群教材课后习题及思考题(1)

一、课后习题作业题：

（1）证明：

由二元运算"$\circ$"的定义知其为$(S,\circ)$上的二元代数运算。

1）结合律：显然；

2）单位元：$e=(1,0)$；

3）逆元：对$\forall(a,b)\in S$，$(a,b)\circ(\frac{1}{a},-\frac{b}{a})=(\frac{1}{a},-\frac{b}{a})\circ(a,b)=(1,0)$

综上$(S,\circ)$是群。

（2）证明：

1）封闭性：对$\forall x_k,x_j\in U_n$ ：

$$x_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\ ,\quad x_j=\cos\frac{2j\pi}{n}+i\sin\frac{2j\pi}{n}\ ,\quad k,j\in[0,n-1]$$

则$x_k\bullet x_j=\cos\frac{2(k+j)\pi}{n}+i\sin\frac{2(k+j)\pi}{n}$

从而$(x_k\bullet x_j)^n=\cos(n\cdot\frac{2(k+j)\pi}{n})+i\sin(n\cdot\frac{2(k+j)\pi}{n})=1$

所以$x_k\bullet x_j\in U_n$，运算封闭。

2）结合律：显然；//复数的乘法。

3）单位元：$e=1$；

4）逆元：$x_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$，$x_k^{-1}=\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}$

（3）证明：

此题中由$\begin{bmatrix}a&0\\0&b\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}c&0\\0&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ac&0\\0&bd\end{bmatrix}$，其中$ac=\pm1,bd=\pm1$，故$G$对矩阵乘法封闭性显然满足，故构成一个代数系。

1）结合律：矩阵乘法满足结合律；

2）单位元：$e=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$；

逆元：$\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}$

（4）**证明**：略。

（5）**证明**：由 $\forall a \in G$，$a^2 = e \Rightarrow$ 对 $\forall a \in G$ 有 $a = a^{-1}$。从而对 $\forall a,b \in G$，$ab = (ab)^{-1}$

$= b^{-1}a^{-1} = ba$。

（6）**证明**：设 $G = \{e,a,b,c\}$，$(G,\circ)$ 为群。其乘法表为：

•	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	aa	ab	ac
b	b	ba	bb	bc
c	c	ca	cb	cc

验证交换性只须验证乘法表中的矩阵的对称性即可，即只须验证：

1）ab 与 ba：显然 $ab \neq a,b$，故 $ab = e,c$

若 $ab = e$，即 a 与 b 互逆，则必有 $ba = e$，从而 $ab=ba$；
若 $ab = c$，则 $ba = c$，否则若 $ba = e$，则必有 $ab = e$，从而 $c = e$ 矛盾。
综上 $ab=ba$。

同理可得：$ac=ca$，$bc=cb$。**//要求**：此题需要提交作业

（7）**证明**：

设 $(G,\circ)$ 为非交换群，且 $|G| > 2$（注：不一定为有限群），只须找到元素 $a \in G$，

且 $a^{-1} \neq a$ 即可。即只须在 G 中找到一个元素，其阶大于 2 即可。若 G 中不存在

这样的元素，即对 $\forall a \in G$ 均有 $a^2 = e$，则由前面 2 题的结论知 G 为交换群，矛盾。

故 $\exists a \in G$，其阶大于 2，即 $a^{-1} \neq a$，从而令 $b = a^{-1}$，显然有 $b \neq a$，但 $ab = ba$。

//要求：此题需要提交作业

（8）**证明**：

设 $(G,\circ)$ 为有限群，$|G| = n$，对 $\forall a \in G$，若 a 的阶为 r 且 $r > 2$，即 $a^r = e$，

则 a^{-1} 的阶也为 r（参见课堂上的思考题结论），即 $(a^{-1})^r = e$，且 $a^{-1} \neq a$，从而

阶大于 2 的元素成对出现，故阶大于 2 的元素个数必为偶数。

（9）**证明**：

设 $(G,\circ)$ 为有限群，$|G| = 2n$，设元素阶为 2 的个数为 m，元素阶大于 2 的个数为

$2k$，元素阶为 1 仅有单位元，则有：$1 + m + 2k = 2n$，所以 m 必为奇数。

（10）**证明**：见思考题解答。

（11）**证明**：由上述（9）题可知。
（12）**证明**：

考查元素序列：$e, a_1, a_1a_2, a_1a_2a_3, \cdots, a_1a_2\cdots a_n \in G$，而$|G|=n$，

故上述$n+1$个元素中至少有两个元素相同，若其中一个为e，则有：

$a_1a_2\cdots a_i = e$，此时令 $p=1, q=i$ 即可；

若两个元素均不为e，则存在$i, j\in[1,n]$，不妨设$i<j$，使得：

$a_1a_2\cdots a_i = a_1a_2\cdots a_j = a_1a_2\cdots a_i a_{i+1}\cdots a_j$，由消去律得：$a_{i+1}\cdots a_j = e$，此时令 $p=i+1, q=j$ 即可。

//注意此题中的 n 个元素可以看作是从G中带返回取样所取得 n 个元素。

//

二、思考题
（1）PPT 讲义 2-1 中 6/12 页中的思考题。
//要求：此题需要提交作业。
思考题 1：//只要把讲义 PPT 5/12 页中左对偶换为右即可。
依题意只需要证明：

$$\begin{cases} a\circ e_{右} = a \\ a\circ b_{右} = e_{右} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_{右}\circ a = a \\ b_{右}\circ a = e_{右} \end{cases}$$

$a\circ b_{右} = e_{右} \Rightarrow b_{右}\circ(a\circ b_{右}) = b_{右}\circ e_{右} = b_{右}$

$\Rightarrow (b_{右}\circ a)\circ b_{右} = b_{右} \Rightarrow (b_{右}\circ a)\circ b_{右}\circ b'_{右} = b_{右}\circ b'_{右}$，其中 $b'_{右}$ 为 $b_{右}$ 的右逆，即有

$b_{右}\circ b'_{右} = e_{右}$，则可得：$(b_{右}\circ a)\circ e_{右} = e_{右} \Rightarrow b_{右}\circ a = e_{右}$

从而$e_{右}\circ a = (a\circ b_{右})\circ a = a\circ(b_{右}\circ a) = a\circ e_{右} = a$，即$e_{右}\circ a = a$。

思考题 2：不一定，如下例：

设有代数系$(G,\circ)$如下：//结合律请自己验证。

∘	a	b	c
a	a	b	c
b	a	b	c
c	a	b	c

显然元素 a 为$e_{左}$，且对每个元素x（a,b,c）均有右逆$x_{右}$，使得$x\circ x_{右} = e_{左} = a$

三、PPT 讲义 2-2 中的思考题解答：

思考题 1：

解：显然 $m \geq n$，令 $m = kn + r, \quad 0 \leq r \leq n-1$，由 $a^m = e \Rightarrow a^{kn+r} = e \Rightarrow a^{kn} \circ a^r = e$

$\Rightarrow (a^n)^k \circ a^r = e \Rightarrow e \circ a^r = e \Rightarrow a^r = e$，则由 a 的阶为 n 知 r 不能取非零值（这里假设 a 为非单位元），故 $r = 0$，从而 $m = kn$，即 $n|m$。

思考题 2：

解：由已知得：$a^n = e \Rightarrow (a^{-1})^n = e$（对原等式两边同乘 n 个 a^{-1}），故元素 a^{-1} 的阶一定为一有限数，则可设其阶为 r 即有 $(a^{-1})^r = e$（注意这里设阶为 r 的逻辑顺序，没有一开始就直接设，原因就是一开始并不知其有限），由思考题 1 结论知：$r|n$；

同理由 $(a^{-1})^r = e \Rightarrow a^r = e$（两边同乘 r 个 a），又由 a 的阶为 n，由思考题 1 结论知 $n|r$

综上 $r = n$，即互逆元素的阶如果有限则相等。

//这里希望大家体会一下证一个元素的阶为一特定值得方法。比如这里就是想证元素 a^{-1} 的阶为 n。下面的思考题 3 可以加深一下这方面的体会。

思考题 3：

解：不妨设 G 为非交换群，$ab \neq e$，且 ab，ba 的阶为有限，设其阶分别为 m, n，即有：

$(ab)^m = e$，$(ba)^n = e$。由 $(ab)^m = e \Rightarrow \underbrace{(ab)\cdots(ab)}_{m} = e \Rightarrow a \circ \underbrace{(ba)\cdots(ba)}_{m-1} \circ b = e$

$\Rightarrow a^{-1} \circ a \circ \underbrace{(ba)\cdots(ba)}_{m-1} \circ b \circ a = a^{-1} \circ e \circ a \Rightarrow e \circ \underbrace{(ba)\cdots(ba)}_{m-1} \circ (ba) = e$

$\Rightarrow \underbrace{(ba)\cdots(ba)}_{m} = e \Rightarrow (ba)^m = e$，又 ba 的阶为 n，则由思考题 1 知 $n|m$，同理由 $(ba)^n = e$

可得 $(ab)^n = e$，从而 $m|n$，综上得 $m = n$。