微积分

积分 integral

微分 differential

收敛 convergent

发散 divergent

函数 极限与连续

映射与函数

概念	定义
集合	自然数集N；正整数集N_+；有理数集Q；实数集R
包含	若 $x \in A$必有 $x \in B$，则A是B的子集，记作 $A \subseteq B$ 任何一个集合是它自身的子集，即 $A \subseteq A$
相等	若$A \subseteq B$，且$B \subseteq A$，则集合 A 与 B 相等，记作 $A = B$
真子集	若$A \subseteq B$且 $A \neq B$，则A为B的真子集，记作 $A \subsetneqq B$ 或 $A \subset B$
空集	不含任何元素的集合，记作 $\varnothing$ 空集是任何集合的子集，对任一集合 A，有 $\varnothing \subseteq A$
邻域	以点 x_0 为中心，$\delta(\delta > 0)$ 为半径的开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 称为点 x_0 的 δ 邻域，记作 $U(x_0, \delta)$ 点 x_0 的去心邻域，记作 $\mathring{U}(x_0, \delta)$，即$\mathring{U}(x_0, \delta) = U(x_0, \delta) - \{x_0\}$
映射	按照某种确定的法则 f，对于集合 X 中的任何一个元素 x，在集合 Y 中都有唯一的元素 y 与之对应 记作$f: X \to Y$或$f: x \mapsto y = f(x), x \in X$ ps：X, Y非空

> 定义域D_f；值域Z_f
>
> 其中 y 称为 x 在映射 f 下的像， x 称为 y 在映射 f 下的原像 (或逆像)

符号函数：$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$ 取整函数：$f(x) = [x]$

定义	概念
显函数	因变量能明显地表示成自变量的解析式$y = f(x)$的函数
隐函数	因变量不能明显地表示成自变量的解析式，但y是x的函数
复合函数	$f \circ \varphi : x \mapsto y = f[\varphi(x)], x \in X$
反函数	函数 $y = f(x)$ 的映射 $f: X \to Y$ 是一一映射 逆映射 $f^{-1}: Y \to X$ 所确定的函数 $x = f^{-1}(y)$ 称为 $y = f(x)$ 的反函数 例：$y = f(x) = x^2 \quad x = f^{-1}(x) = \sqrt{y}$ 注意，这里必须限制$x \in [0, +\infty]$才存在反函数
奇偶函数	并非任何函数都有奇偶性 任何一个定义在关于原点对称区间上的函数 = $f(x)(odd) + g(x)(even)$ 偶函数的导数是奇函数，且$f'(0) = 0$
周期函数	周期函数并不一定都有最小正周期存在

基本初等函数：

幂函数；指数函数；对数函数；三角函数；反三角函数

双曲正弦函数	双曲余弦函数	双曲正切函数
$y=\operatorname{sh} x=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$	$y=\operatorname{ch} x=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$	$y=\operatorname{th} x=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$
$D_f=(-\infty,+\infty), Z_f=(-\infty,+\infty)$	$D_f=(-\infty,+\infty), Z_f=[1,+\infty)$	$D_f=(-\infty,+\infty), Z_f=(-1,1)$

- $\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1$
- $\operatorname{sh}(x \pm y)=\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \quad \operatorname{ch}(x \pm y)=\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$
- $\operatorname{sh} 2x=2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x \quad \operatorname{ch} 2x=\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^2 x$
- $\operatorname{sh}^2 x=\frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x-1) \quad \operatorname{ch}^2 x=\frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x+1)$

反双曲正弦函数	反双曲余弦函数	反双曲正切函数
$y=\operatorname{arsh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$	$y=\operatorname{arch} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$	$y=\operatorname{arth} x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$

极限

注意做题写法

概念	定义
数列极限	设有数列$\{x_n\}$及常数A，若对于任意给定的正数ε，总存在正整数N，使得对$n>N$的任何n，不等式$\|x_n-A\|<\varepsilon$都成立 则称当 $n \to \infty$时，$\{x_n\}$的极限为A，或称$\{x_n\}$收敛于A，记为 $\lim_{n\to\infty} x_n=A$ 如果数列x_n的极限不存在，则称数列x_n是发散的(Divergent)；P32 例题
	$\lim_{n\to\infty} x_n$存在是数列$\{x_n\}$有界的充分但不必要条件； 极限存在一定有界；有界但极限不一定存在，如$x_n=(-1)^n$
函数极限（无穷）	若 $\forall\varepsilon>0, \exists X>0$，使得当 $\|x\|>X$ 时，有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$，则称 A 为当 x 趋于无穷大时 $f(x)$ 的极限 记为$\lim_{x\to\infty} f(x)=A$ P34例题
函数极限（有限）	设 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义，A 为常数，$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，使得当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$ 记作$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$ P38例题

> 存在有左右极限，极限存在的充要条件是左右极限存在且相等；

无穷小量 无穷大量

无穷小量：$\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ 无穷大量：$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 无穷大有正负之分

在自变量的同一变化趋向下，无穷大量的倒数为无穷小量，非零的无穷小量的倒数为无穷大量；

结论：

- 有限个0相加等于0；无限个0相加不一定等于0；
- 有界变量 × 0 = 0；有界变量 × ∞ = ∞
- 无限个0相乘 = 0；

无穷大量不一定是无界变量，因为它们可能会在某些区域内有限；

无穷大量是指在某一点或无穷远处值趋于正无穷大或负无穷大

无界变量也不一定是无穷大量，因为它们可以具有有限的极限；

无界变量是指在某一区间或整个定义域内没有上界或下界

例子：例如$x\sin x$无界，但x趋于无穷它不是无穷大

极限性质

三个性质：唯一性；局部有界性；局部保号性

运算法则：

若 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad \lim_{x\to x_0} g(x)=B$，则：

- $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=AB=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} \quad (B\neq 0)$

极限存在准则 两个重要极限

夹逼准则：在x_0的某个去心邻域内，有$g(x)\le f(x)\le h(x)$且$\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0} h(x)=A$，则$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$

单调有界准则： P60例题

(1) 若 $\{x_n\}$ 为单调增加数列，且 $\exists M$，$\forall n$，有 $x_n\leqslant M$，则极限 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在；（有上界且递增）

(2) 若 $\{x_n\}$ 为单调减少数列，且 $\exists m$，$\forall n$，有 $x_n\geqslant m$，则极限 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在；（有下界且递减）

两个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1 \quad \lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$

无穷小：

设 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0, \lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0(\beta(x)\neq 0)$

概念	定义
高阶无穷小	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0 \quad \alpha(x)=o(\beta(x))\,(x\to x_0)$
同阶无穷小	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C\neq 0$
等价无穷小	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1\,\alpha(x)\sim\beta(x)\,(x\to x_0)$
k 阶无穷小	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k}=C\neq 0$ 取 $\beta(x)=x$且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{x^k}=C\neq 0$ (C为常数，$k>0$) 称 $\alpha(x)$ 是当 $x\to 0$ 时的 k 阶无穷小

等价代换：当 $x\to 0$ 时

$\sin x\sim x \quad \arcsin x\sim x$	$\tan x\sim x \quad \arctan x\sim x$
$\tan x-\sin x\sim\tan x-x\sim\dfrac{1}{2}x^3$	$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{x}{n}$
$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$	$a^x-1\sim x\ln a$

连续函数

定义1：设 $y=f(x)$ 在 $U(x_0)$ 有定义，若$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$则函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续；

定义2：设 $x_0\in U(x_0)\subset D_f,\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续；

定义3：若在 $x_0\in U(x_0)\subset D_f$ 处，自变量 x 有改变量 Δx，因变量有相应的改变量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，如果 $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，则称 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续

$f(x)$在x_0处连续的充分条件是函数在x_0处左连续且右连续

第一类间断点：

若函数$f(x)$在间断点$x=x_0$处的左、右极限$f(x_0-0)$和$f(x_0+0)$都存在，则称x_0为第一类间断点

第一类间断点又分跳跃型间断点和可去型间断点；

跳跃型(或称阶跃型)间断点	**可去型间断点**
$f(x_0+0)\quad f(x_0-0)$均存在，但不相等	$\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在 (即 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$) 但 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处没有定义或 $\lim_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$

凡是不属于第一类间断点的间断点称为**第二类间断点**

一元函数微分学

导数

定义：设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，当自变量 x 在点 x_0 取得改变量 Δx $(x_0+\Delta x\in U(x_0))$ 时，相应的因变量 y 取得改变量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，若比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 当 $\Delta x\to 0$ 时的极限存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称此极限值为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记为 $f'(x_0)$

即$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，也可记为$y'\big|_{x=x_0}$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_0}$，$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_0}$

函数$y=f(x)$在点x_0可导的充要条件是左导数$f'_-(x_0)$与右导数$f'_+(x_0)$均存在且相等

设函数$y=f(x)$在点x_0可导，则$y=f(x)$在点x_0必连续

可导一定连续，连续不一定可导

切线方程：$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

法线方程：$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$

导数运算法则

$$\left(\prod_{i=1}^{n} u_i\right)'(x)=\sum_{i=1}^{n} u_1(x)\cdots u_{i-1}(x)u_i'(x)u_{i+1}(x)\cdots u_n(x)$$

反函数求导法则：$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(y)}$

例 6　求对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0,a\neq 1)$ 的导数.

解　函数 $x=f(y)=a^y$ 的反函数为 $\boxed{y=f^{-1}(x)=\log_a x}$，$f(y)=a^y$ 在 $I_y=(-\infty,+\infty)$ 内单调、可导，且 $f'(y)=a^y\ln a\neq 0$，故在对应区间 $I_x=(0,+\infty)$ 内有

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(y)}=\frac{1}{a^y\ln a}=\frac{1}{x\ln a}.$$

y代换回x

于是，我们得到对数函数的导数公式：

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}.$$

特别地，当 $a=\mathrm{e}$ 时得出

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

复合函数链式法则：$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$

隐函数及参数式函数的导数：

隐函数求导：等式左右同时对x or y求导

对数求导法：对隐函数取对数以简化

参数式函数求导：两式同时对t求导，然后再相除；

导数基本公式

$(C)'=0$	$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$
$(a^x)'=a^x\ln a(a>0,a\neq 1)$	$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$
$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}(a>0,a\neq 1)$	$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$
$(\sin x)'=\cos x$	$(\cos x)'=-\sin x$
$(\tan x)'=\sec^2 x$	$(\cot x)'=-\csc^2 x$
$(\sec x)'=\sec x\tan x\,(\sec x=1/\cos x)$	$(\csc x)'=-\csc x\cot x\,(\csc x=1/\sin x)$
$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$
$(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x$	$(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x$

高阶导数

二阶及二阶以上的导数统称为高阶导数

任意阶导数$y^{(n)}$：数学归纳法(找规律)

乘积高阶导数：莱布尼兹公式

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}=u^{(n)}v+\mathrm{C}_n^1u^{(n-1)}v'+\mathrm{C}_n^2u^{(n-2)}v''+\cdots+\mathrm{C}_n^ku^{(n-k)}v^{(k)}+\cdots+uv^{(n)}$$

怎样求分段函数的二阶导数?

分界点的导数用定义式计算，其他点的导数用求导运算法则运算

微分

定义：设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，若在点 x_0 的改变量$\Delta y=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)$与自变量的改变量 Δx满足$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$，则称函数 $y=f(x)$ 在 点 x_0 处可微，$A\Delta x$ 称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的微分，记为 $\left.\mathrm{d}y\right|_{x=x_0}=A\Delta x$

> $A\Delta x(A\neq 0)$ 又称为 Δy 的线性主部

定理：函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微的充分必要条件是 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $A=f'\left(x_0\right)$，即$\left.\mathrm{d}y\right|_{x=x_0}=f'\left(x_0\right)\Delta x$

> 该定理说明在x_0处可微和可导是等价的，互为充要条件；

所以微分表达式也可以记为$dy=f'(x)dx$，导数可以说成两个微分的商，简称微商；

函数的线性近似：$f(x)\approx f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$

微分中值定理

概念	定义
极值	$\forall x \in U(x_0,\delta) \subseteq I$有 $f(x) \leqslant f(x_0)$ ($f(x) \geqslant f(x_0)$)，则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的一个极大值 (或极小值) 点 x_0 称为 $f(x)$ 的极大值点 (或极小值点)
费马定理	函数$f(x)$在点x_0处可导，若x_0是$f(x)$的一个极值点，则$f'(x_0)=0$
罗尔中值定理	若 $f(x) \in C[a,b] \cap D(a,b)$，且 $f(a)=f(b)$，则 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$ 三个条件：闭区间连续；开区间可导；边缘两点值相同； 定理是充分条件而非必要；该定理也称为$f'(x)=0$根的存在定理
拉格朗日中值定理	若 $f(x) \in C[a,b] \cap D(a,b)$，则 $\exists \xi \in (a,b)$, 使得$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ 或$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
柯西中值定理	若 $f(x),g(x) \in C[a,b] \cap D(a,b)$，且$\forall x \in (a,b)$，$g'(x) \neq 0$，则 $\exists \xi \in (a,b)$，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

将罗尔中值定理中的条件 $f(x) \in C[a,b] \cap D(a,b)$ 改为 $f(x) \in D(a,b)$，需增加$\lim\limits_{x \to a^+} f(x)=\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$定理仍成立；

若 $f(x) \in D[a,b]$，则有 $f(x) \in C[a,b] \cap D(a,b)$，且 $f'_+(a), f'_-(b)$ 均存在；

说明$f(x) \in D[a,b]$ 是比 $f(x) \in C[a,b] \cap D(a,b)$ 更强的条件，它们不等价，定理的条件增强了，它的适用范围就要缩小；

不定型的极限

$\dfrac{0}{0}$ 型与 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型

> 洛必达法则从柯西中值定理来的

定理 (洛必达法则) 设函数 $f(x),g(x)$ 满足以下条件：

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=0$，$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)=0$；

(2) 在点 x_0 的某去心邻域 $U(x_0,\delta)$ 内，$f'(x)$ 及 $g'(x)$ 均存在，且 $g'(x) \neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或为 ∞)则 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

不定型	方法
$0 \cdot \infty$	改为相除，变成$\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型
$\infty-\infty$	通分，换成$\dfrac{0}{0}$ 型
1^{∞}	取对数，换成$\dfrac{0}{0}$型，最后加上e
0^0	取对数，换成$\dfrac{\infty}{\infty}$型，最后加上e
∞^0	取对数，变成$0 \cdot \infty$

不是 $\dfrac{0}{0}$ 型与 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型不能使用洛必达，每一步都必须检查是否为 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型

1. 把整式放到e指数位置的方法以获得分式
2. 遇$x \to \infty$代换$x=1/t$变为$t \to 0$

   例：$\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x=e^{\lim_{x \to \infty} x \ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)}$

   $\lim\limits_{x \to \infty} x \ln\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)=\lim\limits_{t \to 0}\dfrac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan \frac{1}{t}\right)}{t}=\lim\limits_{t \to 0}\dfrac{\ln\left(\frac{2}{\pi}(\frac{\pi}{2}-\arctan t)\right)}{t}=\dfrac{2}{\pi}$

   所以原式=$e^{\frac{2}{\pi}}$

泰勒公式

$$f(x)=f\left(x_{0}\right)+f^{\prime}\left(x_{0}\right)\left(x-x_{0}\right)+\frac{f^{\prime\prime}\left(x_{0}\right)}{2!}\left(x-x_{0}\right)^{2}+\cdots+\frac{f^{(n)}\left(x_{0}\right)}{n!}\left(x-x_{0}\right)^{n}+R_{n}(x)$$

一般将x_0取为0

$$f(x)=f(0)+f^{\prime}(0)x+\frac{f^{\prime\prime}(0)}{2!}x^{2}+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n}+R_{n}(x)$$

常用的麦克劳林公式：

$\mathrm{e}^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\cdots+\frac{x^{n}}{n!}+R_{n}(x)$
$\sin x=x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} \quad m=1,2\cdots$
$\cos x=1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^{m}}{(2m)!}x^{2m} \quad m=0,1\cdots$
$\ln(1+x)=x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n}}{n}$
$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}$

极值条件

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的 $n(n\geqslant 2)$ 阶导数存在，且$f^{\prime}\left(x_{0}\right)=f^{\prime\prime}\left(x_{0}\right)=\cdots=f^{(n-1)}\left(x_{0}\right)=0$，而 $f^{(n)}\left(x_{0}\right)\neq 0$

(1) 当 n 为偶数时，则 $f(x)$ 在点 x_0 取得极值：

当 $f^{(n)}\left(x_{0}\right)>0$ 时, $f(x)$ 在点 x_0 取得极小值;

当 $f^{(n)}\left(x_{0}\right)<0$ 时, $f(x)$ 在点 x_0 取得极大值;

(2) 当 n 为奇数时，则 $f(x)$ 在点 x_0 无极值

> 若存在唯一驻点，则x_0为极大(小)值点

> 偶函数的导数是奇函数，且$f^{\prime}(0)=0$，若$f^{\prime\prime}(0)\neq 0$则$x=0$一定为函数的极值点

函数凸性与拐点

概念	定义
凸性	设 $f(x)\in C[a,b]$，若 $\forall x_1,x_2\in(a,b)\ (x_1\neq x_2),\forall t_1,t_2>0$，且 $t_1+t_2=1$ 下凸：$f\left(t_{1}x_{1}+t_{2}x_{2}\right)<t_{1}f\left(x_{1}\right)+t_{2}f\left(x_{2}\right)$ $f\left(\frac{x_{1}+x_{2}}{2}\right)<\frac{f\left(x_{1}\right)+f\left(x_{2}\right)}{2}$ 上凸：$f\left(t_{1}x_{1}+t_{2}x_{2}\right)>t_{1}f\left(x_{1}\right)+t_{2}f\left(x_{2}\right)$ $f\left(\frac{x_{1}+x_{2}}{2}\right)>\frac{f\left(x_{1}\right)+f\left(x_{2}\right)}{2}$
	若 $f(x)\in C[a,b], f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导，且 $f^{\prime\prime}(x)>0(<0)$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内为下 (上) 凸
拐点	设 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内连续，若 $f(x)$ 在 x_0 的左右两侧凸性相反，则称点 $\left(x_{0},f\left(x_{0}\right)\right)$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点
拐点必要条件	设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导，$x_0\in(a,b)$，若 $\left(x_{0},f\left(x_{0}\right)\right)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一个拐点，则 $f^{\prime\prime}\left(x_{0}\right)=0$
拐点充分条件	设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导，$x_0\in(a,b), f^{\prime\prime}\left(x_{0}\right)=0$ 若在点 x_0 的两侧附近 $f^{\prime\prime}(x)$ 异号，则点 $\left(x_{0},f\left(x_{0}\right)\right)$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点

延森不等式：设 $f(x)$ 是在区间 (a,b) 内满足条件 $f''(x)>0$ 的下凸函数，则 $\forall x_1,x_2,\cdots,x_n\in(a,b)$ 及 $\forall t_1,t_2,\cdots,t_n>0,\sum_{i=1}^{n}t_i=1$，都有$f\left(\sum_{i=1}^{n}t_ix_i\right)<\sum_{i=1}^{n}t_if\left(x_i\right)$ 其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不全相等

特别地，当 $t_1=t_2=\cdots=t_n=\dfrac{1}{n}$ 时，有$f\left(\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)<\dfrac{1}{n}[f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+\cdots+f\left(x_n\right)]$

一元函数积分学

定积分

分割；近似；求和；取极限；

可积的充分条件：

（1）如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积；

（2）如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，且只有有限个第一类间断点，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积

积分估值定理：设M和m分别是区间上的最大值与最小值，则$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$

积分中值定理： 设$f(x)\in C[a,b]$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$

微积分基本定理

如果在区间I上有$F'(x)=f(x)$，则称$F(x)$是$f(x)$在I上的一个原函数；

若$f(x)\in C[a,b]$，则$f(x)$在$[a,b]$上必有原函数

积分上限函数：(最简单形式)

$$\frac{d}{dx}\int_{a(\text{常数})}^{x}f(t)dt=\frac{d}{dx}F(x)-\frac{d}{dx}F(a)=f(x)$$

积分上下限为函数时：

$$F(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(t)dt\qquad F'(x)=\frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(t)dt=f[\psi(x)]\psi'(x)-f[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

如果只有一个是函数，那么把函数换到积分上限，再正常求解

微积分基本定理：

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

不定积分的概念和性质

若在区间 I 内，$F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 的所有原函数的一般表达式 $F(x)+C$ 称为 $f(x)$ 的不定积分

记为 $\int f(x)\mathrm{d}x$，即$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$

不定积分的性质：

- $\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'=f(x)$
- $\int F'(x)dx=\int dF(x)=F(x)+C$
- $\int[k_1f_1(x)+k_2f_2(x)]\mathrm{d}x=k_1\int f_1(x)\mathrm{d}x+k_2\int f_2(x)\mathrm{d}x$

基本积分公式

$$\int 0 \, \mathrm{d}x = C$$

$\int \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$	$\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln \mid x \mid + C$
$\int x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$	$\int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$
$\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C$	$\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C$
$\int \sec^2 x \, \mathrm{d}x = \tan x + C$	$\int \csc^2 x \, \mathrm{d}x = -\cot x + C$
sec正割 = 斜边/临边 = $1/\cos$ $\tan^2 = \sec^2 - 1$	csc余割 = 斜边/对边 = $1/\sin$ $\cot^2 = \csc^2 - 1$
$\int \sec x \tan x \, \mathrm{d}x = \sec x + C$	$\int \csc x \cot x \, \mathrm{d}x = -\csc x + C$
$\int \sec x \, \mathrm{d}x = \ln \mid \sec x + \tan x \mid + C$	$\int \csc x \, \mathrm{d}x = \ln \mid \csc x - \cot x \mid + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = \arcsin x + C$	$\int \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \arctan x + C$
$\int \tan x \, \mathrm{d}x = -\ln \mid \cos x \mid + C$	$\int \cot x \, \mathrm{d}x = \ln \mid \sin x \mid + C$
$\int \frac{1}{a^2+x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$	$\int \frac{1}{a^2-x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2a} \ln \mid \frac{a+x}{a-x} \mid + C$
例 5　求$\int \frac{1}{a^2+x^2} \mathrm{d}x \quad (a>0)$. 解　$\int \frac{1}{a^2+x^2} \mathrm{d}x = \int \frac{1}{a^2\left[1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]} \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} \mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)$ $= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$	例 6　求$\int \frac{1}{a^2-x^2} \mathrm{d}x \quad (a>0)$. 解　$\int \frac{1}{a^2-x^2} \mathrm{d}x = \int \frac{1}{(a+x)(a-x)} \mathrm{d}x = \frac{1}{2a} \int \frac{(a-x)+(a+x)}{(a+x)(a-x)} \mathrm{d}x$ $= \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right) \mathrm{d}x$ $= \frac{1}{2a} \left[\int \frac{1}{a+x} \mathrm{d}(a+x) - \int \frac{1}{a-x} \mathrm{d}(a-x)\right]$ $= \frac{1}{2a} [\ln \lvert a+x \rvert - \ln \lvert a-x \rvert] + C$ $= \frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{a+x}{a-x} \right\rvert + C.$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \, \mathrm{d}x = \arcsin \frac{x}{a} + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \, \mathrm{d}x = \ln \mid x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \mid + C$

- $\int \tan^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + C$
- $\int \sqrt{1 - \sin 2x} dx = \int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} dx = \int \lvert \sin x - \cos x \rvert dx$

> $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 1 - (\sin x - \cos x)^2 = (\cos^2 x)'$

换元积分法

第一类换元法（凑微分法）

> 如果有上下限，换元完要记得上下限也要变换

$$\begin{aligned} \int f[\varphi(x)] \varphi'(x) \mathrm{d}x &= \int f[\varphi(x)] \mathrm{d}\varphi(x) \\ &\xlongequal{\text{令 } \varphi(x)=u} \int f(u) \mathrm{d}u = F(u) + C \\ &\xlongequal{u=\varphi(x)} = F[\varphi(x)] + C. \end{aligned}$$

例 9 求$\int \frac{1}{1+e^x}dx$.

解一 $\int \frac{1}{1+e^x}dx = \int \frac{(1+e^x)-e^x}{1+e^x}dx = \int dx - \int \frac{e^x}{1+e^x}dx$

$= x - \int \frac{1}{1+e^x}d(1+e^x) = x - \ln(1+e^x) + C.$

解二 $\int \frac{1}{1+e^x}dx = \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx = \int \frac{-1}{e^{-x}+1}d(e^{-x}+1)$

$= -\ln(e^{-x}+1) + C.$

> 可以采取加一项减一项或分子分母同乘一项的方法

第二类换元法（三角积分）：（多用于消除根式）

如果被积函数中含有 $\sqrt{a^2-x^2}, \sqrt{x^2+a^2}, \sqrt{x^2-a^2}$ 这几种类型的根式时，可作以下变换以消去根式

- $\sqrt{a^2-x^2}$，令 $x=a\sin t \quad t\in(-\pi/2,\pi/2)$，

  > $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t \quad dx=a\cos t dt$

- $\sqrt{x^2+a^2}$，令 $x=a\tan t$

  > $\sqrt{x^2+a^2}=a\sec t \quad dx=a\sec^2 t dt$

- $\sqrt{x^2-a^2}$，令 $x=a\sec t$

  > $\sqrt{x^2-a^2}=a\tan t \quad dx=a\sec t\tan t dt$

最后再画三角形，把三角函数换成x的关系式

一些结论：

- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$
- $\int_0^{\pi} x f(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$
- $\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$

$x=\frac{\pi}{2}-t \quad x=\pi-t$称为互余变换与互补变换

分部积分法

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad \int_a^b u\,\mathrm{d}v = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数}, \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}, & n \text{ 为奇数}. \end{cases}$$

有理函数的积分

两个实系数多项式的商所表示的函数称为有理函数，其形式为

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m},$$

如果分子多项式的次数小于分母多项式的次数，即 $n<m$, 则称之为真分式；反之，若 $n \geqslant m$, 则称之为假分式.

任一真分式都可唯一地分解为若干个最简分式的和

最简分式的积分：

(1) $\int \frac{1}{x-a}\,\mathrm{d}x = \ln|x-a| + C$

(2) $\int \frac{1}{(x-a)^k} \mathrm{d}x = \frac{1}{1-k} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$

有理函数积分的一般步骤:

(1) 将有理函数表示为多项式与真分式之和;

(2) 将真分式分解为最简分式之和;

(3) 分别求出多项式与各最简分式的不定积分，相加即得该有理函数的不定积分。

三角函数有理式的积分:

常做变化: $\tan \frac{x}{2} = t$ (万能代换)

$\sin x = 2\sin \frac{x}{2}\cos \frac{x}{2} = \frac{2\tan \frac{x}{2}}{1+\tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$

$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\tan^2 \frac{x}{2}}{1+\tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2} \mathrm{d}t$

反常积分

无穷区间上的反常积分:

设函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上连续, 且 $b>a$，$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的反常积分为

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

> 如果上式右端的极限存在则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，否则发散

对于在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数 $f(x)$，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的反常积分为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

> 如果上式右端的两个反常积分都收敛，则称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，否则发散

对称区间上奇(偶)函数的定积分性质对反常积分不成立

例题:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x,$$

因为 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]\Big|_0^{+\infty} = +\infty$ 该反常积分发散

无界函数的反常积分:

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上连续，在点 b 的左邻域内无界，则$f(x)$ 在 $[a,b)$ 上的反常积分为

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-e} f(x)\mathrm{d}x.$

> 如果上式右端的极限存在，则称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，否则发散

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上除点 $c(a<c<b)$ 外连续，在点 c 的某邻域内无界，则规定 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的反常积分为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

> 如果上式右端的两个反常积分都收敛，则称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，否则发散

	Γ函数(在 $(0,+\infty)$ 上是连续的)	B函数
表达式	$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t\quad(x>0)$	$\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,\mathrm{d}x\quad(\alpha>0,\beta>0)$
性质	$\Gamma(1)=1$	$\mathrm{B}(1,1)=1$
	$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ 当 $x=n$ 为正整数时，有 $\Gamma(n+1)=n!$	$\mathrm{B}(\alpha+1,\beta+1)=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}\mathrm{B}(\alpha,\beta)$ 当 $\alpha=m,\beta=n$ 时，有$\mathrm{B}(m,n)=\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$
	$\lim\limits_{x\to0^+}\Gamma(x)=+\infty$	$\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\mathrm{B}(\beta,\alpha)$ (对称性)
	$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$	$\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$

定积分几何应用

曲线围成的面积：$A=\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$

极坐标下：$A=\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$

旋转体体积：$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=\pi\int_c^d\varphi^2(y)\mathrm{d}y$

常微分方程

一般地，含有未知函数的导数或微分的方程称为微分方程，未知函数是一元函数的，称为常微分方程；

未知函数是多元函数的，称为偏微分方程

一阶微分方程

一阶微分方程的对称形式：$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$

方程类型	形式	解法
可分离变量的方程	$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$ $f(x),g(y)$是x,y的连续函数	$g(y)\neq0$，改写为$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\mathrm{d}x$ 两端积分得到$\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x$
齐次方程	$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$	令 $u=\frac{y}{x}$，即 $y=xu$，有 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 代入得$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)$ 可分离
一阶齐次线性方程	$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$	$y=Ce^{-\int P(x)dx}$
一阶非齐次线性方程	$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$	$y=Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}+\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$
伯努利(Bernoulli)方程	$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n(n\neq0,1)$	令$z=y^{1-n}$，以 y^n 除以方程两端$(y\neq0)$ 得$y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$ 令 $z=y^{1-n}$则$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-n)y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 代入得$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$ 再将原变量 y 代回，可得原方程的通解

> 齐次方程：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{xy+y^2}{x^2}=\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

可降阶的高阶微分方程

$y^{(n)}=f(x)$	$y''=f(x,y')$	$y''=f(y,y')$
逐次积分，逐次降阶	令$y'=p$，$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dp}{dx}$	不显含x 令$y'=p$，$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$

于是方程$y'=f(y,y')$变为$p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$

二阶齐次线性方程

二阶齐次线性方程$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0$

若$P(x)=p,Q(x)=q$ p,q为实常数

得到二阶常系数齐次线性方程$y''+py'+qy=0$

特征方程：$r^2+pr+q=0$

判断条件	根的情况	解
当 $p^2-4q>0$ 时	特征方程有两个不相等的实根$r_1\neq r_2$	$y=C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x}$
当 $p^2-4q=0$ 时	特征方程有两个相等的实根$r_1=r_2=-\frac{p}{2}$	$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{r_1x}$
当$p^2-4q<0$时	特征方程有一对共轭复根$r_1=\alpha+\mathrm{i}\beta,r_2=\alpha-\mathrm{i}\beta$ $\alpha=-\frac{p}{2},\beta=\frac{1}{2}\sqrt{4q-p^2}\neq 0$	$y=\mathrm{e}^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)$

推广到高阶常系数其次线性方程

特征方程的根	微分方程通解中的对应项
单实根r	给出一项 Ce^{rx}
k重实根r	给出k项 $(C_1+C_2x+\cdots C_kx^{k-1})e^{rx}$
一对单复根$r=\alpha\pm i\beta$	给出两项 $e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$
一对k重复根$r=\alpha\pm i\beta$	给出$2k$项 $e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x+C_{k+1}+(C_{k+2}x+\cdots+C_{2k}x^{k-1})\sin\beta x]$

二阶非齐次线性方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=f(x)$$

> 其解为其齐次方程的通解加非齐次方程的特解；

如果 $f(x)=P_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$，则具有形如$y^*=x^kQ_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$的特解

其中 $Q_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 同m次的多项式，$\begin{cases} k=0 & \lambda\neq r_1,r_2 \\ k=1 & \lambda=r_1 \text{ or } r_2 \quad r_1\neq r_2 \\ k=2 & \lambda=r_1=r_2 \end{cases}$

例题：

(1) $y''-y'-2y=x\mathrm{e}^x$对应齐次方程为$y''-y'-2y=0$

其特征方程为$r^2-r-2=0$　它的根为$r_1=-1,\quad r_2=2$

显然 $\lambda=1$ 不是特征方程的根，故特解形式为$y^*=(Ax+B)\mathrm{e}^x$

(2) $y''+y'-2y=x\mathrm{e}^x$对应齐次方程为$y''+y'-2y=0$

其特征方程为$r^2+r-2=0$

它的根为$r_1=1,\quad r_2=-2.$

显然 $\lambda=1$ 是特征方程的单根，故特解形式为$y^*=x(Ax+B)\mathrm{e}^x$

(3) $y''-2y'+y=x\mathrm{e}^x$ 对应齐次方程为$y''-2y'+y=0$

其特征方程为$r^2-2r+1=0$ 它的根为$r_1=r_2=1$

显然 $\lambda=1$ 是特征方程的重根，故特解形式为$y^*=x^2(Ax+B)\mathrm{e}^x$

欧拉方程

$x^ny^{(n)}+p_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}xy'+p_ny=f(x)$ 令$x=\mathrm{e}^t$ 或 $t=\ln x$

有$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ $y'' = -\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$

$x^2y'' = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = D^2y - Dy = \left(D^2 - D\right)y = D(D-1)y$

结论：$x^ky^{(k)} = D(D-1)(D-2)\cdots(D-k+1)y$