习题作业 1 解答补充

6 题：

证明：设 $(S,\circ)$ 为有限半群，且 $|S|=n$。设 $b\in S$，则可得：$b^1,b^2,\cdots,b^n,b^{n+1}\in S$

则由 S 的有限性知，$\exists i,j\in[1,n+1]$ 使得 $b^j=b^i$，不妨设 $j>i$，即 $j=i+k$，$k>0$。

从而有：$b^i\circ b^k=b^i$。

① 若 $i=k$，此时令 $a=b^i$ 即可。

② 若 $i<k$，令 $p=k-i$，则有：$b^p\circ(b^i\circ b^k)=b^p\circ b^i$，由结合律可得：

$b^{p+i}\circ b^k=b^{p+i}$，从而有：$b^k\circ b^k=b^k$，此时令 $a=b^k$ 即可。

③ 若 $i>k$，由 $b^i\circ b^k=b^i$ 知：$b^i=(b^i\circ b^k)\circ b^k \ =b^i\circ b^{2k}=(b^i\circ b^k)\circ b^{2k}=b^i\circ b^{3k}$

$=\cdots=b^i\circ b^{qk}$，反复递归调用 b^i，直到 $qk>i$ 为止，则有：$b^i\circ b^{qk}=b^i$，且有

$i<qk$，则由②知 $\exists a\in S$ 使得 $a\circ a=a$

//此③情况也可以直接用原解答方案解决。上述解题思路比原来的简单些，只需要讨论两个数的大小，还是比较容易想到的，适合初学时用。//

另证：

由上述同样构造序列：$b^{3^1},b^{3^2},\cdots,b^{3^n},b^{3^{n+1}}\in S$，则有 $b^{3^j}=b^{3^i}$，$j>i$。

从而 $b^{2(3^j-3^i)}=b^{3^j+3^j-2.3^i}=b^{3^j}\circ b^{3^j-2.3^i}=b^{3^i}\circ b^{3^j-2.3^i}=b^{3^i+3^j-2.3^i}=b^{3^j-3^i}$。

则有：$b^{2(3^j-3^i)}=b^{3^j-3^i}$，即：$b^{(3^j-3^i)}\circ b^{(3^j-3^i)}=b^{3^j-3^i}$ //显然 $3^j-2.3^i>0$//

//此种方案主要是用来解决习题作业第 5 题中出现的问题，既回避了消去律问题，又解决了 $n-2k>0$ 的问题，其实就是对 1--（n+1）的连续整数换成指数编码而已，这是大家需要学习的地方。//