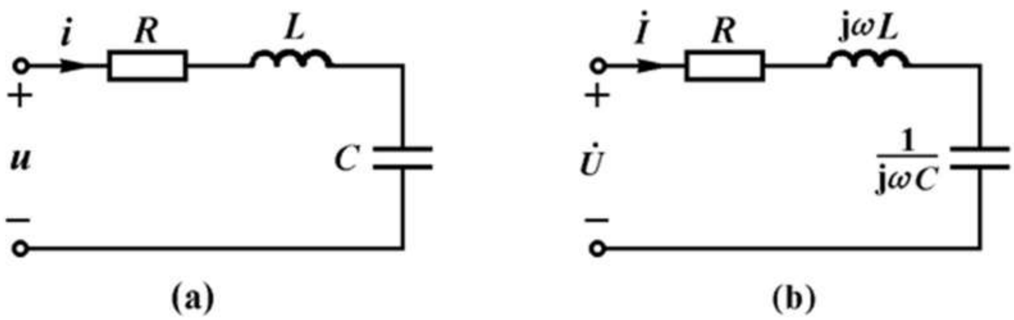
周期方波信号分解

设计详细说明：

1) 搭建 5 个 RLC 无源二阶带通滤波器(串联)



$$H(j\omega)=\frac{R}{R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}=\frac{1}{1+j\left(\frac{\omega L}{R}-\frac{1}{\omega RC}\right)}$$

令$j\omega=s$,得到频率响应函数通式为：$H(s)=\frac{2\alpha s}{s^2+2\alpha s+w_0^2}$，$\alpha=\frac{R}{2L}$，$w_0^2=\frac{1}{LC}$

品质因数公式：$Q=\frac{w_0 L}{R}$，带宽=$2\alpha=\frac{R}{L}$

题目要求满足 Q>60，R>5Ω

1. $f_1=10\text{KHz}$，$w_{01}=2\pi*10^4\ rad/s$，令 L=10mH，R=10Ω，则$Q=20\pi>60$，C=25.33nF，$2\alpha=10^3rad/s$

$$H(s)=\frac{2\alpha s}{s^2+2\alpha s+w_{01}^2}=\frac{10^3s}{s^2+10^3s+(2\pi*10^4)^2}$$

2. $f_2=20\text{KHz}$，$w_{02}=4\pi*10^4\ rad/s$，令 L=10mH，R=20Ω，则$Q=20\pi>60$，C=6.33nF，$2\alpha=2\times10^3rad/s$

$$H(s)=\frac{2\alpha s}{s^2+2\alpha s+w_{01}^2}=\frac{2\times10^3s}{s^2+2\times10^3s+(4\pi*10^4)^2}$$

3. $f_3=30\text{KHz}$，$w_{03}=6\pi*10^4\ rad/s$，令 L=10mH，R=30Ω，则$Q=20\pi>60$，C=2.81nF，$2\alpha=3\times10^3rad/s$

$$H(s)=\frac{2\alpha s}{s^2+2\alpha s+w_{01}^2}=\frac{3\times10^3s}{s^2+3\times10^3s+(6\pi*10^4)^2}$$

4. $f_4=40\text{KHz}$，$w_{04}=8\pi*10^4\ rad/s$，令 L=10mH，R=40Ω，则$Q=20\pi>60$，C=1.58nF，$2\alpha=4\times10^3rad/s$

$$H(s)=\frac{2\alpha s}{s^2+2\alpha s+w_{01}^2}=\frac{4\times 10^3 s}{s^2+4\times 10^3 s+(8\pi * 10^4)^2}$$

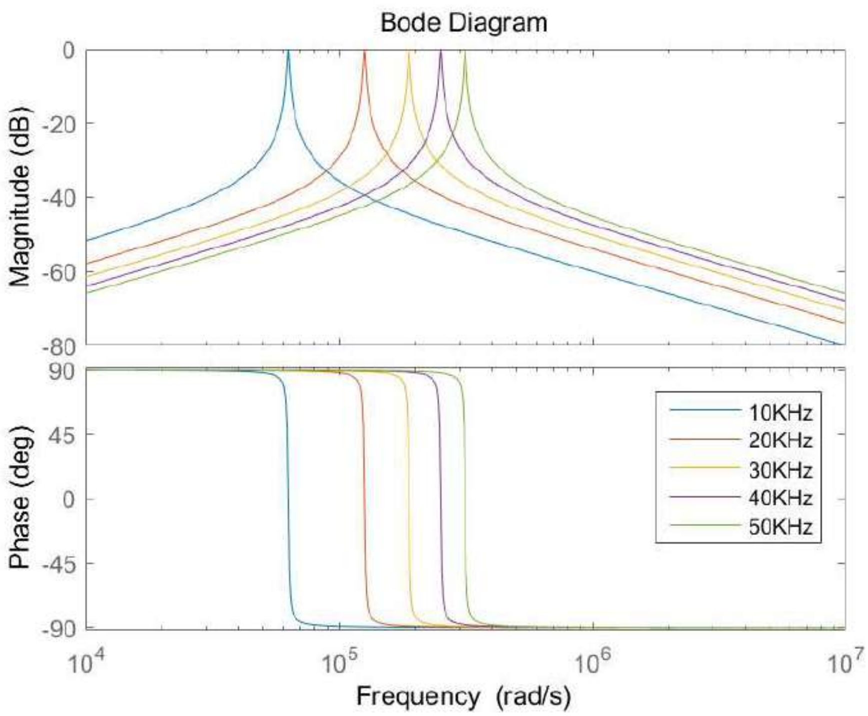
5. $f_5=50\text{KHz}$，$w_{05}=10\pi * 10^4\, rad/s$，令 L=10mH，R=50Ω，则$Q=20\pi>60$，C=1.01nF，

   $2\alpha=5\times 10^3 rad/s$

$$H(s)=\frac{2\alpha s}{s^2+2\alpha s+w_{01}^2}=\frac{5\times 10^3 s}{s^2+5\times 10^3 s+(10\pi * 10^4)^2}$$

Matlab 代码：(KHz.m 文件)

```
figure
for i = 1:5
    si=tf([1000*i 0],[1 1000*i ((2*i*pi*(10^4))^2)]);
    bode(si);
    hold on
    str{i} = [ num2str(10*i) 'KHz'];
end
legend(str);
```



2) 在 Multisim 中，利用信号发生器和示波器, 测试 RLC 无源二阶带通滤波器

由(1)可得关系式

因为$H(s)=\frac{U_R}{U}$，所以$|U_R|=|H(s)||U|$

满足当$\omega=\omega_0$时，$|U_R|=|U|$，当$\omega=\omega_0\pm\alpha$时，$|U_R|=0.707|U|$

因为函数发生器输入的都是频率信息，所以还需要对数据进行 2π处理

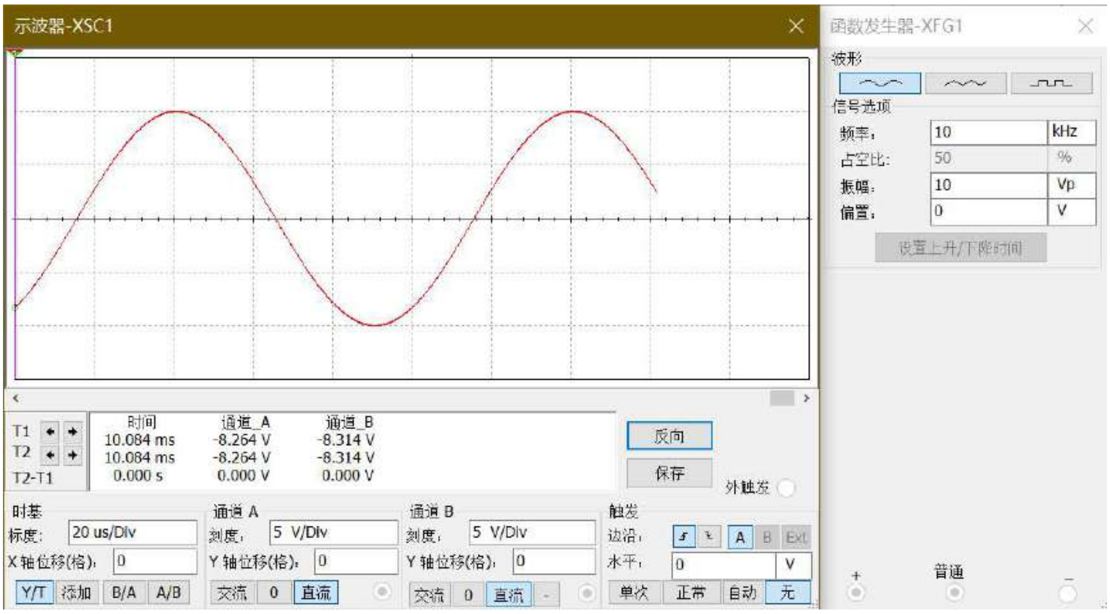
这里就只做两组的验证，方法相同，做太多过于赘余

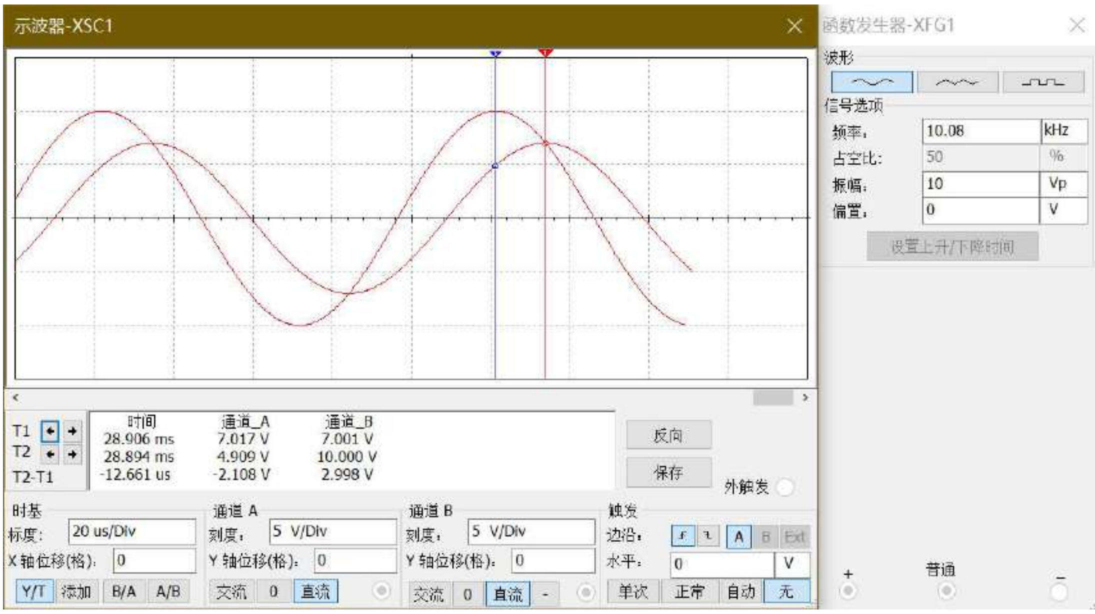
验证成功需满足条件：

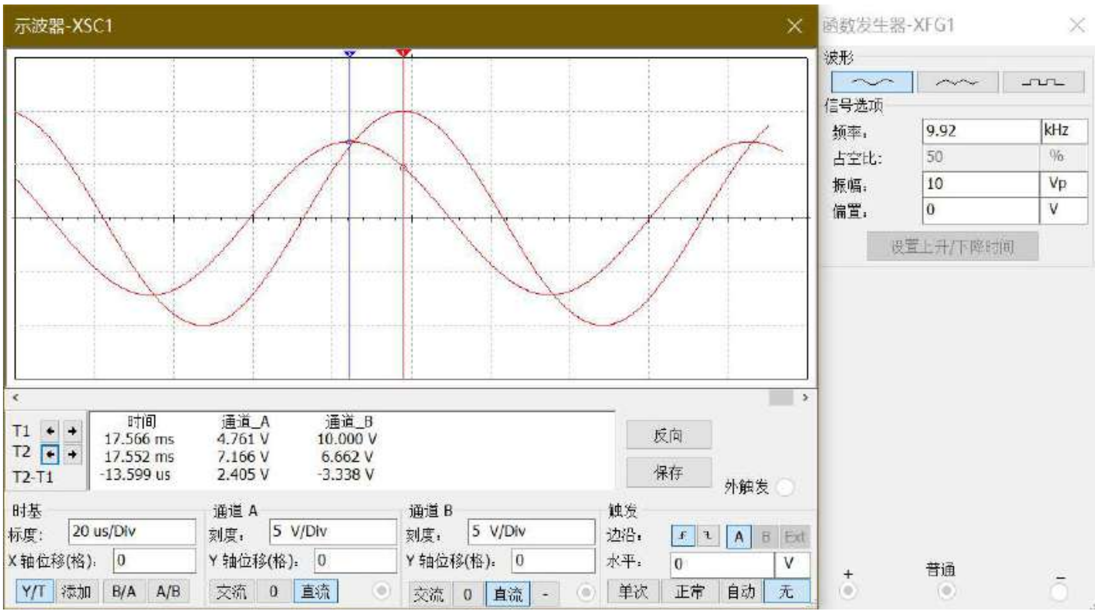
当$\omega=\omega_0$时，输出U_R的波形与U相同；当$\omega=\omega_0\pm\alpha$时，输出$|U_R|=0.707|U|$

示波器中 A 通道是电阻两端的，B 通道是函数发生器两端的

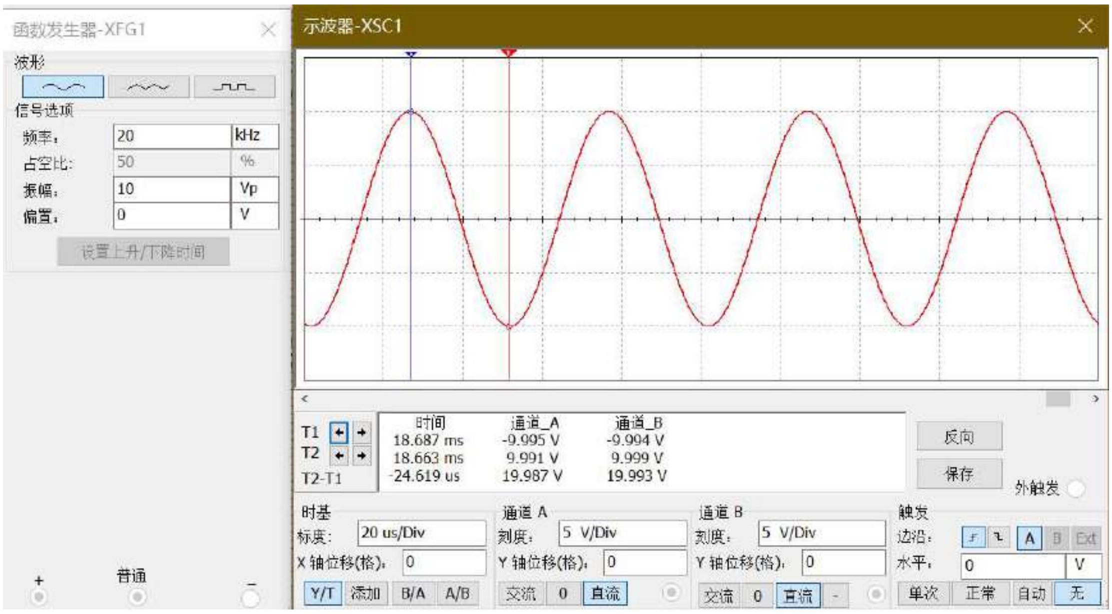
i.

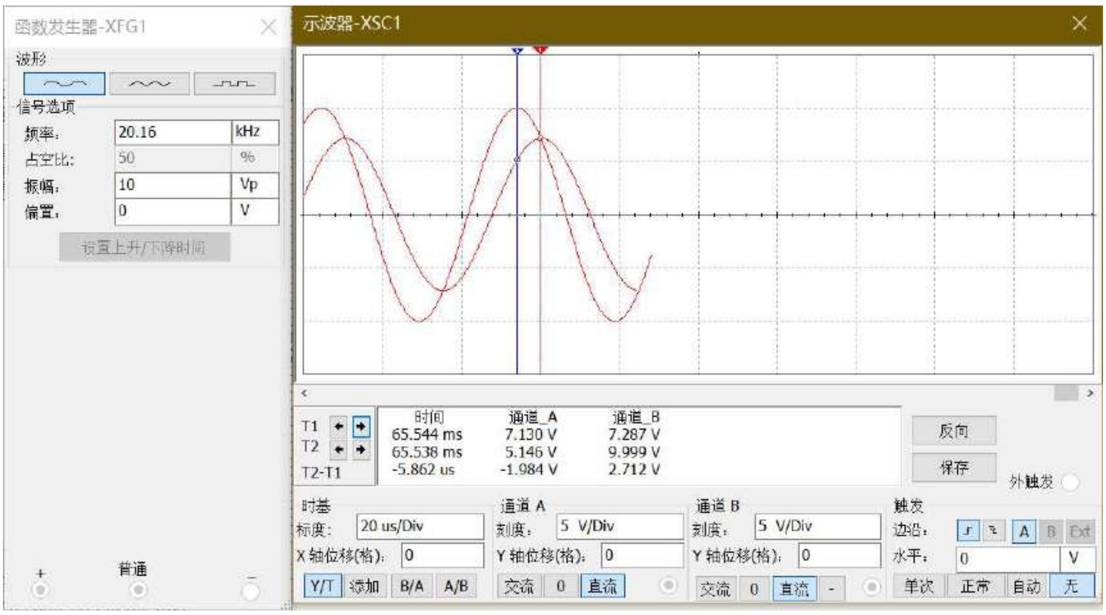


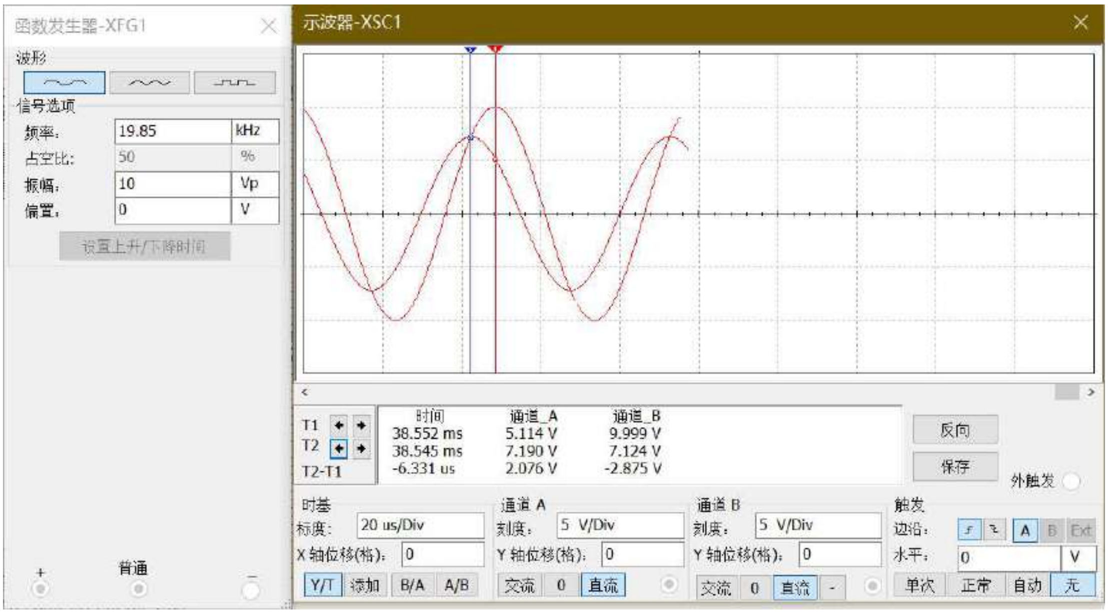



示波器-XSC1
函数发生器-XFG1
波形
信号选项
频率: 9.92 kHz
占空比: 50 %
振幅: 10 Vp
偏置: 0 V
设置上升/下降时间
T1 T2 T2-T1
时间 17.566 ms 17.552 ms -13.599 us
通道_A 4.761 V 7.166 V 2.405 V
通道_B 10.000 V 6.662 V -3.338 V
反向
保存
外触发
时基 标度: 20 us/Div X 轴位移(格): 0
通道 A 刻度: 5 V/Div Y 轴位移(格): 0
通道 B 刻度: 5 V/Div Y 轴位移(格): 0
触发 边沿: 水平: 0 V
Y/T 添加 B/A A/B 交流 0 直流 单次 正常 自动 无
普通

II.


函数发生器-XFG1
波形
信号选项
频率: 20 kHz
占空比: 50 %
振幅: 10 Vp
偏置: 0 V
设置上升/下降时间
普通
示波器-XSC1
T1 T2 T2-T1
时间 18.687 ms 18.663 ms -24.619 us
通道_A -9.995 V 9.991 V 19.987 V
通道_B -9.994 V 9.999 V 19.993 V
反向
保存
外触发
时基 标度: 20 us/Div X 轴位移(格): 0
通道 A 刻度: 5 V/Div Y 轴位移(格): 0
通道 B 刻度: 5 V/Div Y 轴位移(格): 0
触发 边沿: 水平: 0 V
Y/T 添加 B/A A/B 交流 0 直流 单次 正常 自动 无


函数发生器-XFG1
波形
信号选项
频率: 20.16 kHz
占空比: 50 %
振幅: 10 Vp
偏置: 0 V
设置上升/下降时间
普通
示波器-XSC1
T1 T2 T2-T1
时间 65.544 ms 65.538 ms -5.862 us
通道_A 7.130 V 5.146 V -1.984 V
通道_B 7.287 V 9.999 V 2.712 V
反向
保存
外触发
时基 标度: 20 us/Div X 轴位移(格): 0
通道 A 刻度: 5 V/Div Y 轴位移(格): 0
通道 B 刻度: 5 V/Div Y 轴位移(格): 0
触发 边沿: 水平: 0 V
Y/T 添加 B/A A/B 交流 0 直流 单次 正常 自动 无



当w取w_0时，输出幅度与输入幅度相同；

当w取$w_0 \pm \alpha$ 时，输出幅值满足 0.707 的关系，且满足 45 度相位差，验证成功

3) 理论推导 10KHz 占空比 50%周期方波信号分别通过 5 个 RLC 无源二阶带通滤波器输出响应信号

对于一个方波信号可以进行分解成正弦函数：

数学方法：

方波$f(t) = \begin{cases} 1, 0 < t < \frac{T}{2} \\ -1, -\frac{T}{2} < t < 0 \end{cases}$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0} -\cos(k\omega_0 t)dt + \frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} \cos(k\omega_0 t)dt = 0$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0} -\sin(kw_0 t)dt + \frac{2}{T}\cdot\int_{0}^{\frac{T}{2}} \sin(k\omega_0 t)dt$$

$$= \frac{2}{k\omega_0 T}\left[2 - 2\cos\left(\frac{k\omega_0 T}{2}\right)\right], \quad w_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$= \frac{2}{k2\pi}[2 - 2\cos(k\pi)]$$

$$b_k = \begin{cases} \frac{4}{k\pi}, k\text{为奇数} \\ 0, k\text{为偶数} \end{cases}$$

所以方波分解为：$f(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{sin[kw_0 t]}{k}$，$k$为奇数

信号分解:

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{-jkw_0t}$$

$$\mathrm{a_k}=\frac{1}{\mathrm{T}}\int_{-\frac{\mathrm{T}}{2}}^{\frac{\mathrm{T}}{2}}\mathrm{f(t)e^{-jkw_0t}\,dt}=\frac{1}{\mathrm{T}}\int_{-\frac{\mathrm{T}}{2}}^{0}-\cos(\mathrm{kw_0t})+\mathrm{j}\sin(\mathrm{kw_0t})\,\mathrm{dt}+\frac{1}{\mathrm{T}}\int_{0}^{\frac{\mathrm{T}}{2}}\cos(\mathrm{kw_0t})-\mathrm{j}\sin(\mathrm{kw_0t})\,\mathrm{dt}$$

$$=\frac{2}{\mathrm{T}}\int_{0}^{\frac{\mathrm{T}}{2}}-\mathrm{j}\sin(\mathrm{kw_0t})\,\mathrm{dt}=\frac{4}{\mathrm{jkw_0T}}=\frac{2}{jk\pi}$$

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{2}{jk\pi}e^{-jkw_0t}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{4}{jk\pi}j\,sin(kw_0t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{4}{k\pi}sin(kw_0t)$$

由公式很容易可知$U_R=H(s)U$，U即为方波信号

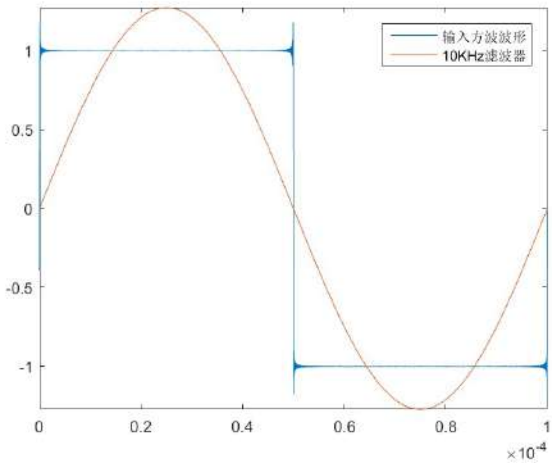
只需要累乘累加即可

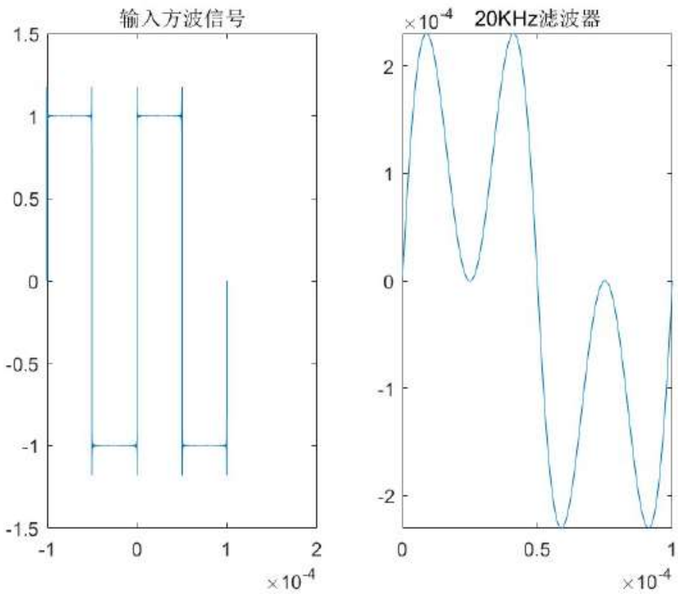
第一代 Matlab 代码:（\第一次计算代码\KHz10_3.m）

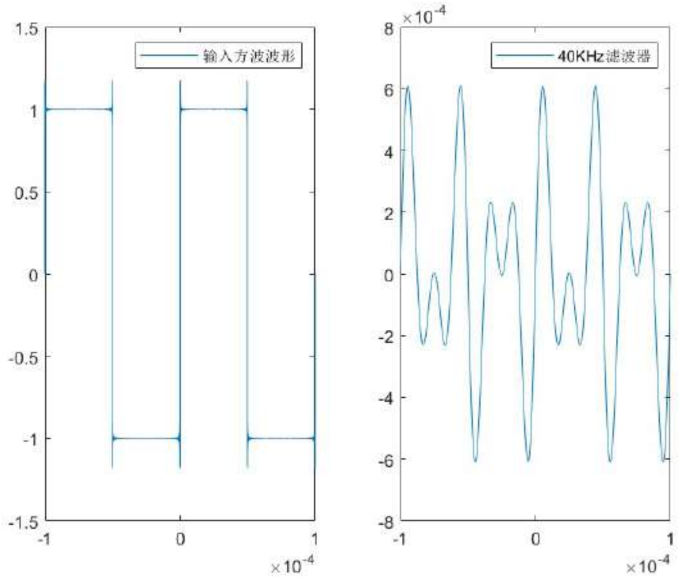
```
clc,clear;
%设置参数
R=10;
C=25.33*10^(-9);
L=10*10^(-3);
%输入信号频率
f=10^4;
w0=2*pi*f;

%设置观察时间范围
t = -1/f:1/(10^4*f):1/f;
%归0，输入与输出U
U=0;
UR=0;
%循环设置，奇次谐波项累加
for k = 1:2:1001
    %傅里叶展开的每个项
    y=(4./(k*pi)).*sin(k*w0*t) ;
    %方波信号表示，累加
    U = U+y ;
    %频率响应函数
```

```
    Hjw=1./(1+1j*(k*w0*L/R-1/(k*w0*R*C)));
    %所有响应累加结果即为输出
    UR=UR+y*Hjw;
End
%绘图
plot(t,U);
hold on
plot(t,UR)
legend('输入方波波形','10KHz滤波器')
axis([0 1/f -inf inf])
```

输出结果:





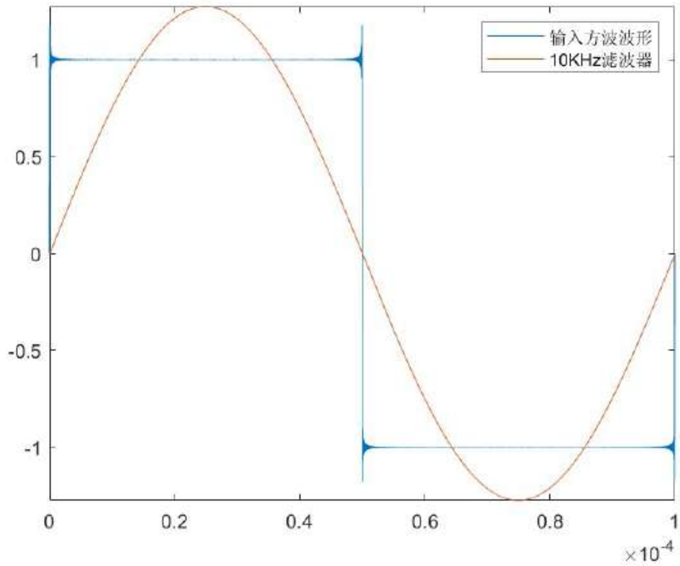


第二代 Matlab 代码:（\最终代码 \KHz10__3.m）

```
clc,clear
%设置参数
R=10;
L=10*10^(-3);
C=25.33*10^(-9);
%固定的输入频率、角频率
f=10^4;
w0=2*pi*f;
%设置时间
t = 0:1/(10^4*f):1/f;
%设置分割数
k=1:2:1001;
%sin前的系数
Ak=4./(pi*k);
%sin·分量
Bk=sin(w0*k'*t);
%输入U
U=Ak*Bk;
plot(t,U);
hold on
%滤波器处理函数
Hjw=1./(1+1j*(L*w0.*k./R - 1./(C*R*w0.*k)));
%输出UR,这里加角度是因为不是用atan分母的角，而是直接用angle得到角
Hs=abs(Hjw)'.*sin(w0*k'*t+angle(Hjw)');
UR=Ak*Hs;
```

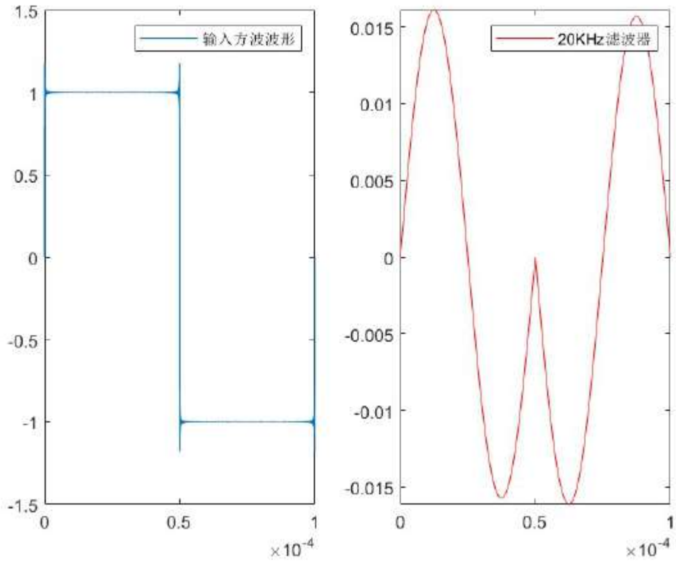
```
plot(t, UR);
legend('输入方波波形','10KHz滤波器')
axis([0 1/f -inf inf])
```

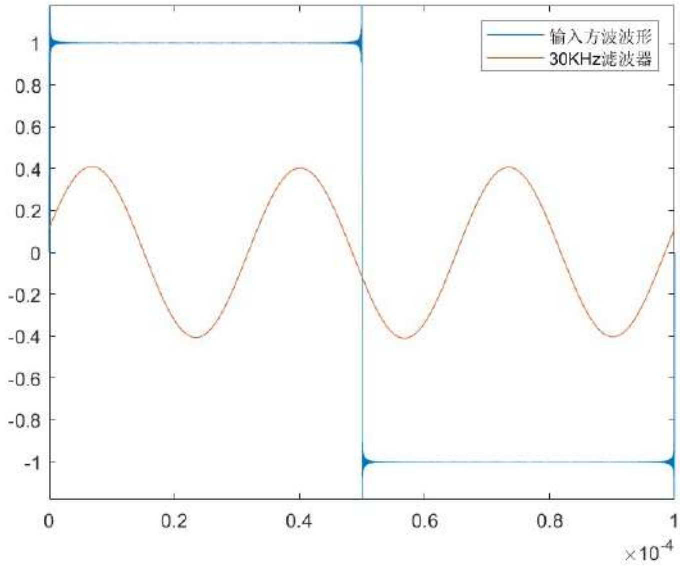
输出结果:

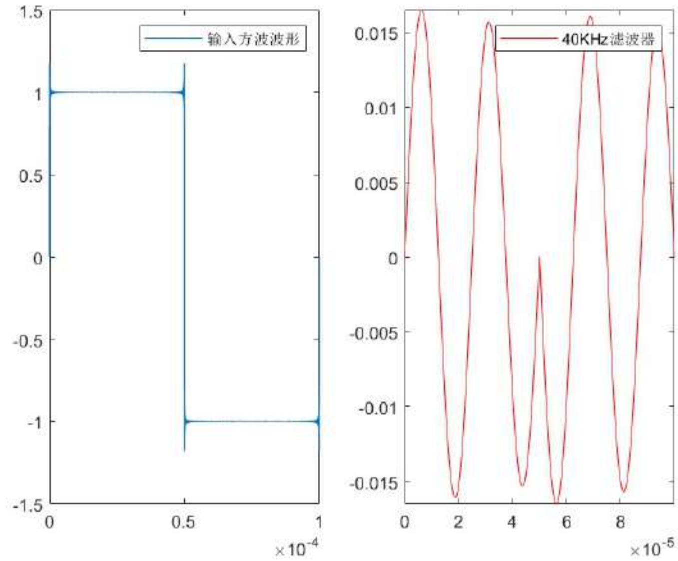


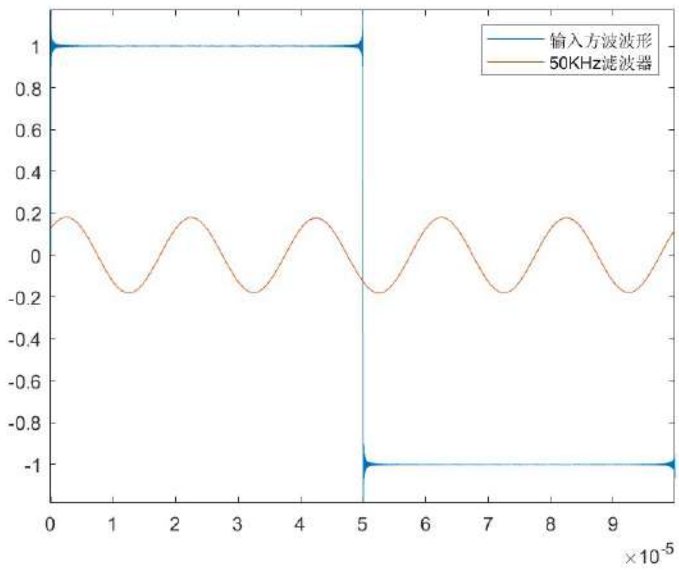
其他代码类似，仅修改参数 R、L、C，与标题栏信息，其余不变

其余输出结果:









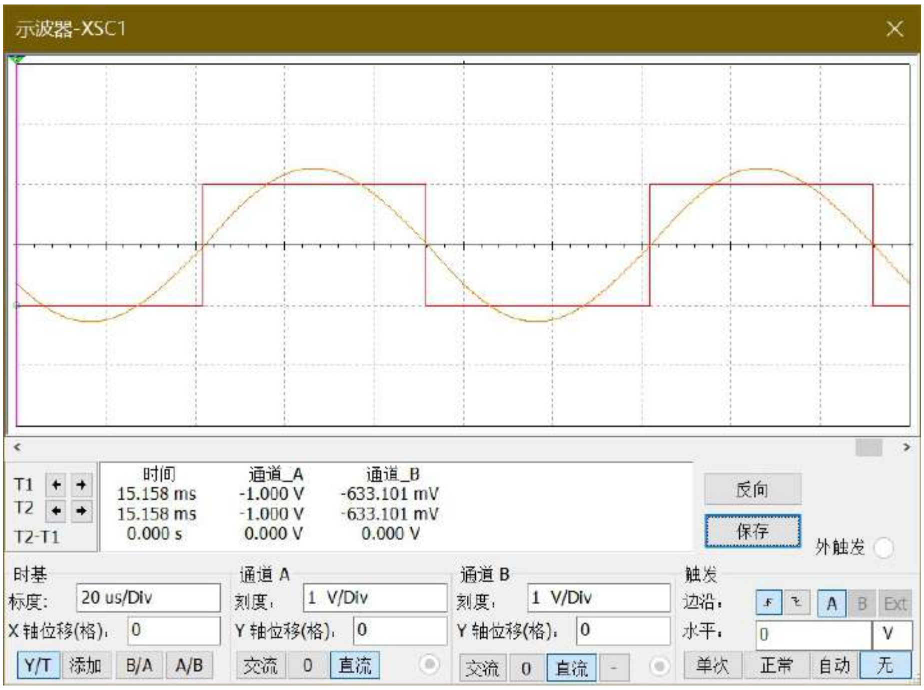
可以看到输入 10KHz 方波到 20KHz 和 40KHz 滤波器后仅输出一个很小的电压，且波形不是正弦函数

一代代码与二代代码的区别主要还是在思路上，一代我在计算绘图时仅仅累乘计算了，并未考虑到 matlab 调用 plot 函数会忽略虚数部分，所以一代代码绘制的图均过原点且对比可知在绘制 20KHz 和 40KHz 的波形图时其实是错误的

二代代码比较多用到矩阵计算法则了，考虑到$H(jw)$的虚数部分带来的角偏量的影响，实际上并不一定都过原点

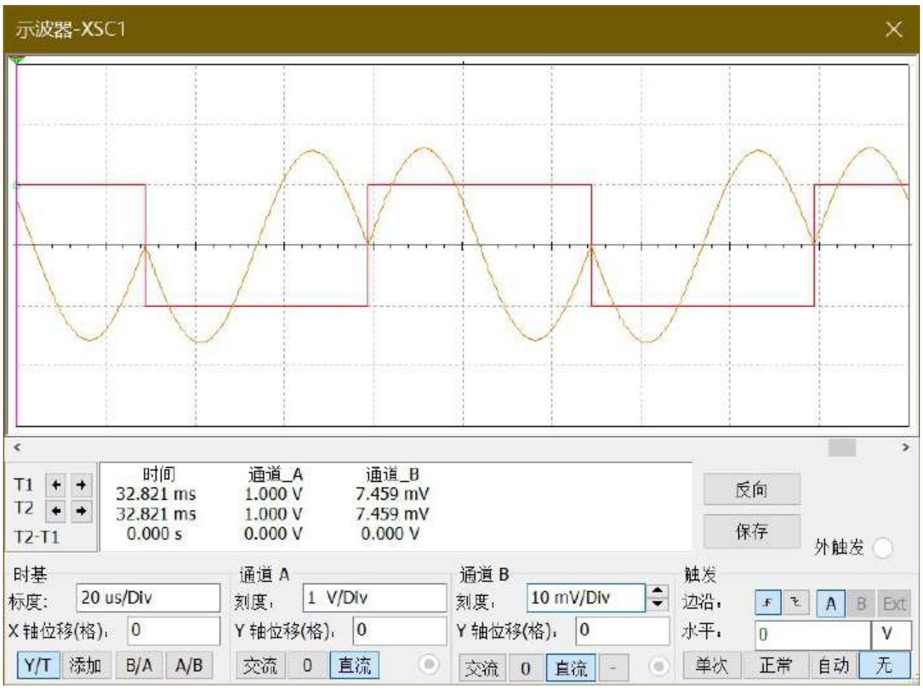
4) Multisim 验证：

10KHz

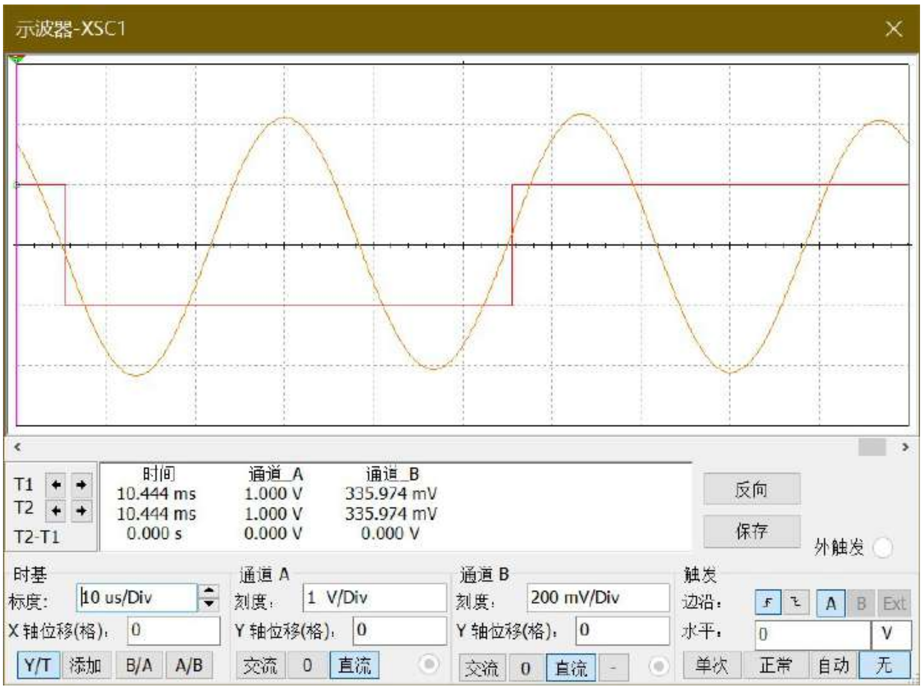


:

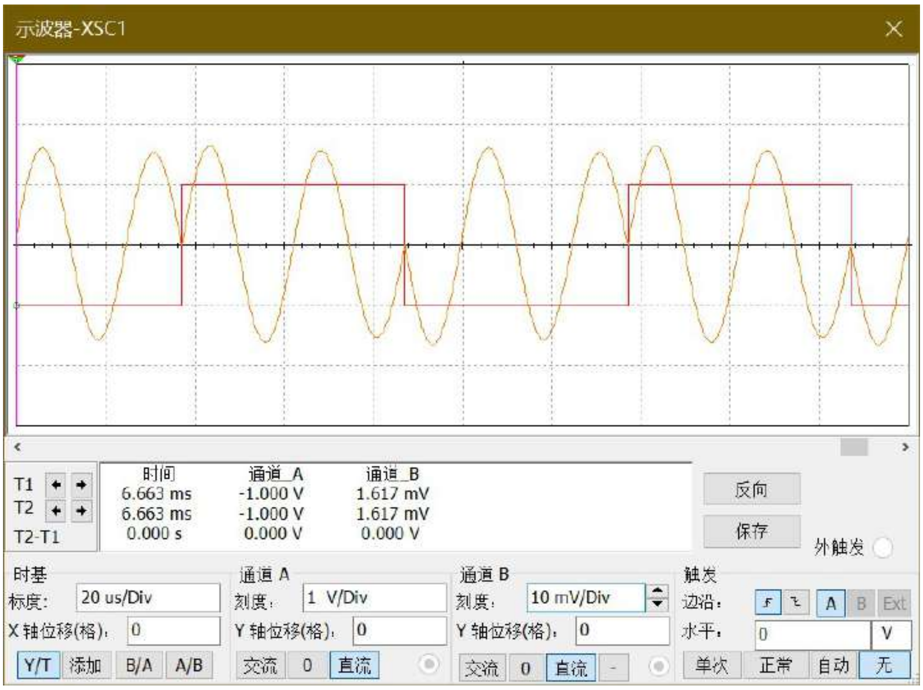
20KHz



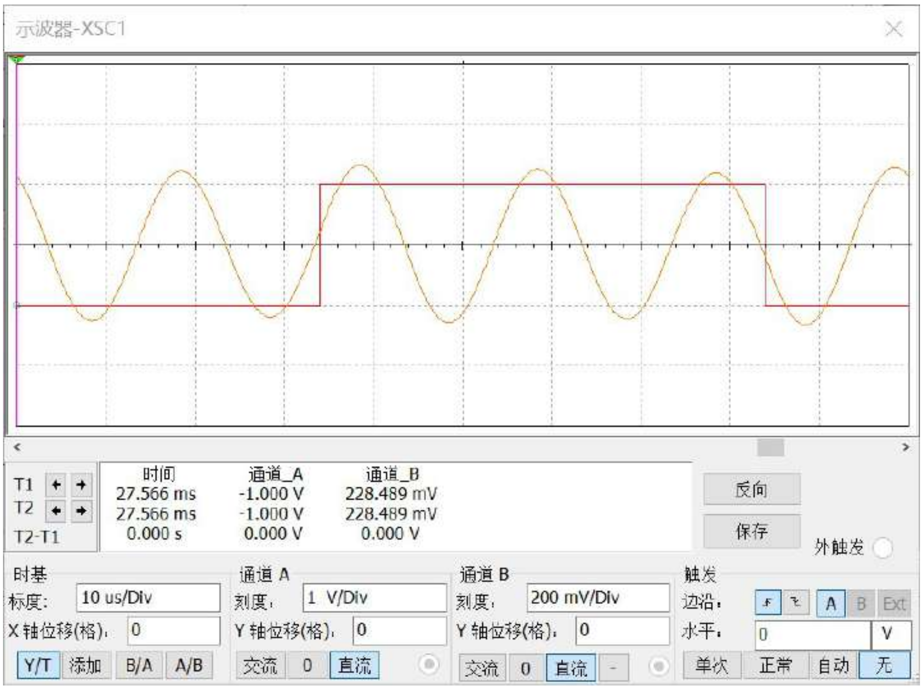
30KHz


示波器-XSC1
T1
T2
T2-T1
时间
10.444 ms
10.444 ms
0.000 s
通道_A
1.000 V
1.000 V
0.000 V
通道_B
335.974 mV
335.974 mV
0.000 V
反向
保存
外触发
时基
标度: 10 us/Div
X 轴位移(格): 0
Y/T 添加 B/A A/B
通道 A
刻度: 1 V/Div
Y 轴位移(格): 0
交流 0 直流
通道 B
刻度: 200 mV/Div
Y 轴位移(格): 0
交流 0 直流 -
触发
边沿:
A B Ext
水平: 0 V
单次 正常 自动 无

40KHz


示波器-XSC1
T1
T2
T2-T1
时间
6.663 ms
6.663 ms
0.000 s
通道_A
-1.000 V
-1.000 V
0.000 V
通道_B
1.617 mV
1.617 mV
0.000 V
反向
保存
外触发
时基
标度: 20 us/Div
X 轴位移(格): 0
Y/T 添加 B/A A/B
通道 A
刻度: 1 V/Div
Y 轴位移(格): 0
交流 0 直流
通道 B
刻度: 10 mV/Div
Y 轴位移(格): 0
交流 0 直流 -
触发
边沿:
A B Ext
水平: 0 V
单次 正常 自动 无

50KHz

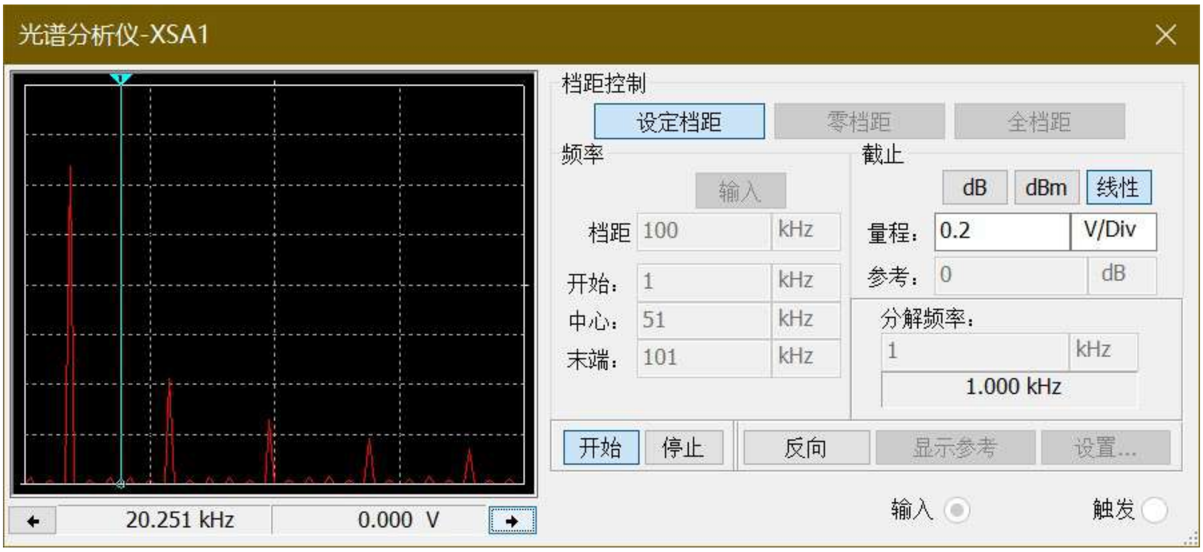


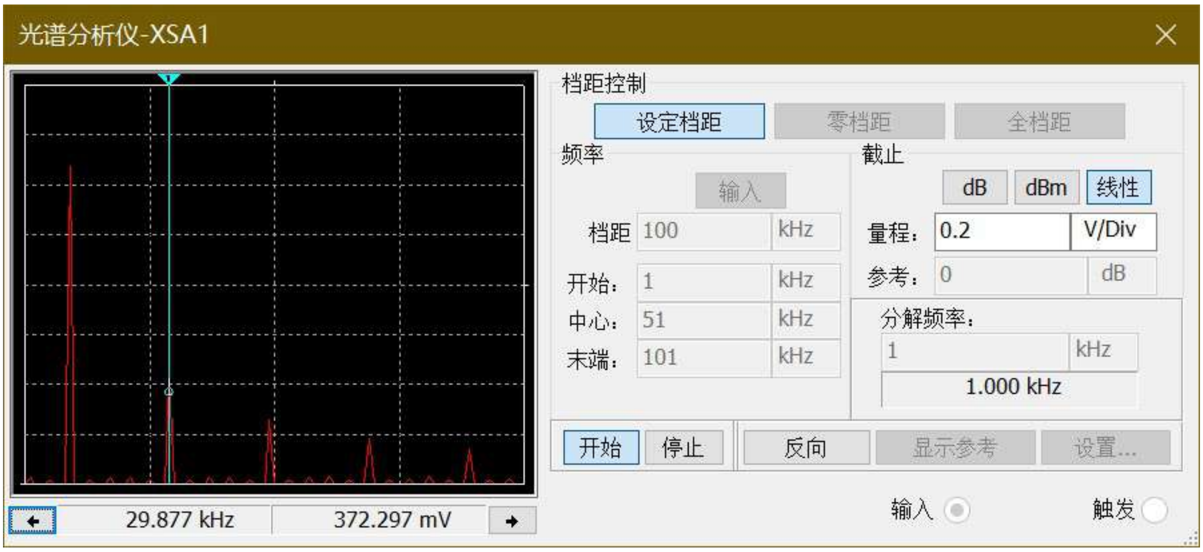
:

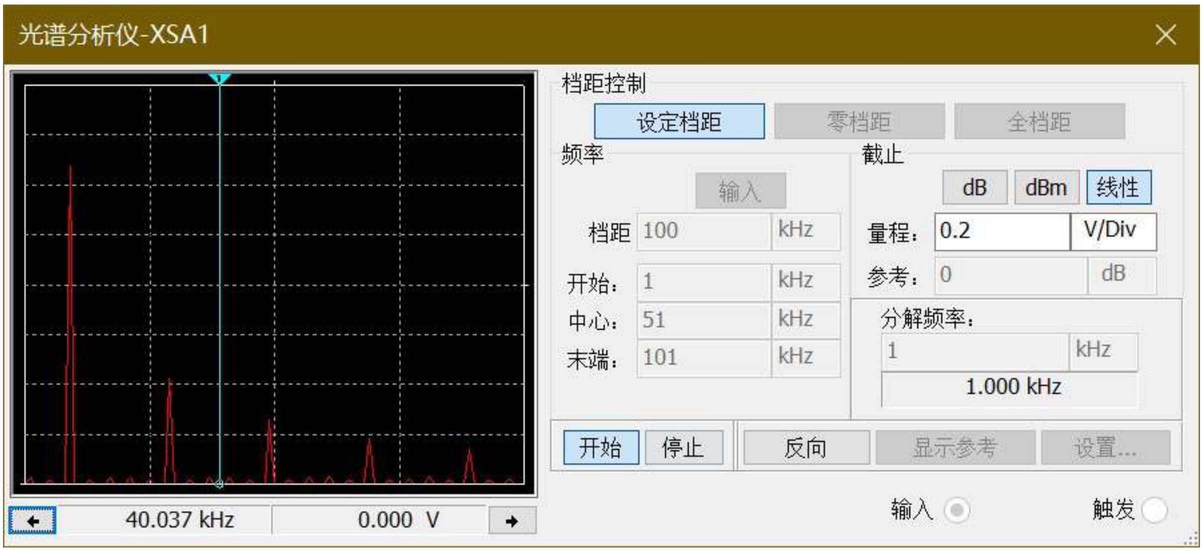
可以看到在 multisim 仿真中，波形与 matlab 最终的推导结果相同，30KHz 与 50KHz 也有部分的偏移量，证明理论推导的结果是可靠的

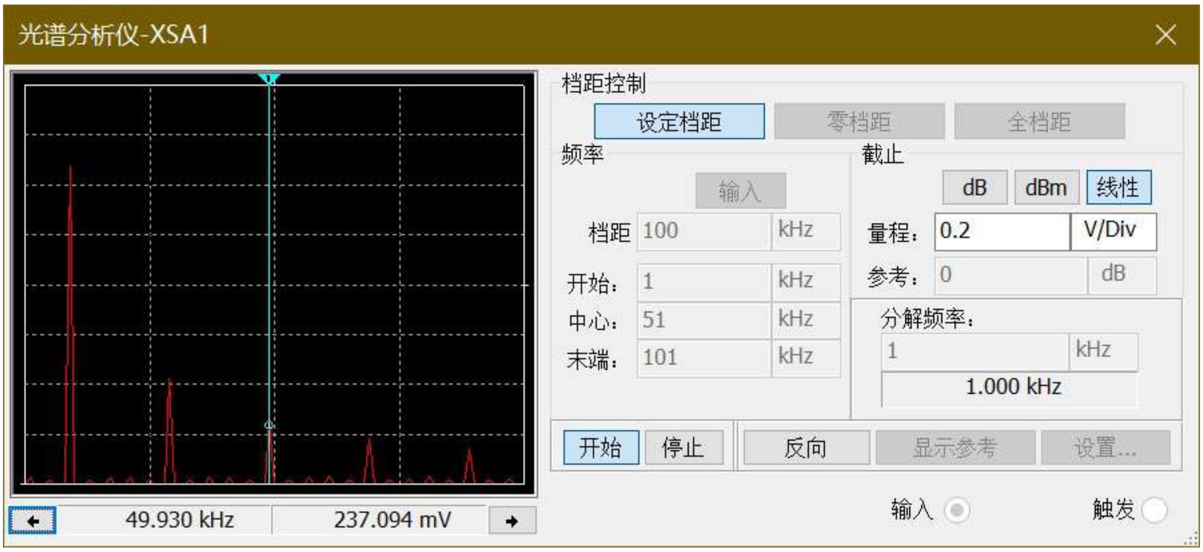
5) 用频谱分析仪测量 10KHz 占空比 50%周期方波信号，并与该方波信号傅立叶级数系数比较

傅里叶系数$a_1 = \frac{4}{\pi} \approx= 1.273$，$a_3 = \frac{4}{3\pi} \approx= 0.424$，$a_5 = \frac{4}{5\pi} \approx 0.255$， 偶次项系数为 0


光谱分析仪-XSA1
档距控制
设定档距
零档距
全档距
频率
输入
档距 100 kHz
开始: 1 kHz
中心: 51 kHz
末端: 101 kHz
截止
dB
dBm
线性
量程: 0.2 V/Div
参考: 0 dB
分解频率:
1 kHz
1.000 kHz
开始
停止
反向
显示参考
设置...
20.251 kHz
0.000 V
输入
触发


光谱分析仪-XSA1
档距控制
设定档距
零档距
全档距
频率
输入
档距 100 kHz
开始: 1 kHz
中心: 51 kHz
末端: 101 kHz
截止
dB
dBm
线性
量程: 0.2 V/Div
参考: 0 dB
分解频率:
1 kHz
1.000 kHz
开始
停止
反向
显示参考
设置...
29.877 kHz
372.297 mV
输入
触发


光谱分析仪-XSA1
档距控制
设定档距
零档距
全档距
频率
输入
档距 100 kHz
开始: 1 kHz
中心: 51 kHz
末端: 101 kHz
截止
dB
dBm
线性
量程: 0.2 V/Div
参考: 0 dB
分解频率:
1 kHz
1.000 kHz
开始
停止
反向
显示参考
设置...
40.037 kHz
0.000 V
输入
触发



因为不能准确测量到特定频率下的数值，在允许的误差范围内我们可以认为理论求得的傅里叶系数和仿真求得的频谱相同；

6) 写在最后：

这次的课设看过去真的很难，也不好上手，全部下来差不多花了三天的时间才做完，其中很多时间浪费在调试 multisim 上了，matlab 代码程序的思路仔细想想还是很容易找出来的，主要困难的地方还是在不断的调试和验证上，调试验证花的时间太多了；

参考文献：

[1]https://blog.csdn.net/lxm920714/article/details/110569653?ops_request_misc=%257B%2522request%255Fid%2522%253A%2522163487190216780255276248%2522%252C%2522scm%2522%253A%252220140713.130102334..%2522%257D&request_id=163487190216780255276248&biz_id=0&utm_medium=distribute.pc_search_result.none-task-blog-2~all~sobaiduend~default-1-110569653.pc_search_ecpm_flag&utm_term=%E6%96%B9%E6%B3%A2%E7%9A%84%E5%82%85%E9%87%8C%E5%8F%B6%E5%B1%95%E5%BC%80&spm=1018.2226.3001.4187

[2] https://book.51cto.com/art/201607/515146.htm

[3] https://blog.csdn.net/weixin_42005993/article/details/110151785