集合论与图论习题册

软件基础教研室

刘 峰

2019.02

第一章 集合及其运算

P_8 习题

1. 写出方程 $x^2+2x+1=0$ 的根所构成的集合。

3. 设有 n 个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 且 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq A_1$，试证：$A_1 = A_2 = \cdots = A_n$。

4. 设 $S=\{\phi,\{\phi\}\}$，试求 2^S？

5. 设 S 恰有 n 个元素，证明 2^S 有 2^n 个元素。

P_{16} 习题

6. 设 A、B 是集合，证明: $(A \setminus B) \bigcup B = (A \bigcup B) \setminus B \Leftrightarrow B = \phi$。

7. 设 A、B 是集合，试证 $A=\phi \Leftrightarrow B = A \Delta B$。

任选两题

9. 设 A，B，C 为集合，证明：$A \setminus (B \bigcup C) = (A \setminus B) \setminus C$。

10. 设 A，B，C 为集合，证明：$(A \bigcup B) \setminus C = (A \setminus C) \bigcup (B \setminus C)$。

11. 设 A，B，C 为集合，证明：$(A \bigcap B) \setminus C = (A \setminus C) \bigcap (B \setminus C)$。

12. 设 A，B，C 都是集合，若 $A\bigcup B = A\bigcup C$ 且$A \cap B = A \cap C$，试证 B=C。

15. 下列命题是否成立？**说明理由（举例）**。

(1) $(A\setminus B)\bigcup C = A\setminus(B\setminus C)$；(2) $A\bigcup(B\setminus C) = (A\bigcup B)\setminus C$；

(3) $A\setminus(B \cup C) = (A \cup C)\setminus B$

（答案：都不正确）

16．下列命题哪个为真？ **答案：**__________

a)对任何集合 A,B,C，若 $A\bigcap B = B\bigcap C$，则 A=C。

b)设 A,B,C 为任何集合，若 $A\bigcup B = A\bigcup C$，则 B=C。

c)对任何集合 A,B，$2^{A\cup B} = 2^A\bigcup 2^B$。 d)对任何集合 A,B，$2^{A\cap B} = 2^A\bigcap 2^B$。

e)对任何集合 A,B，$2^{A\setminus B} = 2^A\setminus 2^B$。 f)对任何集合 A,B，$2^{A\Delta B} = 2^A\Delta 2^B$。

17．填空：设 A,B 是两个集合。

a) $x \in A\bigcup B \Leftrightarrow$ __________________； b) $x \in A\bigcap B \Leftrightarrow$ __________________

c) $x \in A\setminus B \Leftrightarrow$ __________________； d) $x \in A\Delta B \Leftrightarrow$ __________________。

18. 设 A，B，C 为三个集合，下列集合表达式哪一个等于 $A\setminus(B\bigcap C)$？**答案：**____

（a）$(A\setminus B)\bigcap(A\setminus C)$；（b）$(A\bigcap B)\setminus(A\bigcap C)$；

（c）$(A\setminus B)\bigcup(A\setminus C)$；（d）$(A\bigcup B)\setminus(A\bigcup C)$；（e）$(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$。

P_{20} 习题

20．设 A,B,C 为集合，并且 $A\bigcup B = A\bigcup C$，则下列断言哪个成立？**答案：**

(1) $B = C$；(2) $A\bigcap B = A\bigcap C$；(3) $A\bigcap B^C = A\bigcap C^C$；(4) $A^C\bigcap B = A^C\bigcap C$。

21．设 A,B,C 为任意集合，化简

$(A\cap B\cap C)\cup(A^C\cap B\cap C)\cup(A\cap B^C\cap C)\cup(A\cap B\cap C^C)\cup$
$(A^C\cap B^C\cap C)\cup(A\cap B^C\cap C^C)\cup(A^C\cap B\cap C^C)$

22．设 V 是任一集合，证明：

$\forall S,T,W\in 2^V$ 有 $S\subseteq T\subseteq W$ 当且仅且 $S\Delta T\subseteq S\Delta W$ 且 $S\subseteq W$ 。

P_{25} 习题

24．设 $A=\{a,b,c\},B=\{e,f,g,h\},C=\{x,y,z\}$ 。求 $A\times B,B\times A,A\times C,A^2\times B$ 。

25．设 A,B 为集合，试证：A×B＝B×A 的充要条件是下列三个条件至少一个成立：（1） $A=\phi$；（2） $B=\phi$；（3） $A=B$ 。

26．设 A,B,C,D 为任四个集合，证明：$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

27．设 A,B,C 是三个任意集合，证明：$A \times (B \Delta C) = (A \times B) \Delta (A \times C)$。

29．设 A,B,C 是三个任意集合，证明：$A \times (B \Delta C) = (A \times B) \Delta (A \times C)$。

31．设 A 有 m 个元素，B 有 n 个元素，则 A×B 是多少个序对组成的？A×B 有多少个不同的子集？ **答案：**________

32．设 A,B 是两个集合，$B \neq \varnothing$，试证：若 $\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \mathrm{B} \times \mathrm{B}$，则 $A = B$。

P_{33} 习题

33．设 A,B 是两个有限集，试求 $\left|2^{2^{A \times B}}\right| = ?$

34. 某班学生中有 45％正在学德文，65％正在学法文。问此班中至少有百分之几的学生正同时学德文和法文？

35. 毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞，已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，
但未能与所有姑娘跳过舞。同样地，每个姑娘也至少与一个小伙子跳舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子和两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙中的一个跳过舞。

第二章 映射习题

P_{39} 习题

1. 设 A，B 是有穷集，$|A| = m, |B| = n$。则

（1）计算 $|A^B|$；　　　　（2）从 A 到 A 有多少个双射？

P_{43} 习题

3. 证明：从一个边长为 1 的等边三角形中任意选 5 个点，那么这 5 个点中必有 2 个点，它们之间的距离至多为 1/2，而任意 10 个点中必有 2 个点其距离至多是 1/3。

5. 证明在 52 个整数中，必有两个整数，使这两个整数之和或差能被 100 整除。

6. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 $1, 2, 3, \cdots, n$ 的任一排列，若 n 是奇数且 $(a_1 - 1)(a_2 - 2)\cdots(a_n - n) \neq 0$，则乘积为偶数。

P_{46} 习题

7. 设 $f: X \to Y$，$C, D \subseteq Y$，证明 $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$

8. 设 $f:X\to Y$， $A,B\subseteq X$,，证明 $f(A\setminus B)\supseteq f(A)\setminus f(B)$。

10.设 $f:X\to Y, A\subseteq X, B\subseteq Y$。以下四个小题中，每个小题均有四个命题，这四个命题有且仅有一个正确，请找出正确的那个。

（1）（a）若 $f(x)\in f(A)$，则 x 未必在 A 中；（b）若 $f(x)\in f(A)$，则 $x\in A$；

（c）若 $f(x)\in f(A)$，则 $x\bar{\in}A$；（d）若 $f(x)\in f(A)$，则 $x\in A^c$。

（2）（a） $f(f^{-1}(B))=B$；（b） $f(f^{-1}(B))\subseteq B$；

（c） $f(f^{-1}(B))\supseteq B$；（d） $f(f^{-1}(B))=B^c$。

（3）（a） $f^{-1}(f(A))=A$；（b） $f^{-1}(f(A))\subseteq A$；

（c） $f^{-1}(f(A))\supseteq A$；（d）上面三个均不对。

（4）（a） $f(A)\neq\varnothing$；（b） $f(B)\neq\varnothing$；

（c）若$f^{-1}(\{y\})\in X$；（d）若$f^{-1}(\{y\})\subseteq X$。

P_{50} 习题

15. 设 $X=\{a,b,c\}, Y=\{0,1\}, Z=\{2,3\}, f:X\to Y, f(a)=f(b)=0$，

$f(c)=1; g:Y\to Z$， $g(0)=2, g(1)=3$，试求 $g\circ f$ 。

P_{55} 习题

17． 设 $N=\{1,2,3,\cdots\}$，试构造两个映射 f 和 g： $N\to N$，使得

（1） $fg=I_N$，但 $gf\neq I_N$；（2） $gf=I_N$，但 $fg\neq I_N$。

18. 设 $f:X\to Y$ 则

（1）若存在唯一的一个映射 $g:Y\to X$，使得 $gf=I_X$，则 f 是可逆的吗？

（2）若存在唯一的一个映射 $g:Y\to X$，使得 $fg=I_Y$，则 f 是可逆的吗？

19. 设 $f:X\to Y,|X|=m,|Y|=n$，则

（1）若 f 是左可逆的，则 f 有多少个左逆映射？

（2）若 f 是右可逆的，则 f 有多少个右逆映射？

20. 是否有一个从 X 到 X 的一一对应 f，使得 $f=f^{-1}$，但 $f\neq I_X$？

P_{63} 习题

21.设 $\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&3&2&1&5\end{pmatrix}$，$\sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&5&1&4\end{pmatrix}$，求 $\sigma_1\sigma_2,\sigma_2\sigma_1,\sigma_1^{-1},\sigma_2^{-1}$。

22.将置换 $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\7&9&1&6&5&2&3&4&8\end{pmatrix}$ 分解成对换的乘积。

第三章 关系习题

P_{86} 习题

1.给出一个既不是自反的又不是反自反的二元关系？

2.是否存在一个同时不满足自反性，对称性，反对称性，传递性和反自反性的二元关系？

3.设 R，S 是 X 上的二元关系，下列命题哪些成立：

a)若 R 与 S 是自反的，则 $R\cup S, R\cap S$ 分别也是自反的；

b) 若 R 与 S 是对称的，则 $R\cup S, R\cap S$ 分别对称的；

c) 若 R 与 S 是传递的，则 $R\cap S$ 也是传递的；

d) 若 R 与 S 不是自反的，则 $R\cup S$ 也不是自反的；

e) 若 R 与 S 是反自反的，则 $R\cup S, R\cap S$ 也是反自反的；

f) 若 R 是自反的，则 R^c 也是反自反的；

g) 若 R 与 S 是传递的，则 R\S 是传递的。

答案：____

5.设 R、S 是 X 上的二元关系。证明：

（1）$(R^{-1})^{-1}=R$；　　（2）$(R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1}$；

（3）$(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$；　　（4）若 $R\subseteq S$，则 $R^{-1}\subseteq S^{-1}$；

6．设 R 是 X 上的二元关系，证明：$R\cup R^{-1}$ 是对称的二元关系。

7．设 R 为 X 上的是反自反的和传递的二元关系，证明：R 是反对称的。

P_{92} **习题**

9.“父子“关系的平方是什么关系？　　　　答案：______________

11.设 R 与 S 为 X 上的任两个二元关系，下列命题哪些为真？ 答案：_______

a）若 R,S 都是自反的，则 $R\circ S$ 也是自反的；

b）若 R,S 都是对称的，则 $R\circ S$ 也是对称的；

c）若 R,S 都是反自反的，则 $R\circ S$ 也是反自反的；

d）若 R,S 都是反对称的，则 $R\circ S$ 也是反对称的；

e）若 R,S 都是传递的，则 $R\circ S$ 也是传递的。

13.设 R，S 是 X 上的满足 $R\circ S\subseteq S\circ R$ 的对称关系，证明 $R\circ S=S\circ R$。

P_{113} **习题**

25. 设 $X=\{1,2,3\},Y=\{1,2\},S=\{f\mid f:X\to Y\}$。$\cong$ 是 S 上的二元关系：

$$\forall f,g\in S,\ f\cong g\Leftrightarrow I_m(f)=I_m(g)\text{。}$$

证明：（1）$\cong$ 是 S 上的等价关系；（2）求等价类的集合。

26. 设 $X=\{1,2,3\},Y=\{1,2\},S=\{f\mid f:X\to Y\}$。$\cong$ 是 S 上的二元关系：

$$\forall f,g\in S,\ f\cong g\Leftrightarrow f(1)+f(2)+f(3)=g(1)+g(2)+g(3)\text{。}$$

证明：（1）$\cong$ 是 S 上的等价关系；（2）求等价类数。

27. 设 $X=\{1,2,3\},Y=\{1,2\},S=\{f\mid f:X\to Y\}$。$\cong$ 是 S 上的二元关系：

$$\forall f,g\in S,\ f\cong g\Leftrightarrow\{f^{-1}(y)\mid y\in Y\}=\{g^{-1}(y)\mid y\in Y\}\text{。}$$

证明：（1）$\cong$ 是 S 上的等价关系；（2）求等价类。

28. 由置换 $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&6&5&8&1&2&7&4\end{pmatrix}$ 确定了 $X=\{1,2,\cdots,8\}$ 上的一个关系 $\cong$: $i,j\in X, i\cong j$ 当且仅当 i 与 j 在 σ 的循环分解式中的同一循环置换中，证明：$\cong$ 是 X 上的等价关系，求 $X/\cong$。

29. 给出 X＝{1,2,3,4}上两个等价关系 R 与 S，使得 $R\circ S$ 不是等价关系。

30. 设 R 是 X 上的一个自反关系，证明：R 是等价关系 $\Leftrightarrow$ 若 $(a,b)\in R$ 且 $(a,c)\in R$，则 $(b,c)\in R$。

35. 设 X 是一个集合，$|X|=n$，试求：

（1）X 上自反二元关系的个数；（2）X 上反自反二元关系的个数；
（3）X 上对称二元关系的个数；（4）X 上自反或对称关系的个数。

P_{125} 习题

38. 存在一个偏序关系≤，使得 $(X,\le)$ 中有唯一的极大元素，但没有最大元素？若

有请给出一个具体例子；若没有，请证明之。

39．令 S＝｛1，2，…，12｝，画出偏序集（S,|）的 Hass 图，
其中“|”是整除关系，它有几个极大（小）元素？列出这些
极大（小）元素。

第四章 无穷集合及其基数习题

1．设 A 为由序列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$

的所有项组成的集合，则 A 是否是可数的？为什么？

2. 证明：直线上互不相交的开区间的全体所构成的集合至多可数。

3. 证明：单调函数的不连续点的集合至多可数。

4. 任一可数集 A 的所有有限子集构成的集族是可数集合。

5．判断下列命题之真伪：

(1) 若 $f: X \to Y$ 且 f 是满射，则只要 X 是可数的，那么 Y 是至多可数的；

(2) 若 $f: X \to Y$ 且 f 是单射，那么只要 Y 是可数的，则 X 也是可数的；

(3) 可数集在任一映射下的像也是可数的；

7. 设Σ为一个有限字母表，Σ上所有字（包括空字）之集记为Σ^*。证明Σ^*是可数集

P_{142}习题

4. 利用康托的对角线法证明2^A是不可数集，其中A为可数集。

5. 利用康托的对角线法证明所有的 0，1 的无穷序列是不可数集。

第六章 图的基本概念

P_{206} 习题

1．画出具有 4 个顶点的所有无向图(同构的只算一个)。

2．画出具有 3 个顶点的所有有向图(同构的只算一个)。

3．画出具有 4 个、6 个、8 个顶点的三次图。

4．某次宴会上，许多人互相握手。证明：握过奇数次手的人数为偶数(注意，0 是偶数)。

P_{209} 习题

1．设 u 与 v 是图 G 的两个不同顶点。若 u 与 v 间有两条不同的通道(迹)，则 G 中是否有圈？

2．证明：一个连通的(p，q)图中 q≥p-1。

3．设 G 是一个（p，q）图，且 $q > (p-1)(p-2)/2$，则 G 是连通的。

6．在一个有 n 个人的宴会上，每个人至少有 m 个朋友(2≤m≤n)。试证：有不少

于 m+1 个人，使得他们按某种方法坐在一张圆桌旁，每人的左、右均是他的朋友。

8．设 G 是图。证明：若 $\delta(G)\geqslant 2$，则 G 包含长至少是 $\delta(G)+1$ 的圈。

P_{216} 习题

1．证明：若图 G 不是连通图，则 G^c 是连通图。

2．证明：每一个自补图有 4n 或 4n+1 个顶点。

P_{228} 习题

1.给出一个 10 个顶点的非哈密顿图的例子，使得每一对不邻接的顶点 u 和 v，均有：$\deg u+\deg v\geqslant 9$。

2．试求 K_p 中不同的哈密顿圈的个数。

4．完全偶图 $K_{m,n}$ 为哈密顿图的充分必要条件是什么？

10．证明具有奇数顶点的偶图不是哈密顿图。

第七章 树和割集

P_{243} 习题

1．分别画出具有 4、5、6 个顶点的所有树(同构的只算一个)。

2．证明：每个非平凡树是偶图。

3．设 G 是一棵树且 Δ(G)≥k，证明：G 中至少有 k 个度为 1 的顶点。

4．令 G 是一个有 p 个顶点，k 个支的森林，证明：G 有 p-k 条边。

6.设树T中有$2n$个度为 1 的顶点，有$3n$个度为 2 的顶点，有n个度为 3 的顶点，则这棵树有多少个顶点和多少条边？

7 一棵树 T 有 n_2 个度为 2 的顶点，n_3 个度为 3 的顶点，…，n_k 个度为 k 的顶点，则 T 有多少个度为 1 的顶点？

P_{257} 习题

1．P 个顶点的图中，最多有多少个割点？

3．证明：有一座桥的三次图中至少有 10 个顶点。

7.有割点的连通图是否一定不是欧拉图？是否一定不是哈密顿图？有桥的连通图是否一定不是欧拉图和哈密顿图。

第九章 平面图和图的着色

P_{281}习题

1.设$G=(p,q)$是一个具有f个面，k个分支的平面图，则$p-q+f=k+1$。

2. 若G是顶点数p≥11的平面图，试证G^c不是平面图。

4．证明：不存在7条棱的凸多面体。

P_{294}习题

1.设G是一个没有三角形的平面图。应用欧拉公式证明G中有一个顶点v，使得degv ≤3。

2.设G是一个没有三角形的平面图。应用数学归纳法证明G是4−可着色的。

第十章 有向图

P_{301}习题

2.画出具有三个顶点的所有互不同构的有向图的图解。

3.具有 p 个顶点的完全有向图中有多少条弧？

P_{307}习题

1.设 D 是一个有 p 个顶点 q 条弧的有向图。若 D 是连通的，证明：$p-1\leq q\leq p(p-1)$。

2.设 D 是一个有 p 个顶点 q 条弧的强连通的有向图，则 q 至少是多大？

P_{307}习题

2.有向图 D 的图解如图 10.4.3 所示

(1)写出 D 的邻接矩阵及可达矩阵；(2)写出 D 关联矩阵。

3.设 D 为图 10.4.4 中的有向图，试求 v_2到其余每个顶点的长≤4 的所有通道的条数。

P_{321}习题

1.设 T 是一个正则 m 元有序树，它有 n_0个叶子，T 有多有多少条弧？

3.设 T 是一个有 n_0个叶子的二元树，出度为 2 的顶点为 n2，试证：$n_0=n_2+1$。

4.具有三个顶点的有序树共有多少个？具有三个顶点的有根树有多个？注意，同构的只算一个。

8. 用数学归纳法证明每个比赛图中必有有向哈密顿路。