)$ ϕ受初始条件决定（由于理想介质中E和H相位相同）

> 根据瞬时解得到E_m, w, k参数，$v_p = w/k$

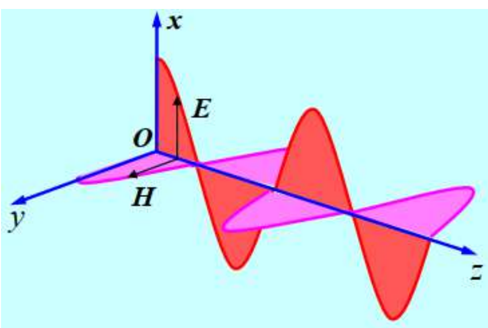
沿任意方向传播的均匀平面波解

设波传播方向为：$\vec{e}_k$ 为方便表示定义**波矢量** $\vec{k} = k\vec{e}_n \to \vec{E} = \vec{E}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz'} = \vec{E}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}\cdot\vec{r}}$

> 例：$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_m e^{j(6y+8z)} = \vec{E}_m e^{-j(-6y-8z)}$
>
> $\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$，其中$k_x = 0, k_y = -6, k_z = -8$，$\vec{k} = -6\vec{e}_y - 8\vec{e}_z$
>
> $\vec{e}_n = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} = -\frac{3}{5}\vec{e}_y - \frac{4}{5}\vec{e}_z \quad k = 10$

$\vec{k}$ 方向传播均匀平面波电磁场复矢量的解为： $\vec{E} = \vec{E}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}\cdot\vec{r}}$ 由于$\nabla e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = -j\vec{k}e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \to \nabla = -j\vec{k}$

理想介质中均匀平面波电场与磁场的关系：



理想介质中均匀平面波

- $\vec{E}$、$\vec{H}$、$\vec{k}$ 三者相互垂直
- 电场与磁场**同相**且振幅差 η 倍(E_{xm}/H_{ym}) 单位为Ω

- $\vec{E}(z,t)=\vec{e}_x E_m\cos(wt-kz),\vec{H}(z,t)=\frac{1}{\eta}\vec{e}_z\times\vec{E}(z,t)\quad(\text{or }\vec{E}(z,t)=\eta(\vec{H}\times\vec{e}_z))$

导电媒质中的均匀平面波

基础公式：$\begin{cases}\nabla^2\vec{E}+k_c^2\vec{E}=0\\ \nabla^2\vec{H}+k_c^2\vec{H}=0\end{cases}\quad(k_c=\omega\sqrt{\mu\varepsilon_c})\ \varepsilon_c=\varepsilon-j\frac{\sigma}{w}$

> 真空中介电常数为$\varepsilon_0=\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}\mathrm{F/m}$ 磁导率为$\mu_0=4\pi\times10^{-7}\mathrm{H/m}$

	理想介质	导电媒质
本质	$\sigma=0,k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}=\beta\ k=\frac{w}{c}\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$	$\sigma\neq0,k_c=\omega\sqrt{\mu\varepsilon_c}=\beta-j\alpha$，$\gamma=\mathrm{j}k_c=\alpha+\mathrm{j}\beta$
波阻抗	$\eta=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$叫媒质的本征阻抗，也叫波阻抗 真空中$\eta_0=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=120\pi\approx377\Omega$ 实际计算可利用标准值计算$\eta=\eta_0\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}$	$\eta_c=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}}=\frac{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}{\sqrt{1-j\frac{\sigma}{w\varepsilon}}}$
复数	$\vec{E}(z)=\vec{E}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}e^{j\phi}\quad\vec{H}(z)=\vec{H}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}e^{j\phi}$	$\vec{E}(z)=\vec{E}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}e^{j\phi_x}$ $e^{-\alpha z}$是衰减因子 $e^{-j\beta z}$为相位因子 **若为无损媒质$\alpha=0,k=\beta$，则转为理想介质求解**
瞬时	$\vec{E}_x(z,t)=\vec{e}_xE_m\cos(\omega t-kz+\phi_x)$ $H_y(z,t)=\vec{e}_y\frac{1}{\eta}E_m\cos(\omega t-kz+\phi_y)$ $\phi_x=\phi_y$	$\vec{E}(z,t)=\vec{e}_xE_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\alpha z}\cos(\omega t-\beta z+\phi_x)$ $\vec{H}(z,t)=\vec{e}_y\frac{1}{\lvert\eta_c\rvert}E_x\mathrm{e}^{-\alpha z}\cos(\omega t-\beta z+\phi_x-\phi)$ **磁场的相位比电场相位滞后**$\phi=\frac{1}{2}\arctan(\frac{\sigma}{w\varepsilon})$

传播参数

求出α,β可进一步算需要的传播距离

理想介质中	导电媒质中
相位常数(波数)k：表示波传播单位距离的相位变化 $k=\frac{2\pi}{\lambda}=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ 波长$\lambda=v_p/f=\lambda_0/\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$（多利用相对关系） 传播常数$\gamma=jk$	波长$\lambda=\frac{2\pi}{\beta}$ 导致色散特性（色散现象：相速随频率变化）
相速$v_p=\frac{w}{k}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}$(与电磁波的频率无关) 真空中$v=c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=3\times10^8\mathrm{m/s}$ 关系式$\vec{v}_p=\vec{S}/w$ 通用	$\alpha=\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}-1\right]}$ (Np/m) $e^{-\alpha z}$是衰减因子(影响振幅) $e^{-j\beta z}$为相位因子 $\beta=\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}+1\right]}$ (与k同单位)
能量密度：$w=w_e+w_m$ **理想介质中均匀平面波的电场储能与磁场储能相等** $w_e=w_m$	相速$v_p=\frac{\omega}{\beta}$

两类导电媒质

电导率σ，单位：S/m　损耗角正切值$\sigma/w\varepsilon$（第五章）　传播常数$\gamma=jk_c$

弱介电媒质$\sigma/w\varepsilon \ll 1$	良导体$\sigma/w\varepsilon \gg 1$
$\gamma \approx j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}+\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$	$\gamma \approx \sqrt{\mathrm{j}\omega\mu\sigma}=\sqrt{\omega\mu\sigma}\mathrm{e}^{\mathrm{j}45^{\circ}}=\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}(1+\mathrm{j})$
$\alpha \approx \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad \beta \approx \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$	$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\pi f\mu\sigma} \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \quad \propto \sqrt{f}$
$\eta_c=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}} \approx \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(1+j\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon}\right)$	$\eta_c=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}} \approx \sqrt{\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\sigma}} \approx \sqrt{\frac{2\pi f\mu}{\sigma}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}45^{\circ}}=(1+\mathrm{j})\sqrt{\frac{\pi f\mu}{\sigma}}$
相速$v_p=\frac{\omega}{\beta}$ 波长$\lambda=\frac{2\pi}{\beta}$	相速: $v=\frac{\omega}{\beta} \approx \frac{\omega}{\sqrt{\pi f\mu\sigma}}=\sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} \propto \sqrt{f}$ 波长: $\lambda=\frac{2\pi}{\beta} \approx \frac{2\pi}{\sqrt{\pi f\mu\sigma}}=2\sqrt{\frac{\pi}{f\mu\sigma}} \propto 1/\sqrt{f}$
相位常数近似于理想介质中的相位常数	良导体中电磁波的磁场强度的相位滞后于电磁强度45°

良导体

趋肤效应： 电磁波的频率越高，衰减系数越大，高频电磁波只能存在于良导体的表面层内，称为趋肤效应

趋肤深度 (δ)： $\delta=\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\sqrt{\pi f\mu\sigma}}$ （因为$\alpha \approx \beta \quad \delta$也可写为$\delta \approx \frac{1}{\beta}=\frac{\lambda}{2\pi}$）

表面阻抗（方阻）： $Z_s=R_s+jX_s=(1+j)\frac{1}{\sigma\delta}=(1+\mathrm{j})\sqrt{\frac{\pi f\mu}{\sigma}}$

> 导电媒质的表面阻抗总是等于本征阻抗

例题

7.3海水的特征参数$\mu=\mu_0,\varepsilon=81\varepsilon_0,\gamma=4S/m$，已知频率为 $f=100Hz$ 的均匀平面波在海水中沿z轴方向传播，设$\bar{E}=\bar{e}_xE_x$ ，其振幅为 $1V/m$

(1) 求衰减系数、相位系数、本征阻抗、相速和波长；

(2) 写出电场和磁场的瞬时表达式 $\bar{E}(z,t)$和$\bar{H}(z,t)$

$f=100Hz$ 时，

$$\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}=\frac{4}{2\pi\times100\times81\varepsilon_0}=\frac{4\times36\pi\times10^9}{200\pi\times81}=8.89\times10^6>>1$$

可见，海水在频率为100Hz时可视为良导体。

$$\alpha \approx \sqrt{\pi f\mu\gamma}=\sqrt{\pi\times100\times4\pi\times10^{-7}\times4}=3.97\times10^{-2}\,Np/m$$

$$\beta \approx \sqrt{\pi f\mu\gamma}=\sqrt{\pi\times100\times4\pi\times10^{-7}\times4}=3.97\times10^{-2}\,rad/m$$

$$\eta_c=\sqrt{\frac{\pi f\mu}{\gamma}}(1+j)=\sqrt{\frac{\pi\times100\times4\pi\times10^{-7}}{4}}(1+j)$$

$$=9.93\times10^{-3}(1+j)=14.04\times10^{-3}e^{j45^0}\Omega$$

$$v=\frac{\omega}{\beta}=\frac{2\pi\times100}{3.97\times10^{-2}}=1.58\times10^4\,m/s \qquad \lambda=\frac{2\pi}{\beta}=\frac{2\pi\times100}{3.97\times10^{-2}}=1.58\times10^2\,m$$

(2) 设电场的初相位为0，故

$$\bar{E}(z,t)=\bar{e}_xE_me^{-\alpha z}\cos(wt-\beta z)$$

$$=\bar{e}_x1\times e^{-3.97\times10^{-2}z}\cos(2\pi\times100t-3.97\times10^{-2}z)V/m$$

$$\bar{H}(z,t)=\bar{e}_y\frac{E_m}{|\eta_c|}e^{-\alpha z}\cos(wt-\beta z-\psi)$$

$$=\bar{e}_y\frac{10^3}{14.04}e^{-3.97\times10^{-2}z}\cos(2\pi\times100t-3.97\times10^{-2}z-45^0)A/m$$

电磁波的极化

电磁波的极化状态取决于E_x和E_y的振幅E_{xm}、E_{ym}和相位差 $\Delta\phi=\phi_y-\phi_x$（先把式子中的x项提取至系数为1再看相位差）

$\Delta\phi=0$ or $\pm\pi$为线极化（-号代表π的相位差）；z向波正左极化，负右极化

对+z方向波：

线极化	圆极化$E_{xm}=E_{ym}$	椭圆极化：一般情况
$\Delta\phi=0$ 在1、3象限； $\Delta\phi=\pm\pi$ 在2、4象限	$\Delta\varphi=\pi/2$ 左旋圆极化 $\Delta\varphi=-\pi/2$ 右旋圆极化	$0<\Delta\varphi<\pi$ 左旋；$-\pi<\Delta\varphi<0$ 右旋

例题（掌握判断就行）

例5.2.1 说明下列均匀平面波的极化方式。

换成cos的形式
sin(x-π/2)=cos(x)
j相当于π/2的相位

（1） $\vec{E}=\vec{e}_x E_{\mathrm{m}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}-\vec{e}_y \mathrm{j} E_{\mathrm{m}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$

（2） $\vec{E}=\vec{e}_x E_{\mathrm{m}} \sin(\omega t-kz+\frac{\pi}{4})+\vec{e}_y E_{\mathrm{m}} \cos(\omega t-kz-\frac{\pi}{4})$

（3） $\vec{E}=\vec{e}_x E_{\mathrm{m}} \sin(\omega t+kz)+\vec{e}_y 2E_{\mathrm{m}} \cos(\omega t+kz)$

解：

（1） $E_{x\mathrm{m}}=E_{y\mathrm{m}}$，$\phi_x=0$、$\phi_y=-\frac{\pi}{2}$，$\Delta\phi=-\frac{\pi}{2}$ ➡ 右旋圆极化波

（2） $\phi_x=-\frac{\pi}{4}$、$\phi_y=-\frac{\pi}{4}$，$\Delta\phi=0$ ➡ 线极化波

（3） $E_{x\mathrm{m}}\neq E_{y\mathrm{m}}$，$\phi_x=-\frac{\pi}{2}$、$\phi_y=0$，$\Delta\phi=\frac{\pi}{2}$ ➡ 左旋椭圆极化波

习题

5.2 理想介质(参数为 $\mu=\mu_0$、$\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0$、$\sigma=0$)中有一均匀平面波沿 x 方向传播,已知其电场瞬时值表达式为

$$\boldsymbol{E}(x,t)=\boldsymbol{e}_y 377\cos(10^9 t-5x)\ \mathrm{V/m}$$

试求:(1)该理想介质的相对介电常数;(2)与 $\boldsymbol{E}(x,t)$ 相伴的磁场 $\boldsymbol{H}(x,t)$;(3)该平面波的平均功率密度.

(1)由电场瞬时表达式,可知 $\omega=10^9$,$k=5$,则可得该均匀平面波的相速为

$$v_p=\frac{\omega}{k}=\frac{10^9}{5}=2\times10^8\ \mathrm{m/s}$$

而又知 $v_p=\dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$,那么根据题目条件可得

$$v_p=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0}}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}3\times10^8=2\times10^8$$

则 $$\varepsilon_r=\frac{9}{4}=2.25$$

(2)与 $\boldsymbol{E}(x,t)$ 相伴的磁场为

$$\boldsymbol{H}(x,t)=\frac{1}{\eta}\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{E}(x,t)=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_y 377\cos(10^9 t-5x)$$

$$=\sqrt{\frac{\varepsilon_r}{\eta_0}}\boldsymbol{e}_z 377\cos(10^9 t-5x)=\boldsymbol{e}_z 1.5\cos(10^9 t-5x)$$

(3)$\boldsymbol{E}$ 的复数形式:

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_y 377\mathrm{e}^{-\mathrm{j}5x}\ \mathrm{V/m}$$

$\boldsymbol{H}$ 的复数形式:

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_z 1.5\mathrm{e}^{-\mathrm{j}5x}\ \mathrm{A/m}$$

则平均坡印廷矢量为

$$\boldsymbol{S}_{av}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*]=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{e}_y 377\mathrm{e}^{-\mathrm{j}5x}\times\boldsymbol{e}_z 1.5\mathrm{e}^{\mathrm{j}5x}]=\boldsymbol{e}_x 282.75\ \mathrm{W/m^2}$$

5.6 在自由空间传播的均匀平面波的电场强度复矢量为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_x 10^{-4}\mathrm{e}^{\mathrm{j}20\pi x}+\boldsymbol{e}_y 10^{-4}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(20\pi x-\frac{\pi}{2})}\quad(\mathrm{V/m})$$

试求:(1)平面波的传播方向和频率;

(2)波的极化方式;

(3)磁场强度 $\boldsymbol{H}$;

(4)流过与传播方向垂直的单位面积的平均功率.

(1)由均匀平面波的电场矢量表达式,可知平面波的传播方向是沿 $\boldsymbol{e}_x$ z 方向,平面波的波数 $k=20\pi\quad(\mathrm{rad/m})$

则可得 $\quad k=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=20\pi\quad(\mathrm{rad/m})$,

可得 $$\omega=\frac{k}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=\frac{20\pi}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=6\pi\times10^9\quad(\mathrm{rad/s})$$

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=3\times10^9\quad(\mathrm{Hz})$$

(2)原电场形式可表示为

$$\boldsymbol{E}=10^{-4}\mathrm{e}^{\mathrm{j}20\pi x}(\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}})\mathrm{V/m}=10^{-4}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}20\pi x}(\boldsymbol{e}_x+\mathrm{j}\boldsymbol{e}_y)$$

由此表达式可知,该波是左旋圆极化波.

(3)由 $\boxed{H=\dfrac{1}{\eta_0}\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{E}}$ $\quad$ (4)$\boldsymbol{S}_{av}=\dfrac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)$

5.25 在相对介电常数 $\varepsilon_r=2.5$、损耗角正切值为 10^{-2} 的非磁性媒质中，频率为 3 GHz、$\boldsymbol{e}_y$ 方向极化的均匀平面波沿 $\boldsymbol{e}_x$ 方向传播。

(1)求波的振幅衰减一半时，传播的距离。

(2)求媒质的本征阻抗、波的波长和相速。

(3)设在 $x=0$ 处的 $\boldsymbol{E}(0,t)=\boldsymbol{e}_y 50\sin\left(6\pi\times10^9 t+\dfrac{\pi}{3}\right)$，写出 $\boldsymbol{H}(x,t)$ 的表达式。

(1)由 $\dfrac{\sigma}{\varepsilon\omega}=10^{-2}$ 可得

$$\frac{\sigma}{2\pi f\varepsilon_r\varepsilon_0}=\frac{\sigma}{2\pi\times3\times10^9\times2.5\times\dfrac{10^{-9}}{36\pi}}=10^{-2}$$

解 $\qquad \sigma=4.17\times10^{-3}\,(\mathrm{S/m})$

而且 $\qquad \dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}=10^{-2}\ll1$

所以该媒质在 $f=3$ GHz 可视为弱导电媒质，故衰减常数为

$$\boxed{\alpha\approx\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{2}}}=\frac{4.17\times10^{-3}}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{2.5\varepsilon_0}}=0.49\ (\mathrm{Np/m})$$

由 $\mathrm{e}^{-\alpha x}=\dfrac{1}{2}$，可知当波的振幅衰减一半时，传播的距离为

$$x=\frac{1}{\alpha}\ln2=\frac{1}{0.49}\ln2\ \mathrm{m}=1.39(\mathrm{m})$$

(2)对于弱导电媒质，本征阻抗为

$$\boxed{\eta_c\approx\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(1+\mathrm{j}\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon}\right)}=\sqrt{\frac{\mu_0}{2.5\varepsilon_0}}\left(1+\mathrm{j}\,\frac{10^{-2}}{2}\right)$$
$$=235.5(1+\mathrm{j}0.005)$$

相位常数

$$\beta=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}=2\pi f\sqrt{2.5\mu_0\varepsilon_0}=32\pi(\mathrm{rad/m})$$

波长

$$\lambda=\frac{2\pi}{\beta}=\frac{2\pi}{32\pi}=\frac{1}{16}(\mathrm{m})$$

相速

$$v_p=\frac{\omega}{\beta}=\frac{2\pi\times3\times10^9}{32\pi}=1.88\times10^8(\mathrm{m/s})$$

(3)根据题目中给出的在 $x=0$ 处，$\boldsymbol{E}(0,t)$ 表达式可得到

$$\boldsymbol{E}(x,t)=\boldsymbol{e}_y 50\mathrm{e}^{-0.497x}\sin\left(6\pi\times10^9 t-31.6\pi x+\frac{\pi}{3}\right)(\mathrm{V/m})$$

则

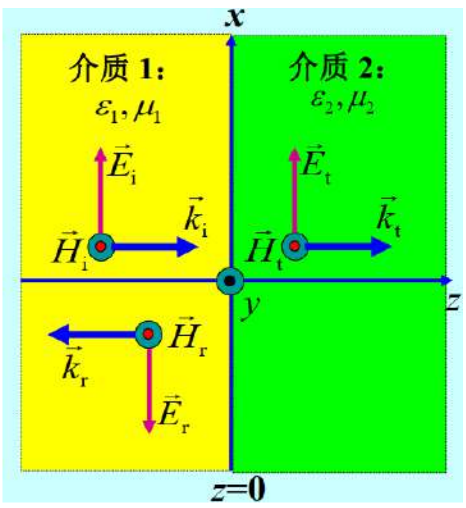
$$\boldsymbol{H}(x)=\frac{1}{|\eta_c|}\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{E}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}$$
$$=\frac{1}{235.5}\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_y 50\mathrm{e}^{-0.497x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}31.6\pi x}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}\boxed{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.0016\pi}$$
$$=\boldsymbol{e}_z 0.21\mathrm{e}^{-0.497}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}31.6\pi x}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.0016\pi}(\mathrm{A/m})$$

即得

$$\boldsymbol{H}(x,t)=\mathrm{Re}[\boldsymbol{H}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$
$$=\boldsymbol{e}_z 0.21\mathrm{e}^{-0.497x}\sin\left(6\pi\times10^9 t-31.6\pi x+\frac{\pi}{3}-0.0016\pi\right)$$

均匀平面波的反射与透射

对理想介质分界面的垂直入射



两种媒质均为理想介质，即$\sigma_1=\sigma_2=0$

！！！分界面上的反射系数 $\Gamma=\dfrac{\eta_{2c}-\eta_{1c}}{\eta_{2c}+\eta_{1c}}$ 分界面上的透射系数 $\tau=\dfrac{2\eta_{2c}}{\eta_{2c}+\eta_{1c}}$ $\begin{cases}E_{\mathrm{rm}}=\Gamma E_{\mathrm{im}}\\E_{\mathrm{tm}}=\tau E_{\mathrm{im}}\end{cases}$

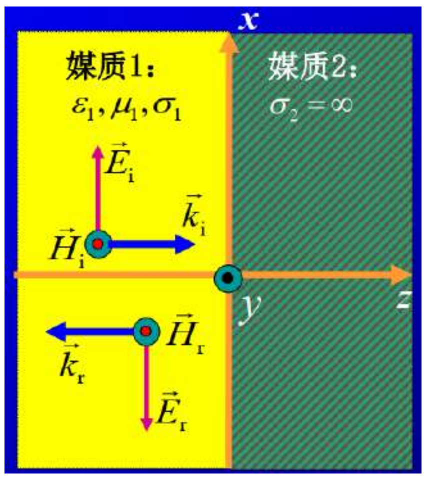
反射系数和透射系数的关系：$\Gamma+1=\tau$

媒质1中的入射波:$\begin{cases}\vec{E}_{\mathrm{i}}(z)=\vec{e}_x E_{\mathrm{im}}\mathrm{e}^{-\gamma_1 z}\\\vec{H}_{\mathrm{i}}(z)=\vec{e}_y\dfrac{E_{\mathrm{im}}}{\eta_{1c}}\mathrm{e}^{-\gamma_1 z}\end{cases}$ 媒质1中的反射波:$\begin{cases}\vec{E}_{\mathrm{r}}(z)=\vec{e}_x E_{\mathrm{rm}}\mathrm{e}^{\gamma_1 z}\\\vec{H}_{\mathrm{r}}(z)=-\vec{e}_y\dfrac{E_{\mathrm{rm}}}{\eta_{1c}}\mathrm{e}^{\gamma_1 z}\end{cases}$ 注意方向正负号（算出E后再用叉乘关系求H）

媒质2中的透射波:$\begin{cases}\vec{E}_{\mathrm{t}}(z)=\vec{e}_x E_{\mathrm{tm}}\mathrm{e}^{-\gamma_2 z}\\\vec{H}_{\mathrm{t}}(z)=\vec{e}_y\dfrac{E_{\mathrm{tm}}}{\eta_{2c}}\mathrm{e}^{-\gamma_2 z}\end{cases}$

反射的情况（理想导体）

媒质1为理想介质，$\sigma_1=0$ 媒质2为**理想导体**， $\sigma_2=\infty$



在分界面上，**反射波电场与入射波电场的相位差为**π，$E_{rm}=-E_{im}$ 改变传播方向

媒质1中的入射波: $\vec{E}_\mathrm{i}(z)=\vec{e}_x E_\mathrm{im}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z}$, $\quad \vec{H}_\mathrm{i}(z)=\vec{e}_y\dfrac{E_\mathrm{im}}{\eta_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z}$

媒质1中的反射波: $\vec{E}_\mathrm{r}(z)=-\vec{e}_x E_\mathrm{im}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z}$, $\quad \vec{H}_\mathrm{r}(z)=\vec{e}_y\dfrac{E_\mathrm{im}}{\eta_1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z}$ （算出E后再用叉乘关系求H）

- 合成波的平均能流密度矢量$\vec{S}_{av}=0$
- 理想导体表面上的**感应**电流$\vec{J}_S=\vec{e}_n\times\vec{H}_1(z)|_{z=0}$ （虽然一开始J_S为0，感应之后又产生，$\vec{e}_n$一般为$-\vec{e}_z$）

当 $\eta_2>\eta_1$ 时, $\Gamma>0$, 反射波电场与入射波电场同相； 当 $\eta_2<\eta_1$ 时， $\Gamma<0$ ，反射波电场与入射波电场反相。

光密媒质（$\Gamma>0$） 在$z=-(n/2+1/4)\lambda_1$取最大值，在$z=-n\lambda_1/2$取最小值；

光疏媒质（$\Gamma>0$） 在$z=-(n/2+1/4)\lambda_1$取最小值，在$z=-n\lambda_1/2$取最大值；

驻波系数(驻波比) $S=\dfrac{|\vec{E}|_\mathrm{max}}{|\vec{E}|_\mathrm{min}}=\dfrac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}\Longrightarrow|\Gamma|=\dfrac{S-1}{S+1}$

> 行波：电磁波在空间沿一定方向传播（移动）
> 驻波： 电磁波在空间中不传播，存在驻定的波腹点和波节点
> 行驻波： 电磁波在空间中一部分传播，一部分不传播

- 当 $\Gamma=0$ 时, $S=1$, 为行波
- 当 $\Gamma=\pm1$ 时, $S=\infty$, 是纯驻波
- 当 $0<|\Gamma|<1$ 时, $1<S<\infty$, 为混合波。 S 越大, 驻波分量越大，行波分量越小;

习题

理想介质表面	**6.1** 有一频率为 100 MHz、沿 y 方向极化的均匀平面波从空气($x<0$ 区域)中垂直入射到位于 $x=0$ 的理想导体板上. 设入射电场 $\boldsymbol{E}_i$ 的振幅为 10 V/m,试求:(1)入射电场 $\boldsymbol{E}_i$ 和磁场 $\boldsymbol{H}_i$ 的复矢量;(2)反射波电场 $\boldsymbol{E}_r$ 和磁场 $\boldsymbol{H}_r$ 的复矢量;(3)合成波电场 $\boldsymbol{E}_1$ 和磁场 $\boldsymbol{H}_1$ 的复矢量;(4)距离导体平面最近的合成波电场 $\boldsymbol{E}_1$ 为 0 的位置;(5)距离导体平面最近的合成波磁场 $\boldsymbol{H}_1$ 为 0 的位置. E为y方向, H为z方向, 下面答案有误 (1) $\omega=2\pi f=2\pi\times10^8 \quad (\mathrm{rad/s})$ $\beta=\frac{\omega}{c}=\frac{2\pi\times10^8}{3\times10^8}=\frac{2}{3}\pi \quad (\mathrm{rad/m})$ $\eta_1=\eta_0=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=120\pi \quad (\Omega)$ 入射波的电场 $\boldsymbol{E}_i$ 和磁场 $\boldsymbol{H}_i$ $\boldsymbol{E}_i(x)=\boldsymbol{e}_y 10_e^{-j\frac{2}{3}\pi x} \quad (\mathrm{V/m})$ $\boldsymbol{H}_i(x)=\frac{1}{\eta_1}\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{E}_i(x)=\boldsymbol{e}_z\frac{1}{12\pi}e^{-j\frac{2}{3}\pi x} \quad (\mathrm{A/m})$ (2)反射波电场 $\boldsymbol{E}_r$ 和磁场 $\boldsymbol{H}_r$ 的复矢量为 给方向加负号, e的上标也要改方向 $\boldsymbol{E}_r(x)=-\boldsymbol{e}_y 10e^{j\frac{2}{3}\pi x}(\mathrm{V/m})$ $\boldsymbol{H}_i(x)=\frac{1}{\eta}(-\boldsymbol{e}_x)\times\boldsymbol{E}_r(x)=\boldsymbol{e}_z\frac{1}{12\pi}e^{j\frac{2}{3}\pi x} \quad (\mathrm{A/m})$ (3)合成波电场 $\boldsymbol{E}_1$ 和磁场 $\boldsymbol{H}_1$ $\boldsymbol{E}_1(x)=\boldsymbol{E}_i(x)+\boldsymbol{E}_r(x)=-\boldsymbol{e}_y j20\sin\left(\frac{2}{3}\pi x\right) \quad (\mathrm{V/m})$ $\boldsymbol{H}_1(x)=\boldsymbol{H}_i(x)+\boldsymbol{H}_r(x)=\boldsymbol{e}_y\frac{1}{6\pi}\cos\left(\frac{2}{3}\pi x\right) \quad (\mathrm{A/m})$ (4)对于 $\boldsymbol{E}_1(x)$,当 $x=0$ 时,合成波电场 $\boldsymbol{E}_1=0$. 而在空气中,第一个零点发生在 $\frac{2}{3}\pi x=-\pi$,即 $x=-\frac{3}{2}$ m 处. (5)对于 $\boldsymbol{H}_1(x)$,当 $\frac{2}{3}\pi x=-\frac{\pi}{2}$ 时,即 $x=-\frac{3}{4}$ m 为磁场在空气中的第一个零点.
麦克斯韦复数形式	**6.2** 均匀平面波沿 $+z$ 方向传播,电场强度为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_x 100\sin(\omega t-\beta z)+\boldsymbol{e}_y 200\cos(\omega t-\beta z)\mathrm{V/m}$ (1)运用麦克斯韦方程求相伴的磁场 $\boldsymbol{H}$;(2)若在波传播方向上 $z=0$ 处,放置一无限大的理想导体板,求出 $z<0$ 区域内的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$;(3)求理想导体上的电流密度. (1)将已知的电场写成复数形式 $\boldsymbol{E}(z)=\boldsymbol{e}_x 100e^{-j(\beta z+90^\circ)}+\boldsymbol{e}_y 200e^{-j\beta z}$ 由 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-j\omega\mu_0\boldsymbol{H}$,得 $\boldsymbol{H}(z)=-\frac{1}{j\omega\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{E}(z)=-\frac{1}{j\omega\mu_0}\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ E_x & E_y & 0\end{bmatrix}$ $=-\frac{1}{j\omega\mu_0}\left[-\boldsymbol{e}_x\frac{\partial E_y}{\partial_z}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial E_x}{\partial_z}\right]$ $=-\frac{1}{j\omega\mu_0}\left[-\boldsymbol{e}_x 200(-j\beta)e^{-j\beta z}+\boldsymbol{e}_y 100(-j\beta)e^{-j(\beta z+90^\circ)}\right]$ (3)理想导体平面上的电流密度为 $\boldsymbol{J}_S=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}\Big\|_{z=0}=-\boldsymbol{e}_z\times(-\boldsymbol{e}_x 400\cos\beta z+\boldsymbol{e}_y 200e^{-j90^\circ}\cos\beta z)\frac{1}{\eta_0}\Big\|_{z=0}$