2020 年春季《集合论与图论》期末考试题

每题 6 分，满分 60 分。

1. 设 A,B 为集合，试证：$A\times B=B\times A$ 的充要条件是下列三个条件至少一个成立：（1）$A=\phi$；（2）$B=\phi$；（3）$A=B$。

2. 设$A_1, A_2, \ldots$为一集序列，记 $\overline{A}$ 为这样的元素 x 的全体形成的集合：$x\in\overline{A}$ 当且仅当在序列$A_1, A_2, \ldots$中有无穷多项A_n含有 x。集合 $\overline{A}$ 称为集序列$A_1, A_2, \ldots$的上极限，记为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$，即 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n=\overline{A}$。证明：$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$。

3. 给定任意 5 个整数，试证明其中一定存在 3 个整数，使得它们之和能被 3 整除。

4. 设 R，S 是 X 上的满足$R\circ S\subseteq S\circ R$的对称关系，证明$R\circ S=S\circ R$。

5. 设 A 为可数集，利用康托对角线法证明 2^A 是不可数集。

6. 已知 9 个人 $v_1,v_2,\ldots,v_9$，其中 v_1 和两个人握过手，v_2,v_3,v_4,v_5 各和 3 个人握过手，v_6 和 4 个人握过手，v_7,v_8 各和 5 个人握过手，v_9 和 6 个人握过手。证明这 9 个人中一定可以找出 3 个人互相握过手。

7. 设 T 是一个 k+1 个顶点的树。证明：如果图 G 的最小度$\delta(G)\geq k$，则 G 有一个同构于 T 的子图。

8. 如果(p,q)图G是k-边连通的，试证：$q\geq kp/2$。

9. 设 G 为顶点数 p>11 的可平面图，证明：G^c 不是可平面图。

10. 证明：有向图 D=(V,A)是强连通的，当且仅当 D 有一条生成闭有向通道。