电磁场

电导率为无限大的导体（媒质）为理想导体 **（内部无电磁场）**

电导率大于零但不是无穷大的媒质为导体媒质

电导率为零的媒质称为**理想介质（不导电）**（无耗媒质）

理想介质的相对磁导率为1　理想导体的相对介电常数为1

真空中介电常数为$\varepsilon_0=\dfrac{1}{36\pi}\times10^{-9}\mathrm{F/m}$ 磁导率为$\mu_0=4\pi\times10^{-7}\mathrm{H/m}$　单位注意

矢量代数

单位矢量不一定是常矢量

单位矢量 $\vec{e}_A=\dfrac{\vec{A}}{A}$　$\vec{A},\vec{B}$夹角：$\cos\theta=\dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$　$\vec{A}$在$\vec{B}$上的分量大小=$\dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{B}|}$

叉乘：$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{e}_nAB\sin\theta$　　$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$

矢量运算：

$$\begin{cases}(\vec{A}+\vec{B})\cdot\vec{C}=\vec{A}\cdot\vec{C}+\vec{B}\cdot\vec{C}\\(\vec{A}+\vec{B})\times\vec{C}=\vec{A}\times\vec{C}+\vec{B}\times\vec{C}\end{cases}\qquad\Delta\begin{cases}\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})=\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})\\\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}\end{cases}$$

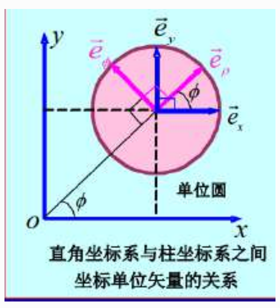
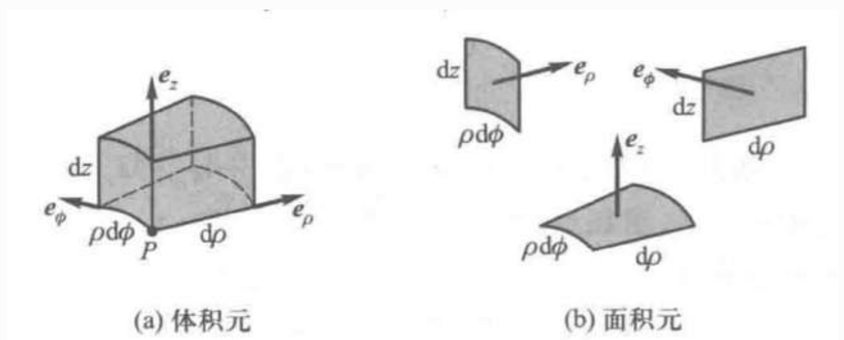
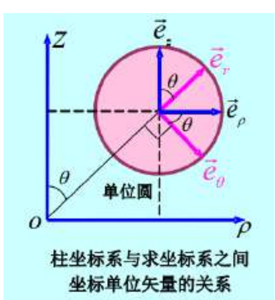
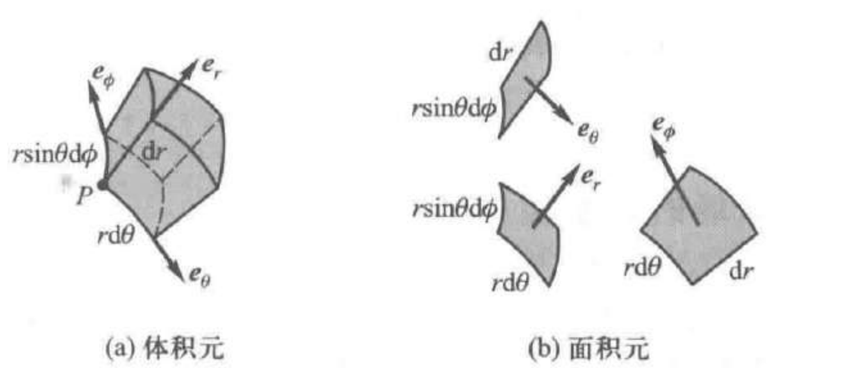
- 闭合面正方向：由内到外
- 开放面：边沿方向右手螺旋

坐标系

把通常认识的φ就是ϕ，两种写法都行

单位矢量顺序叉乘方向关系，$\rho\cos\phi=x$　$\rho\sin\phi=y$　$r\sin\theta=\rho$　$r\cos\theta=z$

除了e_x,e_y,e_z，其他的$e_\rho,e_\phi,e_r,e_\theta$方向都是不确定的，不是常矢量

圆柱坐标系 ρ,ϕ,z			**体积元：** $\mathrm{d}V=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z$ **面积元：** $\mathrm{d}\vec{S}=\vec{e}_z\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi$
球坐标系 r,θ,ϕ			体积元： $\mathrm{d}V=r^2\sin\theta\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$ 面积元： $\mathrm{d}\vec{S}=\vec{e}_rr^2\sin\theta\,\mathrm{d}\,\theta\,\mathrm{d}\,\phi$

梯度

标量场的梯度是矢量场，描述标量函数在某点的**最大变化率**及其变化最大的方向$\vec{e}_l$，方向垂直于通过该点的等值面（或切平面，相当于表面的法向量）

> 标量场在某个方向上的方向导数，是梯度在该方向上的投影

$\mathrm{grad}\, u = \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) u = \nabla u \rightarrow$ 直角坐标系 $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

> 圆柱坐标系 $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial (\rho F_\rho)}{\rho \partial \rho} + \frac{\partial F_\phi}{\rho \partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
>
> 球坐标系 $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta F_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi}(F_\phi)$

柱坐标系：$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho \vec{e}_\phi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\phi & F_z \end{vmatrix}$ 球坐标系：$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & r\sin\theta \vec{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ F_r & rF_\theta & r\sin\theta F_\phi \end{vmatrix}$

方向导数：$\frac{\partial u}{\partial l} = \nabla u \cdot \vec{e}_l$ 这之后的计算中：$\nabla^2 F = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})F$ **不能分开一次次求！！！**

梯度运算规则：

标量：$\begin{cases} \nabla(u \pm v) = \nabla u \pm \nabla v \quad \nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v \\ \nabla\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v^2}(v\nabla u - u\nabla v) \quad \nabla f(u) = f'(u)\nabla u \end{cases}$ 矢量：$\begin{cases} \nabla \cdot (f\vec{F}) = f\nabla \cdot \vec{F} + \vec{F} \cdot \nabla f \\ \nabla \cdot (\vec{F} \pm \vec{G}) = \nabla \cdot \vec{F} \pm \nabla \cdot \vec{G} \\ \nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A \end{cases}$ 若为叉乘将 · 换成 ×

通量 $\Phi = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ 散度 $\mathrm{div}\, \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$

对于闭合曲面，穿出为正，穿入为负 流出单位体积元封闭面的通量

代表了净元的数量，等于0可能是没有矢量线或者净穿过为0；

环流 $\Gamma = \oint_C \vec{F}(x,y,z) \cdot d\vec{l} = \int P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ 旋度 $\mathrm{rot}\, \vec{F} = \nabla \times \vec{F}$

斯托克斯定理 $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$ 散度定理 $\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{F} dV$

矢量场的旋度的散度恒为零

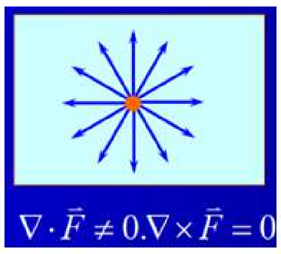
$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) \equiv 0$$

标量场的梯度的旋度恒为零

$$\nabla \times (\nabla u) \equiv 0$$

散度旋度的区别

无旋有散场
仅有散度源而无旋度源的矢量场



$$\nabla\times\vec{F}\equiv0$$

$$\oint_C \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0(\text{环流为0})$$

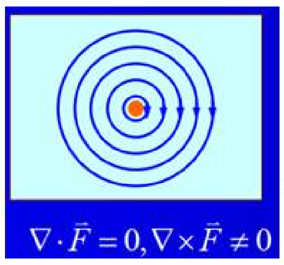
线积分与路径无关，是保守场

无旋场可以用标量场的梯度表示(符号代表方向)

$$\vec{F}=-\nabla u \qquad \nabla\times\vec{F}=-\nabla\times(\nabla u)\equiv0$$

典例：静电场 $\nabla\times\vec{E}\equiv0\Rightarrow\vec{E}=-\nabla\varphi$

有旋无散场
仅有旋度源而无散度源的矢量场



$$\nabla\cdot\vec{F}\equiv0$$

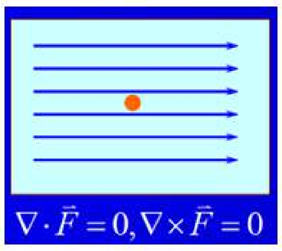
$$\oint_S \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0(\text{通量为0})$$

无散场可以用另一个矢量场的旋表示

$$\vec{F}=\nabla\times\vec{A} \qquad \nabla\cdot\vec{F}=\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})\equiv0$$

典例：恒定磁场 $\nabla\cdot\vec{B}=0\Rightarrow\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$

无散无旋场
源在所讨论的区域之外



典例：
恒定
电场

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{F}=0\to\vec{F}=-\nabla u\\ \nabla\cdot\vec{F}=0\to\nabla\cdot(-\nabla u)=0\end{cases}\to\nabla^2u=0$$

标量的梯度为矢量
矢量的梯度为标量

矢量场旋度的散度为0
标量场梯度的旋度为0

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{F})\equiv0 \qquad \nabla\times(\nabla u)\equiv0$$

亥姆赫兹定理

在有限的区域V内，任一矢量场由它的散度、旋度和边界条件（即限定区域V的闭合曲面S上的矢量场的分布）唯一确定

一个矢量场可以表示为无散场和无旋场的叠加（无限空间中的矢量场可以由其散度和旋度确定）

电流

电荷产生电场，电流产生磁场

电荷（习题2.1，注意面积的写法，球坐标系$dS=r^2\sin\theta d\theta d\phi$）

存在的形式（四种）：点电荷、 体分布电荷、 面分布电荷、 线分布电荷 $\rho_s(\boldsymbol{r},t)=\rho(\boldsymbol{r},t)\lim\limits_{h\to0}h$

> 在$\rho(\vec{r})$为有限值的表面上,其$\rho_s(\vec{r})$必然为零，而在$\rho_s(\vec{r})$不为零的表面上，其$\rho(\vec{r})$的值则为无穷大
>
> 同理$\rho_l(\vec{r})$为有限时，$\rho_s(\vec{r}),\rho(\vec{r})$也为无穷大

电流

电荷的定向运动，电流为是一个标量，电流方向为正电荷的流动方向 $i=\lim\limits_{\Delta t\to0}(\Delta q/\Delta t)=\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$ 单位为A

电荷运动不随时间变化的电流称为恒定电流，用I 表示（线电流无密度，就为I)

电流密度

单位：$J\ A/m^2\quad J_S\ \ A/m$

$\vec{e}_n$为正电荷运动的方向 $\vec{e}_t=\vec{e}_\text{n}\times\vec{e}_l\quad \mathrm{dq}=\rho v\mathrm{dSdt}\to J=\dfrac{dq}{dSdt}=\rho v$ (习题2.3，注意方向)

环形电流 $\vec{v}=\vec{w}\times\vec{r}=\vec{e}_z\times\vec{e}_rwr=\vec{e}_\phi wr\sin\theta$

> 存在多种不同带电粒子时，可能会出现$\rho=0$但$\vec{J}\neq0$的情况；
>
> $\rho=\rho_++\rho_-=0,J=\rho_+v_++\rho_-v_-=\rho_+(v_+-v_-)\neq0$

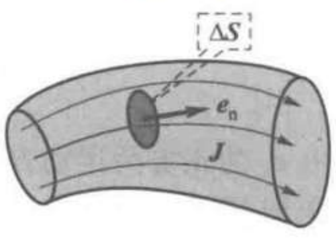
体电流密度
(体电流的面密度)

$$\vec{J}=\rho\vec{v}$$

电流元不是计算电流的基本单位，单位非A

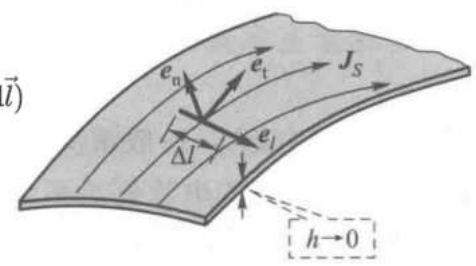
$$\vec{J}_S=\rho_S\vec{v}$$

面电流密度
(面电流的线密度)



$$i=\int_S\vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$i=\int_l\vec{J}_S\cdot(\vec{e}_\text{n}\times\mathrm{d}\vec{l})$$



体和面电流密度的关系参考电荷，在$\vec{J}$为有限值的表面上,其$\vec{J}_s$必然为零，而在$\vec{J}_S$不为零的表面上，其$\vec{J}$的值则为无穷大，联系后面边界条件时$J=\sigma E$来判断分界面是否有J_S

电流连续性方程

流出闭曲面S 的电流等于体积V内单位时间所减少的电荷量

积分形式：$\oint_S \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=-\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho \mathrm{d}V$ 微分形式：$\nabla\cdot\vec{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$

全电流连续性方程：$\nabla\cdot\left(\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)=0$ $(\rho=\nabla\cdot\vec{D})$

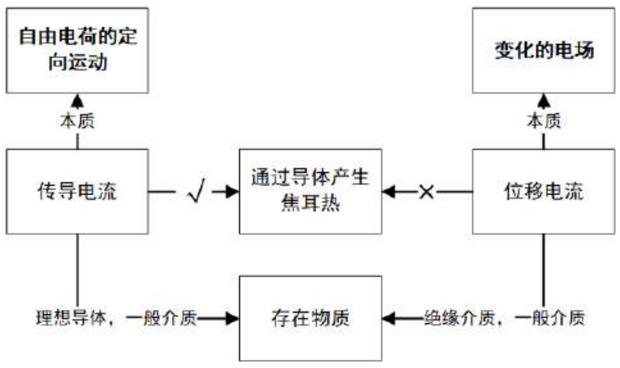
恒定电流（稳恒电流）的连续性方程 $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0\Rightarrow\nabla\cdot\vec{J}=0$

> 散度为0表示恒定电流是**无散场**，电流线是**连续的闭合曲线**，既无起点也无终点

全电流定律

法拉第电磁感应定律的微分形式：$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ （感应电场是涡旋电场，感应电场线是闭合曲线）

对恒定磁场安培环路定律（$\nabla\times\vec{B}=\mu\vec{J}$）的修正（时变电磁场不适用）



修正后：$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ （**自由空间**$\vec{J}=0$）位移电流密度：$\vec{J}_\mathrm{d}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

时谐电磁场中传导电流和位移电流的相位差为90°

> 传导电流密度：$\vec{J}=\sigma\vec{E}$，位移电流密度：$\vec{J}_\mathrm{d}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=jw\vec{D}$ 一个j为90°相位

6.2 自由空间的磁场强度为$\vec{H}=\vec{e}_x H_\mathrm{m}\cos(\omega t-kz)$ $(\mathrm{A/m})$ 式中的 k 为常数。试求：位移电流密度和电场强度。

解 自由空间的传导电流密度为0，故由式$\boxed{\nabla\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}}$，得

$$\begin{aligned}\vec{J}_\mathrm{d}&=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\nabla\times\vec{H}=(\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z})\times\vec{e}_x H_x\\&=\vec{e}_y\frac{\partial H_x}{\partial z}=\vec{e}_y\frac{\partial}{\partial z}[H_\mathrm{m}\cos(\omega t-kz)]\\&=\vec{e}_y kH_\mathrm{m}\sin(\omega t-kz)\quad(\mathrm{A/m^2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boxed{\vec{E}=\frac{\vec{D}}{\varepsilon_0}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\mathrm{d}t}&=\frac{1}{\varepsilon_0}\int\vec{e}_y kH_\mathrm{m}\sin(\omega t-kz)\mathrm{d}t\\&=-\vec{e}_y\frac{k}{\omega\varepsilon_0}H_\mathrm{m}\cos(\omega t-kz)\quad(\mathrm{V/m})\end{aligned}$$

静态电磁场

电荷是静电场的散度源，恒定电流是产生恒定磁场的涡旋源；恒定电流产生的磁场称为恒定磁场

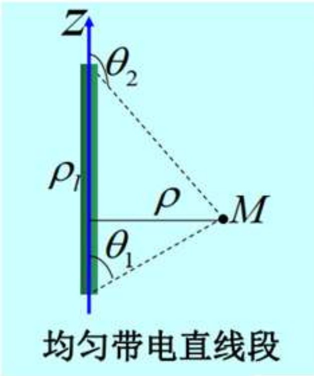
静电场的散度（微分形式）	$\nabla\cdot\vec{E}(\vec{r})=\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon}$ $\nabla\cdot\vec{D}(\vec{r})=\rho(\vec{r})$	**静电场的旋度（微分形式）**	$\nabla\times\vec{E}(\vec{r})=0$
高斯定律（积分形式）	$\oint_S\vec{E}(\vec{r})\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon}q\Big\|_{S内}$	静电场的环流（积分形式）	$\oint_C\vec{E}(\vec{r})\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0$

恒定磁场的散度（微分形式）	$\nabla\cdot\vec{B}(\vec{r})=0$	**恒定磁场的旋度（微分形式）**	$\nabla\times\vec{B}(\vec{r})=\mu\vec{J}(\vec{r})$
磁通连续性原理（积分形式）	$\oint_S\vec{B}(\vec{r})\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0$	**安培环路定理**（积分形式）	$\oint_C\vec{B}(\vec{r})\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 I$

B为磁感应强度矢量，H为磁场强度矢量

> 安培环路定理：环路上任一点的磁感应强度B是所有电流(无论是否穿过环路)所激发的场在该点叠加后的总磁感应强度
>
> 同理高斯定理；

均匀带电直线段

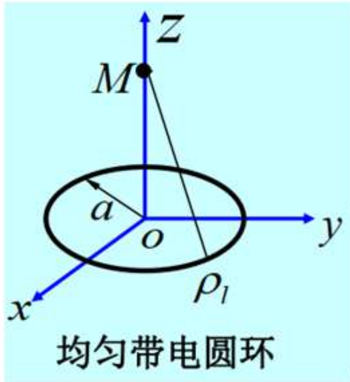


有限长：
$$\begin{cases}\vec{E}_\rho = \vec{e}_\rho \dfrac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0 \rho}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \\ \vec{E}_z = \vec{e}_z \dfrac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0 \rho}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)\end{cases}$$

$$\vec{B} = \vec{e}_\phi \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

无限长：$E_\rho = \dfrac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 \rho}$ $\quad \vec{B} = \vec{e}_\phi \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$

均匀带电圆环轴线



$$E_z(0,0,z) = \frac{a\rho_l z}{2\varepsilon_0(a^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\vec{B}(0,0,z) = \vec{e}_z \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}$$

$z=0:\quad \vec{B}(0) = \vec{e}_z \dfrac{\mu_0 I}{2a}$

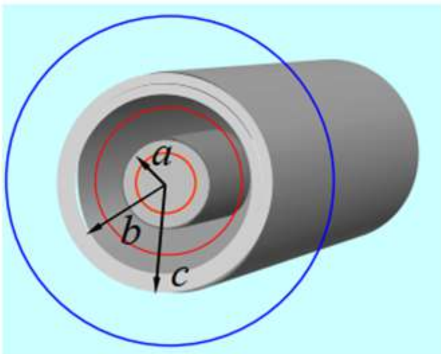
$z \gg a:\quad \vec{B} = \vec{e}_z \dfrac{\mu_0 I a^2}{2z^3}$

无限大带电平面 $\vec{E} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z$

无限大电流薄板 $\vec{B} = \vec{e}\dfrac{\mu J_s}{2}$

真空中均匀带电球体的场强分布
$$\begin{cases}\vec{E} = \vec{e}_r \dfrac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r^2} & (r \geq a) \\ \vec{E} = \vec{e}_r \dfrac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0} & (r \geq a)\end{cases}$$

无限大同轴电缆



$0 \leq \rho < a$

取安培环路 $(\rho < a)$ 交链的电流为$I_1 = \dfrac{I}{\pi a^2}\cdot \pi\rho^2 = I\dfrac{\rho^2}{a^2}$ $\quad \vec{B}_1 = \vec{e}_\phi \dfrac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2}$

$a \leq \rho < b \quad \vec{B}_2 = \vec{e}_\phi \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$

$b \leq \rho < c \quad I_3 = I - I\dfrac{\rho^2 - b^2}{c^2 - b^2} = I\dfrac{c^2-\rho^2}{c^2-b^2} \quad \vec{B}_3 = \vec{e}_\phi \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\cdot\dfrac{c^2-\rho^2}{c^2-b^2}$

$c \leq \rho < \infty \quad \vec{B}_4 = 0$

若内、外导体间的电压为U
在(a,b)范围内电场大小为：

$$\vec{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_r \quad U = \int_a^b E dr = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a} \to \rho_l = \frac{2\pi\varepsilon_0 U}{\ln\frac{b}{a}} \to \vec{E} = \frac{U}{r\ln\frac{b}{a}}\vec{e}_r$$

边界条件

在不同媒质的分界面上电磁场量发生突变或不连续，边界条件只能由积分形式的麦克斯韦方程导出

电磁场在理想导体内部为0，以下1,2为从煤质2入射煤质1（正方向的放前面）

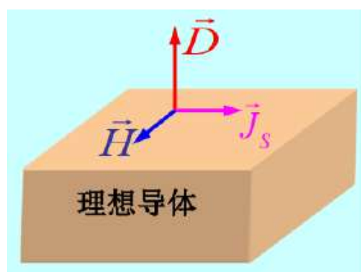
边界条件一般表达式：
$$\begin{cases}\vec{e}_n \times \left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right) = \vec{J}_S \\ \vec{e}_n \times \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right) = 0 \\ \vec{e}_n \cdot \left(\vec{B}_1 - \vec{B}_2\right) = 0 \\ \vec{e}_n \cdot \left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right) = \rho_S\end{cases}$$

> 在$\vec{J}$为有限值的表面上,其$\vec{J}_S$必然为零，而在$\vec{J}_S$不为零的表面上，其$\vec{J}$的值则为无穷大 $\quad \vec{J} = \sigma E \quad \sigma = \infty$时$J_S$存在值

电场切向，磁场法向始终连续；**电位移矢量的连续性只与自由电荷面密度有关（电位移矢量不会起始和终止于极化电荷）**

理想导体内部电磁场均为0（$J = \sigma E$可知非0为无穷）导电媒质等于有耗煤质

理想介质表面D连续：没有自由移动的电子

两种导电媒质分界面的边界条件 (σ为有限值，$J_S = 0$)	理想介质分界面上的边界条件 ($\sigma = 0$)	理想导体表面上的边界条件 ($\sigma = \infty$)	煤质2为理想导体
$\begin{cases}\vec{H}_{1t} = \vec{H}_{2t} \\ \vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t} \\ \vec{B}_{1n} = \vec{B}_{2n} \\ \vec{D}_{1n} - \vec{D}_{2n} = \rho_S\end{cases}$	没有电荷和电流分布J_S、$\rho_S = 0$ $\begin{cases}\vec{H}_{1t} - \vec{H}_{2t} = 0 \\ \vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t} \\ \vec{B}_{1n} = \vec{B}_{2n} \\ \vec{D}_{1n} - \vec{D}_{2n} = 0\end{cases}$	$\begin{cases}\vec{e}_n \times \vec{H}_1 = \vec{J}_S \\ \vec{e}_n \times \vec{E} = 0 \\ \vec{e}_n \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{e}_n \cdot \vec{D}_1 = \rho_S\end{cases}$	

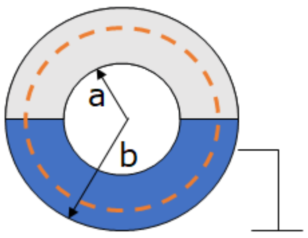
静电场

一般边界条件$\begin{cases} D_{1\mathrm{n}} - D_{2\mathrm{n}} = \rho_S \\ E_{1\mathrm{t}} - E_{2\mathrm{t}} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \varepsilon_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \varepsilon_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \rho_S \\ \varphi_1 = \varphi_2 \end{cases}$ 正方向的那个放前面

电场只存在于导电媒质以外的电介质中，导电媒质内部不存在电场

电位函数

$\vec{E} = -\nabla\varphi$ $\varphi(\vec{r})$ 称为静电场的标量电位函数或简称电位 $\varphi(P) = \int_P^Q \vec{E} d\vec{l}$ $\varphi(Q) = 0$



例 球形电容器的内导体的半径为a，外导体内半径为b，其间填充介电常数分别为ε_1和ε_2的两种均匀介质，如图所示：设内球带电荷为q，外球壳接地，

求：两球壳间的电场和电位分布：

解：由于电场方向沿径向，所以在介质1与介质2的分界面上，电场与分界面平行，即为切向分量。根据边界条件知：

$\bar{E}_1 = \bar{E}_2$但$\bar{D}_1 \neq \bar{D}_2$

$\oint_s \bar{D} \cdot d\bar{S} = 2\pi r^2 (D_1 + D_1) = q \quad (a < r < b)$

由$\bar{D}_1 = \varepsilon_1 \bar{E}_1, \bar{D}_2 = \varepsilon_2 \bar{E}_2$以及$\bar{E}_1 = \bar{E}_2 = \bar{E}$

$$2\pi r^2 (\varepsilon_1 \bar{E} + \varepsilon_2 \bar{E}) = q$$

$$\Rightarrow \bar{E}(r) = \bar{e}_r \frac{q}{2\pi r^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \qquad (a < r < b)$$

$$\boxed{\varphi(r) = \frac{q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \int_r^b \frac{1}{r^2} dr}$$

$$= \frac{q(b-r)}{2\pi b r (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \qquad (a < r < b)$$

在**均匀介质区域**中$\nabla^2\varphi = -\rho/\varepsilon$ (标量泊松方程) **在无源区域**$\rho = 0$，得到拉普拉斯方程：$\nabla^2\varphi = 0$

例题：两块无限大接地导体平板分别置于$x = 0$和$x = a$处,在两板之间的$x = b$处有一面密度为ρ_{s0}的均匀电荷分布(习题3.7)

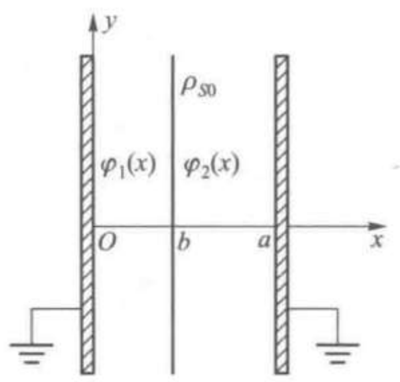


图 3.1.4 两块无限大平行板

解: 在两块无限大接地导体平板之间, 除 $x = b$ 处有均匀面电荷分布外,其余空间均无电荷分布, 故电位函数满足一维拉普拉斯方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\varphi_1(x)}{\mathrm{d}x^2} = 0 \quad (0 < x < b) \\ \dfrac{\mathrm{d}^2\varphi_2(x)}{\mathrm{d}x^2} = 0 \quad (b < x < a) \end{cases}$$

方程的通解为$\begin{cases} \varphi_1(x) = C_1 x + D_1 \\ \varphi_2(x) = C_2 x + D_2 \end{cases}$ **利用边界条件**得：(最后一条的符号是因为电位函数方向导致的$\vec{E} = -\nabla\varphi$)

$x = 0$ 处, $\varphi_1(0) = 0, x = a$ 处, $\varphi_2(a) = 0, x = b$ 处, $\varphi_1(b) = \varphi_2(b)$, $\left[\dfrac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x} - \dfrac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x}\right]_{x=b} = -\dfrac{\rho_{s0}}{\varepsilon_0}$

如果介电常数不一样就要变成$\left[\varepsilon_2 \dfrac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x} - \varepsilon_1 \dfrac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x}\right]_{x=b} = -\rho_{s0}$

恒定电场

如果**将导电媒质与电源的两极相连接**，且**维持两电极间的电压不变**，则**导电媒质内将存在一个不随时间变化的电场**，称为恒定电场（无散无旋）

恒定电场是**电荷分布不随时间变化**的运动电荷产生的电场，而不是静止电荷产生的电场，$\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{J} = 0$

> 流入或流出闭合面的总电流为0

本构关系：$\vec{J} = \sigma \vec{E} (\vec{D} = \varepsilon E)$

一般边界条件：$\begin{cases} J_{1n}-J_{2n}=0 \\ E_{1t}-E_{2t}=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \varphi_1=\varphi_2 \\ \sigma_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\sigma_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n} \end{cases}$ （满足：$D_{1n}-D_{2n}=\rho_S$）

边界面上$\rho=0$的条件：$\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}=\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$

三、计算题（15 分）如图所示，无限长直导体圆柱由电导率不相同的两层均匀导电媒质构成，内层导体的半径$r_1=a$，电导率$\sigma_1=3\sigma_0$，磁导率$\mu_1=\mu_0$，外层导体的外半径$r_2=2a$，电导率 $\sigma_1=\sigma_0$，磁导率$\mu_2=\mu_0$。导体圆柱中流过的总电流为I，试求导体圆柱中各区域的电场强度和磁场强度。

解：（1）依据题意，电场方向与电流方向相同，设为$\vec{e}_z$

在两层导电媒质的分界面处，电场的切向分量连续 （1 分）

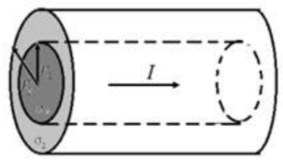
即电场在导电媒质中处处连续， 即

$\vec{E}_1=\vec{E}_2=E\vec{e}_z$ （2 分）

$I=\pi a^2J_1+\pi 3a^2J_2$ （1 分）

$I=\pi a^2\sigma_1E+\pi(b^2-a^2)\sigma_2E=(3\pi a^2\sigma_0+3\pi a^2\sigma_0)\ E$ （2 分）

$\vec{E}=\dfrac{I}{6\pi a^2\sigma_0}\vec{e}_z$ （$r\le 2a$） （3 分）



（2）依题意，磁场为平行平面场，方向为$\vec{e}_\varphi$

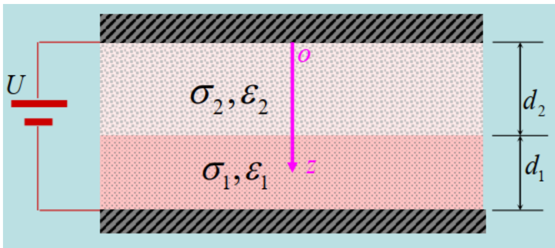
导体中的电流分布$J_1=\sigma_1E=3\sigma_0E=\dfrac{I}{3\pi a^2}$，$J_2=\sigma_2E=\sigma_0E=\dfrac{I}{6\pi a^2}$ （2 分）

利用安培环路定理

$\oint\vec{H}_1\cdot d\vec{l}=J_1\pi r^2\Rightarrow\vec{H}_1=\dfrac{Ir}{6\pi a^2}\vec{e}_\varphi$ （$r\le a$） （2 分）

$\oint\vec{H}_2\cdot d\vec{l}=J_2(\pi r^2-\pi a^2)+J_1\pi a^2\Rightarrow\vec{H}_1=(\dfrac{Ir}{12\pi^2a^2r}(\pi r^2-\pi a^2)+\dfrac{I}{6\pi r})\vec{e}_\varphi$ （$a<r\le 2a$）

例：一个有两层介质的平行板电容器，其参数分别为 ε_1 、 σ_1 和 ε_2、σ_2，外加电压 U 。求介质面上的自由电荷密度。



极板是理想导体，为等位面，电流沿z方向

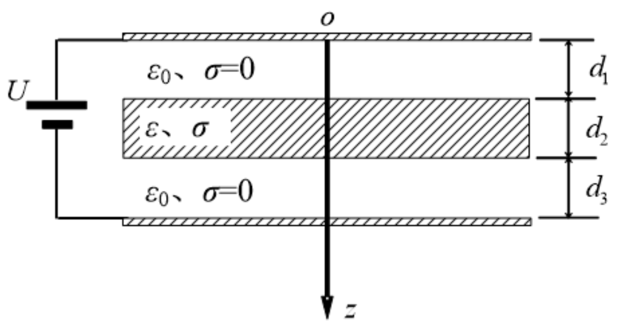
由 $J_{1n}=J_{2n}\Rightarrow J_1=J_2=J$

由$E_1=\dfrac{J_1}{\sigma_1}=\dfrac{J}{\sigma_1},E_2=\dfrac{J_2}{\sigma_2}=\dfrac{J}{\sigma_2}\Rightarrow U=U_1+U_2=E_1d_1+E_2d_2=\left(\dfrac{d_1}{\sigma_1}+\dfrac{d_2}{\sigma_2}\right)J\Rightarrow J=U/\left(\dfrac{d_1}{\sigma_1}+\dfrac{d_2}{\sigma_2}\right)$

由$D_{1n}-D_{2n}=\rho_S\Rightarrow\quad\rho_S=\left(\dfrac{\varepsilon_1}{\sigma_1}-\dfrac{\varepsilon_2}{\sigma_2}\right)J=\dfrac{\sigma_2\varepsilon_1-\sigma_1\varepsilon_2}{\sigma_2d_1+\sigma_1d_2}U$

对比下题：

2、如图4所示，平行板电容器中放置一层导电媒质，其参数为ε、σ，外加电压U。上下极板为理想导体，面积均为S，分别带电$\pm q$，忽略边缘效应。试求：1）极板间电场强度矢量和电位移强度矢量；2）介质面上的极化电荷密度；3）外加电流源做功的功率。



注意，这题与中间介质相连的为σ=0的理想介质，导致\rho=0，进而导致D垂轴方向连续

1）电荷均匀分布在极板的内侧，分别为 $\rho_{S上}=q/S$ 和 $\rho_{S下}=-q/S$

根据$\vec{D}$的边界条件，可得$\vec{D}_1=\vec{D}_2=\vec{D}_3=\dfrac{q}{S}\vec{e}_z$， （4 分）

则$\vec{E}_1=\dfrac{q}{\varepsilon_0S}\vec{e}_z$、$\vec{E}_2=\dfrac{q}{\varepsilon S}\vec{e}_z$、$\vec{E}_3=\dfrac{q}{\varepsilon_0S}\vec{e}_z$ （3 分）

2）在介质中，$\vec{P}_2=\vec{D}_2-\varepsilon_0\vec{E}_2=(\varepsilon-\varepsilon_0)\vec{E}_2=\vec{e}_z\dfrac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon S}q$

则 $\rho_{SP上}=-\vec{e}_z\cdot\vec{P}_2=-P_2=-\dfrac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon S}q$

$\rho_{SP下}=\vec{e}_z\cdot\vec{P}_2=P_2=\dfrac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon S}q$ （6 分）

3）极板间的电流为：$I=0$

则外加电流源做功的功率为：$P=UI=0$ （2 分）

做功只需要考虑传导电流。位移电流不做功

恒定磁场

由恒定电流产生,无源有旋场

一般边界条件：$\begin{cases} B_{1n}-B_{2n}=0 \\ H_{1t}-H_{2t}=J_S \end{cases}$ 矢量磁位的边界方程：$\vec{A}_1=\vec{A}_2\rightarrow A_{1t}=A_{2t},A_{1n}=A_{2n}$

矢量磁位

$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$ $\vec{A}(\vec{r})$称为矢量磁位或简称磁矢位 单位 T·m

在恒定磁场中通常规定$\nabla\cdot\vec{A}=0$，并称为库仑规范 **矢量泊松方程** $\nabla^2\vec{A}=-\mu\vec{J}$

洛伦兹规范：$\nabla\cdot\vec{A}=-\mu\varepsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$

在无源区：$\vec{J}=0$，得到矢量拉普拉斯方程$\nabla^2\vec{A}=0$

镜像法

镜像法的理论依据是唯一性定理

煤质响应

媒质对电磁场的响应可分为三种情况：**极化、 磁化和传导**

极化磁化

f代表自由电荷，p为极化，m为磁化

极化（磁化）强度的大小与介质材料有关，也与外加场的强度（E，B）有关；

导体内部无极化磁化矢量，介质内部有

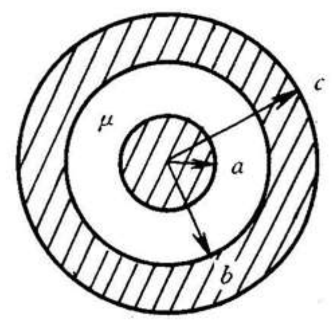
> ε单位为F/m，μ单位为

极化	**磁化**
介质极化后，将在空间中产生额外的电场$\vec{E}_P$ $\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}_P$	介质磁化后, 将在空间中产生额外的磁场 $\vec{B}_M$ $\vec{B}=\vec{B}_0+\vec{B}_M$
对于**线性、各向同性介质**，$\vec{P}$与$\vec{E}$成正比（非恒成立） 即 $\vec{P}=\chi_e\varepsilon_0\vec{E}$，$\chi_e=\varepsilon_r-1$ $\vec{P}=\varepsilon\vec{E}-\varepsilon_0\vec{E}$	对于**线性、各向同性介质**, $\vec{M}$ 与 $\vec{H}$ 成正比（非恒成立） 即$\vec{M}=\chi_m\vec{H}$，$\chi_m=\mu_r-1$ $\vec{M}=(\mu_r-1)\vec{H}$
极化体电荷密度：$\rho_P=-\nabla\cdot\vec{P}$ 极化面电荷密度：$\rho_{SP}=\vec{P}\cdot\vec{e}_\mathrm{n}$（这个$\vec{e}_n$是介质表面） 自由电荷面密度：$\rho_S=\vec{e}_n\cdot\vec{D}$（这个$\vec{e}_n$是导体表面） 相差一个符号原因是极化体电荷表征剩余量，面电荷表征流出量	磁化体电流密度：$\vec{J}_M=\nabla\times\vec{M}$ 磁化面电流密度：$\vec{J}_{SM}=\vec{M}\times\vec{e}_\mathrm{n}$（这个$\vec{e}_n$是介质表面） 极化为 · 磁化为 × ， 体为加梯度，面为加法向量；
电位移矢量定义：$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$（定义式始终成立）	磁场强度$\vec{H}=\dfrac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}$ 形式：$\vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M})$ 始终成立
$\oint_S\vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=q_f$ $\nabla\cdot\vec{D}=\rho_f$（始终成立）	$\oint_C\vec{H}(\vec{r})\cdot\mathrm{d}\vec{l}=I$ $\nabla\times\vec{H}(\vec{r})=\vec{J}(\vec{r})$

$\nabla\cdot\vec{D}=\nabla\cdot(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P})=\varepsilon_0\nabla\cdot\dfrac{\vec{D}}{\varepsilon}+\nabla\cdot\vec{P}\rightarrow(1-\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\rho=\nabla\cdot\vec{P}$ **（求解自由电荷密度）**

极化	磁化
$q_f \to \vec{D} \to \vec{E} \to \vec{P} \to \rho_{Sp} \quad (\rho_p)$	$\vec{J}/I \to \vec{H} \to \vec{B} \to \vec{M} \to \vec{J}_M \quad (\vec{J}_{SM})$
$\begin{cases} \oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = q_f & (1) \\ \vec{D} = \varepsilon_0(1+\chi_\mathrm{e})\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}\vec{E} = \varepsilon\vec{E} & (2) \\ \vec{P} = \chi_\mathrm{e}\varepsilon_0\vec{E} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E} & (3) \\ \rho_{Sp} = \vec{P}\cdot\vec{e}_\mathrm{n}, \rho_p = -\nabla\cdot\vec{P} & (4) \end{cases}$	$\begin{cases} \oint_C \vec{H}(\vec{r})\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \vec{J}(\vec{r})\cdot \mathrm{d}\vec{S} = I & (1) \\ \vec{B} = \mu_0(1+\chi_\mathrm{m})\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H} = \mu\vec{H} & (2) \\ \vec{M} = \chi_m\vec{H} = \dfrac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} & (3) \\ \vec{J}_M = \nabla\times\vec{M} \qquad \vec{J}_{SM} = \vec{M}\times\vec{e}_n & (4) \end{cases}$
极化率χ_e无量纲($\chi_e = \varepsilon_r - 1$) 介电常数$\varepsilon$有量纲	磁化率χ_m无量纲($\chi_m = \mu_r - 1$) 磁导率μ有量纲

4.3同轴线的内导体半径为*a*，外导体的内半径为*b*，外半径为*c*，设内、外导体分别流过反向的电流I，两导体之间介质的磁导率为*μ*，求各区域的*H*、*B*、*M*。



解：以后如无特别声明，对良导体(不包括铁等磁性物质)一般取其磁导率为μ_0，

因同轴线为无限长，则其磁场沿轴线无变化，该磁场只有ϕ分量，且其大小只是r的函数。分别在各区域使用介质中的安培环路定律 $\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = \oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$

当$r \le a$时，电流I在导体内均匀分布，且流向+z方向。

$$\vec{H} = \vec{e}_\phi \frac{Ir}{2\pi a^2} \qquad \vec{B} = \vec{e}_\phi \frac{\mu_0 Ir}{2\pi a^2} \qquad \boxed{\vec{M} = 0}$$

当$a<r\le b$时，与积分回路交链的电流为*I*，该区磁导率为μ，得

$$\vec{H} = \vec{e}_\phi \frac{I}{2\pi r} \qquad \vec{B} = \vec{e}_\phi \frac{\mu I}{2\pi r} \qquad \boxed{\vec{M} = \vec{e}_\phi \frac{\mu-\mu_0}{\mu_0}\frac{I}{2\pi r}}$$

当$b<r\le c$时，考虑到外导体电流均匀分布，可得出与积分回路交链的电流为

$$\vec{H} = \vec{e}_\phi \frac{1}{2\pi r}\frac{c^2-r^2}{c^2-b^2} \qquad \vec{B} = \vec{e}_\phi \mu_0 I \frac{c^2-r^2}{c^2-b^2} \qquad \boxed{\vec{M} = 0}$$

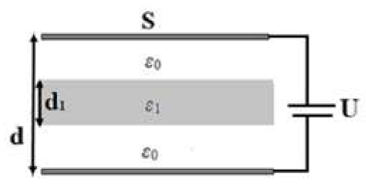
当$r>c$时，这一区域的*B*、*H*、*M*为零。

四、（10分）平行板电容器，极板面积为*S*，两极板间距为*d*，极板间插入介电系数 $\varepsilon_1 = 4\varepsilon_0$，厚度 $d_1 = d/3$ 的理想介质，忽略边缘效应，且外加电压*U*，试计算

（1） 极板上的电荷面密度；

（2） 介质表面的极化电荷面密度；

（3）电容器储存的静电场能量；



解：

（1）依题意，取由上极板指向下极板方向为 $\vec{e}_z$ 方向，电场沿 $\vec{e}_z$ 方向

由于介质为理想介质，在其与自由空间的分界面上不存在面电荷，电位移矢量在电容器内连续分布，设自由空间内为$\vec{D}_1$ 介质内为$\vec{D}_2$ $\quad \vec{D}_1 = \vec{D}_2 = \vec{D}$ （1分）

则有 $\dfrac{D}{\varepsilon_0}\cdot\dfrac{2}{3}d + \dfrac{D}{4\varepsilon_0}\cdot\dfrac{1}{3}d = U \Rightarrow \vec{D} = \dfrac{4\varepsilon_0}{3d}U\vec{e}_z$ （2分）

利用边界条件，在上极板有 $D_1 = \rho_{s1} \Rightarrow \rho_{s1} = \dfrac{4\varepsilon_0}{3d}U$ （1分）

在下极板 $0 - D_1 = \rho_{s2} \Rightarrow \rho_{s2} = -\dfrac{4\varepsilon_0}{3d}U$ （1分）

（2）在介质内有

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E} = \frac{3}{4}\vec{D} = \frac{\varepsilon_0}{d}U\vec{e}_z \qquad (2)$$

在介质板的上表面有 $\rho_{SP1} = \vec{P}\cdot(-\vec{e}_z) = -\dfrac{\varepsilon_0}{d}U$ （1分）

在介质板的下表面有 $\rho_{SP2} = \vec{P}\cdot\vec{e}_z = \dfrac{\varepsilon_0}{d}U$ （1分）

（3） $W = \dfrac{D^2}{2\varepsilon_0}S\cdot\dfrac{2}{3}d + \dfrac{D^2}{8\varepsilon_0}S\cdot\dfrac{1}{3}d = \dfrac{2\varepsilon_0 S}{3d}U^2$ （1分）

例 2.4.2 已知半径为 a_1 的导体球带电荷量为 q，该导体球被内半径为 a_2、外半径为 a_3 的导体球壳所包围，球与球壳间填充介电常数为 ε_1 的均匀电介质，球壳的外表面上敷有一层介电常数为 ε_2 的均匀电介质，介质层的外半径为 a_4，如图 2.4.3 所示。试求：(1) 各区域中的电场强度；(2) 导体表面的自由电荷面密度和介质表面的极化电荷面密度。

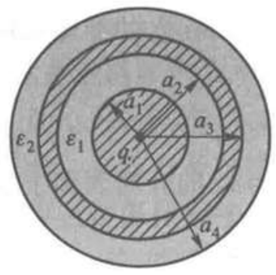


图 2.4.3 同心多层带电球

(2) 在 $r=a_1$ 的导体球面上，$\boxed{\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{e}_r}$，所以自由电荷面密度为

$$\rho_{S1}=\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{D}_1\big|_{r=a_1}=\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{D}_1\big|_{r=a_1}=\frac{q}{4\pi a_1^2}$$

在 $r=a_1$ 的介质表面上，$\boxed{\boldsymbol{e}_n=-\boldsymbol{e}_r}$，所以极化电荷面密度为

$$\rho_{SP1}=\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{P}_1\big|_{r=a_1}=-\boldsymbol{e}_r\cdot(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\boldsymbol{E}_1\big|_{r=a_1}=-\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_0)q}{4\pi\varepsilon_1 a_1^2}$$

在 $r=a_2$ 的导体表面上，$\boxed{\boldsymbol{e}_n=-\boldsymbol{e}_r}$，所以自由电荷面密度为

$$\rho_{S2}=-\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{D}_1\big|_{r=a_2}=-\frac{q}{4\pi a_2^2}$$

在 $r=a_4$ 的介质表面上，$\boxed{\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{e}_r}$，所以极化电荷面密度为

$$\rho_{SP4}=\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{P}_2\big|_{r=a_4}=\boldsymbol{e}_r\cdot(\varepsilon_2-\varepsilon_0)\boldsymbol{E}_2\big|_{r=a_3}=\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_0)q}{4\pi\varepsilon_2 a_4^2}$$

在 $r=a_2$ 的介质表面上，$\boxed{\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{e}_r}$，所以极化电荷面密度为

$$\rho_{SP2}=\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{P}_1\big|_{r=a_2}=\boldsymbol{e}_r\cdot(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\boldsymbol{E}_2\big|_{r=a_2}=\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_0)q}{4\pi\varepsilon_1 a_2^2}$$

在 $r=a_3$ 的导体表面上，$\boxed{\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{e}_r}$，所以自由电荷面密度为

$$\rho_{S3}=\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{D}_2\big|_{r=a_3}=\frac{q}{4\pi a_3^2}$$

在 $r=a_3$ 的介质表面上，$\boxed{\boldsymbol{e}_n=-\boldsymbol{e}_r}$，所以极化电荷面密度为

$$\rho_{SP3}=\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{P}_2\big|_{r=a_3}=-\boldsymbol{e}_r\cdot(\varepsilon_2-\varepsilon_0)\boldsymbol{E}_2\big|_{r=a_3}=-\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_0)q}{4\pi\varepsilon_2 a_3^2}$$

2022 课堂测试1 答案.pdf

传导

媒介的**电导率**σ，单位S/m，西门子是电导的标准单位，电阻的倒数（恒定电场的参数）

线性、各向同性介质（前提） 电流密度矢量和该点的电场强度的关系：$\vec{J}=\sigma\vec{E}$ （**欧姆定律的微分形式**）

电场所做功：$\mathrm{d}W=\mathrm{d}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\rho\,\mathrm{d}V\vec{E}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}t=\vec{J}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t$ （$\vec{J}=\rho\vec{v}$）

整体积V中消耗功率为$P_L=\int_V\vec{J}\cdot\vec{E}dV=\int_V\sigma E^2dV$ (满足线性且各向同性)

如果电导已求则$P=GU^2$

麦克斯韦方程

$\frac{\partial}{\partial t}\to j\omega\quad\frac{\partial^2}{\partial t^2}\to-\omega^2$

积分形式：$\begin{cases}\oint_C\vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_S\vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S}+\int_S\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\\\oint_C\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-\int_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\\\oint_S\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0\\\oint_S\vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int_V\vec{\rho}\mathrm{d}V\\(\oint_S\vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=-\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\rho\mathrm{d}V)\end{cases}$ 微分形式：$\begin{cases}\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\\\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0\\\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho\\\nabla\cdot\vec{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}\end{cases}$

> 如果E,B与时间无关（静态电磁场），电场与磁场不再相关，彼此独立

积分微分式的对应含义：

> 磁场强度沿任意闭合曲线的环量，等于穿过以该闭合曲线为周界的任意曲面的传导电流与位移电流之和；
> 电场强度沿任意闭合曲线的环量，等于穿过以该闭合曲线为周界的任一曲面的磁通量变化率的负值；
> 穿过任意闭合曲面的磁感应强度的通量恒等于零，即磁通连续性；
> 穿过任意闭合曲面的电位移的通量等于该闭合面所包围的自由电荷的代数和（不包括极化电荷）
>
> > 如果改为$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0$ 则ρ代表自由电荷体密度+极化电荷体密度
>
> 传导电流和时变电场要产生磁场，都是磁场的涡旋源

> 若改为：$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ 这里 $\vec{J}$是指传导电流+磁化电流+极化电流

时变磁场要产生电场，是电场的涡旋源；（**法拉第电磁感应定理的微分形式**）

磁场是无散场，磁感应线是闭合曲线；

电荷要产生电场，是电场的散度源

复矢量（时谐电磁场）：$\begin{cases}\nabla\times\vec{H}(\vec{r})=\vec{J}(\vec{r})+j\omega\vec{D}(\vec{r})\\\nabla\times\vec{E}(\vec{r})=-j\omega\vec{B}(\vec{r})\\\nabla\cdot\vec{D}(\vec{r})=\rho(\vec{r})\\\nabla\cdot\vec{B}(\vec{r})=0\end{cases}$ 各向同性煤质本构关系：$\begin{cases}\vec{D}=\varepsilon\vec{E}\\\vec{B}=\mu\vec{H}\\\vec{J}=\sigma\vec{E}\end{cases}$

$\nabla\cdot\vec{J}(\vec{r})=-j\omega\rho(\vec{r})$

时变电磁场

有$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\rightarrow\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\dfrac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{A})$

将电场表示为：$\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\vec{\nabla}\varphi$（静电场中A非时变） 通常来说规定$\nabla\cdot\vec{A}=-\mu\varepsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$ （洛伦兹条件）

时谐电磁场

场源以一定角频率变化呈时谐（正余弦）

实数表示法或瞬时表示法 $A(\vec{r},t)$ 复数表示法$A(\vec{r})$改为实数表示法：$A(\vec{r},t)=\mathrm{Re}\left[A(\vec{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$

> 若为sin 转化，因为$\cos(x-\frac{\pi}{2})=\sin x$，只需在后带上$e^{j(-\frac{\pi}{2})}$ -1代表$e^{j\pi}$

均匀平面波

理论基础：在理想介质无源区$(J,\rho=0)$ 波动方程：$\begin{cases}\vec{\nabla}^2\vec{E}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0\\\vec{\nabla}^2\vec{H}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=0\end{cases}$ 转换为复矢量形式：$\begin{cases}\vec{\nabla}^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0\\\vec{\nabla}^2\vec{H}+k^2\vec{H}=0\end{cases}$

位函数方程（达朗贝尔方程）：$\begin{cases}\vec{\nabla}^2\vec{A}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=0\\\nabla^2\varphi-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0\end{cases}$ 转化为复矢量形式：$\begin{cases}\vec{\nabla}^2\vec{A}+k^2\vec{A}=0\\\nabla^2\varphi+k^2\varphi=0\end{cases}$

两列波的合成波为驻波，则传播方向相反，极化方向相同

传播方向

设波传播方向为：$\vec{e}_k$ 为方便表示定义 **波矢量** $\vec{k}=k\vec{e}_n\rightarrow\vec{E}=\vec{E}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz'}=\vec{E}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}\cdot\vec{r}}$

> 例：$\vec{E}(\vec{r})=\vec{E}_m e^{j(6y+8z)}=\vec{E}_m e^{-j(-6y-8z)}$
>
> $\vec{k}\cdot\vec{r}=k_x x+k_y y+k_z z$，其中$k_x=0,k_y=-6,k_z=-8$，$\vec{k}=-6\vec{e}_y-8\vec{e}_z$
>
> $\vec{e}_n=\dfrac{\vec{k}}{|\vec{k}|}=-\dfrac{3}{5}\vec{e}_y-\dfrac{4}{5}\vec{e}_z\quad k=10$

$\vec{E}$、$\vec{H}$、$\vec{k}$ 三者相互垂直（单位：V/m A/m）

> 由均匀平面波性质$\vec{E}\perp\vec{k}\ \rightarrow\ \vec{E}\cdot\vec{k}=0$

电场与磁场**同相**且振幅差 η 倍(E_{xm}/H_{ym}) 单位为Ω

$\eta=\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}$叫媒质的本征阻抗，也叫波阻抗 真空中$\eta_0=\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=120\pi\approx377\Omega$

理想介质($\sigma=0$)

沿z方向传播的均匀平面波的电场强度E和磁场强度H都没有沿传播方向的分量，即电场强度E和磁场强度H都与波的传播方向垂直，这种波又叫**横电磁波（TEM波）** $(\vec{e}_z\cdot\vec{E}=0,\vec{e}_z\cdot\vec{H}=0)$

沿z方向传播的**均匀平面波其电磁场复矢量解**为：$\vec{E}(z)=\vec{E}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}e^{j\phi}$ $\quad\vec{H}(z)=\vec{H}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}e^{j\phi}$

瞬时解为：$\vec{E}(z,t)=\vec{e}_xE_m\cos(wt-kz),\vec{H}(z,t)=\dfrac{1}{\eta}\vec{e}_z\times\vec{E}(z,t)\quad(\text{or }\vec{E}(z,t)=\eta(\vec{H}\times\vec{e}_z))$ 电场与磁场**同相**且振幅差η倍

导电媒质(σ有限值)

导电媒质中磁场能量大于电场能量（相速与频率有关）**相速随频率增大而减小，随电导率增大而减小**

$\varepsilon_c=\varepsilon-j\dfrac{\sigma}{w}$ 欧姆损耗以复虚部形式反映出来 α衰减常数（单位Np/m） β相位常数（单位rad/m）

磁场的相位比电场相位滞后$\phi=\dfrac{1}{2}\arctan(\dfrac{\sigma}{w\varepsilon})$ $\quad e^{-\alpha z}$是衰减因子（影响振幅, 指数的位置参量要和传播方向一样） $\quad e^{-j\beta z}$为相位因子

	理想介质($\sigma=0$)	**导电媒质**(σ**为有限值**)
相位常数	$k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}=\dfrac{2\pi}{\lambda}=\beta$ $k=\dfrac{w}{c}\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$ **注意自由空间的k** 自由空间$w=kc$	$k_c=\omega\sqrt{\mu\varepsilon_c}=\beta-j\alpha,\ \gamma=\mathrm{j}k_{\mathrm{c}}=\alpha+\mathrm{j}\beta$ $\alpha=\omega\sqrt{\dfrac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}-1\right]}$ $\beta=\omega\sqrt{\dfrac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}+1\right]}$
波长	$\lambda=\dfrac{2\pi}{k}=\dfrac{v_p}{f}=\lambda_0/\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$	$\lambda=\dfrac{2\pi}{\beta}$ 导电媒质是色散媒质
相速	$v_p=\dfrac{w}{k}=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}$	$v_p=\dfrac{w}{\beta}$ 导致色散特性（色散现象：相速随频率变化）
波阻抗	实际计算可利用标准值计算$\eta=\eta_0\sqrt{\dfrac{\mu_r}{\varepsilon_r}}$	$\eta_c=\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon_c}}=\dfrac{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}{\sqrt{1-j\frac{\sigma}{w\varepsilon}}}$
复数	$\vec{E}(z)=\vec{E}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}e^{j\phi}\quad\vec{H}(z)=\vec{H}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}e^{j\phi}$	$\vec{E}(z)=\vec{E}_m\mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}e^{j\phi_x}$ **若为无损媒质**（理想介质）$\alpha=0,k=\beta$，则转为理想介质求解
瞬时	$\vec{E}_x(z,t)=\vec{e}_xE_m\cos(\omega t-kz+\phi_x)$ $H_y(z,t)=\vec{e}_y\dfrac{1}{\eta}E_m\cos(\omega t-kz+\phi_y)$ $\phi_x=\phi_y$	$\vec{E}(z,t)=\vec{e}_xE_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\alpha z}\cos(\omega t-\beta z+\phi_x)$ $\vec{H}(z,t)=\vec{e}_y\dfrac{1}{\lvert\eta_c\rvert}E_x\mathrm{e}^{-\alpha z}\cos(\omega t-\beta z+\phi_x-\phi)$ **磁场的相位比电场相位滞后**$\phi=\dfrac{1}{2}\arctan(\dfrac{\sigma}{w\varepsilon})$

导电媒质的分类

媒质的损耗角正切：对电磁波而言，媒质复介电常数**虚部**的起对电磁波**衰减**的作用。因此对电磁波传播而言，介电常数/磁导率具有虚部的介质也叫**损耗介质**，其虚部与实部的比称为**损耗角正切**

> 电介质$\tan\delta_\varepsilon=\dfrac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$ 磁介质$\tan\delta_\mu=\dfrac{\mu''}{\mu'}$ 导电媒质$\tan\delta_\sigma=\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}$(传导电流与位移电流的比)
>
> 导电媒质的分类：<<1 为弱导电媒质和良绝缘体，≈1 为普通导电媒质， >>1 为良导体

弱导电媒质$\sigma/w\varepsilon\ll1$	**良导体**$\sigma/w\varepsilon\gg1$
$\gamma\approx j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}+\dfrac{\sigma}{2}\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}$	$\gamma\approx\sqrt{\mathrm{j}\omega\mu\sigma}=\sqrt{\omega\mu\sigma}\mathrm{e}^{\mathrm{j}45^\circ}=\sqrt{\dfrac{\omega\mu\sigma}{2}}(1+\mathrm{j})$
$\alpha\approx\dfrac{\sigma}{2}\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}=\dfrac{\sigma}{2}\eta\quad\beta\approx\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$	$\alpha\approx\beta\approx\sqrt{\pi f\mu\sigma}\approx\sqrt{\dfrac{\omega\mu\sigma}{2}}\quad\propto\sqrt{f}$
$\eta_c=\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon_c}}\approx\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}\left(1+j\dfrac{\sigma}{2\omega\varepsilon}\right)$	$\eta_{\mathrm{c}}=\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon_{\mathrm{c}}}}\approx\sqrt{\dfrac{w\mu}{\sigma}}e^{j\frac{\pi}{4}}$
相速$v_p=\dfrac{\omega}{\beta}$ 波长$\lambda=\dfrac{2\pi}{\beta}$	相速: $v=\dfrac{\omega}{\beta}\approx\dfrac{\omega}{\sqrt{\pi f\mu\sigma}}=w\delta\propto\sqrt{f}$ 波长: $\lambda=\dfrac{2\pi}{\beta}\approx\dfrac{2\pi}{\sqrt{\pi f\mu\sigma}}=2\pi\delta\propto1/\sqrt{f}$
相位常数近似于理想介质中的相位常数k	良导体中电磁波的磁场强度的相位滞后于电场强度**45°**

趋肤效应：电磁波的频率越高，衰减系数越大，高频电磁波只能存在于良导体的表面层内，称为趋肤效应

良导体趋肤深度（δ）：$\delta=\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\sqrt{\pi f\mu\sigma}}$

7.3海水的特征参数 $\mu=\mu_0,\varepsilon=81\varepsilon_0,\gamma=4S/m$，已知频率为 $f=100Hz$ 的均匀平面波在海水中沿z轴方向传播，设 $\vec{E}=\vec{e}_xE_x$，其振幅为 $1V/m$

(1) 求衰减系数、相位系数、本征阻抗、相速和波长；

(2) 写出电场和磁场的瞬时表达式 $\vec{E}(z,t)$ 和 $\vec{H}(z,t)$

$f=100Hz$ 时，

$$\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}=\frac{4}{2\pi\times100\times81\varepsilon_0}=\frac{4\times36\pi\times10^9}{200\pi\times81}=8.89\times10^6>>1$$

可见，海水在频率为100Hz时可视为良导体。

$$\alpha\approx\sqrt{\pi f\mu\gamma}=\sqrt{\pi\times100\times4\pi\times10^{-7}\times4}=3.97\times10^{-2}\ Np/m$$

$$\beta\approx\sqrt{\pi f\mu\gamma}=\sqrt{\pi\times100\times4\pi\times10^{-7}\times4}=3.97\times10^{-2}\ rad/m$$

$$\eta_c=\sqrt{\frac{\pi f\mu}{\gamma}}(1+j)=\sqrt{\frac{\pi\times100\times4\pi\times10^{-7}}{4}}(1+j)$$

$$=9.93\times10^{-3}(1+j)=14.04\times10^{-3}e^{j45^0}\Omega$$

$$v=\frac{\omega}{\beta}=\frac{2\pi\times100}{3.97\times10^{-2}}=1.58\times10^4\ m/s \qquad \lambda=\frac{2\pi}{\beta}=\frac{2\pi\times100}{3.97\times10^{-2}}=1.58\times10^2\ m$$

(2) 设电场的初相位为0，故

$$\vec{E}(z,t)=\vec{e}_xE_me^{-\alpha z}\cos(wt-\beta z)$$
$$=\vec{e}_x1\times e^{-3.97\times10^{-2}z}\cos(2\pi\times100t-3.97\times10^{-2}z)V/m$$

$$\vec{H}(z,t)=\vec{e}_y\frac{E_m}{|\eta_c|}e^{-\alpha z}\cos(wt-\beta z-\psi)$$
$$=\vec{e}_y\frac{10^3}{14.04}e^{-3.97\times10^{-2}z}\cos(2\pi\times100t-3.97\times10^{-2}z-45^0)A/m$$

电磁波极化

电磁波的极化状态取决于E_x和E_y的振幅E_{xm}、E_{ym}和相位差 $\Delta\phi=\phi_y-\phi_x$（先把式子中的x项提取至系数为1再看相位差）

$\Delta\phi=0$ or $\pm\pi$为线极化（-号代表π的相位差）； z向波正左极化，负右极化

对+z方向波：（z y-x ）

线极化	圆极化$E_{xm}=E_{ym}$	椭圆极化：一般情况
$\Delta\phi=0$ 在1、3象限； $\Delta\phi=\pm\pi$ 在2、4象限	$\Delta\varphi=\pi/2$ 左旋圆极化 $\Delta\varphi=-\pi/2$ 右旋圆极化	$0<\Delta\varphi<\pi$ 左旋；$-\pi<\Delta\varphi<0$ 右旋

两个振幅不相等的线极化波一定不能合成一个圆极化波（×）

任何两个**同频率**、**同传播方向**且**极化方向互相垂直**的线极化波（振幅大小任意）， 当它们的**相位相同或相差为±π** 时， 其合成波为**线极化波**

任何两个**同频率**、 **同传播方向**且**极化方向互相垂直**的线极化波， 当它们的振幅相同、 **相位差为±π/ 2** 时，其合成波为圆极化波

对于方向多的：$\vec{E}_{\rm m}=\vec{E}_{\rm mR}+{\rm j}\vec{E}_{\rm mI}=\vec{e}_{\rm R}E_{\rm mR}+\vec{e}_I{\rm j}E_{\rm mI}$

E_{mI},E_{mR}中有一个为0 则为线极化 $\vec{e}_R\cdot\vec{e}_I=0$为圆极化（振幅相同）$(\vec{e}_I\times\vec{e}_R)\cdot\vec{e}_k>0$右极化 $(\vec{e}_I\times\vec{e}_R)\cdot\vec{e}_k<0$左极化

例5.2.1 说明下列均匀平面波的极化方式。

换成cos的形式
sin(x-π/2)=cos(x)
j相当于π/2的相位

(1) $\vec{E}=\vec{e}_xE_{\rm m}{\rm e}^{-{\rm j}kz}-\vec{e}_y{\rm j}E_{\rm m}{\rm e}^{-{\rm j}kz}$

(2) $\vec{E}=\vec{e}_xE_{\rm m}\sin(\omega t-kz+\frac{\pi}{4})+\vec{e}_yE_{\rm m}\cos(\omega t-kz-\frac{\pi}{4})$

(3) $\vec{E}=\vec{e}_xE_{\rm m}\sin(\omega t+kz)+\vec{e}_y2E_{\rm m}\cos(\omega t+kz)$

解：

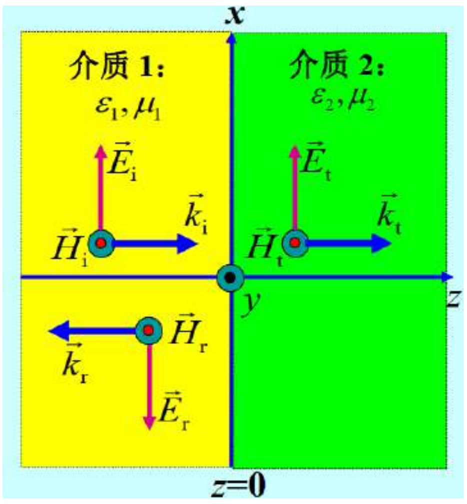
(1) $E_{xm}=E_{ym}$，$\phi_x=0$、$\phi_y=-\frac{\pi}{2}$，$\Delta\phi=-\frac{\pi}{2}$ ⟹ 右旋圆极化波

(2) $\phi_x=-\frac{\pi}{4}$、$\phi_y=-\frac{\pi}{4}$，$\Delta\phi=0$ ⟹ 线极化波

(3) $E_{xm}\neq E_{ym}$，$\phi_x=-\frac{\pi}{2}$、$\phi_y=0$，$\Delta\phi=\frac{\pi}{2}$ ⟹ 左旋椭圆极化波

反射透射

行波：电磁波在空间沿一定方向传播（移动）；驻波：电磁波在空间中不传播，存在驻定的波腹点和波节点；



分界面上的反射系数 $\Gamma = \dfrac{\eta_{2c} - \eta_{1c}}{\eta_{2c} + \eta_{1c}}$ 分界面上的透射系数 $\tau = \dfrac{2\eta_{2c}}{\eta_{2c} + \eta_{1c}}$ $\begin{cases} E_{rm} = \Gamma E_{im} \\ E_{tm} = \tau E_{im} \end{cases}$

反射波能量降为n%，则$\Gamma^2 = n/100$

> 反射系数和透射系数的关系：$\Gamma + 1 = \tau$ Γ范围为[-1,1]

$\eta_2 > \eta_1$ 时, $\Gamma > 0$, 反射波电场与入射波电场同相；当 $\eta_2 < \eta_1$ 时，$\Gamma < 0$，反射波电场与入射波电场反相。

> 光密媒质（$\Gamma < 0$） 在$z = -(n/2 + 1/4)\lambda_1$取最大值，在$z = -n\lambda_1/2$取最小值；
>
> 光疏媒质（$\Gamma > 0$） 在$z = -(n/2 + 1/4)\lambda_1$取最小值，在$z = -n\lambda_1/2$取最大值；

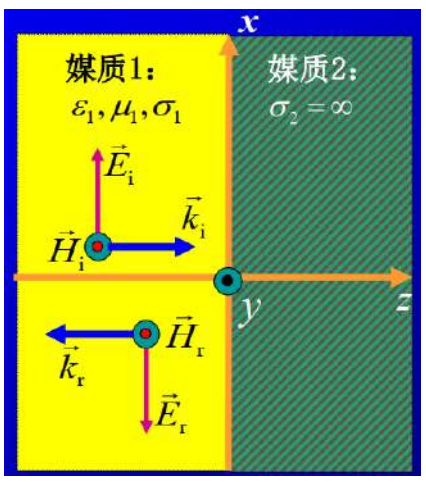
驻波系数(驻波比) $S = \dfrac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \rightarrow |\Gamma| = \dfrac{S - 1}{S + 1}$

- 当 $\Gamma = 0$ 时, $S = 1$, 为行波
- 当 $\Gamma = \pm 1$ 时, $S = \infty$, 是纯驻波
- S 越大, 驻波分量越大，行波分量越小；（入射到理想介质表面，入射区域的合成波为行驻波）

媒质1中的入射波: $\begin{cases} \vec{E}_i(z) = \vec{e}_x E_{im} e^{-\gamma_1 z} \\ \vec{H}_i(z) = \vec{e}_y \dfrac{E_{im}}{\eta_{1c}} e^{-\gamma_1 z} \end{cases}$ 媒质1中的反射波: $\begin{cases} \vec{E}_r(z) = \vec{e}_x E_{rm} e^{\gamma_1 z} \\ \vec{H}_r(z) = -\vec{e}_y \dfrac{E_{rm}}{\eta_{1c}} e^{\gamma_1 z} \end{cases}$ 注意方向的正负号（H的负号是叉乘来的）

媒质2中的透射波: $\begin{cases} \vec{E}_t(z) = \vec{e}_x E_{tm} e^{-\gamma_2 z} \\ \vec{H}_t(z) = \vec{e}_y \dfrac{E_{tm}}{\eta_{2c}} e^{-\gamma_2 z} \end{cases}$

理想导体：（$\sigma \rightarrow \infty$）



在分界面上，**反射波电场与入射波电场的相位差为π**，$E_{rm} = -E_{im}$ 改变传播方向（看在哪个方向上发生反射）

> 由理想导体表面电场所满足的边界条件, 在 z=0 时有$\left[\vec{E}_i(z) + \vec{E}_r(z)\right]_{z=0} = 0$

媒质1中的入射波: $\vec{E}_i(z) = \vec{e}_x E_{im} e^{-j\beta_1 z}$, $\vec{H}_i(z) = \vec{e}_y \dfrac{E_{im}}{\eta_1} e^{-j\beta_1 z}$

媒质1中的反射波: $\vec{E}_r(z) = -\vec{e}_x E_{im} e^{j\beta_1 z}$, $\vec{H}_r(z) = \vec{e}_y \dfrac{E_{im}}{\eta_1} e^{j\beta_1 z}$

合成波：$\vec{E}_i(z) + \vec{E}_r(z)$ $\vec{H}_i(z) + \vec{H}_r(z)$

> **合成波的平均能流密度矢量$\vec{S}_{av}=0$ 合成波为驻波**

因为理想导体内部无电磁场，所以题目说到求总电场磁场就是反射后$z<0$区域内的

边界条件：$\vec{e}_n\times\vec{H}=\vec{J}_S$ 按正常图上情况$\vec{e}_n$为$-\vec{e}_z$ $\vec{J}_S=-\vec{e}_z\times\vec{H}(z)|_{z=0}$ (虽然一开始J_S为0，感应之后又产生)

得 分

七、(15 分) 已知 z<0 区域中有媒质 1（$\sigma_1=0$，$\varepsilon_{r1}=4$，$\mu_{r1}=1$），z>0 区域有媒质 2（$\sigma_2=0$，$\varepsilon_{r2}=9$，$\mu_{r2}=4$），频率为 $f=100\text{MHz}$ 的均匀平面波从媒质 1 垂直入射到分界面上。设入射波为左旋圆极化波，电场振幅为 20V/m。试求：

（1） 入射波的电场和磁场；

（2） 反射波的电场、磁场和极化特性；

（3） 透射波的电场和磁场

解：依题意，电磁波在媒质 1 中的波数 $k_1=\dfrac{2\pi f}{c}\sqrt{\varepsilon_{r1}\mu_{r1}}=\dfrac{2\pi\times10^8}{3\times10^8}\sqrt{4}=\dfrac{4\pi}{3}$ （1 分）

波阻抗 $\eta_1=120\pi\sqrt{\dfrac{\mu_{r1}}{\varepsilon_{r1}}}=60\pi$ （1 分）

在媒质 2 中的波数 $k_2=\dfrac{2\pi f}{c}\sqrt{\varepsilon_{r1}\mu_{r1}}=\dfrac{2\pi\times10^8}{3\times10^8}\sqrt{4\times9}=4\pi$ （1 分）

波阻抗 $\eta_2=120\pi\sqrt{\dfrac{\mu_{r2}}{\varepsilon_{r2}}}=80\pi$ （1 分）

在分界面处 $\Gamma=\dfrac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}=\dfrac{1}{7}$，$\tau=1+\Gamma=\dfrac{8}{7}$ （1 分）

（1）入射波电场和磁场为

$$\vec{E}_i=(\vec{e}_x+j\vec{e}_y)20e^{-jk_1z}=(\vec{e}_x+j\vec{e}_y)20e^{-j\frac{4}{3}\pi z} \quad （2 分）$$

$$\vec{H}_i=\frac{1}{\eta_1}\vec{e}_z\times(\vec{e}_x+j\vec{e}_y)20e^{-jk_1z}=(\vec{e}_y-j\vec{e}_x)\frac{1}{3\pi}e^{-j\frac{4}{3}\pi z} \quad （1 分）$$

（2）反射波电场和磁场为

$$\vec{E}_r=\Gamma(\vec{e}_x+j\vec{e}_y)20e^{jk_1z}=(\vec{e}_x+j\vec{e}_y)\frac{20}{7}e^{j\frac{4}{3}\pi z} \quad （1 分）$$

$$\vec{H}_r=\frac{1}{\eta_1}(-\vec{e}_z)\times\frac{1}{7}(\vec{e}_x+j\vec{e}_y)20e^{j\frac{4}{3}\pi z}=(-\vec{e}_y+j\vec{e}_x)\frac{1}{21\pi}e^{j\frac{4}{3}\pi z} \quad （2 分）$$

反射波为右旋圆极化波 （1 分）

（3）透射波电场和磁场为：

$$\vec{E}_t=\tau(\vec{e}_x+j\vec{e}_y)20e^{-jk_2z}=(\vec{e}_x+j\vec{e}_y)\frac{160}{7}e^{-j4\pi z} \quad （1 分）$$

$$\vec{H}_t=\frac{1}{\eta_2}\vec{e}_z\times(\vec{e}_x+j\vec{e}_y)\frac{160}{7}e^{-jk_2z}=(\vec{e}_y-j\vec{e}_x)\frac{2}{7\pi}e^{-j4\pi z} \quad (2 分)$$

电容，电导，电感

大部分情况下电导的计算都是用电容求过去的（$\dfrac{C}{G}=\dfrac{\varepsilon}{\sigma}$）

同轴电容器单位长度	双线 | |	球形电容器
$C=\dfrac{\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{\ln(b/a)}$ 单介质：$C=\dfrac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)}$	$C=\dfrac{\pi\varepsilon}{\ln(b/a)}$	$C=2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a$ 单介质：$C=4\pi\varepsilon a$
$G=\dfrac{\pi(\sigma_1+\sigma_2)}{\ln(b/a)}$ 单介质：$G=\dfrac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)}$	不涉及	$G=2\pi(\sigma_1+\sigma_2)a$ 单介质：$G=4\pi\sigma a$
$L_o=\dfrac{\mu}{2\pi}\ln(b/a)$ $L_i=\dfrac{\mu}{8\pi}$	$L_o=\dfrac{\mu}{\pi}\ln(b/a)$	（C和G可以直接用静电比拟法）

$C=\dfrac{Q}{U},\begin{cases}①Q\to E\to U\to C\\②U\to E\to Q\to C\end{cases}$	$G=\dfrac{I}{U},\begin{cases}①I\to J\to E\to U\to G\\②U\to E\to J\to I\to G\\③\text{静电比拟法}\end{cases}$	$L=\dfrac{\Psi}{I}.I\to H\to B\to\Phi\to\Psi\to L$

电容（静电场）

两导体组成的电容：$C=\dfrac{Q}{U}=\dfrac{Q}{|\varphi_1-\varphi_2|}$

决定电容量大小的因素

> 导体系统的结构、尺寸、形状和其周围的电介质
>
> 与导体的带电量和电位无关

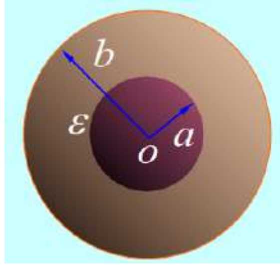
> **例题1**：同心球形电容器的内导体半径为a，外导体半径为b，其间填充介电常数为ε的均匀介质，求此球形电容器的电容

解：设内导体的电荷为q，则由**高斯定理**可求得内外导体间的电场$\vec{D}=\vec{e}_r\frac{q}{4\pi r^2}$，　$\vec{E}=\vec{e}_r\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}$

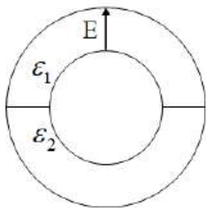
同心导体间的电压：

$$U=\int_a^b E\,\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{b-a}{ab}$$

同心球形电容器的电容　$C=\frac{q}{U}=\frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}$



结论：球形电容器($b\to\infty$)：$C=4\pi\varepsilon a$ (定义可推)

延伸：

如果是两种不同的介质，由边界条件：$\begin{cases}D_{1n}-D_{2n}=\rho_S\\E_{1t}-E_{2t}=0\end{cases}$ 确定利用切向电场相同

因为电场沿切向，电场无法向分量，所以**电容内电场相同**，由$\oint\vec{D}d\vec{S}=q\to D_1\cdot 2\pi r^2+D_2\cdot 2\pi r^2=q$

因为$\varepsilon_1 E=D_1,\varepsilon_2 E=D_2$，然后就可以求出$E$了，后续求法与同介质相同

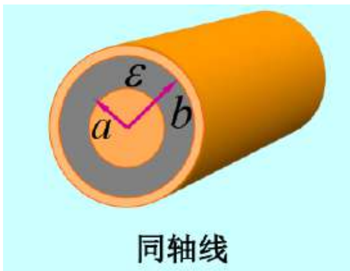
> **例题2**：同轴线内导体半径为a，外导体半径为b，内外导体间填充的介电常数为ε的均匀介质，求同轴线单位长度的电容

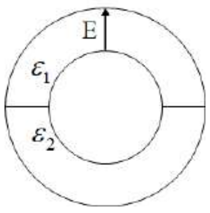
解：设同轴线的内、外导体单位长度带电量分别为$+\rho_l,-\rho_l$应用高斯定理可得到内外导体间任一点的电场强度为$\vec{E}(\rho)=\vec{e}_\rho\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon\rho}$

内外导体间的电位差

$$U=\int_a^b\vec{E}(\rho)\cdot\vec{e}_\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon}\int_a^b\frac{1}{\rho}\mathrm{d}\rho$$
$$=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon}\ln(b/a)$$

故得同轴线单位长度的电容为$C_1=\frac{\rho_l}{U}=\frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)}$



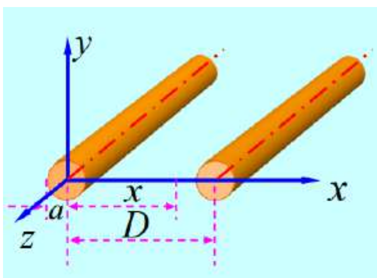
如果不是同一均匀介质，

确定边界条件$\begin{cases}D_{1n}-D_{2n}=\rho_S\\E_{1t}-E_{2t}=0\end{cases}$确定利用$E_{1t}=E_{2t}=E$

同电容器，内部电场相同，$E_1=E_2=E$，由$\oint\vec{D}d\vec{S}=\rho_l L\to(D_1+D_2)\pi r=\rho_l\to(\varepsilon_1+\varepsilon_2)E\pi r=\rho_l$

求出E后按同介质求法　　结论：$C=\frac{\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{\ln(b/a)}$

> 例题3：如图所示的平行双线传输线，导线半径为a，两导线的轴线距离为D，且D >> a，求传输线单位长度的电容



设两导线上的带电量分别为$+\rho_l$和$-\rho_l$。由于，故可近似地认为电荷在各导线表面均匀分布。因此导线间x处的电场强度为

$\vec{E}(x)=\vec{e}_x\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{D-x}\right)$ 两导线间的电位差

$$U=\int_1^2\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\int_a^{D-a}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{D-x}\right)\mathrm{d}x=\frac{\rho_l}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{D-a}{a}$$

故单位长度的电容为 $C_1=\frac{\rho_l}{U}=\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln[(D-a)/a]}\approx\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln(D/a)}(\mathrm{F/m})$

一般求解步骤：

> （1）假定两导体上分别带电荷 $+q$ 和 $-q$;
>
> 最关键步骤：（2）根据假定的电荷求出电场强度 E;
>
> （3）由 $\int_1^2 E\cdot\mathrm{d}l$ 求得电位差 U;

> (4) 求出比值 $C=\dfrac{q}{U}$

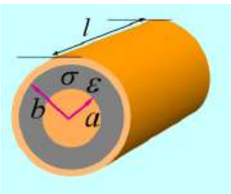
电导（恒定电场）

计算方法：$G=\dfrac{1}{R}$　通常是假设法

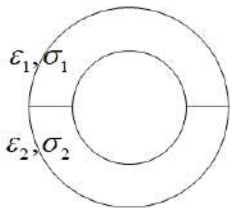
1. 假定两电极间的电流为 I; 2. 由 $U=\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l}$, 求出两导 体间的电位差; 3. 由定义求电导:$G=I/U$;	1. 假定两电极间的电位差为 U; 2. 由 $I=\int_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$, 求出两导体间电流; 3. 由定义求电导:$G=I/U$	**静电比拟法：** $\dfrac{G}{C}=\dfrac{\sigma}{\varepsilon}$ **直接把C表达式中的ε换成σ就可**

> **例题1：** 求同轴电缆的绝缘电阻。设内外的半径分别为a、b，长度为l，其间媒质的电导率为σ 、介电常数为ε.

解：(电场方向由a到b，**电流方向相同且大小恒定**） 直接用恒定电场的计算方法 设由内导体流向外导体的电流为 I(这个求的是l长度的电导)



$$
\left.\begin{array}{l}
I\Rightarrow \vec{J}=\vec{e}_\rho\dfrac{I}{2\pi\rho l}\Rightarrow \vec{E}=\dfrac{\vec{J}}{\sigma}=\vec{e}_\rho\dfrac{I}{2\pi\rho l\sigma}\\
U=\displaystyle\int \vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_a^b \frac{I}{2\pi\rho l\sigma}d\rho=\frac{I}{2\pi\sigma l}\ln\frac{b}{a}
\end{array}\right.
\Rightarrow
\left\{\begin{array}{l}
\text{电导}G=\dfrac{1}{l}\dfrac{I}{U}=\dfrac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)}\\
\text{绝缘电阻}R=\dfrac{1}{G}=\dfrac{1}{2\pi\sigma}\ln\dfrac{b}{a}
\end{array}\right.
$$

延伸：

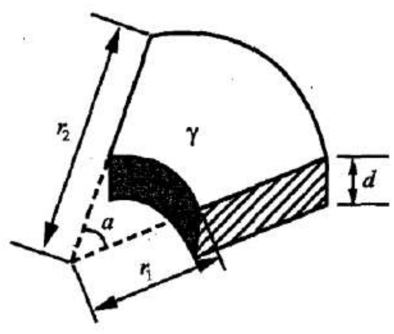
如果是两种不同的介质，由边界条件 $\begin{cases}J_{1n}-J_{2n}=0\\E_{1t}-E_{2t}=0\end{cases}$ 因为电场方向为切向(由内指外)

$J=\sigma E$代入 $I=\displaystyle\int_2 \vec{J}d\vec{S}=\pi\rho l J_1+\pi\rho l J_2=\pi\rho l(\sigma_1+\sigma_2)E$　得到E之后再积分求U

> **例题2**：注意求电阻的办法，$U\ \rightarrow\ E\ \rightarrow\ J\ \rightarrow\ I\ \rightarrow\ R$

3.13　在一块厚度 d 的导体板上，由两个半径为 r_1 和 r_2 的圆弧和夹角为 α 的两半径割出的一块扇形体，如题 3.13 图所示．求：(1)沿导体板厚度方向的电阻；(2)两圆弧面之间的电阻；(3)沿 α 方向的两电极间的电阻．设导电板的电导率为 γ．

【逻辑推理】求两圆弧面之间的电阻时，电流沿 e_r 方向，可按 $I\to \mathbf{J}\to \mathbf{E}\to U\to R$ 计算；求沿 α 方向的两电极的电阻时，电流沿 e_φ 方向，而且电流密度是随 r 变化的，所以可按 $U\to \mathbf{E}\to \mathbf{J}\to I\to R$ 计算．



题 3.13 图

(1)设沿厚度方向的两电极的电压为 U_1，则有

$$E_1=\frac{U_1}{d}$$

$$J_1=\gamma E_1=\frac{\gamma U_1}{d}$$

$$I_1=J_1S_1=\frac{\gamma U_1}{d}\cdot\frac{\alpha}{2}(r_2^2-r_1^2)$$

故得到沿厚度方向的电阻为

$$R_1=\frac{U_1}{I_1}=\frac{2d}{\alpha\gamma(r_2^2-r_1^2)}$$

(2)设内外两圆弧面电极之间的电流为 I_2，则

$$J_2=\frac{I_2}{S_2}=\frac{I_2}{\alpha rd}$$

$$E_2=\frac{J_2}{\gamma}=\frac{I_2}{\gamma\alpha rd}$$

$$U_2=\int_{r_1}^{r_2}E_2dr=\frac{I_2}{\gamma\alpha d}\ln(\frac{r_2}{r_1})$$

故得到两圆弧面之间的电阻为

$$R_2=\frac{U_2}{I_2}=\frac{1}{\gamma\alpha d}\ln(\frac{r_2}{r_1})$$

(3)设沿 α 方向的两电极的电压为 U_3，则有

$$U_3=\int_0^\alpha E_3 r d\varphi$$

由于 E_3 与 φ 无关，所以得到

$$\mathbf{E}_3=\mathbf{e}_\varphi\frac{U_3}{\alpha r}$$

$$\mathbf{J}_3=\gamma\mathbf{E}_3=\mathbf{e}_\varphi\frac{\gamma U_3}{\alpha r}$$

$$I_3=\int_{S_3}\mathbf{J}_3\cdot\mathbf{e}_\varphi dS=\int_{r_1}^{r_2}\frac{\gamma dU_3}{\alpha r}dr=\frac{\gamma dU_3}{\alpha}\ln(\frac{r_2}{r_1})$$

故得到沿 α 方向的电阻为

$$R_3=\frac{U_3}{I_3}=\frac{\alpha}{\gamma d\ln(r_2/r_1)}$$

电感（恒定磁场）

凡是碰到计算磁通的以后都用磁链来表示

如果是内部的磁链需要在计算完磁通$\mathrm{d}\Phi$后乘以电流的比例系数I'/I得到$\mathrm{d}\Psi$

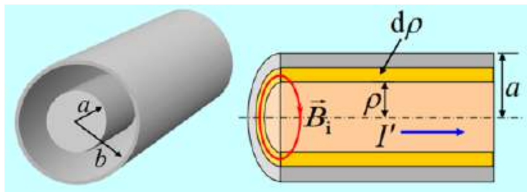
自感L

$L=\dfrac{\Psi}{I}$，称为导体回路的自感系数，简称自感，单位：L　特征：磁链是I自已产生的

粗导体回路的自感: $L=L_{\mathrm{i}}+L_{\mathrm{o}}$ $L_{\mathrm{i}}=\dfrac{\Psi_{\mathrm{i}}}{I}$——内自感　$L_{\mathrm{o}}=\dfrac{\Psi_{\mathrm{o}}}{I}$——外自感

> 自感的特点：自感只与回路的几何形状、尺寸以及周围的磁介质有关，**与电流和磁链的大小无关**

> **例题1：** 求同轴线单位长度的自感（多重点）



先求内导体的 内自感；设同轴线中的电流为I，由安培环路定理 $\oint_C \vec{H}_{\mathrm{i}}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=I'=\dfrac{I}{\pi a^2}\pi\rho^2=\dfrac{I}{a^2}\rho^2$

得 $H_{\mathrm{i}}=\dfrac{I}{2\pi a^2}\rho, B_{\mathrm{i}}=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a^2}\rho \quad (0\le\rho\le a)$ ρ 处面元的磁通为 $\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{i}}=B_{\mathrm{i}}\cdot \mathrm{d}S=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a^2}\rho l\,\mathrm{d}\rho$

因为与$\mathrm{d}\Phi_i$中，（易错）【这一部分磁通相交链的电流不是导体中的全部电流I，而只是I的部分I'】，两者的关系为$I'=\dfrac{\rho^2}{a^2}I$

则其磁链为 $\mathrm{d}\Psi_{\mathrm{i}}=\dfrac{I'}{I}\,\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{i}}=\dfrac{\mu_0 I\rho^3}{2\pi a^4}l\,\mathrm{d}\rho$

因此内导体中总的 内磁链 为 $\Psi_{\mathrm{i}}=\int \mathrm{d}\Psi_{\mathrm{i}}=l\int_0^a \dfrac{\mu_0 I\rho^3}{2\pi a^4}\,\mathrm{d}\rho=\dfrac{\mu_0 I}{8\pi}l$

故单位长度的 内自感 为 $L_{\mathrm{i}}=\dfrac{\Psi_{\mathrm{i}}}{Il}=\dfrac{\mu_0}{8\pi}$　(轴线内自感都是一样的)

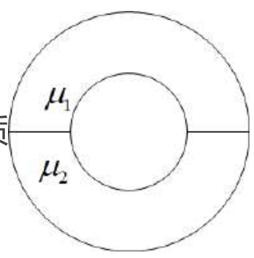
再求内、外导体间的 外自感：$B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\to \mathrm{d}\Psi_{\mathrm{o}}=\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{o}}=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho}l\,\mathrm{d}\rho$

则$\Psi_0=\int \mathrm{d}\Psi_0=l\int_a^b \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\mathrm{d}\rho=l\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\dfrac{b}{a}$

故单位长度的 外自感 为 $L_0=\dfrac{\Psi_0}{Il}=\dfrac{\mu_0}{2\pi}\ln\dfrac{b}{a}$

单位长度的 总自感 为 $L=L_{\mathrm{i}}+L_0=\dfrac{\mu_0}{8\pi}+\dfrac{\mu_0}{2\pi}\ln\dfrac{b}{a}$

延伸：如果不是同一均匀介质

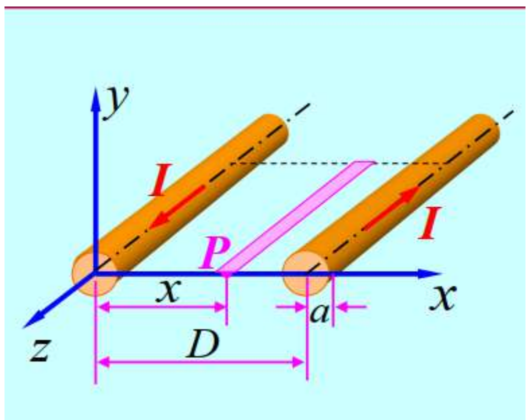


确定边界条件$\begin{cases}B_{1n}-B_{2n}=0\\ H_{1t}-H_{2t}=J_S\end{cases}$ 确定利用$B_{1n}=B_{2n}=B$

$\int_{L_1}\dfrac{\vec{B}_1}{\mu_1}d\vec{l}_1+\int_{L_2}\dfrac{\vec{B}_2}{\mu_2}d\vec{l}_2=I \quad \Rightarrow B\pi\rho(\dfrac{1}{\mu_1}+\dfrac{1}{\mu_2})=I$ 得到B之后计算和上面一样了(外自感，内自感计算无变化)

单位长度外自感为$L_0=\dfrac{1}{\pi\left(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}\right)}\ln\dfrac{b}{a}=\dfrac{\mu_1\mu_2}{\pi\left(\mu_1+\mu_2\right)}\ln\dfrac{b}{a}$

> **例题2：** 计算平行双线传输线单位长度的自感：

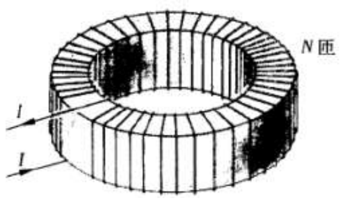


$\vec{B}(x)=\vec{e}_y\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{D-x}\right)$ 外磁链为$\Psi_o=\int\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}l\int_a^{D-a}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{D-x}\right)\mathrm{d}x=\frac{\mu_0 I}{\pi}l\ln\frac{D-a}{a}$

单位长度的外自感为：$L_o=\frac{\Psi_o}{I}=\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{D-a}{a}\approx\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{D}{a}$

单位长度内自感为：$L_i=2\times\frac{\mu_0}{8\pi}$ （单个内自感计算与同轴线相同）

> **例题3：** 如图所示的螺线环共有 N 匝密绕线圈，其外自感为 L， 当线圈匝数变为 2N 时， 其外自感变为（4L）

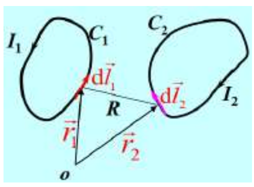


B是原来2倍，单圈磁通是原来2倍，磁链是2倍磁通，是原来4倍，电流不变，自感为原来4倍；

互感M

$M_{2\leftarrow1}=\frac{\Psi_{2\leftarrow1}}{I_1}$ $(M_{11}=L_1)$ 回路C_1 对回路C_2的互感系数，简称互感，同理$M_{1\leftarrow2}=\frac{\Psi_{1\leftarrow2}}{I_2}$ $(M_{11}=L_1)$

有纽曼公式：$\begin{cases}M_{21}=M_{12}=M\\ M=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{\mathrm{d}\vec{l}_1\cdot\mathrm{d}\vec{l}_2}{R}\end{cases}$



电磁场能量

能量不止内部有，外部也有，如果算能量要记得外部空间（如果没说明是内部的）

电场

电场能量密度（通用式）	对于线性、各向同性介质	电容器的储能	仅静电场可用
$w_e=\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$	$w_e=\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}=\frac{1}{2}\varepsilon E^2$ $W_e=\frac{1}{2}\int_V\vec{D}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\int_V\varepsilon E^2\,\mathrm{d}V$	$W_e=\frac{1}{2}\sum_i\varphi_i q_i=\frac{1}{2}QU=\frac{1}{2}CU^2$	$W_e=\frac{1}{2}\int_V\rho\varphi\mathrm{d}V$

恒定磁场

磁场能量密度（通用式）	对于线性各向同性媒质
$w_m=\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$	$w_m=\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}=\frac{1}{2}\mu H^2$ $W_m=\frac{1}{2}\int_V\vec{B}\cdot\vec{H}\,\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\int_V\mu H^2\,\mathrm{d}V$

通过磁矢位计算**磁场能量**：

- 体分布电流 $W_m=\frac{1}{2}\int_V\vec{J}\cdot\vec{A}\,\mathrm{d}V$ 缺陷：磁场在全部区域，J只在有限区域，没有J的区域仍然有能量和能量密度
- 回路线电流 $W_m=\frac{I}{2}\oint_C\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\frac{I}{2}\Psi_{总}$

通过电感计算磁场能量：（也可以通过计算磁场能量计算电感）

电感储能（单个载流回路）：$W_m=\frac{I}{2}\Psi_{总}=\frac{1}{2}I^2L$ 电感储能（N个载流回路）：$W_m=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}I_jI_kM_{jk}$

> 对2个载流回路：$W_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k}^{N}I_jI_kM_{jk}=\frac{1}{2}L_1I_1^2+\frac{1}{2}L_2I_2^2+MI_1I_2$

能量守恒定律

（做功）功率：$P=\int_V\vec{J}\cdot\vec{E}dV$ （表示单位时间**体积V内损耗**的电磁能量）

玻印亭矢量(**流过单位面积的功率**)：$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$ 单位时间**进入S面**包围的有限空间体积V中的电磁能量$-\oint_S(\vec{E}\times\vec{H})\cdot\mathrm{d}\vec{S}$

> 这个符号是因为规定流入为负，流出为正，计算的是进入截面的能量

玻印亭定理（电磁场能量守恒）$-\nabla\cdot\vec{S}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}+\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}\right)+\vec{J}\cdot\vec{E}$ 简化形式：$P_{入}=\frac{d}{dt}W+P_{耗}$

> 单位时间流入体积V内的电磁能量 等于 体积V内增加的电磁能量与体积V内消耗的电场能量之和（焦耳热）

（瞬时）Poyting矢量	平均Poyting矢量
$\vec{S}(\vec{r},t)=\vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{H}(\vec{r},t)$ $=\mathrm{Re}\left[\vec{E}(\vec{r})e^{j\omega t}\right]\times\mathrm{Re}\left[\vec{H}(\vec{r})e^{j\omega t}\right]$	$\vec{S}_{av}(\vec{r})=\frac{1}{T}\int_0^T\vec{S}(\vec{r},t)dt$ $=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{E}(\vec{r})\times\vec{H}^*(\vec{r})\right]$
瞬时能量密度	平均能量密度
$w(\vec{r},t)=\frac{1}{2}\varepsilon E^2+\frac{1}{2}\mu H^2$	$w_{av}(\vec{r})=\frac{1}{4}\mathrm{Re}[\vec{D}(\vec{r})\cdot\vec{E}^*(\vec{r})+\vec{B}(\vec{r})\cdot\vec{H}^*(\vec{r})]=\frac{1}{4}(\varepsilon'E\cdot E^*+\mu'H\cdot H^*)$
瞬时功率密度消耗	平均焦耳损耗功率密度
$p_{\mathrm{loss}}=\vec{E}(\vec{r},t)\cdot\vec{J}(\vec{r},t)$ $=\mathrm{Re}\left[\vec{E}(\vec{r})e^{j\omega t}\right]\cdot\mathrm{Re}\left[\vec{J}(\vec{r})e^{j\omega t}\right]$	$p_{Jav}(\vec{r})=\frac{1}{T}\int_0^T p_J(\vec{r},t)dt$ $=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\sigma\vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{E}^*(\vec{r})\right]=\frac{1}{2}\sigma\vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{E}^*(\vec{r})$