群教材课后习题及思考题(3)解答

一、课后习题作业题：

1. 证明：六阶群里必有一个三阶子群。

证明：设 $(G,\circ)$ 为六阶群。则对 $\forall x \in G(x \neq e)$，其阶只能为 2，3，6。

1）若 $\exists a \in G$，且 a 的阶为 6，即 $a^6 = e$，则 $G = (a)$，则由循环群的子群知存在三阶子群为：$S = \{e, a^2, a^4\}$

2）若 $\exists a \in G$，且 a 的阶为 3，即 $a^3 = e$，此时显然有三阶子群为：$S = \{e, a^1, a^2\}$

3）若不存在 $a \in G$，使得 a 的阶为 3 或 6，则对 $\forall a \in G$ 有 $a^2 = e$，从而此时群 $(G,\circ)$ 为交换群。令 $A = \{a, b\}$，其中 $a, b \in G$ 且均不为单位元。则 $(A) = \{e, a, b, ab\}$，$|(A)| = 4 \nmid 6$ 矛盾。//对(A)大家直接调用生成子群的算法做一下即可。注意 a, b 的逆均为他们自身。//

1.5

/////////////////////////////

2. 设 p 是一个素数。证明：在阶为 p^m 的群里一定含有一个 p 阶子群，其中 $m \geq 1$。

证明：设 $(G,\circ)$ 为群，$|G| = p^m$。取 $a \in G(a \neq e)$，设其阶为 r，则 $r \mid p^m$，

由 p 为素数得：$r = p^k$，$k \geq 1$。

1）若 $k = 1$，则群 G 的一个 p 阶子群为 $H = (a)$；

2）若 $k > 1$，取 $b = a^{p^{k-1}} \in G$，设 b 的阶为 q，即 $b^q = e$。由 $b^p = (a^{p^{k-1}})^p = a^{p^k} = e$ $\Rightarrow q \mid p$，又 $b^q = (a^{p^{k-1}})^q = a^{qp^{k-1}} = e$，则有 $r \mid qp^{k-1}$，即：$p^k \mid qp^{k-1}$，从而 $p \mid q$，所以 $q = p$。此时群 G 的一个 p 阶子群为 $H = (b)$。

/////////////////////////////

$\{(1), (12)\}$ $(23)H \neq H(23)$

3. 在三次对称群 S_3 中，找一个子群 H，使得 H 的左陪集不等于 H 的右陪集。

解 ：见 2-6 讲义例题。

/////////////////////////////

4. 设 H 是 G 的一个子群，如果左陪集 aH 等于右陪集 Ha，即 $aH = Ha$，则 $\forall h \in H, ah = ha$ 一定成立吗？

解：不一定，见 2-7 讲义例题。对于交换群上述结论成立。

5. 证明讲义文件 2-6 中的定理 6。

证明：只需在 S_l 与 S_r 之间找到一个双射即可。

定义 $\varphi: S_l \to S_r$，且对 $\forall aH \in S_l$，有 $\varphi(aH) = Ha^{-1}$，下证 φ 为双射。

1） 满射：显然。//群里每个元素均可逆。//

2） 单射：对 $\forall aH, bH \in S_l$，若 $aH \neq bH$，下证 $\varphi(aH) \neq \varphi(bH)$。

若 $\varphi(aH) = \varphi(bH)$，则有 $Ha^{-1} = Hb^{-1}$，从而 $Ha^{-1}b = H$，由定理 12.6.1 知 $a^{-1}b \in H$，从而 $aH = bH$，矛盾。

//////////////////////////

6. 设 A 和 B 是群 G 的两个有限子群。证明：$|AB| = \dfrac{|A||B|}{|A \cap B|}$

证明：设 $H = A \cap B$，由定理知 H 仍为群 G 的子群（教材 12.3 节内容），根据拉格朗日定理得：$|B| = |H| \cdot [B:H]$，记 $j = [B:H] = \dfrac{|B|}{|H|}$，则 $B = Hb_1 \cup Hb_2 \cup \cdots \cup Hb_j$，$b_i \in B(i = 1,\cdots, j)$ 其中 $Hb_i (i = 1,\cdots, j)$ 为互不相同的右陪集。则 $AB = AHb_1 \cup AHb_2 \cup \cdots \cup AHb_j$，又 $AH = A$，所以 $AB = Ab_1 \cup Ab_2 \cup \cdots \cup Ab_j$，又 $Ab_i \cap Ab_l = \phi$，否则，若 $Ab_i \cap Ab_l \neq \phi$，则由陪集的性质得：$Ab_i = Ab_l$，从而 $b_i b_l^{-1} \in A$，又 $b_i b_l^{-1} \in B$，所以 $b_i b_l^{-1} \in A \cap B$，即 $b_i b_l^{-1} \in H$，所以 $Hb_i = Hb_l$，矛盾。因此根据容斥原理有：$|AB| = |Ab_1| + |Ab_2| + \cdots + |Ab_j| = j \cdot |A|$

即 $|AB| = \dfrac{|B|}{|H|} \cdot |A| = \dfrac{|A||B|}{|A \cap B|}$

//////////////////////////

7. 设 G 是一个 n^2 阶的群，H 是 G 的一个 n 阶子群。证明：$\forall x \in G, x^{-1}Hx \cap H \neq \{e\}$。

证明：假设不成立，则 $\exists a \in G$，使得 $a^{-1}Ha \cap H = \{e\}$，记 $P = a^{-1}Ha$，由 H 为 G 的子群易知 P 也为 G 的子群，且 $|P| = |H| = n$（由映射 $\varphi(h) = a^{-1}ha$ 为单射），则

由 1 题的结论：$|PH|=\dfrac{|P||H|}{|P\cap H|}=\dfrac{n\cdot n}{1}=n^2$，又 $PH\subseteq G$，$|G|=n^2$，所以 $PH=G$，

则由教材 12.7 中的例题结论知 $P\cap H=H\neq\{e\}$，矛盾。

///////////////////////////

8. 利用上述 6 题的结论证明：六阶群中有唯一的一个三阶子群。

证明：由前面的习题结论知六阶群中一定有三阶子群，假设不唯一，设 A,B 为六阶群 G 两个不同的三阶子群。不妨设 $A=\{e,a,b\}$， $B=\{e,c,d\}$，则 $A\cap B=\{e\}$。

从而 $|AB|=\dfrac{|A||B|}{|A\cap B|}=9>6$ 矛盾。

///////////////////////////

9. 证明：指数为 2 的子群是正规子群。

证明：设 H 为群 G 的子群，且有 $[G:H]=2$，则其左陪集构成的划分为：H,aH $(a\notin H)$，其~~右陪集构成的划分为： H,Ha~~$(a\notin H)$，从而 $aH=G\setminus H$

$Ha=G\setminus H$，所以 $aH=Ha$。

///////////////////////////

10. 证明：两个正规子群的交还是正规子群。

证明：设 H_1,H_2 为群 G 的两个正规子群，记 $H=H_1\cap H_2$，显然 H 仍是 G 的子群，又对 $\forall a\in G,h\in H$，由 H_1,H_2 为群 G 的两个正规子群得：$aha^{-1}\in H_1$，$aha^{-1}\in H_2$，从而 $aha^{-1}\in H_1\cap H_2$，即 $aha^{-1}\in H$，故 H 是 G 的正规子群。

$aHa^{-1}\subseteq H$

///////////////////////////

11. 设 H 是群 G 的子群，N 是 G 的正规子群。试证：NH 是 G 的子群。

证明：对 $\forall a,b\in NH$，则 $\exists n_1,n_2,h_1,h_2\in NH$，使得 $a=n_1h_1,b=n_2h_2$，则 $ab^{-1}=n_1h_1h_2^{-1}n_2^{-1}$。又由 N 是 G 的正规子群，则对 $\forall x\in G$，$xN=Nx$。故 $\exists n_3\in N$ 使得 $h_2^{-1}n_2^{-1}=n_3h_2^{-1}$，则 $ab^{-1}=n_1h_1n_3h_2^{-1}$，同理 $\exists n_4\in N$，使得 $h_1n_3=n_4h_1$，从而 $ab^{-1}=n_1n_4h_1h_2^{-1}=(n_1n_4)(h_1h_2^{-1})\in NH$，则由子群的判定定理（教材 12.3 节）知 NH 是 G 的子群。

//这里大家也可以直接调用教材定理 12.7.2//

12. 设 G 是一个阶为 $2n$ 的交换群，试证 G 必有一个 n 阶商群。

证明：设 G 为群且 $|G|=2n$，则由前面习题作业结论(教材 12.2 节课后习题作业)知偶数阶群 G 中一定存在一个阶为 2 元素，即 $\exists a\in G$，$a^2=e$，从而 $H=(a)=\{e,a\}$。由 G 为交换群，则对 $\forall x\in G$，$xH=Hx=\{x,ax\}=\{x,xa\}$，故 H 为群 G 的一个 2 阶正规子群，根据拉格朗日定理以及正规子群和商群的关系知 G 必有一个 n 阶商群。

///////////////////////////

13. 设 H 是群 G 的子群。证明：H 是 G 的正规子群的充分必要条件是 H 的任两个左陪集的乘积还是 H 的一个左陪集。

证明：

必要性 $\Rightarrow$：对 $\forall a,b\in G$，由 H 为 G 的正规子群可得：

$aH\cdot bH=a(Hb)H=a(bH)H=abHH=abH$，仍为 H 的左陪集。

充分性 $\Leftarrow$：由已知可得：对 $\forall a\in G$，$aH\cdot a^{-1}H=cH$，因为 $e\in aH\cdot a^{-1}H$，从而 $e\in cH$，；又 $e\in H$，即 $e\in cH\cap H$，则由左陪集的性质得（要么完全重合要么完全分离）：$cH=H$，所以 $aH\cdot a^{-1}H=H$，则对 $\forall h\in H$，$\exists h_1,h_2\in H$，使得

$aha^{-1}h_1=h_2\Rightarrow aha^{-1}=h_2h_1^{-1}\in H$

///////////////////////////

14. 设 H 是群 G 的 2 阶正规子群，试证 G 的中心 C 包含 H。

证明：由 H 是群 G 的 2 阶正规子群可设 $H=\{e,a\}$，且对 $\forall x\in G$，$xH=Hx$，

即 $\{x,xa\}=\{x,ax\}$，所以 $xa=ax$，故 $a\in C$，从而 $H\subseteq C$

///////////////////////////

二、思考题

（1）证明：讲义“2-7”11/16 页中的例题。

证明：见讲义.