

定理

1. 证明 12.1 群的定义与第 11.3 节中的“每个元素均有逆元素的么半群 (S, \circ) 称为群”的定义等价。

证明： \Leftarrow 若 (S, \circ) 为么半群且其中每个元素均可逆，则此时 (S, \circ) 显然满足群的定义中的 3 个条件，故 (S, \circ) 为群的定义的群。

\Rightarrow 只须证明群的定义中的左单位元也为右单位元，同时群的定义中的左逆元也为右逆元即可。为此证明如下 2 个结论：

1) 设 b_l 为 a 的左逆元，即 $b_l \circ a = e_l$ (e_l 为左单位元)，则有 $a \circ b_l = e_l$ 。

2) 对 $\forall a \in G$ ，有 $a \circ e_l = a$ 。

先证 1)： $\because ab_l = e_l(ab_l) = (b'_l b_l)(ab_l)$ (其中 b'_l 为 b_l 的左逆元)

$$= b'_l(b_l a)b_l = b'_l(e_l b_l) = b'_l b_l = e_l$$

$$\therefore ab_l = e_l$$

再证 2)： $\because a \circ e_l = a \circ (b_l \circ a) = (a \circ b_l) \circ a = e_l \circ a = a$

$\therefore e_l$ 为右单位元，从而为单位元 e 。

综上群的定义中的左单位元也为右单位元，左逆元也为右逆元即为逆元。
//注释：教材 12.1 群定义第 3 条中提到的“左逆”并不是真正的左逆，因为此时仅有左单位，还没有证出此定义中的左单位元一定为单位元。//

2. 教材 12.2 节定理 12.2.4

证明：1) $\because a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = e$ ， $\therefore (a^{-1})^{-1} = a$

2) $\because (ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = aea^{-1} = e$

$$(b^{-1}a^{-1})(ab) = b^{-1}(a^{-1}a)b = b^{-1}eb = e$$

$$\therefore (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

3. 教材 12.2 节定理 12.2.6

证明： \Rightarrow 显然。

\Leftarrow 根据群的定义只须证明 G 有左单位元及 G 中任意元素有左逆元。

1) 左单位元 e_l ：由于对 $\forall a, b \in G$ ， $ya = b$ 有解，则 $yb = b$ 有解记为 y_0 ，

即 $y_0 b = b$ ，又对 $\forall a \in G$ ，方程 $bx = a$ 有解记为 x_0 ，即 $bx_0 = a$

从而对 $\forall a \in G$ 有: $y_0 a = y_0 (bx_0) = (y_0 b)x_0 = bx_0 = a$, 故 y_0 为左单位元 e_l 。

2) 左逆元: 对 $\forall a, b \in G$, $ya = b$ 有解, 令 $b = e_l$ 则方程 $ya = e_l$ 有解 y_1 , 即

对 $\forall a \in G$ 均有左逆元。

////////////////////////////////////

4. 教材 12.2 节定理 12.2.8

证明: \Rightarrow 显然。

\Leftarrow 对 $\forall a \in G$, 建立映射 $\varphi: G \rightarrow G$, 对 $\forall x \in G$ 有 $\varphi(x) = a \circ x$, 则对 $\forall x_1, x_2 \in G$, 若 $x_1 \neq x_2$, 则根据消去律知 $a \circ x_1 \neq a \circ x_2$, 即 $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$, 故 φ 为单射, 从而 $|G| = |\varphi(G)|$, 即 $|G| = |aG|$, 又由 G 的有限性及 $aG \subseteq G$, 则根据集合论的知识有 $aG = G$, 即对 $\forall b \in G$, 方程 $ax = b$ 在 G 中有解, 同理可得方程 $ya = b$ 有解, 根据定理 12.2.6 知 (G, \circ) 为群。

//思考题中要求用群的公理化定义的证明方法: 设 $|G| = n$, 由上述分析知映射 $\varphi(x) = a \circ x$ 为 $\varphi: G \rightarrow G$ 的双射, 即 φ 为一 n 次置换, 则根据 n 次置换的性质知存在正整数 m , 使得置换 φ 复合 m 次后为恒等置换即为恒等映射 (其中 m 的取值为置换 φ 分解为无共同文字后的循环置换的阶的最小公倍数), 又 $\varphi^m(x) = a^m \circ x$, 而 $\varphi^m(x) = x$ (为恒等映射), 则有 $a^m \circ x = x$, 即 a^m 为左单位元, 即有 $a^m = e_{\text{左}}$, 若 $m = 1$, 则有 $a = e_{\text{左}}$, 此时元素 a 显然有左逆即为其自身; 若 $m > 1$, 则有 $a^{m-1} \circ a = e_{\text{左}}$, 即元素 a 有左逆 a^{m-1} 。综上对 $\forall a \in G$ 均有左逆, 从而 (G, \circ) 为群。

////////////////////////////////////

5. 教材 12.2 节定理 12.2.9

证明: 设 (G, \circ) 为群, 且 $|G| = n$, 对 $\forall a \in G (a \neq e)$, 则有 $a^0, a^1, \dots, a^n \in G$, 而 $|G| = n$, 故此 $n+1$ 个元素中至少有两个元素相同, 即 $\exists i, j \in [0, n]$, 使得 $a^i = a^j$ (不妨设 $i > j$, 从而 $0 < i - j \leq n$), 则有 $a^{i-j} = e$, 从而元素 a 的阶不会超过 $i - j$, 即元素 a 的阶不超过 G 的阶。

////////////////////////////////////

6. 教材 12.3 节定理 12.3.1

证明：1) 设 G_1 的单位元为 e_1 ， G 的单位元为 e 。

则对 $\forall x \in G_1$ ，有 $xe_1 = x$ ；又 $G_1 \subseteq G$ ， $\therefore x \in G$ ，则有 $xe = x$

从而 $xe_1 = xe$ ，则由消去律得： $e_1 = e$

2) 设 G_1 的元素 a 在 G_1 中逆元素为 b_1 ， a 在 G 中的逆元素 b ，则有：

$ab_1 = e_1 = e = ab$ ，根据消去律得： $b_1 = b$

////////////////////////////////////

7. 教材 12.3 节定理 12.3.2

证明：设 $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 为群 G 的任意多个子群构成的集族，令 $H = \bigcap_{\alpha \in I} G_\alpha$ 。

1) H 非空：由 G_α 为子群，则 $e \in G_\alpha$ ，从而 $e \in \bigcap_{\alpha \in I} G_\alpha$ ，即 $e \in H$ 。

2) H 封闭性：对 $\forall a, b \in H$ ，则 $a, b \in \bigcap_{\alpha \in I} G_\alpha$ ，从而 $a, b \in G_\alpha$ ，又由 G_α 为子群，则有 $ab \in G_\alpha$ ，故有 $ab \in \bigcap_{\alpha \in I} G_\alpha$ ，即 $ab \in H$ 。

3) 逆元：对于 $\forall a \in H$ ，则 $a \in G_\alpha$ ，又由 G_α 为子群，则 $a^{-1} \in G_\alpha$ ，从而 $a^{-1} \in \bigcap_{\alpha \in I} G_\alpha$ ，即 $a^{-1} \in H$ 。

注：这里可以直接调用定理 11.4.1 来证明，由此只需给出逆元素的证明即可。

////////////////////////////////////

8. 教材 12.3 节定理 12.3.3

证明：设 (G, \circ) 为群， G_1, G_2 为 G 的真子群。

假设 $G = G_1 \cup G_2$ ，由 $G_1 \subset G, G_2 \subset G$ 知 $\exists a \notin G_1$ 且 $a \in G, b \notin G_2$ 且 $b \in G$ ，

而 $G = G_1 \cup G_2$ ，故有 $a \in G_2, b \in G_1$ 。

又 (G, \circ) 为群，则有 $ab \in G$ ，从而 $ab \in G_1$ 或 $ab \in G_2$ 。

1) 若 $ab \in G_1$ ，则由 $b \in G_1$ 及 G_1 子群知 $b^{-1} \in G_1$ ，从而 $(ab)b^{-1} \in G_1$ (封闭性)，
即 $a \in G_1$ ，与 $a \notin G_1$ 矛盾。

2) 若 $ab \in G_2$ ，则由 $a \in G_2$ 及 G_2 子群知 $a^{-1} \in G_2$ ，从而 $a^{-1}(ab) \in G_1$ (封闭性)，
即 $b \in G_2$ ，与 $b \notin G_2$ 矛盾。

综上 $ab \notin G$ ，矛盾，故假设不成立。

////////////////////////////////////

9. 教材 12.3 节定理 12.3.4

证明： \Rightarrow 显然。

\Leftarrow 由已知只需证明 S 中有单位元即可。在 1) 中令 $b = a^{-1}$ 则有： $e \in S$ 。

////////////////////////////////////

10. 教材 12.3 节定理 12.3.5

证明： \Leftarrow ：1) $e \in S$ ：由已知令 $b = a$ ，则有 $e \in S$ ；

2) 逆元：令 $a = e$ 则由已知对 $\forall b \in S$ ， $b^{-1} \in S$ ；

3) 封闭性：对 $\forall b \in S$ ，由 2) $b^{-1} \in S$ ，则由已知对 $\forall a \in S$ ，则有 $a(b^{-1})^{-1} \in S$ ，
即 $ab \in S$ 。

////////////////////////////////////

11. 教材 12.3 节定理 12.3.6

证明： \Rightarrow 显然。

\Leftarrow 根据定理 12.2.8，只需证明 F 的封闭性即可（其上的结合律及消去律已自动成立）。封闭性显然。

////////////////////////////////////

12. 教材 12.3 节定理 12.3.7

证明：1) $e \in C$ ：因为对 $\forall x \in G$ ， $xe = ex = x$ ；

2) 封闭性：对 $\forall a, b \in C$ ，则对 $\forall x \in G$ ，有

$(ab)x = a(bx) = a(xb) = (ax)b = (xa)b = x(ab)$ ，从而 $ab \in C$ ；

3) 逆元：对 $\forall a \in C$ ，有 $ax = xa \Rightarrow xa^{-1} = a^{-1}x$ ，从而 $a^{-1} \in C$ ；

4) 结合律：显然；

5) 交换律：显然。

////////////////////////////////////

13. 教材 12.4 节定理 12.4.1

证明：设 $(G, *)$ 为群。

1) 构造基于 G 的变换群

对 $\forall a \in G$ ，定义 $L(G) = \{f_a | f_a : G \rightarrow G, f_a(x) = a * x, a \in G, \forall x \in G\}$ 。

则由映射 f_a 的定义知其为单射、满射，从而为一一映射：

单射：对 $\forall x_1, x_2 \in G$ ，若 $x_1 \neq x_2$ ，则由消去律知 $a * x_1 \neq a * x_2$ ，

即 $f_a(x_1) \neq f_a(x_2)$ 。

满射：对 $\forall y \in G$ ，显然 $a^{-1} * y \in G$ ，则 $f_a(a^{-1} * y) = a * (a^{-1} * y) = y$

即存在 $x = a^{-1} * y$, 使得 $f_a(x) = y$ 。

2) $L(G)$ 关于映射的合成构成 "o" 构成变换群 $(L(G), \circ)$

结合律: 映射的合成运算满足结合律。

封闭性: 对 $\forall f_a, f_b \in L(G)$,

$$\because f_a \circ f_b(x) = f_a(f_b(x)) = f_a(b * x) = a * (b * x) = (a * b) * x = f_{a*b}(x)$$

$$\therefore f_a \circ f_b = f_{a*b}, \text{ 由 } a * b \in G \text{ 知 } f_{a*b} \in L(G)。$$

单位元: 令 $a = e$, 则 $f_e(x) = e * x = x$ 为恒等映射。

逆元: 对 $\forall f_a \in L(G)$, 由 f_a 为双射知其逆映射 f_a^{-1} 为:

$$f_a^{-1}(x) = a^{-1} * x = f_{a^{-1}}(x)$$

由 $a \in G$ 知 $a^{-1} \in G$, 从而映射 $f_{a^{-1}} \in L(G)$, 即 $f_a^{-1} \in L(G)$ 。

///注: 根据么半群的同构 Cayley 定理中的证明方法, 知 $(L(G), \circ)$ 至少为变换么半群, 故可以只需证明逆元即可。///

3) 构造同构映射

令 $\varphi: G \rightarrow L(G)$, 对 $\forall a \in G$, $\varphi(a) = f_a$, 则 φ 为一一映射:

单射: 对 $\forall a, b \in G$, 若 $a \neq b$, 则对 $\forall x \in G$, 根据消去律知 $a * x \neq b * x$,

$$\text{即 } f_a \neq f_b, \text{ 从而 } \varphi(a) \neq \varphi(b)$$

满射: 对 $\forall f_a \in L(G)$, 由 $f_a(x) = a * x$, 且 $a \in G$, 故 φ 为满射。

同构: 对 $\forall a, b \in G$, 由 φ 的定义知: $\varphi(a * b) = f_{a*b}$, 又 $f_a \circ f_b = f_{a*b}$,

$$\text{所以 } \varphi(a * b) = f_{a*b} = f_a \circ f_b = \varphi(a) \circ \varphi(b)$$

综上 $\varphi: G \rightarrow L(G)$ 上的一个同构。

14. 教材 12.4 节定理 12.4.2

证明: 设 $(G, *)$ 为群。

1) 封闭性: 对 $\forall f, g \in A(G)$, 下证 $f \circ g \in A(G)$ 。

由 $f, g \in A(G)$ 知 f, g 为 G 上的双射, 则由映射的复合知 $f \circ g$ 为 G 上的双射。

$$\begin{aligned}\text{又对 } \forall a, b \in G, \quad f \circ g(a * b) &= f(g(a * b)) = f(g(a) * g(b)) \\ &= f(g(a)) * f(g(b)) = (f \circ g(a)) * (f \circ g(b))\end{aligned}$$

即 $f \circ g$ 为 G 上的自同构。

2) 结合律：显然。

3) 单位元： G 上的恒等映射 I_G 。

4) 逆元：对 $\forall f \in A(G)$ ，下证 $f^{-1} \in A(G)$ 。

由 $f \in A(G)$ 知 f 为 G 上的双射，则 f^{-1} 仍为 G 上的双射。

又对 $\forall a, b \in G$ ， $\exists a', b' \in G$ ，使得 $a = f(a')$ ， $b = f(b')$ 。且由 f 为 G 上的自同构，

则有 $f(a' * b') = f(a') * f(b')$ ，从而：

$$\begin{aligned}f^{-1}(a * b) &= f^{-1}(f(a') * f(b')) = f^{-1}(f(a' * b')) \\ &= f^{-1} \circ f(a' * b') = I_G(a' * b') = a' * b' = f^{-1}(a) * f^{-1}(b)\end{aligned}$$

故 f^{-1} 仍为 G 上的自同构，即 $f^{-1} \in A(G)$ 。

////////////////////////////////////

14. 教材 12.4 节定理 12.4.3

证明：设 $(G, *)$ 为群，设 $B(G)$ 为 G 的内自同构之集，即：

$$B(G) = \{\varphi_a \mid \varphi_a(x) = a * x * a^{-1}, a \in G, \forall x \in G\}$$

下证 $(B(G), \circ)$ 为群。

1) 封闭性：对 $\forall \varphi_a, \varphi_b \in B(G)$ ， $\varphi_a(x) = a * x * a^{-1}$ ， $\varphi_b(x) = b * x * b^{-1}$ ，则：

$$\varphi_a \circ \varphi_b(x) = \varphi_a(\varphi_b(x)) = \varphi_a(b * x * b^{-1}) = a * (b * x * b^{-1}) * a^{-1} = (a * b) * x * (a * b)^{-1}$$

所以 $\varphi_a \circ \varphi_b \in B(G)$ 。

2) 结合律：显然。

3) 单位元：取 $a = e$ 即可知 $\varphi_e \in B(G)$ 。

4) 逆元：对 $\forall \varphi_a \in B(G)$ ， $\varphi_a(x) = a * x * a^{-1}$ ，则：

$$\varphi_a^{-1}(x) = a^{-1} * x * a = a^{-1} * x * (a^{-1})^{-1},$$

所以 $\varphi_a^{-1} \in B(G)$ 。

////////////////////////////////////

15. PPT 讲义 2-5(教材 12.5 节)生成元的唯一性问题:

1) 设 $G = \langle a \rangle$, 且 a 的阶为无穷, 则 a 与 a^{-1} 均为 G 的生成元;

2) 设 $G = \langle a \rangle$, 且 a 的阶为 n , 则其生成元为 a^l , $(l, n) = 1$, $l > 1$

证明: 1) 设 $a^l (l \neq 1)$ 为 G 的另一生成元, 则有 $G = \langle a^l \rangle$, 又 $G = \langle a \rangle$, $\therefore a \in \langle a^l \rangle$,

则 $\exists m \in \mathbb{Z}$, 使得 $a = (a^l)^m$, 即 $a = a^{lm}$, $\Rightarrow a^{lm-1} = e$, 又 a 的阶为无穷,

所以 $lm-1=0$, $\Rightarrow lm=1 \Rightarrow \begin{cases} l=1, m=1 \\ l=-1, m=-1 \end{cases}$, 即 a^{-1} 为 G 的另一生成元。

2) 由 1) 同理可得 $\exists m \in \mathbb{Z}$, 使得 $a = (a^l)^m$, $\Rightarrow a^{lm-1} = e$, 此时由 a 的阶

为 n 知 $n \mid lm-1$, 即 $lm-1=kn \Rightarrow m \cdot l + (-k) \cdot n = 1$, 即 $(l, n) = 1$ 。

////////////////////////////////////

16. 教材 12.6 节定理 12.6.2

证明: 由定理 12.6.1 得: $a^{-1}b \in H \Leftrightarrow a^{-1}bH = H$

$$\Leftrightarrow a(a^{-1}bH) = aH$$

$$\Leftrightarrow bH = aH$$

////////////////////////////////////

17. 教材 12.6 节定理 12.6.3

证明: 1) 若 $a^{-1}b \in H$, 则由定理 12.6.2 知 $aH = bH$ 。

2) 若 $a^{-1}b \notin H$, 则 $aH \neq bH$ 。假设此时 $aH \cap bH \neq \emptyset$, 记 $d \in aH \cap bH$,

则 $\exists h_1, h_2 \in H$ 使得 $d = ah_1$, $d = bh_2$, 则有 $ah_1 = bh_2 \Rightarrow a^{-1}b = h_1h_2^{-1} \in H$, 矛盾,

故必有 $aH \cap bH = \emptyset$ 。

18. 教材 12.6 节定理 12.6.4

证明: 由映射 $\varphi(x) = a \circ x$ 为单射知 $|aH| = |H|$, 同理 $|bH| = |H|$, 从而 $|aH| = |bH|$ 。

////////////////////////////////////

19. 教材 12.6 节定理 12.6.7

证明: 设 H 的互不相同的左陪集为: a_1H, a_2H, \dots, a_jH , $j = [G:H]$ 。

由前述定理知： $G = a_1H \cup a_2H \cup \cdots \cup a_jH$ ，且任意两个不同的陪集互不相交，根据容斥原理有： $|G| = |a_1H| + |a_2H| + \cdots + |a_jH|$

又由 $|a_iH| = |H|$ ， $i = 1, 2, \dots, j$ 得：

$$N = n + n + \cdots + n = n \cdot j, \text{ 即 } N = n \cdot [G:H].$$

////////////////////////////////////

20. 教材 12.6 节推论 12.6.1

证明：设 G 是一个阶为 N 的有限群，对 $\forall a \in G(a \neq e)$ 设其阶为 r 。

则由 a 生成的子群 $H = \langle a \rangle = \{e, a^1, \dots, a^{r-1}\}$ ，则 $|H| = r$ ，根据 Lagrange 定理有 $r|N$ ，即每个元素的阶能整除该有限群的阶。

////////////////////////////////////

21. 教材 12.6 节推论 12.6.2

证明：不妨设 $P > 2$ ，则对 $\forall a \in G(a \neq e)$ ，则由推论 1 知其阶为 r 满足： $r|P$ ，

而 P 为素数，故有 $r = 1$ 或 $r = P$ ，由于 $a \neq e$ 故 $r > 1$ ，所以 $r = P$ 。

从而 $|\langle a \rangle| = p$ ，又 $\langle a \rangle \subseteq G, |G| = P$ ，则由集合论的知识得 $\langle a \rangle = G$ ，即 G 是个循环群。

////////////////////////////////////

22. 教材 12.6 节推论 12.6.3

证明：对 $\forall a \in G(a \neq e)$ ，设其阶为 r ，则有 $a^r = e$ 。又根据推论 1 有 $r|N$ ，即 $N = r \cdot q$ 。

$$\text{从而 } a^N = a^{r \cdot q} = (a^r)^q = e^q = e。$$

////////////////////////////////////

23. 教材 12.7 节定理 12.7.1

证明：1) 证 $HH = H$

先证 $HH \subseteq H$ ：由 H 是 G 的子群，根据封闭性知 $HH \subseteq H$ 。

再证 $H \subseteq HH$ ：对 $\forall x \in H$ ，由 $e \in H$ 知 $x \in HH$ ，从而 $H \subseteq HH$ 。

2) 证 $H^{-1} = H$

先证 $H^{-1} \subseteq H$ ：对 $\forall x \in H^{-1}$ ，则 $\exists a \in H$ 使得 $x = a^{-1} \Rightarrow x^{-1} = a \in H$ ，即

$x^{-1} \in H$ ，又 H 是 G 的子群，所以 $(x^{-1})^{-1} \in H$ ，即 $x \in H$ ，所以 $H^{-1} \subseteq H$ 。

再证 $H \subseteq H^{-1}$ ：对 $\forall a \in H$ ，由 H 是 G 的子群知 $a^{-1} \in H$ ，根据 H^{-1} 的定义

知 $(a^{-1})^{-1} \in H^{-1}$, 即 $a \in H^{-1}$, 所以 $H \subseteq H^{-1}$ 。

////////////////////////////////////

24. 教材 12.7 节定理 12.7.2

证明: \Rightarrow 由 AB 是 G 的子群根据定理 12.7.1 有: $AB = (AB)^{-1}$, 则有: $AB = B^{-1}A^{-1}$,

又 A, B 是群 G 的子群则有 $A = A^{-1}, B = B^{-1}$, 所以 $AB = BA$ 。

\Leftarrow 直接由子群的判定定义来证明:

1) 封闭性: 因为 $(AB)(AB) = A(BA)B = A(AB)B = (AA)(BB)$, 而 A, B 是群

G 的子群, 所以 $AA \subseteq A, BB \subseteq B$, 故有 $(AA)(BB) \subseteq AB$, 从而

$(AB)(AB) \subseteq AB$, 即满足封闭性。

2) 结合律: 显然;

3) 单位元: 由 A, B 是群 G 的子群知 $e \in AB$;

4) 逆元: 对 $\forall a \in A, b \in B$, $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} \in B^{-1}A^{-1}$, 而 $A = A^{-1}, B = B^{-1}$,

从而 $(ab)^{-1} \in BA$, 又 $AB = BA$, 所以 $(ab)^{-1} \in AB$ 。

////////////////////////////////////

25. 教材 12.7 节定理 12.7.3

证明: 证 $3) \Rightarrow 1)$: 即需证 $aH = Ha$

先证 $aH \subseteq Ha$: 由 $aHa^{-1} \subseteq H \Rightarrow (aHa^{-1})a \subseteq Ha \Rightarrow aH \subseteq Ha$

再证 $Ha \subseteq aH$: 由于对 $\forall a \in G$, 有 $a^{-1} \in G$, 从而 $a^{-1}H(a^{-1})^{-1} \subseteq H$,

即 $a^{-1}Ha \subseteq H$, 则 $a(a^{-1}Ha) \subseteq aH$, 即 $Ha \subseteq aH$ 。

综上 $aH = Ha$ 。

26. 教材 12.7 节定理 12.7.5

证明: 1) 先证 S_l 对群子集乘法 " \bullet " 构成一个代数系 (S_l, \bullet)

只需证 " \bullet " 为 S_l 上的一个二元代数运算。

① 运算的封闭性: 对 $\forall a_1H, b_1H \in S_l$, 由 H 是群 G 的正规子群,

则有 $(a_1H) \bullet (b_1H) = a_1(Hb_1)H = a_1(b_1H)H = a_1b_1(HH) = a_1b_1H \in S_l$

②"•"为二元映射

即需证若 $a_2H = a_1H$, $b_2H = b_1H$, 则需证 $(a_2H) \bullet (b_2H) = (a_1H) \bullet (b_1H)$

由①得 $(a_2H) \bullet (b_2H) = a_2b_2H$, $(a_1H) \bullet (b_1H) = a_1b_1H$

根据子群的陪集的性质: $a_2H = a_1H \Rightarrow a_2^{-1}a_1 \in H$,

则 $\exists h_1 \in H$, 使得 $a_2^{-1}a_1 = h_1 \Rightarrow a_1 = a_2h_1$

同理由 $b_2H = b_1H \Rightarrow b_2^{-1}b_1 \in H$

则 $\exists h_2 \in H$, 使得 $b_2^{-1}b_1 = h_2 \Rightarrow b_1 = b_2h_2$

从而 $a_1b_1H = (a_2h_1)(b_2h_2)H = a_2(h_1b_2)h_2H$

又 H 是群 G 的正规子群则有: $Hb_2 = b_2H$, 则对 $h_1 \in H$, $\exists h_3 \in H$,

使得 $h_1b_2 = b_2h_3$, 从而 $a_2(h_1b_2)h_2H = a_2b_2(h_3h_2)H = a_2b_2H$ 。

(因为 $h_3h_2 \in H$, 所以 $(h_3h_2)H = H$)

2) 结合律: 显然;

3) 单位元: 对 $\forall aH \in S_l$ 有 $(aH) \bullet (eH) = (eH) \bullet (aH) = aH$,

所以 eH 即 H 为 S_l 的单位元;

4) 逆元: 对 $\forall aH \in S_l$,

由①知: $(aH) \bullet (a^{-1}H) = (a^{-1}H) \bullet (aH) = eH = H$ (H 为 S_l 的单位元)

所以对 $\forall aH \in S_l$, 其逆为 $a^{-1}H$ 。

27. 教材 12.8 节定理 12.8.1

证明: 1) 先证 $\varphi(e_1) = e_2$

由 φ 为 G_1 到 G_2 的一个同态知: $\varphi(e_1) = \varphi(e_1 \circ e_1) = \varphi(e_1) * \varphi(e_1)$

$\Rightarrow \varphi(e_1) = \varphi(e_1) * \varphi(e_1)$, 则由消去律得: $\varphi(e_1) = e_2$

2) 再证 $\varphi(a^{-1}) = [\varphi(a)]^{-1}$

由 φ 为 G_1 到 G_2 的一个同态, 则有 $\varphi(a^{-1}) * \varphi(a) = \varphi(a^{-1} \circ a) = \varphi(e_1) = e_2$

同理有: $\varphi(a) * \varphi(a^{-1}) = e_2$, 所以 $\varphi(a^{-1}) = [\varphi(a)]^{-1}$ 。

////////////////////////////////////

28. 教材 12.8 节定理 12.8.3

证明: 1) 先证 $\varphi^{-1}(e_2)$ 为 G_1 的子群: 具体参见习题作业 12.3. (5)。

2) 再证 $\varphi^{-1}(e_2)$ 为 G_1 的正规子群, 记 $H = \varphi^{-1}(e_2)$

只需证对 $\forall a \in G_1$, $aHa^{-1} \subseteq H$

即只需证对 $\forall h \in H$, $a \circ h \circ a^{-1} \in H$, 则只需证 $\varphi(a \circ h \circ a^{-1}) = e_2$

由 φ 是群 (G_1, \circ) 到群 $(G_2, *)$ 的满同态, 则有:

$\varphi(a \circ h \circ a^{-1}) = \varphi(a) * \varphi(h) * \varphi(a^{-1})$, 又 $\varphi(h) = e_2$, 所以

$\varphi(a \circ h \circ a^{-1}) = \varphi(a) * e_2 * \varphi(a^{-1}) = \varphi(a) * \varphi(a^{-1}) = \varphi(a \circ a^{-1}) = \varphi(e_1) = e_2$ 。

综上 $\varphi^{-1}(e_2)$ 为 G_1 的正规子群。

////////////////////////////////////

28. 教材 12.8 节定理 12.8.4

证明:

1) A. 封闭性: $\forall x, y \in \varphi(H)$, 则由 φ 为满射知: $\exists t_1, t_2 \in H$, 使得: $x = \varphi(t_1)$,

$y = \varphi(t_2)$, 则 $x * y = \varphi(t_1) * \varphi(t_2) = \varphi(t_1 * t_2) \in \varphi(H)$

B. 结合律: 显然

C. 单位元: $e_2 = \varphi(e_1)$

D. 逆元: 对 $\forall x \in \varphi(H)$, $\exists t \in H$, 使得 $x = \varphi(t)$, 则 $x^{-1} = (\varphi(t))^{-1} = \varphi(t^{-1}) \in \varphi(H)$

2) 只需要证明 $\varphi(N)$ 的正规性, 即证对 $\forall x \in G_2$ 有 $x * \varphi(N) * x^{-1} \subseteq \varphi(N)$ 。

同 1) 对 $\forall x \in G_2$, $\exists t \in G_1$, 使得 $x = \varphi(t)$, 则 $x^{-1} = \varphi(t^{-1})$

又对 $\forall h \in \varphi(N)$, $\exists h_0 \in N$, 使得 $h = \varphi(h_0)$

则 $x * h * x^{-1} = \varphi(t) * \varphi(h_0) * \varphi(t^{-1}) = \varphi(t * h_0 * t^{-1})$

由 N 正规知: $t * h_0 * t^{-1} \in N$, 所以 $x * h * x^{-1} \in \varphi(N)$

从而有 $x * \varphi(N) * x^{-1} \subseteq \varphi(N)$ 。

3) 记 $H = \varphi^{-1}(\overline{H}) = \{x \mid x \in G_1 \wedge \varphi(x) \in \overline{H}\}$

A. 封闭性: 对 $\forall x, y \in H$, 则 $\varphi(x \circ y) = \varphi(x) * \varphi(y)$, 由 $\varphi(x) \in \overline{H}, \varphi(y) \in \overline{H}$ 及 \overline{H} 为子群知 $\varphi(x) * \varphi(y) \in \overline{H}$, 从而 $\varphi(x \circ y) \in \overline{H}$, 所以 $x \circ y \in H$

B. 结合律: 显然

C. 单位元: 由 $e_2 \in \overline{H}$, 而 $e_2 = \varphi(e_1)$, 所以 $e_1 \in \varphi^{-1}(\overline{H}) = H$

D. 逆元: 对 $\forall x \in H$, 则 $\varphi(x) \in \overline{H}$ 且 $(\varphi(x))^{-1} = \varphi(x^{-1})$, 而 \overline{H} 为子群, 所以 $(\varphi(x))^{-1} \in \overline{H}$, 即 $\varphi(x^{-1}) \in \overline{H}$, 故有 $x^{-1} \in \varphi^{-1}(\overline{H}) = H$

4) 记 $N = \varphi^{-1}(\overline{N})$

同上只需要证明正规性, 即证对 $\forall x \in G_1$ 有 $x \circ N \circ x^{-1} \subseteq N$ 。

或只需要证对 $\forall h \in N$ 有 $x \circ h \circ x^{-1} \in N$, 从而只需要证 $\varphi(x \circ h \circ x^{-1}) \in \overline{N}$ 。

由 $\varphi(x \circ h \circ x^{-1}) = \varphi(x) * \varphi(h) * \varphi(x^{-1}) = \varphi(x) * \varphi(h) * (\varphi(x))^{-1}$, 且 $\varphi(x) \in G_2, \varphi(h) \in \overline{N}$

及 \overline{N} 为正规子群知: $\varphi(x) * \varphi(h) * (\varphi(x))^{-1} \in \overline{N}$, 则 $\varphi(x \circ h \circ x^{-1}) \in \overline{N}$ 。

////////////////////////////////////

29. 教材 12.8 节定理 12.8.5

证明: 定义 $\varphi: G \rightarrow G/N$, 且对 $\forall a \in G, \varphi(a) = aN$, 则显然 φ 为满射。

下证 φ 为 G 到 G/N 的同态。

对 $\forall a, b \in G$, 根据 φ 的定义有 $\varphi(a \circ b) = (ab)N$,

又 $\varphi(a) \cdot \varphi(b) = (aN) \cdot (bN) = a(Nb)N = a(bN)N = (ab)NN = (ab)N$

从而 $\varphi(a \circ b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$, 即 φ 为 G 到 G/N 的同态。

由商群 G/N 的单位元为 N , 则

$\text{Ker } \varphi = \varphi^{-1}(N) = \{a \mid \varphi(a) = N, a \in G\} = \{a \mid aN = N, a \in G\} = \{a \mid a \in N\} = N$

即 $\text{Ker } \varphi = N$

////////////////////////////////////

30. 教材 12.8 节定理 12.8.6

证明：主要是找到一个 G_1/E 到 G_2 的双射，且满足同构方程。

1) 商群 G_1/E 存在：由定理 3 知 $E = \text{Ker } \varphi$ 为正规子群，故商群 G_1/E 存在。

2) 定义 $\bar{\varphi}: G_1/E \rightarrow G_2$ ，对 $\forall aE \in G_1/E$ (其中 $a \in G_1$)，有： $\bar{\varphi}(aE) = \varphi(a)$

下证 $\bar{\varphi}$ 为双射：

① $\bar{\varphi}$ 为映射：即需证对 $\forall aE, bE \in G_1/E$ ，若 $aE = bE$ ，则有 $\bar{\varphi}(aE) = \bar{\varphi}(bE)$ 。

由 $aE = bE \Rightarrow a^{-1}b \in E$ ，则由 E 的构造知 $\varphi(a^{-1}b) = e_2$ (e_2 为 G_2 的单位元)，又由 φ 是群 (G_1, \circ) 到群 $(G_2, *)$ 的满同态得：

$$\varphi(a^{-1}b) = \varphi(a^{-1}) * \varphi(b) = e_2 \Rightarrow (\varphi(a))^{-1} * \varphi(b) = e_2 \Rightarrow \varphi(a) = \varphi(b),$$

则由 $\bar{\varphi}$ 的定义知 $\bar{\varphi}(aE) = \bar{\varphi}(bE)$ 。

② $\bar{\varphi}$ 为单射：对 $\forall aE, bE \in G_1/E$ ，若 $aE \neq bE$ ，下证 $\bar{\varphi}(aE) \neq \bar{\varphi}(bE)$ 。

若 $\bar{\varphi}(aE) = \bar{\varphi}(bE)$ ，则由 $\bar{\varphi}$ 的定义知 $\Rightarrow \varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow (\varphi(a))^{-1} * \varphi(b) = e_2$

$\Rightarrow \varphi(a^{-1}) * \varphi(b) = e_2 \Rightarrow \varphi(a^{-1}b) = e_2 \Rightarrow a^{-1}b \in E \Rightarrow aE = bE$ ，矛盾。

③ $\bar{\varphi}$ 为满射：由 $\bar{\varphi}$ 的定义显然成立。

综上 $\bar{\varphi}$ 为双射。

3) 再证 $\bar{\varphi}$ 为 G_1/E 到 G_2 同构：即对 $\forall aE, bE \in G_1/E$ ，需证

$$\bar{\varphi}((aE) \cdot (bE)) = \bar{\varphi}(aE) * \bar{\varphi}(bE)$$

因为 $\bar{\varphi}((aE) \cdot (bE)) = \bar{\varphi}(abE) = \varphi(ab) = \varphi(a) * \varphi(b) = \bar{\varphi}(aE) * \bar{\varphi}(bE)$

所以 $\bar{\varphi}$ 为 G_1/E 到 G_2 同构。