近世代数习题作业 2

1.

证明： 记 $H=\{x|\exists a_1,a_2,\cdots,a_n\in A 使 x=a_1a_2\cdots a_n, n\geq 1\}$，下证 $(A)=H$

1）先证 H 为包含 A 的 S 的子半群。

显然 $A\subseteq H$（令 $n=1$ 即可），且"$\circ$"在 H 上的运算封闭，故 H 为包含 A 的子半群。

2）下证 H 的“最小性”。

设 P 为任意包含 A 的子半群，下证 $H\subseteq P$。

对 $\forall x\in H$，$\exists a_1,a_2,\cdots,a_i\in A$ 使得 $x=a_1a_2\cdots a_i$，又 $A\subseteq P$，所以 $a_1,a_2,\cdots,a_i\in P$，

故有 $a_1a_2\cdots a_i\in P$，即 $x\in P$，所以 $H\subseteq P$。

//

2.

证明： 令 $P=\{a|a\circ a=a, a\in M\}$

① 显然有 $e\in P$，故 $P\neq\phi$，且 $P\subseteq M$；

② 下证封闭性：对 $\forall a,b\in P$，下证 $a\circ b\in P$

因为 $(a\circ b)\circ(a\circ b)=a\circ(b\circ a)\circ b=a\circ(a\circ b)\circ b=(a\circ a)\circ(b\circ b)=a\circ b$，故 $a\circ b\in P$。

//

3.

解： 不一定。设 $G=(a)=\{e,a^1,a^2,a^3,\cdots\}$，$\{e,a^2,a^3,\cdots\}$ 为 G 的子幺半群，但不是循环幺半群。//成立的正例请大家自己给出。

$\{e, a^2, a^4, \cdots\}$ 是

//

4. 设循环幺半群 $(M,\circ,e)=(a)$，且 $a^6=e$，请分别给出 $(a^i)=?(i=2,3,4,5)$。

解： 见 PPT 讲义。

//

5.

证明： 记 $S=\varphi^{-1}(e_2)$，则 $S=\{x|\varphi(x)=e_2, x\in M_1\}$，显然有 $S\subseteq M_1$

① S 非空：由 $\varphi(e_1)=e_2$ 知 $e_1\in S$。

②封闭性：对 $\forall x,y\in S$ 有：$\varphi(x)=e_2$，$\varphi(y)=e_2$，

则 $\varphi(x\circ y)=\varphi(x)*\varphi(y)=e_2*e_2=e_2$，所以 $x\circ y\in S$

故 S 是 M_1 的一个子幺半群。

若 S 是 M_1 的理想，则有 $SM_1 \subseteq S$， $M_1S \subseteq S$

对 $\forall x \in S$， $\forall y \in M_1$， $\varphi(x \circ y) = \varphi(x) * \varphi(y) = e_2 * \varphi(y) = \varphi(y)$

同理 $\varphi(y \circ x) = \varphi(y) * \varphi(x) = \varphi(y) * e_2 = \varphi(y)$

所以如果 $\varphi(y) = e_2$，则 $x \circ y(y \circ x) \in S$，此时 S 是 M_1 的理想，否则不是。

//

6.

解：见 PPT 讲义。

//

7.

证明：设 $\varphi:(S_1,*) \to (S_2,\bullet)$ 同态，$\psi:(S_2,\bullet) \to (S_3,\Delta)$ 同态，记 $f = \psi \circ \varphi$，由映射的复合运算知 f 为 $S_1 \to S_3$ 的映射。又对 $\forall x, y \in S_1$：

$$f(x * y) = \psi \circ \varphi(x * y) = \psi(\varphi(x * y)) = \psi(\varphi(x) \bullet \varphi(y)) = \psi(\varphi(x)) \Delta \psi(\varphi(y))$$

$$= \psi \circ \varphi(x) \Delta \psi \circ \varphi(y) = f(x) \circ f(y)$$

所以 $f = \psi \circ \varphi$ 为 $S_1 \to S_3$ 的同态，即两个同态的合成还是同态。