群教材课后习题及思考题(2)

一、课后习题作业题：

（1）举例说明两个子群的并可以不是子群。

参见 PPT 讲义.

//////////////////////////////////

（2）设G_1和G_2是群G的两个真子群。证明：$G_1 \cup G_2$是G的子群的充分必要条件是$G_1 \subseteq G_2$或$G_2 \subseteq G_1$。

证明：

充分性$\Leftarrow$：由$G_1 \subseteq G_2$或$G_2 \subseteq G_1 \Rightarrow G_1 \cup G_2 = G_1$或$G_1 \cup G_2 = G_2$是$G$的子群。

必要性$\Rightarrow$：假设不成立，则由$e \in G_1 \cap G_2$及集合的相交关系知:

至少$\exists a \in G_1 \wedge a \notin G_2$，$\exists b \in G_2 \wedge b \notin G_1$。

由$a \in G_1 \cup G_2$，$b \in G_1 \cup G_2$及$G_1 \cup G_2$为子群得：$ab \in G_1 \cup G_2$，从而$ab \in G_1$或$ab \in G_2$。若$ab \in G_1$，则由$a^{-1} \in G_1$知$a^{-1}(ab) \in G_1 \Rightarrow b \in G_1$矛盾；若$ab \in G_2$，则由$b^{-1} \in G_2$知$(ab)b^{-1} \in G_2 \Rightarrow a \in G_2$矛盾，故假设不成立。

///

（3）设$(G_1, \circ)$和$(G_2, *)$都是群，$\varphi: G_1 \to G_2$，φ是满射且$\forall a, b \in G_1$有：

$$\varphi(a, b) = \varphi(a) * \varphi(b)$$

证明：$\varphi^{-1}(e_2)$是G_1的子群，其中e_2为G_2的单位元素。

$//\ \varphi^{-1}(e_2) = \{x | x \in G_1 \wedge \varphi(x) = e_2\}$　　//要求：此题需要提交作业

10．**证明**：记$S = \varphi^{-1}(e_2)$，则$S = \{x | x \in G_1 \wedge \varphi(x) = e_2\}$，显然$S \subseteq G_1$

证明：

1）S非空：对$\forall y \in G_2$，由φ为满射，则$\exists x \in G_1$，使得$y = \varphi(x)$，从而$\varphi(e_1) * y = \varphi(e_1) * \varphi(x) = \varphi(e_1 \circ x) = \varphi(x) = y$，同理有$y * \varphi(e_1) = \varphi(x) = y$，即有：$\varphi(e_1) * y = y * \varphi(e_1) = y$，从而$\varphi(e_1) = e_2$，故有$e_1 \in S$。

2)封闭性：对 $\forall x,t \in S$，有 $\varphi(x)=e_2$，$\varphi(t)=e_2$，则 $\varphi(x\circ t)=\varphi(x)*\varphi(t)=e_2$，

所以 $x\circ t \in S$。//至此成为代数系。

3)结合律：显然。

4)单位元：$e_1 \in S$。

5)逆元：对 $\forall x \in S$，有 $\varphi(x)=e_2$，则：$e_2=\varphi(e_1)=\varphi(x\circ x^{-1})=\varphi(x)*\varphi(x^{-1})$

$=e_2*\varphi(x^{-1})=\varphi(x^{-1})$，即 $\varphi(x^{-1})=e_2$，所以 $x^{-1}\in S$。

//

（4）设 $(Z,+)$ 为整数的加法群，令 $S_1=\{5,7\}$，$S_2=\{6,9\}$，请分别给出 (S_1) 与 (S_2)。

解：因为 5，7 的最大公因子为 1，所以 $\exists k_1,k_2\in Z: k_1\cdot 5+k_2\cdot 7=1$，则 (S_1)=Z

同理 $\exists k_1,k_2\in Z: k_1\cdot 6+k_2\cdot 9=3$，则 (S_2)=（3）$=\{3k \mid k\in Z\}$

//请大家自己对照生成算法给出生成过程。第一个由 5，7 很快能生成 Z 出的生成元“1”来。第二个由生成算法能很快看出其规律，新加入的元素为它们最大公因子 3 的倍数。//

（5）设 R 是全体实数之集，$G=\{f \mid f:R\to R, f(x)=ax+b, \forall x\in R, a\neq 0, b\in R\}$。

试证：G 是一个变换群。

证明：显然对 $\forall f\in G$，f 为双射。

1）封闭性：对 $\forall f,g\in G$，设 $f(x)=ax+b$，$g(x)=cx+d$，$a\neq 0, c\neq 0$，

则 $f\circ g(x)=f(g(x))=f(cx+d)=a(cx+d)+b=(ac)x+ad+b$，所以 $f\circ g\in G$

2）结合律：映射的复合满足结合律。

3）单位元：$I_e(x)=x$

4）逆元：显然对 $\forall f\in G$，由 f 为双射，故 f 可逆，且 $f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$，则 $f^{-1}\in G$。

///////////////////////////

（6）设 R^+ 是一切正实数之集，R 为一切实数之集。$(R^+,\times)$，$(R,+)$ 是群。令 $\varphi: R^+\to R$，$\forall x\in R^+$，$\varphi(x)=\log_p x$，其中 p 是正数。证明：φ 是同构。

证明：

1）由 φ 的构造知 φ 为双射。

2）同构方程：对 $\forall x, y \in R^{+}$，$\varphi(x \times y)=\log_{p}(x \times y)=\log_{p} x+\log_{p} y=\varphi(x)+\varphi(y)$。

///////////////////////////

（7）证明：n 次单位根之集对复数的乘法构成一个循环群。

证明：记 $U_{n}=\{x \mid x^{n}=1\}$，对 $\forall x_{k} \in U_{n}$，$x_{k}=\cos \frac{2k\pi}{n}+i \sin \frac{2k\pi}{n}$，$k=0,1, \cdots, n-1$。

由前面的习题作业知其为群，且有 $U_{n}=(x_{1})$， 其中 $x_{1}=\cos \frac{2\pi}{n}+i \sin \frac{2\pi}{n}$，

$x_{k}=\cos \frac{2k\pi}{n}+i \sin \frac{2k\pi}{n}=(\cos \frac{2\pi}{n}+i \sin \frac{2\pi}{n})^{k}=(x_{1})^{k}$。

///////////////////////////

（8）找出模 12 的同余类加群的所有真子群。

解：$(Z_{12}, \oplus)$ 为模 12 的同余类加群， $Z_{12}=(a)=([1])$，其非平凡真子群如下：

1） $S_{1}=(2a)=\{[0],[2],[4],[6],[8],[10]\}$

2） $S_{2}=(3a)=\{[0],[3],[6],[9]\}$

3） $S_{3}=(4a)=\{[0],[4],[8]\}$

4） $S_{4}=(6a)=\{[0],[6]\}$

//因为这是一个有限循环群，大家先给出对应的 12 阶的抽象有限循环群的子群，然后对应翻译出来具体的子群即可。//

///////////////////////////

（9）设 $G=(a)$ 是一个 n 阶循环群。证明：如果 $(r, n)=1$，则 $(a^{r})=G$。

//要求：此题需要提交作业

证明：由 $(n, r)=1 \Rightarrow \exists k_{1}, k_{2} \in Z$， $k_{1} \cdot n+k_{2} \cdot r=1$，则有：

$a^{1}=a^{k_{1} \cdot n+k_{2} \cdot r}=a^{k_{1} \cdot n} a^{k_{2} \cdot r}=e a^{k_{2} \cdot r}=(a^{r})^{k_{2}}$，即 $a=(a^{r})^{k_{2}}$，则 G 的生成元 a 可由 a^{r} 生成，故有：$(a^{r})=G$。

///////////////////////////

（10）假定群 G 的元素 a 的阶为 n， $(r, n)=d$， 证明： a^{r} 的阶为 n/d。

证明：设 a^{r} 的阶为 k，则 $(a^{r})^{k}=e$，即 $a^{rk}=e$。又 $a^{n}=e$，所以 $n \mid rk$，又 $(r, n)=d$，

$r=dp$ $a^n=e$ 设 $a^{rk}=e$ $q \mid pk$ $k \geq q=n/d$

$n=dq$ $n \mid rk$ $(q,p)=1$ 令 $k=n/d$ 即可

$dq \mid dpk$ $q \mid k$

则有：$\frac{n}{d} | \frac{r}{d}k$，而$(\frac{n}{d},\frac{r}{d})=1$，所以$\frac{n}{d}|k$。

又由$(a^r)^{\frac{n}{d}}=a^{\frac{nr}{d}}=(a^n)^{\frac{r}{d}}=e^{\frac{r}{d}}=e$得：$k|\frac{n}{d}$，从而$k=\frac{n}{d}$

//这种证明一个元素的阶等于某个定值的方法，通常就是双向整除导出相等。//

///////////////////////////

二、思考题

（1）在讲义“2-4 网课”16/19 页中，将例题中的映射φ更改为$\varphi(A)=PAP^{-1}$，

证明φ仍为自同构。**//要求**：此题需要提交作业。

参见 PPT 讲义。

（2）对讲义“2-5 网课”18/19 页中的思考题，举例说明$(a^m)=(a^d)$。

参见 PPT 讲义。