

数理逻辑教程 2015

任世军
哈尔滨工业大学计算机学院

2015.11

目录

| | | |
|-------|-------------------|----|
| 1 | 命题演算形式化系统 | 5 |
| 1.1 | 命题演算的基本概念 | 5 |
| 1.1.1 | 命题与联结词 | 5 |
| 1.2 | 形式语言与命题公式 | 10 |
| 1.2.1 | 形式语言的定义 | 10 |
| 1.3 | 命题公式的语义 | 11 |
| 1.3.1 | 联接符号的含义 | 11 |
| 1.3.2 | 赋值 | 11 |
| 1.3.3 | 赋值的计算模式 | 12 |
| 1.4 | 命题公式的分类 | 13 |
| 1.5 | 命题演算的语义推理 | 14 |
| 1.6 | 范式 | 20 |
| 1.7 | 联结词的扩充与归约 | 22 |
| 1.8 | 命题演算形式系统 PC | 25 |
| 1.8.1 | 语言部分 | 25 |
| 1.8.2 | 推理部分 | 26 |
| 1.9 | 命题演算形式系统 PC 的定理 | 27 |
| 1.10 | 命题演算形式系统 PC 的基本理论 | 38 |
| 1.11 | 命题演算形式系统 ND | 43 |

| | | |
|----------|-----------------------------|-----------|
| 1.12 | 形式系统 PC 和 ND 的等价性 | 47 |
| 2 | 一阶谓词演算 | 51 |
| 2.1 | 一阶谓词演算的基本概念 | 51 |
| 2.1.1 | 谓词和函词 | 52 |
| 2.1.2 | 变元和常元 | 53 |
| 2.1.3 | 量词 | 54 |
| 2.2 | 谓词公式 | 55 |
| 2.2.1 | n 元关系和 n 元函数 | 55 |
| 2.2.2 | 全称量词符号和存在量词符号 | 56 |
| 2.3 | 一阶谓词演算形式系统 | 56 |
| 2.3.1 | 一阶语言 | 56 |
| 2.3.2 | 一阶逻辑 | 59 |
| 2.4 | 一阶谓词演算形式系统的语义 | 65 |
| 2.5 | 关于 FC 的重要元定理 | 67 |
| 2.5.1 | FC 的合理性 | 67 |
| 2.5.2 | FC 的完备性和其他 | 69 |
| 3 | 真值和演绎 | 73 |
| 3.1 | 唯一阅读定理 | 73 |
| 3.2 | 命题逻辑部分 | 75 |
| 3.3 | 谓词逻辑部分 | 78 |

两个人在相互争论,由第三个人来评判哪个人的论断更有效。也就是判断哪个人的辩解符合逻辑。这里逻辑代表的是一个什么样的概念呢?它可以代表不正确,但这也不是很准确。也可以说不合常理,与正常人的想法不一致。其实,不合逻辑的含义是不符合正确的思维规律。

所以逻辑是研究思维规律的科学。思维具有三要素。那就是概念、判断和推理。从数学的角度理解:概念指的是特定的子集;判断指的是元素和子集之间的关系;推理指的是对判断的合理的推演。

Chapter 1

命题演算形式化系统

命题逻辑研究命题的推理演算. 这一章研究命题的基本概念, 命题连接词, 讨论命题公式, 重言式以及自然语句的形式化.

1.1 命题演算的基本概念

1.1.1 命题与联结词

定义 1.1.1 命题是一个能判断真假的陈述句。

有两层意思, 首先命题是一个陈述句, 命令句感叹句疑问句都不是命题. 其次, 这个陈述句所表达的内容可以决定是真还是假, 而且不是真的就是假的. 不能不真又不假, 也不能即是真又是假. 凡是与事实相符的陈述句(命题)为真语句, 而与事实不相符的陈述句(命题)为假语句. 即命题有两种可能的取值(又叫真值), 是真或者是假, 并且只能取其中之一. 用 T 表示真, F 表示假. 或者用 1 表示真, 0 表示假. 真、假 (T, F 或者 0, 1) 又称为真值。

命题概念的举例说明:

1. "雪是白的" 是一个陈述句, 可以决定它的真值. 其真值为真. 所以是一个命题.
2. "雪是黑的" 是一个陈述句, 可以决定它的真值. 其真值为假. 所以是一个命题.
3. "好大的雪啊" 不是陈述句, 所以不是命题.
4. "任何一个大偶数可以表成两个素数之和"(哥德巴赫猜想) 是一个陈述句, 或真或假, 是命题.
5. "太阳有第 11 颗行星" 也是命题.

6. $2 + 2 = 5$.
7. 2 是素数又是偶数.
8. 陈胜吴广起义之日杭州下雨.
9. 你上哪儿去?
10. 这句话是假的。
11. $x + y < 0$

真值的联结词,

2 是素数又是偶数. 即是说 2 是素数并且 2 是偶数. 这里的并且称之为真值的联结词.

原子命题 (原子),

不含有真值的联结词的命题称之为原子命题 (原子).

复合命题. 非原子命题称为复合命题.

复合命题举例:

1. 雪不是白的 (并非雪是白的).
2. 今晚我去看朋友或者去看电影.
3. 她不但漂亮而且聪明.
4. 如果我有车, 那么我去接你.
5. a 是偶素数当且仅当 $a = 2$.

原子命题的符号表示: 用小写的拉丁字母表示。这些符号表示确定的命题时称为命题常元, 表示不确定的命题时称为命题变元。取值为 0, 1。 t, f 表示真值为 1, 0 的命题常元。

1. 命题变项

为了进行逻辑演算, 必须将命题符号化 (形式化). 数理逻辑中约定用大写的字母表示命题. 例如可以用 P 表示”雪是白的”, Q 表示”北京是中国的首都”等. 当 P 表示任一命题时, P 就称为命题变项 (变元).

由于命题变项表示的是不确定的命题, 所以不能判定其是真还是假. 但是在逻辑推演过程中, 我们认为它表示的是一个实实在在命题.

2. 简单命题和复合命题

简单命题又称为原子命题. 它不包含任何连接词. 这样的命题不可再分割. 如果再分割就不能成为命题了. 例如”雪是白的而且 $1+1=2$ ” 可以分割成”雪是白的” 和” $1+1=2$ ” 两个命题. 但是”雪是白的” 不能再分割. 所以是原子命题即简单命题. 而”雪是白的而且 $1+1=2$ ” 不是简单命题.

把一个或几个简单命题用联接词 (如与, 或, 非) 联结所构成的命题称为复合命题, 也称为分子命题. 复合命题也是陈述句, 其真值依赖于构成它本身的原子命题的真值以及构成该复合命题的联结词. 命题逻辑讨论的是多个命题联结而成的复合命题的规律性.

3. 命题联结词和真值表

联结词可以将命题联结起来构成复杂的命题. 命题联结词起的作用如同加减乘除在实数理论中的位置. 这里介绍逻辑联结词: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.

4 否定词 \neg

否定词是一个一元联结词, 也称为否定符号. 一个命题 P 加上否定词就形成了一个命题, 记作 $\neg P$. 这个新命题是原来命题的否定, 读作非 P .

否定词的真值规定如下: 若命题 P 的真值为真, 那么 $\neg P$ 的真值就为假; 若 P 的真值为假, 那么 $\neg P$ 的真值就为真. 与之间的真值关系, 常常使用称作真值表的一种表格来表示. 即

| P | $\neg P$ | P | $\neg P$ |
|-----|----------|-----|----------|
| T | F | 1 | 0 |
| F | T | 0 | 1 |

也可以将上表看作是对 $\neg P$ 的定义, 它表明了 $\neg P$ 的真值如何依赖于 P 的真值. 真值表描述了命题之间的真值关系. 直观明了, 当命题变项不多时也很容易建立起来. 真值表是命题逻辑里研究真值关系的重要工具.

例 1.1.1 ”昨天张三去看球赛了”. 该命题用 P 表示, 于是”昨天张三没去看球赛了”, 该新命题便可用 $\neg P$ 表示.

若昨天张三去看球赛了, 命题 P 是真的, 那么新命题 $\neg P$ 必然是假的. 反之, 若命题 P 是假的, 那么 $\neg P$ 就是真的.

例 1.1.2 Q : 今天是星期三.

$\neg Q$: 今天不是星期三.

5 合取词 \wedge

合取词“ \wedge ”是个二元命题联结词, 也称为合取符号. 将两个命题 P, Q 联结起来, 构成一个新的命题 $P \wedge Q$, 读作 P, Q 的合取, 也读作 P 与 Q , 这个新命题的真值与构成它的命题

| P | Q | $P \wedge Q$ |
|-----|-----|--------------|
| F | F | F |
| F | T | F |
| T | F | F |
| T | T | T |

P, Q 的真值间的关系, 由合取词真值表规定出来.

该表指出只有当两个命题变项 $P = T, Q = T$ 时才有 $P \wedge Q = T$, 而 P, Q 只要有一个为 F , 则 $P \wedge Q = F$. 这样 $P \wedge Q$ 可以用来表示 P 与 Q , 或者 P 并且 Q .

例 1.1.3 P : 教室里有 10 名女学生.

Q : 教室里有 15 名男学生.

于是“教室里有 10 名女学生并且教室里有 15 名男学生”便可以由 $P \wedge Q$ 来表示.

6 析取词 \vee

析取词“ \vee ”是个二元命题联结词, 也称为析取符号. 将两个命题 P, Q 联结起来, 构成一个新的命题 $P \vee Q$, 读作 P, Q 的析取, 也读作 P 或 Q , 这个新命题的真值与构成它的命题

| P | Q | $P \vee Q$ |
|-----|-----|------------|
| F | F | F |
| F | T | T |
| T | F | T |
| T | T | T |

P, Q 的真值间的关系, 由析取词真值表规定出来.

该表指出只有当两个命题变项 $P = F, Q = F$ 时才有 $P \vee Q = F$, 而 P, Q 只要有一个为 T , 则 $P \vee Q = T$. 这样 $P \vee Q$ 可以用来表示 P 或 Q .

例 1.1.4 P : 今天刮风.

Q : 今天下雨.

于是“今天刮风或者今天下雨”便可以由 $P \vee Q$ 来表示.

7 蕴含词 \rightarrow

蕴含词 \rightarrow 也是个二元命题联结词, 也称为推断符号. 将两个命题 P, Q 联结起来, 构成一个新的命题 $P \rightarrow Q$, 读作如果 P 则 Q , 也读作 P 蕴含 Q , 如果 P 那么 Q , 其中 P 称为前件 (前项, 条件), Q 称为后件 (后项, 结论). 规定只有当 P 为 T, Q 为 F 时, $P \rightarrow Q = F$. 除此之

| P | Q | $P \rightarrow Q$ |
|-----|-----|-------------------|
| F | F | T |
| F | T | T |
| T | F | F |
| T | T | T |

图 1.1: $P \rightarrow Q$ 真值表

| P | Q | $\neg P \vee Q$ |
|-----|-----|-----------------|
| F | F | T |
| F | T | T |
| T | F | F |
| T | T | T |

图 1.2: $\neg P \vee Q$ 真值表

外, $P \rightarrow Q = T$.

引入 \rightarrow 的目的是希望用来描述命题间的推理, 表示因果关系. 实际上图 1.1 说明了:

$P \rightarrow Q = T$ 成立的情况下, 若 $P = T$ 必有 $Q = T$, 而不会出现 $Q = F$. 所以 $P \rightarrow Q = T$ 体现了 P 是 Q 成立的充分条件.

$P \rightarrow Q = T$ 成立的情况下, 若 $P = F$ 可有 $Q = T$, 这表明 $P \rightarrow Q$ 体现了 P 不是 Q 成立的必要条件.

图 1.2 是 $\neg P \vee Q$ 的真值表. 显然图 1.2 和图 1.1 是相同的, 在

P 和 Q 所有的取值下, $P \rightarrow Q$ 和 $\neg P \vee Q$ 都有相同的真值, 于是可以记做

$$P \rightarrow Q = \neg P \vee Q \text{ (真值相同的等值命题以等号联结)}$$

这也说明 \rightarrow 可由 \neg, \vee 来表示, 从逻辑上看”如果 P 则 Q ”和”非 P 或 Q ”是等同的两个命题.

蕴含词 \rightarrow 与自然用语”如果... 那么...”有一致的一面, 可以表示因果关系. 然而, P 和 Q 是无关的命题时逻辑上也可以讨论 $P \rightarrow Q$. 并且 $P = F$ 则 $P \rightarrow Q = T$. 这在自然语言中就不大合适.

介绍一下真值函数。

1.2 形式语言与命题公式

命题公式是命题逻辑讨论的对象, 而由命题常元, 命题变项和命题联结词可以构成任意多的复合命题, 它们是否都有意义呢, 只有一个命题联结词的命题当然是有意义的. 由两个命题联结词构成的命题至少意义不明确. 可以加括号来解决这个问题.

1.2.1 形式语言的定义

形式语言是建立在字母表上的字符串的集合. 一般说来, 这不是所有的字符串, 而是为了某种目的取得的字符串的一部分.

定义 1.2.1 字符 (symbol) 的集合称为字母表。

字母表可以是任意的抽象集合. 它可以是有限集合, 也可以是无限集合. 但是它不能是空集合. 否则就不能建立起形式语言。

定义 1.2.2 由字母表中的字符构成的有限长的序列称为字母表上的字符串 (symbol string)。字符串中字符的个数称为字符串的长度. 长度为 0 的字符串称为空串 (empty string), 用 ϵ 表示. 空串是没有任何字符的字符串, 是一个特殊的字符串. 若 A 是字母表, 则用 A^* 表示上所有字符串的集合 (包括空串)。

例 1.2.1 设字母表 $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, A^* 是由 10 个阿拉伯数字组成的所有十进制数的集合且包括空串 ϵ 和有限个“0”构成的字符串 (如: 00, 000, 0000 等)。下面的 (1) - (4) 均为字母表 A 上的形式语言:

(1) $L_1 = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, \dots\}$ 表示可以被 5 整除的所有十进制数的集合。

(2) $L_2 = \{0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111, \dots, 1111\}$, 该形式语言中的字符串是由 0 和 1 构成的所有长度为 4 的数字的集合, 可以看成是长度为 4 的所有二进制数的集合。

(3) $L_3 = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \dots\}$, 该形式语言表示所有奇数的集合。

(4) $L_4 = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots\}$, 该形式语言表示所有十进制数的平方的集合。

例 2 中几种形式语言中的字符串 (实际上是数字) 之间的排序都是有规律的, 所以这些语言实际上都可以用一种算法来生成. 利用算法有目的生成的形式语言当然有特殊的用途。

但我们并不打算进一步讨论形式语言的有关内容,这方面知识可参阅文献。给出形式语言的目的是为了说明命题演算中的命题公式的全体是一种形式语言。

1.3 命题公式的语义

1.3.1 联接符号的含义

首先再进一步指出形式语言中的五个联接符号“ \neg ”、“ \wedge ”、“ \vee ”、“ \rightarrow ”、“ \leftrightarrow ”与自然语言中的五个联接词“非”、“并且”、“或者”、“蕴含(如果 \dots ,那么 \dots)”、“当且仅当”之间的关系,我们希望有如下的对应:

- \neg 表示:“非”;
- \wedge 表示:“并且”;
- \vee 表示:“或者”;
- \rightarrow 表示:“蕴含(如果 \dots ,那么 \dots)”;
- \leftrightarrow 表示:“当且仅当”。

此处,我们希望联接符号与联接词之间有上述这样的对应表示,要想实现这种表示,需要对含义对应联接符号命题公式的语义进行严格的定义。

1.3.2 赋值

定义 1.3.1 任意一个从 $Atom(L^p)$ 到 $\{0, 1\}$ 的映射 $v : Atom(L^p) \rightarrow \{0, 1\}$ 称为命题演算的一个赋值(valuation)。并且对 $p \in Atom(L^p)$, 将 $v(p)$ 记作 p^v , 自然有 $p^v \in \{0, 1\}$ 。

由于 $Atom(L^p)$ 中有可数多个原子命题, 因此从 $Atom(L^p)$ 到 $\{0, 1\}$ 的映射的个数与实数的个数一样多。所以针对命题演算来说, 赋值非常之多。当 $p^v = 1$ 时, 称在赋值 v 下 p 的真值为真, 或赋值 v 弄真 p 。当 $p^v = 0$ 时, 称在赋值 v 下 p 的真值为假, 或赋值 v 弄假 p 。

赋值对所有原子公式指派了真值(也就是语义), 即对于任一赋值 v 和任一原子公式 p , 有 $p^v = 1$ 或 $p^v = 0$ 。利用赋值 v , 可以对任意的命题公式 $A \in Form(L^p)$ 指派真值。如果将 v 对 A 真值的指派记作 A^v , 则有如下定义。

定义 1.3.2 设 v 是命题演算的任意一个赋值, $A \in Form(L^p)$ 是任意一个命题公式, v 对 A 真值的指派 A^v 递归的定义如下:

(1) 如果 A 是原子公式 p , 则 $A^v = p^v$ 且 $p^v \in \{0, 1\}$;

(2) 如果 $A = \neg B$ 且 $B^v \in \{0, 1\}$, 则当 $B^v = 1$ 时, 规定 $A^v = 0$; 当 $B^v = 0$ 时, 规定 $A^v = 1$;

(3) 如果 $A = B \wedge C$ 且 $B^v, C^v \in \{0, 1\}$, 那么当 $B^v = 1$ 且 $C^v = 1$ 时, 规定 $A^v = 1$; 当 $B^v = 0$ 或 $C^v = 0$ 时, 规定 $A^v = 0$;

(4) 如果 $A = B \vee C$ 且 $B^v, C^v \in \{0, 1\}$, 那么当 $B^v = 0$ 且 $C^v = 0$ 时, 规定 $A^v = 0$; 当 $B^v = 1$ 或 $C^v = 1$ 时, 规定 $A^v = 1$;

(5) 如果 $A = B \rightarrow C$ 且 $B^v, C^v \in \{0, 1\}$, 那么当 $B^v = 1$ 且 $C^v = 0$ 时, 规定 $A^v = 0$; 当 $B^v = 0$ 或 $C^v = 1$ 时, 规定 $A^v = 1$;

(6) 如果 $A = B \leftrightarrow C$ 且 $B^v, C^v \in \{0, 1\}$, 那么当 $B^v = C^v$ 时, 规定 $A^v = 1$; 当 $B^v \neq C^v$ 时, 规定 $A^v = 0$;

注意: 上面的定义出现了递归定义 (recursive definition) 的概念。此处我们不讨论递归定义本身的定义, 只说明递归定义所完成的工作。

这个定义本身实际上是给出了真值表。

1.3.3 赋值的计算模式

上面定义中的另外的写法, 我们可以用计算的模式来表达上述定义中的真值表。设 $A, B \in \text{Form}(L^p)$, 那么

$$(1) (\neg A)^v = 1 - A^v$$

$$(2) (A \wedge B)^v = A^v \cdot B^v$$

$$(3) (A \vee B)^v = A^v + B^v - A^v \cdot B^v$$

$$(4) (A \rightarrow B)^v = 1 - A^v + A^v \cdot B^v$$

$$(3) (A \leftrightarrow B)^v = A^v \cdot B^v + (1 - A^v) \cdot (1 - B^v)$$

命题 1.3.1 对任意一个赋值 v , 和任意的命题公式 $A \in \text{Form}(L^p)$, 都有 $A^v \in \{0, 1\}$ 。

证明: 设 v 是任意一个赋值, $A \in \text{Form}(L^p)$ 是一个命题公式,

(1) 如果 $A \in \text{Atom}(L^p)$ 是原子公式, 由于 v 是一个赋值, 所以它是从集合 $\text{Atom}(L^p)$ 到集合 $\{0, 1\}$ 的映射, 故 $A^v \in \{0, 1\}$ 。

(2) 如果 $A = \neg B$, 由数学归纳法知, $B^v \in \{0, 1\}$, 从而 $A^v = 1 - B^v \in \{0, 1\}$ 。

(3) 如果 $A = B \wedge C$, 由数学归纳法知, $B^v, C^v \in \{0, 1\}$, 从而 $A^v = B^v C^v \in \{0, 1\}$ 。

(4) 如果 $A = B \vee C$, 由数学归纳法知, $B^v, C^v \in \{0, 1\}$, 从而 $A^v = B^v + C^v - B^v C^v \in \{0, 1\}$ 。

(5) 如果 $A = B \rightarrow C$, 由数学归纳法知, $B^v, C^v \in \{0, 1\}$, 从而 $A^v = 1 - B^v + B^v C^v \in \{0, 1\}$ 。

(6) 如果 $A = B \leftrightarrow C$, 由数学归纳法知, $B^v, C^v \in \{0, 1\}$, 从而 $A^v = B^v C^v + (1 - B^v)(1 - C^v) \in \{0, 1\}$ 。 \square

所以我们有对任意的命题公式 $A \in Form(L^p)$, 都有 $(A^v)^n = (A^v)^{n-1} = \dots = (A^v)^2 = A^v$ 。

1.4 命题公式的分类

定义 1.4.1 设 $A \in Form(L^p)$, 则

(1) 若对任意的赋值 v , 都有 $A^v = 1$, 则称 A 为重言式 (tautology)。

(2) 若对任意的赋值 v , 都有 $A^v = 0$, 则称 A 为矛盾式 (contradiction)。

(3) 若存在赋值 v , 使得 $A^v = 1$, 则称 A 为可满足的 (satisfiable)。

重言式就是无论怎样赋值, 真值恒为真的命题公式。这样的命题公式也称为永真式。因此重言式就是千真万确的命题公式。它可表示自然语言中的真理; 矛盾式就是无论怎样赋值, 真值恒为假的命题公式, 这样的命题公式也称为永假式或不可满足的公式。因此矛盾式是存在矛盾的命题公式, 它可用来表示自然语言中的谬论; 可满足的公式就是可以为真的命题公式。显然重言式是可满足的命题公式, 但反之不真。由定义可知, 重言式, 矛盾式和可满足公式都是通过语义进行定义的, 属于语义方面的概念。

由上面的定义说明, 命题公式 A 要成为重言式, 必须对任一赋值 v 去判定 $A^v = 1$ 。由于赋值有无限多个, 判定 $A^v = 1$ 需要对无限多个赋值 v 进行讨论, 这似乎是不可能的事情。实际上, 由于 A 中出现的命题符号的个数为有限个, 假设出现了 n 个, 即 p_1, p_2, \dots, p_n 。又因为从 $\{p_1, p_2, \dots, p_n\} \rightarrow \{0, 1\}$ 的映射个数为 2^n , 所以尽管赋值有无限多个, 但涉及 p_1, p_2, \dots, p_n 的不同的赋值个数仅为 2^n 个。事实上, 对于赋值 $v: Atom(L^p) \rightarrow \{0, 1\}$, 设 $p_i \in Atom(L^p)$, 则有 $p_i^v = 0$ 或 $p_i^v = 1$ 。当 p_i 不同于 p_1, p_2, \dots, p_n 中的任何一个时, p_i 不在命题 A 中出现, 此

时 $p_i^v = 0$ 或 $p_i^v = 1$ 对 $A = 0$ 还是 $A = 1$ 并无影响; 只有当 p_i 属于 p_1, p_2, \dots, p_n 中的某一个时, $p_i^v = 0$ 或 $p_i^v = 1$ 才会对 $A = 0$ 还是 $A = 1$ 产生影响; 而这 n 个命题符号 p_1, p_2, \dots, p_n 指派为 1 或 0 的不同的赋值共有 2^n 个。因此判定 A 是否为重言式仅对这 2^n 个赋值进行讨论即可, 并且每一个这样的赋值可以用一个由 0 和 1 组成的 n 元组表示。例如, n 元组 $(1, 0, \dots, 1)$ 可以表示这样的结果: $p_1^v = 1, p_2^v = 0, \dots, p_n^v = 1$ 。所以判定命题公式 A 是否为重言式、矛盾式或可满足的公式可以通过列出真值表的方法进行。

$$T_1 \quad A \vee \neg A$$

$$T_2 \quad A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$T_3 \quad A \rightarrow (A \vee B)$$

$$T_4 \quad (A \wedge B) \rightarrow A, (A \wedge B) \rightarrow B$$

$$T_5 \quad A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B$$

$$T_6 \quad (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$$

$$T_7 \quad (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$T_8 \quad \neg(\neg A) \leftrightarrow A$$

$$T_9 \quad A \vee A \leftrightarrow A$$

$$T_{10} \quad A \wedge A \leftrightarrow A$$

下面列出一些常用的永真式。

$$T_{11} \quad A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$T_{12} \quad A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

$$T_{13} \quad \neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B, \neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B,$$

$$T_{14} \quad A \wedge (A \vee B) \leftrightarrow A, A \vee (A \wedge B) \leftrightarrow A$$

$$T_{15} \quad (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$$

$$T_{16} \quad (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)$$

$$T_{17} \quad (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

$$T_{18} \quad (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

$$T_{19} \quad (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

$$T_{20} \quad A \vee 1 \leftrightarrow 1, A \wedge 1 \leftrightarrow A, A \vee 0 \leftrightarrow A, A \wedge 0 \leftrightarrow 0$$

1.5 命题演算的语义推理

定义 1.5.1 设 $\Gamma \subseteq \text{Form}(L^p)$, $A \in \text{Form}(L^p)$ 。如果对任意的赋值 v , 当 v 对 Γ 中的任一公式赋值为 1 时 (即对任意的 $B \in \Gamma$, 有 $B^v = 1$), 有 v 对命题公式 A 的赋值也为 1 (即 $A^v = 1$), 则称 Γ 可以语义推出 (semantic deduce) A , 或称 Γ 可以逻辑推出 (logically deduce) A , 或

称 Γ 可以逻辑蕴含 (logically conclude) A , 或称 A 是 Γ 的逻辑结果 (logical result), 记为 $\Gamma \models A$ 。

定义 1.5.2 设 $A, B \in \text{Form}(L^p)$, 如果 $A \Rightarrow B$ 并且 $B \Rightarrow A$, 那么称 A 和 B 逻辑等价, 记为 $A \Leftrightarrow B$ 或者 $A \models B$

逻辑等价具有如下的含义

定理 1.5.1 设 $A, B \in \text{Form}(L^p)$, 如果 $A \Leftrightarrow B$, 当且仅当对任意的赋值 v , 都有 $A^v = B^v$ 。

例 1.5.1 设 $A, B \in \text{Form}(L^p)$, $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$ 。

证明: 对任意的赋值 v , 我们有

$$\begin{aligned} (\neg A \vee B)^v &= (\neg A)^v + B^v - (\neg A)^v B^v \\ &= 1 - A^v + B^v - (1 - A^v)B^v \\ &= 1 - A^v + B^v - B^v + A^v B^v \\ &= 1 - A^v + A^v B^v \\ &= (A \rightarrow B)^v \end{aligned}$$

□

定理 1.5.2 $A \Rightarrow B$ 当且仅当 $A \rightarrow B$ 是永真式。

证明: 必要性: 任取一个赋值 w , 计算 $(A \rightarrow B)^w = 1 - A^w + A^w B^w$. 由于 $A \Rightarrow B$, 对任意的赋值 v , 若 $A^v = 1$, 则 $B^v = 1$. 对赋值 w , 当然也有若 $A^w = 1$ 则 $B^w = 1$. 即 $A^w(1 - B^w) = 0$, 从而 $(A \rightarrow B)^w = 1 - A^w + A^w B^w = 1 - A^w(1 - B^w) = 1$. 所以 $A \rightarrow B$ 是永真式。

充分性: 任取一个赋值 w , 使得 $A^w = 1$, 那么由于 $A \rightarrow B$ 是永真式, 对所有的赋值 v , 都有 $(A \rightarrow B)^v = 1$, 所以对这个赋值 w 也有 $(A \rightarrow B)^w = 1$, 也就是 $1 - A^w + A^w B^w = 1$, 将 $A^w = 1$ 代入知 $B^w = 1$, 从而 $A \Rightarrow B$. □

定理 1.5.3 $A \Leftrightarrow B$ 当且仅当 $A \leftrightarrow B$ 是永真式。

证明: 必要性: 任取一个赋值 w , 计算 $(A \leftrightarrow B)^w = A^w B^w + (1 - A^w)(1 - B^w)$. 由于 $A \Leftrightarrow B$, 对任意的赋值 v , 都有 $A^v = B^v$. 对这个赋值 w , 当然也有 $A^w = B^w$. 从而 $(A \leftrightarrow B)^w = A^w B^w + (1 - A^w)(1 - B^w) = (A^w)^2 + (1 - A^w)^2 = A^w + (1 - A^w) = 1$. 所以 $A \leftrightarrow B$ 是永真式。

充分性: 任取一个赋值 w , 由于 $A \leftrightarrow B$ 是永真式, 对所有的赋值 v , 都有 $(A \leftrightarrow B)^v = 1$, 所以对这个赋值 w 也有 $(A \leftrightarrow B)^w = 1$, 也就是 $A^w B^w + (1 - A^w)(1 - B^w) = 1$, 即 $2A^w B^w - A^w - B^w = 0$, 也就是 $2A^w B^w - (A^w)^2 - (B^w)^2 = 0$, 即 $(A^w - B^w)^2 = 0$, 故 $A^w = B^w$, 从而 $A \Leftrightarrow B$. (1003103 或 1003104 班的一个女生给出) □

定理 1.5.4 设 A, B 和 C 是任意的命题公式, 分别用 1 和 0 表示重言式和矛盾式, 则

- (1) $\neg\neg A \models A$ (对合律);
- (2) $A \wedge A \models A; A \vee A \models A$ (幂等律);
- (3) $A \wedge B \models B \wedge A; A \vee B \models B \vee A$ (交换律);
- (4) $(A \wedge B) \wedge C \models A \wedge (B \wedge C); (A \vee B) \vee C \models A \vee (B \vee C)$ (结合律);
- (5) $A \wedge (B \vee C) \models (A \wedge B) \vee (A \wedge C); A \vee (B \wedge C) \models (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (分配律);
- (6) $A \wedge (A \vee B) \models A; A \vee (A \wedge B) \models A$ (吸收律);
- (7) $\neg(A \vee B) \models \neg A \wedge \neg B; \neg(A \wedge B) \models \neg A \vee \neg B$ (德摩根律);
- (8) $A \wedge 1 \models A; A \vee 0 \models A$ (同一律);
- (9) $A \wedge 0 \models 0; A \vee 1 \models 1$ (零一律);
- (10) $A \wedge \neg A \models 0; A \vee \neg A \models 1$ (排中律);

例 1.5.2 证明 $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ 是重言式。

证明: 对任意的赋值 $v : \text{Atom}(L^p) \rightarrow \{0, 1\}$, 我们有

$$\begin{aligned}
 (A \rightarrow (B \rightarrow A))^v &= 1 - A^v + A^v(1 - B^v + A^v B^v) \\
 &= 1 - A^v B^v + (A^v)^2 B^v \\
 &= 1 - A^v B^v + A^v B^v \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

□

例 1.5.3 证明 $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ 是重言式。

证明: 对任意的赋值 $v : \text{Atom}(L^p) \rightarrow \{0, 1\}$, 我们有

$$\begin{aligned}
 (A \rightarrow (B \rightarrow C))^v &= 1 - A^v + A^v(B \rightarrow C)^v \\
 &= 1 - A^v + A^v(1 - B^v + B^v C^v) \\
 &= 1 - A^v + A^v - A^v B^v + A^v B^v C^v \\
 &= 1 - A^v B^v + A^v B^v C^v
 \end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}
 ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))^v &= 1 - (A \rightarrow B)^v + (A \rightarrow B)^v(A \rightarrow C)^v \\
 &= 1 - (1 - A^v + A^v B^v) + (1 - A^v + A^v B^v)(1 - A^v + A^v C^v) \\
 &= A^v - A^v B^v + 1 - A^v + A^v C^v - A^v + A^v A^v - A^v A^v C^v + A^v B^v - A^v A^v B^v + A^v A^v B^v C^v \\
 &= A^v - A^v B^v + 1 - A^v + A^v C^v - A^v + A^v - A^v C^v + A^v B^v - A^v B^v + A^v B^v C^v \\
 &= 1 - A^v B^v + A^v B^v C^v \\
 &= (A \rightarrow (B \rightarrow C))^v
 \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
 ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))^v &= \\
 &= 1 - (A \rightarrow (B \rightarrow C))^v + (A \rightarrow (B \rightarrow C))^v((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))^v \\
 &= 1 - (A \rightarrow (B \rightarrow C))^v + (A \rightarrow (B \rightarrow C))^v(A \rightarrow (B \rightarrow C))^v \\
 &= 1 - (A \rightarrow (B \rightarrow C))^v + (A \rightarrow (B \rightarrow C))^v \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

□

所以 $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ 为永真式。

从这个例子可以看出, $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ 和 $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$ 拥有共同的真值表, 从而是逻辑等价的, 下面给出的式子证明了它们的逻辑等价性。

$$\begin{aligned}
 (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C) &\Leftrightarrow \neg(A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C) \\
 &\Leftrightarrow \neg(\neg A \vee B) \vee (\neg A \vee C) \\
 &\Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \vee C) \\
 &\Leftrightarrow (A \vee \neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg A \vee C) \\
 &\Leftrightarrow (1 \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg A \vee C) \\
 &\Leftrightarrow 1 \wedge (\neg B \vee \neg A \vee C) \\
 &\Leftrightarrow \neg B \vee \neg A \vee C \\
 &\Leftrightarrow \neg A \vee \neg B \vee C \\
 &\Leftrightarrow \neg A \vee (\neg B \vee C) \\
 &\Leftrightarrow \neg A \vee (B \rightarrow C) \\
 &\Leftrightarrow A \rightarrow (B \rightarrow C)
 \end{aligned}$$

如下是命题公式 $B \rightarrow A$ 的真值表

| A | B | $B \rightarrow A$ |
|-----|-----|-------------------|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

观察这张真值表我们可以得出什么结论呢？进一步说， $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ 这个蕴含式代表什么含义呢？通过真值表我们可以得出这样的结论：

如果一个蕴含式的后件成立，那么这个蕴含式成立。

下面是命题公式 $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$ 的真值表：

| A | B | C | $A \rightarrow B$ | $A \rightarrow C$ | $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$ |
|-----|-----|-----|-------------------|-------------------|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

从上面的真值表可以看出， $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$ 为 0 只有一种情况，那就是 A 为 1， B 为 1， C 为 0。这对应着 A 为 1， $B \rightarrow C$ 为 0。也就是对应着 $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ 为 0。也就是说：如果 $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ 成立，那么 $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$ 一定成立。

从上面的分析知,如下的式子都是重言式:

$$\begin{aligned}
 & \neg A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \\
 & \neg B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \\
 & C \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \\
 & (B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \\
 & (A \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \\
 & \neg(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \\
 & \neg(B \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \\
 & \neg(C \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \\
 & \neg(C \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \\
 & (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \\
 & (B \rightarrow (A \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \\
 & ((B \rightarrow A) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \\
 & ((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))
 \end{aligned}$$

还可以从另外的角度研究这个命题公式, $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ 这个蕴含式代表什么含义呢? 如果 A, B 同时成立, 那么 C 成立。如果 $A, A \rightarrow B$ 同时成立, 那么 C 成立。

如此分析可以得出这样的结论:

$$A \wedge B \Leftrightarrow A \wedge (A \rightarrow B)$$

从真值表可以看出,对于单纯的蕴含式,我们有

$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ 如果蕴含式的前件不真,那么这个蕴含式为真。

$A \rightarrow (B \rightarrow A)$ 如果蕴含式的后件为真,那么这个蕴含式为真。

$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ 这个式子中,如果把 A 去掉,那么就变成了 $(B \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C)$,这是很同意理解的。

如果有 $B \rightarrow (C \rightarrow D)$,那么 $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow D))$ 。

定理 1.5.5 (代入定理) 设 A 是含有命题变元 p 的永真式,那么将 A 中 p 的所有出现均代换为命题公式 B 得到的公式 (称为 A 的代入实例) 仍为永真式。

定理 1.5.6 (替换定理) 设命题公式 A 含有子公式 C (C 为 A 中的符号串并为命题公式), 如果 $C \Leftrightarrow D$, 那么将 A 中子公式 C 的某些出现 (未必全部) 用 D 替换得到公式 B , 必有 $A \Leftrightarrow B$ 。

1.6 范式

逻辑等价关系是一个等价关系,所以可以根据等价关系对公式的集合进行分类。在每一个等价类中我们可以找出一个规范的形式,称为范式。

定义 1.6.1 命题公式 B 称为命题公式 A 的合取范式 (conjunctive normal form), 如果 $B \Leftrightarrow A$, 并且 B 呈如下形式:

$$C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_m (C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_m)$$

其中 $C_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 称为 B 的子句它们形如 $L_1 \vee L_2 \vee \cdots \vee L_n (L_1 \wedge L_2 \wedge \cdots \wedge L_n)$, $L_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ 为原子公式或者原子公式的否定。称 L_j 为子句的文字。

定理 1.6.1 对任意公式 ϕ , 均可以做出它的合取 (析取) 范式。

证明: 对任意公式 ϕ , 均可按照如下的方式做出它的合取 (析取) 范式。

(1) 利用逻辑等价式 $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$, $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ 的代入实例, 对公式 ϕ 的子公式作替换, 消去其中的连接词 $\rightarrow, \leftrightarrow$, 得到公式 $\phi', \phi' \Leftrightarrow \phi$ 。

(2) 利用逻辑等价式 $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$, $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ 的代入实例, 对公式 ϕ' 的子公式作替换, 使得否定词深入到原子公式的前面, 得到公式 $\phi'', \phi'' \Leftrightarrow \phi'$ 。

(3) 利用逻辑等价式 $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$ 的代入实例, 对公式 ϕ'' 的子公式作替换, 消除 $\neg\neg$, 得到公式 $\phi''', \phi''' \Leftrightarrow \phi''$ 。

(4) 利用逻辑等价式 $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$, $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ 等的代入实例, 对公式 ϕ''' 的子公式作替换, 得到公式 ϕ 的合取 (析取) 范式。这里可能用到其它的等价式对公式进行化简。 \square

例 1.6.1 做出 $(p \wedge q) \rightarrow (\neg q \wedge r)$ 的合取范式和析取范式。

解: $(p \wedge q) \rightarrow (\neg q \wedge r) \Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee (\neg q \wedge r) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \Leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge r) \vee (\neg q) \vee (\neg q \wedge r) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \square$

定义 1.6.2 命题公式 B 称为命题公式 A 的主合取 (析取) 范式 (major conjunctive(disjunctive) normal form), 如果

(1) B 是 A 的合取 (析取) 范式;

(2) B 中的每一个字句均有 A 中的命题变元, 常元 (不同于 t, f) 的全部出现, 且仅出现一次。

例 1.6.2 做出 $(p \wedge q) \rightarrow (\neg q \wedge r)$ 的主合取范式和析取范式。

解: $(p \wedge q) \rightarrow (\neg q \wedge r) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee (r \wedge \neg r) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$
 $(p \wedge q) \rightarrow (\neg q \wedge r) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \Leftrightarrow (\neg p \wedge (q \vee \neg q) \wedge (r \vee \neg r)) \vee ((p \vee \neg p) \wedge \neg q \wedge (r \vee \neg r)) \Leftrightarrow$
 $(\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \quad \square$

命题 1.6.1 对于一个命题公式的任何一个指派, 这个指派可以弄假一个子句, 这个子句包含命题公式中的所有命题变元且只包含一次。在这类子句中, 这个指派不能弄假任何其它子句, 从而弄真所有其它子句。

命题 1.6.2 对于一个公式的任何一个弄假指派, 则有该命题公式的一个主合取范式中的一个合取项, 使得这一个指派弄假这个合取项, 并且只弄假这个合取项。

通过公式的主合取范式可以直接写出公式的弄假指派 (例如由 $p \wedge \neg q \wedge \neg r$, 就可以直接写出弄假指派 $(0, 1, 1)$), 因为弄假一个公式的合取项必弄假该公式。

命题 1.6.3 通过公式的主合取范式可以直接写出公式的弄假指派, 这就是公式的所有弄假指派。

1. 对于一个指派而言它或者弄假公式中的一个合取项, 从而弄假该公式。或者它不能弄假任何合取项, 从而不能弄假该公式。(一个公式的指派是对公式中所有命题变元的一个赋值, 所以该公式的一个弄假指派或者弄假该公式主合取范式的一个合取项, 或者弄真该公式主合取范式的一个合取项)。这样我们可以根据主合取范式的合取项写出公式的弄假指派。

2. 如果除此之外还有一个公式的弄假指派, 我们可以根据这个弄假指派写出一个包含相应命题变元的子句, 使得这个指派弄假该子句。我们说这个子句是命题公式的主合取范式的一个合取项。因为这个弄假指派只能弄假主合取范式中的这个子句, 不能弄假其它的子句。例如 $(1, 1, 1, 0)$ 是一个弄假指派, 则 $\neg p \vee \neg q \vee r \vee s$ 必是公式的主合取范式中的一个元素。否则 $(1, 1, 1, 0)$ 不弄假主合取范式中的任何合取式, 从而不弄假该公式, 矛盾。

命题 1.6.4 如果已知公式的所有弄假指派, 则可以写出该公式的主合取范式。

按照刚才说过的方式, 由弄假指派可以写出一个子句, 以所有这些子句作为合取项做成一个主合取范式。我们说这就是该公式的主合取范式。

因为对于任意一个指派 α , 如果 α 就是其中的一个弄假指派, 则 α 弄假公式, 当然也弄假我们做好的这个主合取范式。如果 α 不是其中的一个弄假指派, 则 α 不弄假公式 (因为所有的弄假指派都拿来了), 从而弄真公式。当然, 此时 α 也不弄假我们的合取范式, 因为它不能弄假任何合取项 (这里的合取项是通过上面的所有弄假指派做出来的, 不包含这个指派 α)。

同样道理,我们有

命题 1.6.5 可以通过公式的主析取范式写出公式所有的弄真指派。由公式的所有弄真指派可以写出该公式的主析取范式。

定理 1.6.2 n 元命题公式的全体可以划分为 2^{2^n} 个等价类,每一类中的公式相互逻辑等价,都等价于它们公共的主合取范式(主析取范式)。

证明: n 个命题变元的真值表必有 2^n 行(2^n 种可能的指派),对于每一行(每一种指派),公式有两种可能的取值情况。从而 n 个命题变元的互不相同的真值表应该有 2^{2^n} 个。每一个真值表的弄假指派(弄真指派)对应于公式的一个主合取范式(主析取范式)。因此具有同样真值表的公式都等价于这一主合取范式(主析取范式),定理得证。 \square

1.7 联结词的扩充与归约

由上面的讨论知 n 个命题变元的不同的真值表共有 2^{2^n} 个所以可以定义 $2^{2^1} = 4$ 个一元命题联结词和 $2^{2^2} = 16$ 个二元命题联结词。表 1 给出了四个所有的一元命题联结词,

| p | $\Delta_1(p)$ | $\Delta_2(p)$ | $\Delta_3(p)$ | $\Delta_4(p)$ |
|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

其中 Δ_1, Δ_4 为常联结词, Δ_2 为幺联结词, Δ_3 为否定词。

$$\Delta_1(p) \Leftrightarrow f, \Delta_4(p) \Leftrightarrow t, \Delta_2(p) \Leftrightarrow p, \Delta_3(p) \Leftrightarrow \neg p$$

表 2 给出了所有的 16 个二元命题联结词。分别标记为 $*_1, *_2, \dots, *_{16}$, 我们有下面的等价式

$$p *_1 q \Leftrightarrow f, p *_{16} q \Leftrightarrow t, \text{ 即 } *_1, *_{16} \text{ 为常联结词}$$

$$p *_4 q \Leftrightarrow p, p *_6 q \Leftrightarrow q, \text{ 即 } *_4, *_6 \text{ 为投影联结词}$$

$$p *_{13} q \Leftrightarrow \neg p, p *_{11} q \Leftrightarrow \neg q, \text{ 即 } *_{13}, *_{11} \text{ 为二元否定词}$$

$$p *_9 q \Leftrightarrow \neg(p \vee q), *_9 \text{ 称为或非词, 用记号 } \downarrow \text{ 表示, 即 } p \downarrow q \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$$

$$p *_{15} q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q), *_{15} \text{ 称为与非词, 用记号 } \uparrow \text{ 表示, 即 } p \uparrow q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$$

$$p *_3 q \Leftrightarrow \neg(p \rightarrow q), p *_5 q \Leftrightarrow \neg(q \rightarrow p), \text{ 即 } *_3, *_5 \text{ 为蕴含否定词, 可以表示为 } \rightarrow$$

$$p *_7 q \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q), *_7 \text{ 称为异或词, 用记号 } V^- \text{ (或者 } \oplus) \text{ 表示, 即}$$

$$p V^- q \Leftrightarrow p \oplus q \Leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q)$$

| p | q | $*_1$ | $*_2$ | $*_3$ | $*_4$ | $*_5$ | $*_6$ | $*_7$ | $*_8$ |
|-----|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

| p | q | $*_9$ | $*_{10}$ | $*_{11}$ | $*_{12}$ | $*_{13}$ | $*_{14}$ | $*_{15}$ | $*_{16}$ |
|-----|-----|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

除此之外, $*_2$ 为 \wedge , $*_8$ 为 \vee , $*_{12}, *_{14}$ 为 \rightarrow , $*_{10}$ 为 \leftrightarrow 。

上述讨论表明, 1. 联结词可以扩充。2. 不增加变元不会有实质性的改变, 因为它们都可以有先前定义的五個联结词表示出来。

定义 1.7.1 称 n 元联结词 h 是由 m 个联结词 g_1, g_2, \dots, g_m 可表示的, 如果 $h(p_1, \dots, p_n) \Leftrightarrow A$, 而 A 中所含的联结词仅取自 g_1, g_2, \dots, g_m 。

我们说

命题 1.7.1 任何一个一元、二元联结词都可以通过 \neg, \vee, \wedge 表示出来。

证明: 第一种方法。对于一元的连接词有

$$\Delta_1(p) \Leftrightarrow f, \Delta_4(p) \Leftrightarrow t, \Delta_2(p) \Leftrightarrow p, \Delta_3(p) \Leftrightarrow \neg p$$

对于二元的连接词有 $p *_1 q \Leftrightarrow f, p *_2 q \Leftrightarrow p \wedge q, p *_3 q \Leftrightarrow \neg(p \rightarrow q), p *_4 q \Leftrightarrow p, p *_5 q \Leftrightarrow \neg(q \rightarrow p), p *_6 q \Leftrightarrow q, p *_7 q \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q), p *_8 q \Leftrightarrow p \vee q, p *_9 q \Leftrightarrow \neg(p \vee q), p_{*10} q \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p), p_{*11} q \Leftrightarrow \neg q, p_{*12} q \Leftrightarrow q \rightarrow p, p_{*13} q \Leftrightarrow \neg p, p_{*14} q \Leftrightarrow p \rightarrow q, p_{*15} q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q), p_{*16} q \Leftrightarrow t \square$

证明: 第二种方法。任何一个一元或者二元联结词可以是一个命题公式, 通过真值表可以求出它的主合取范式, 由于主合取范式中只含有 \neg, \vee, \wedge , 所以任何一个一元、二元联结词都可以通过 \neg, \vee, \wedge 表示出来。 \square

通过前面讲的方法写出 $*_4$ 的主合取范式有 $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$ 。用等价式化简有 $p *_4 q \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \Leftrightarrow p \vee (q \wedge \neg q) \Leftrightarrow q \vee f \Leftrightarrow q$ 。

对于 $*_7$ 我们有, $p *_7 q \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p) \Leftrightarrow \neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \Leftrightarrow \neg((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \Leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q)$ 。

定义 1.7.2 当联结词组 $\{g_1, g_2, \dots, g_m\}$ 可表示所有一元、二元联结词时, 称其为完备联结词组。

上面的命题指出 $\{\neg, \vee, \wedge\}$ 是一个完备联结词组。

命题 1.7.2 $\{\neg, \wedge\}$ 和 $\{\neg, \vee\}$ 都是完备联结词组。

证明: $(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q), (p \vee q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$ 。 □

命题 1.7.3 $\{\neg, \rightarrow\}$ 和 $\{\Delta_1, \rightarrow\}$ 都是完备联结词组。

证明: $(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \rightarrow q), \neg p \Leftrightarrow p \rightarrow \Delta_1(p)$ 。因为若 $p = 0$, 则 $p \rightarrow \Delta_1(p) = 1$ 。若 $p = 1$, 则 $p \rightarrow \Delta_1(p) = 0$ 。 □

命题 1.7.4 $\{\downarrow\}$ 和 $\{\uparrow\}$ 都是完备联结词组。

证明: $\neg p \Leftrightarrow \neg(p \vee p) \Leftrightarrow p \downarrow p, (p \vee q) \Leftrightarrow \neg(\neg(p \vee q)) \Leftrightarrow \neg(p \downarrow q) \Leftrightarrow (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$ 。

$\neg p \Leftrightarrow \neg(p \wedge p) \Leftrightarrow p \uparrow p, (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(\neg(p \wedge q)) \Leftrightarrow \neg(p \uparrow q) \Leftrightarrow (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$ 。 □

命题 1.7.5 任何一个 n 元联结词 $h(p_1, p_2, \dots, p_n)$ 都可以通过联结词 \neg, \rightarrow 表示出来。

证明: 一个含有 n 个命题变元的 n 元联结词 $h(p_1, p_2, \dots, p_n)$ 实际上是一个含有 n 个变元的 n 元真值函数 (命题公式)。该公式的一个指派 α 相当于一个置换

$$\alpha = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ \alpha(p_1) & \alpha(p_2) & \cdots & \alpha(p_n) \end{pmatrix}$$

其中的 $\alpha(p_i)$ 或者是 0 或者是 1。在这个指派之下公式 $h(p_1, p_2, \dots, p_n)$ 的真值有如下的式子:

$$\alpha(h(p_1, p_2, \dots, p_n)) = h(\alpha(p_1), \alpha(p_2), \dots, \alpha(p_n))$$

。

下面我们对 n 用归纳法。

当 $n = 1, 2$ 的时候上面的得命题已经证明了结论。

假设 $n = k$ 时成立。往证 $n = k + 1$ 时也成立。

$h(0, p_2, \dots, p_{k+1})$ 和 $h(1, p_2, \dots, p_{k+1})$ 是两个 k 元命题联结词, 由归纳假设, 它们可以用联结词组 $\{\neg, \rightarrow\}$ 来表示。

而 \wedge 也可以用 $\{\neg, \rightarrow\}$ 来表示。

所以只需证明

$$h(p_1, p_2, \dots, p_{k+1}) \Leftrightarrow (\neg p_1 \rightarrow h(0, p_2, \dots, p_{k+1})) \wedge (p_1 \rightarrow h(1, p_2, \dots, p_{k+1}))$$

对于 $\forall \alpha$, 如果 $\alpha((\neg p_1 \rightarrow h(0, p_2, \dots, p_{k+1})) \wedge (p_1 \rightarrow h(1, p_2, \dots, p_{k+1}))) = 0$, 那么 $\alpha(\neg p_1 \rightarrow h(0, p_2, \dots, p_{k+1})) = 0$, 或者 $\alpha(p_1 \rightarrow h(1, p_2, \dots, p_{k+1})) = 0$,

从 $\alpha(\neg p_1 \rightarrow h(0, p_2, \dots, p_{k+1})) = 0$ 我们知道 $\alpha(\neg p_1) = 1, \alpha(h(0, p_2, \dots, p_{k+1})) = 0$ 。即 $\alpha(p_1) = 0, h(0, \alpha(p_2), \dots, \alpha(p_{k+1})) = 0$ 。所以 $\alpha(h(p_1, p_2, \dots, p_{k+1})) = h(\alpha(p_1), \alpha(p_2), \dots, \alpha(p_{k+1})) = h(0, \alpha(p_2), \dots, \alpha(p_{k+1})) = 0$ 。

从 $\alpha(p_1 \rightarrow h(1, p_2, \dots, p_{k+1})) = 0$ 我们知道 $\alpha(p_1) = 1, \alpha(h(1, p_2, \dots, p_{k+1})) = 0$ 。即 $\alpha(p_1) = 1, h(1, \alpha(p_2), \dots, \alpha(p_{k+1})) = 0$ 。所以 $\alpha(h(p_1, p_2, \dots, p_{k+1})) = h(\alpha(p_1), \alpha(p_2), \dots, \alpha(p_{k+1})) = h(1, \alpha(p_2), \dots, \alpha(p_{k+1})) = 0$ 。

这样, 对于 $\forall \alpha$, 如果 $\alpha((\neg p_1 \rightarrow h(0, p_2, \dots, p_{k+1})) \wedge (p_1 \rightarrow h(1, p_2, \dots, p_{k+1}))) = 0$, 那么 $\alpha(h(p_1, p_2, \dots, p_{k+1})) = 0$ 。

反之, 如果 $\alpha(h(p_1, p_2, \dots, p_{k+1})) = 0$ 。那么 $h(\alpha(p_1), \alpha(p_2), \dots, \alpha(p_{k+1})) = 0$ 。

若 $\alpha(p_1) = 0$, 则 $\alpha(\neg p_1) = 1$, 这时 $h(\alpha(p_1), \alpha(p_2), \dots, \alpha(p_{k+1})) = h(0, \alpha(p_2), \dots, \alpha(p_{k+1})) = \alpha(h(0, p_2, \dots, p_{k+1})) = 0$ 。必有 $\alpha(\neg p_1 \rightarrow h(0, p_2, \dots, p_{k+1})) = 0$, 从而 $\alpha((\neg p_1 \rightarrow h(0, p_2, \dots, p_{k+1})) \wedge (p_1 \rightarrow h(1, p_2, \dots, p_{k+1}))) = 0$ 。

若 $\alpha(p_1) = 1$, 则 $\alpha(p_1) = 1$, 这时 $h(\alpha(p_1), \alpha(p_2), \dots, \alpha(p_{k+1})) = h(1, \alpha(p_2), \dots, \alpha(p_{k+1})) = \alpha(h(1, p_2, \dots, p_{k+1})) = 0$ 。必有 $\alpha(p_1 \rightarrow h(1, p_2, \dots, p_{k+1})) = 0$, 从而 $\alpha((\neg p_1 \rightarrow h(0, p_2, \dots, p_{k+1})) \wedge (p_1 \rightarrow h(1, p_2, \dots, p_{k+1}))) = 0$ 。

这样我们完成了这个命题的证明。 □

1.8 命题演算形式系统 PC

我们在这一节介绍一个形式系统 PC:

1.8.1 语言部分

PC 的语言部分的符号表 (字母表) 是集合 $\Sigma = \{ (,), \neg, \rightarrow, p, q, r, p_1, p_2, p_3, \dots \}$ 。

PC 系统中的公式定义如下:

1. $p, q, r, p_1, p_2, p_3, \dots$ 为 (原子) 公式。
2. 如果 A, B 是公式, 那么 $(\neg A), (A \rightarrow B)$ 也是公式。
3. 只有 (1) 和 (2) 确定的 Σ^* 的字符串才是公式。

公式中最外层的括号可以省略。

1.8.2 推理部分

公理集合包括三个元素:

$$A_1 : A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$A_2 : (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$A_3 : (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$$

推理规则只有一个, 称为分离规则 (modus ponens):

$$r_{mp} : \frac{A, A \rightarrow B}{B}$$

定义 1.8.1 称下列公式序列为公式 A 在 PC 中的一个证明:

$$A_1, A_2, \dots, A_m (= A)$$

如果对任意的 $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, A_i 或者是 PC 中的公理, 或者是 $A_j (j < i)$, 或者是 $A_j, A_k (j, k < i)$ 用分离规则导出的, A_m 就是公式 A 。

定义 1.8.2 称 A 是 PC 中的定理, 记为 $\vdash_{PC} A$, 如果公式 A 在 PC 中有一个证明。

定义 1.8.3 设 Γ 为 PC 的公式的集合, 称以下公式序列为公式 A 的一个以 Γ 为前提在 PC 中的演绎:

$$A_1, A_2, \dots, A_m (= A)$$

其中 $A_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 或者是 PC 中的公理, 或者是 Γ 的成员, 或者是 $A_j (j < i)$, 或者是 $A_j, A_k (j, k < i)$ 使用分离规则导出的, A_m 就是公式 A 。

定义 1.8.4 称 A 是前提 Γ 在 PC 中的演绎结果, 记为 $\Gamma \vdash_{PC} A$, 如果公式 A 有一个以 Γ 为前提在 PC 中的演绎。如果 $\Gamma = B$, 则用 $B \vdash_{PC} A$ 表示 $\Gamma \vdash_{PC} A$, 如果 $B \vdash_{PC} A$ 并且 $A \vdash_{PC} B$ 则记为 $A \vdash\vdash B$

1.9 命题演算形式系统 PC 的定理

定理 1.9.1 $\vdash A \rightarrow A$

证明: 1. $A \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow A)$ 公理 1

2. $(A \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$ 公理 2

3. $(A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$ (1) 和 (2) r_{mp}

4. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ 公理 1

5. $A \rightarrow A$ (3) 和 (4) r_{mp} □

定理 1.9.2 如果 $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$, 那么 $\vdash B \rightarrow (A \rightarrow C)$.

证明: 1. $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ 公理 1

2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ 公理 2

3. $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$ (1) 和 (2) 用 r_{mp}

4. $((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$ 公理 1

5. $B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ (3) 和 (4) 用 r_{mp}

6. $(B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))) \rightarrow ((B \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C)))$ 公理 2

7. $(B \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$ (5) 和 (6) 用 r_{mp}

8. $B \rightarrow (A \rightarrow B)$ 公理 1

9. $B \rightarrow (A \rightarrow C)$ (7) 和 (8) 用 r_{mp} □

定理 1.9.3 $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$

证明: 1. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ 公理 2

2. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$ 前件互换

3. $((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))) \rightarrow$
 $(B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))))$ 公理 1

4. $B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)))$ (2) 和 (3) 用 r_{mp}

5. $(B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)))) \rightarrow$
 $((B \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (B \rightarrow (((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))))))$ 公理 2

6. $(B \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (B \rightarrow (((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))))$ (4) 和 (5) 用 r_{mp}
7. $B \rightarrow (A \rightarrow B)$ 公理 1
8. $B \rightarrow (((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)))$ (6) 和 (7) 用 r_{mp}
9. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$ 前件互换 □

定理 1.9.4 $\vdash (B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

证明: 1. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ 公理 2

2. $((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \rightarrow$
 $((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))))$ 公理 1
3. $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$ (1) 和 (2) 用 r_{mp}
4. $((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))) \rightarrow$
 $((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))) \rightarrow$
 $((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$ 公理 1
5. $((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))) \rightarrow$
 $((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$ (3) 和 (4) 用 r_{mp}
6. $(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$ 公理 1
7. $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ (5) 和 (6) 用 r_{mp} □

通过前件互换定理,可以得到

定理 1.9.5 $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

定理 1.9.6 $\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ 。

证明: 1. $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$ 公理 3

2. $((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg B \rightarrow ((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)))$ 公理 1
3. $\neg A \rightarrow ((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B))$ (1) 和 (2) 用 r_{mp}
4. $(\neg A \rightarrow ((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B))) \rightarrow$
 $((\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)) \rightarrow (\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)))$ 公理 2
5. $(\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)) \rightarrow (\neg A \rightarrow (A \rightarrow B))$ (3) 和 (4) 用 r_{mp}
6. $\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ 公理 1

7. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ (5) 和 (6) 用 r_{mp}

□

用前件互换定理,可以得到

定理 1.9.7 $\vdash A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$

定理 1.9.8 (三段论) 如果 $\vdash (A \rightarrow B), \vdash (B \rightarrow C)$, 那么 $\vdash (A \rightarrow C)$.

证明: 1. $(B \rightarrow C)$ 定理

2. $(A \rightarrow B)$ 定理

3. $(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$ 公理 1

4. $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ (2) 和 (3) 用 r_{mp}

5. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ 公理 2

6. $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$ (4) 和 (5) 用 r_{mp}

7. $A \rightarrow C$ (2) 和 (6) 用 r_{mp}

□

定理 1.9.9 $\vdash (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ 。

证明: 1. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow (\neg(\neg A \rightarrow A)))$ 定理 1.9.6

2. $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow (\neg(\neg A \rightarrow A)))) \rightarrow ((\neg A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A)))$ 公理 2

3. $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A))$ (1) 和 (2) 用 r_{mp}

4. $((\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A)) \rightarrow ((\neg A \rightarrow A) \rightarrow A))$ 公理 3

5. $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow ((\neg A \rightarrow A) \rightarrow A)$ (3) 和 (4) 用定理 1.9.8

6. $((\neg A \rightarrow A) \rightarrow ((\neg A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow$
 $((\neg A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow A)) \rightarrow ((\neg A \rightarrow A) \rightarrow A)$ 公理 2

7. $((\neg A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow A)) \rightarrow ((\neg A \rightarrow A) \rightarrow A)$ (5) 和 (6) 用 r_{mp}

8. $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow A)$ 公理 1

9. $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ (7) 和 (8) 用 r_{mp}

□

定理 1.9.10 $\vdash \neg\neg A \rightarrow A$ 。

证明: 1. $\neg B \rightarrow (B \rightarrow A)$ 定理 1.9.6

2. $\neg\neg A \rightarrow (\neg A \rightarrow A)$ 定理 1.9.6

3. $(\neg\neg A \rightarrow (\neg A \rightarrow A)) \rightarrow (((\neg A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow A))$ 定理1.9.5

4. $((\neg A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow A)$ (2)、(3) r_{mp}

5. $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ 1.9.9

6. $\neg\neg A \rightarrow A$ (4)、(5) r_{mp} □

定理 1.9.11 $\vdash (A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$ 。

证明：1. $\neg\neg A \rightarrow A$ 定理1.9.10

2. $(\neg\neg A \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow \neg A) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow \neg A))$ 定理1.9.5

3. $(A \rightarrow \neg A) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow \neg A)$ (1)、(2) r_{mp}

4. $(\neg\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$ 定理 1.9.9

5. $((A \rightarrow \neg A) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow \neg A)) \rightarrow (((\neg\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A) \rightarrow ((A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A))$ 定理1.9.5

6. $((\neg\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A) \rightarrow ((A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A)$ (3)、(5) r_{mp}

7. $(A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$ (4)、(6) r_{mp} □

定理 1.9.12 $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$ 。

证明：1. $A \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg\neg A)$

2. $((\neg A \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow (A \rightarrow \neg\neg A)$

3. $(\neg A \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow \neg\neg A$ 前面的定理

4. $A \rightarrow \neg\neg A$ □

定理 1.9.13 $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ 。

证明：1. $\neg\neg A \rightarrow A$

2. $((A \rightarrow B) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow B))$

3. $B \rightarrow \neg\neg B$

4. $(\neg\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B)$

5. $((A \rightarrow B) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B))$

6. $(\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

7. $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ □

定理 1.9.14 $\vdash (\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$

证明: 1. $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg\neg A)$

2. $(\neg B \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$

3. $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$

定理 1.9.15 $\vdash (A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$

证明: 1. $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg\neg B \rightarrow \neg A)$

2. $(\neg\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$

定理 1.9.16 $\vdash (\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$

证明: 1. $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

2. $B \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$

3. $B \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow \neg B))$

4. $\neg A \rightarrow (B \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow \neg B))$

5. $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow \neg B))$

6. $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$

□

定理 1.9.17 $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$

证明: 1. $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$

2. $A \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg B)$

3. $A \rightarrow (B \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg B))$

4. $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg B))$

5. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$

□

定理 1.9.18 $\vdash A \rightarrow A \vee B$

证明: $A \vee B$ 定义为 $\neg A \rightarrow B$.

□

定理 1.9.19 $\vdash A \rightarrow B \vee A$

证明： $A \vee B$ 定义为 $\neg A \rightarrow B$. 由定义和公理 1 即可得到次定理。 □

定理 1.9.20 $\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$

证明： 这相当于证明 $\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow C))$

1. $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ ($A \rightarrow A$ 是一个定理)
2. $\neg A \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow B)$ 前件互换
3. $((\neg A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow B))$ 定理
4. $\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow B))$
5. $\neg C \rightarrow (\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow B)))$
6. $(\neg C \rightarrow \neg A) \rightarrow (\neg C \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow B)))$ 公理 2 以及分离规则。
7. $(\neg C \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow B))) \rightarrow ((\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow B)))$ 公理 2
8. $(\neg C \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow B)))$ 三段论
9. $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow C))$

定理 1.9.21 $\vdash A \wedge B \rightarrow C$ 当且仅当 $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$

证明： 1. $A \wedge B \rightarrow C$

2. $\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C$
3. $\neg C \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$
4. $A \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg B)$
5. $A \rightarrow (B \rightarrow C)$

这个过程可以从反方向推回来。 □

定理 1.9.22 $\vdash A \wedge B \rightarrow A$

证明： (1)

1. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$
2. $\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow A$

$$3. A \wedge B \rightarrow A$$

(2)

$$1. A \rightarrow (B \rightarrow A) \text{ 公理 1}$$

$$2. A \wedge B \rightarrow A \text{ 定理}$$

□

定理 1.9.23 $\vdash A \wedge B \rightarrow B$

证明: (1)

$$1. \neg B \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$$

$$2. \neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow B$$

$$3. A \wedge B \rightarrow B$$

(2)

$$1. B \rightarrow B \text{ 定理}$$

$$2. A \rightarrow (B \rightarrow B) \text{ 由公理 1}$$

$$3. A \wedge B \rightarrow B$$

□

定理 1.9.24 $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$

证明: (1)

$$1. (A \rightarrow \neg B) \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$$

$$2. A \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg B)$$

$$3. A \rightarrow (B \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg B))$$

$$4. A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$$

(2)

$$1. (A \wedge B) \rightarrow (A \wedge B) \text{ 定理}$$

$$2. A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)) \text{ 定理}$$

□

定理 1.9.25 $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C))$

证明: 1. $B \rightarrow (C \rightarrow B \wedge C)$

2. $A \rightarrow (B \rightarrow (C \rightarrow B \wedge C))$ 由公理 1

3. $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (C \rightarrow B \wedge C))$ 公理 2 与 MP 分离规则

4. $(A \rightarrow (C \rightarrow B \wedge C)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C))$

5. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C))$ □

定理 1.9.26 $\vdash (A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$

证明: 1. $A \rightarrow (A \vee B)$

2. $B \rightarrow (A \vee B)$

3. $(B \rightarrow (A \vee B)) \rightarrow ((A \rightarrow (A \vee B)) \rightarrow ((B \vee A) \rightarrow (A \vee B)))$ 定理

4. $(A \rightarrow (A \vee B)) \rightarrow ((B \vee A) \rightarrow (A \vee B))$ 分离规则

5. $(B \vee A) \rightarrow (A \vee B)$ 分离规则

同理可以证明 $(A \vee B) \rightarrow (B \vee A)$ 。 □

定理 1.9.27 $\vdash (A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$

证明: 1. $(A \wedge B) \leftrightarrow B$

2. $(A \wedge B) \leftrightarrow A$ 定理

3. $((A \wedge B) \rightarrow B) \rightarrow (((A \wedge B) \leftrightarrow A) \rightarrow ((A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)))$ 定理

4. $((A \wedge B) \leftrightarrow A) \rightarrow ((A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A))$

5. $(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$

同理可以证明 $(B \wedge A) \rightarrow (A \wedge B)$ 。 □

定理 1.9.28 如果 $\vdash P \rightarrow Q, \vdash R \rightarrow S$, 那么 $\vdash (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow S)$

证明: 1. $(Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$

2. $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$

3. $P \rightarrow Q$

4. $(Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$
5. $(P \rightarrow R) \rightarrow ((R \rightarrow S) \rightarrow (P \rightarrow S))$
6. $(R \rightarrow S) \rightarrow ((P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow S))$
7. $R \rightarrow S$
8. $(P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow S)$
9. $(Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow S)$

定理 1.9.29 $\vdash ((A \vee B) \vee C) \leftrightarrow (A \vee (B \vee C))$

证明：只须证 $\vdash (\neg(\neg A \rightarrow B) \rightarrow C) \leftrightarrow (\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow C))$

1. $(\neg(\neg A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow (\neg A \rightarrow B))$
2. $(\neg C \rightarrow (\neg A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg A \rightarrow (\neg C \rightarrow B))$
3. $(\neg A \rightarrow (\neg C \rightarrow B)) \rightarrow (\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow C))$
4. $(\neg(\neg A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow C))$

同理可以证明 $(\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow C)) \rightarrow (\neg(\neg A \rightarrow B) \rightarrow C)$ 。

□

定理 1.9.30 $\vdash ((A \wedge B) \wedge C) \leftrightarrow (A \wedge (B \wedge C))$

证明：只须证 $\vdash \neg(\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg C) \leftrightarrow \neg(A \rightarrow (B \rightarrow \neg C))$

只须证 $\vdash (\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg C) \leftrightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow \neg C))$

1. $(\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg C) \rightarrow (C \rightarrow (A \rightarrow \neg B))$
2. $(C \rightarrow (A \rightarrow \neg B)) \rightarrow (A \rightarrow (C \rightarrow \neg B))$
3. $(A \rightarrow (C \rightarrow \neg B)) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow \neg C))$
4. $(\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow \neg C))$

同理可以证明 $(A \rightarrow (B \rightarrow \neg C)) \rightarrow (\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg C)$ 。

□

定理 1.9.31 $\vdash A \wedge (A \vee B) \leftrightarrow A$

证明：因为 $\vdash A \wedge (A \vee B) \rightarrow A$, 所以只须证 $\vdash A \rightarrow A \wedge (A \vee B)$ 即 $\vdash A \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow B))$

1. $(A \rightarrow (\neg B \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow (\neg A \rightarrow B))$
2. $(A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)) \rightarrow (((\neg A \rightarrow B) \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow \neg A))$
3. $((((\neg A \rightarrow B) \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow \neg A)) \rightarrow ((A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A) \rightarrow (((\neg A \rightarrow B) \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A)$
4. $((\neg A \rightarrow B) \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$
5. $A \rightarrow \neg((\neg A \rightarrow B) \rightarrow \neg A)$ □

定理 1.9.32 $\vdash A \vee (A \wedge B) \leftrightarrow A$

证明: 因为 $\vdash A \rightarrow A \vee (A \wedge B)$, 所以只须证 $\vdash A \vee (A \wedge B) \rightarrow A$ 即 $\vdash (\neg A \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg B)) \rightarrow A$

1. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$
2. $((A \rightarrow \neg B) \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow A)$
3. $((\neg A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow (((A \rightarrow \neg B) \rightarrow A) \rightarrow A)$
4. $((A \rightarrow \neg B) \rightarrow A) \rightarrow A$
5. $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg B)) \rightarrow A$ □

定理 1.9.33 $\vdash A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

证明: 只须证 $\vdash \neg(A \rightarrow \neg(\neg B \rightarrow C)) \leftrightarrow (\neg\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg C))$

先证 $\vdash \neg(A \rightarrow \neg(\neg B \rightarrow C)) \rightarrow (\neg\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg C))$

1. $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg C) \rightarrow (A \rightarrow \neg B \wedge \neg C))$
2. $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg C) \rightarrow (A \rightarrow \neg(\neg B \rightarrow \neg\neg C)))$
3. $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg C) \rightarrow (A \rightarrow \neg(\neg B \rightarrow C)))$
4. $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg(A \rightarrow \neg(\neg B \rightarrow C)) \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg C))$
5. $\neg(A \rightarrow \neg(\neg B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg C))$
6. $\neg(A \rightarrow \neg(\neg B \rightarrow C)) \rightarrow (\neg\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg C))$ □

再证 $\vdash (\neg\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg C)) \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg(\neg B \rightarrow C))$

1. $\neg(A \rightarrow \neg C) \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg(\neg B \rightarrow C))$
2. $\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg(\neg B \rightarrow C))$
3. $\neg(A \rightarrow \neg B) \vee \neg(A \rightarrow \neg C) \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg(\neg B \rightarrow C))$
4. $\neg\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg C) \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg(\neg B \rightarrow C))$

定理 1.9.34 $\vdash A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

证明：只须证 $\vdash (\neg A \rightarrow \neg(B \rightarrow \neg C)) \leftrightarrow \neg((\neg A \rightarrow B) \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow C))$

先证 $\vdash (\neg A \rightarrow \neg(B \rightarrow \neg C)) \rightarrow \neg((\neg A \rightarrow B) \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow C))$

1. $(\neg A \rightarrow \neg(B \rightarrow \neg C)) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$
2. $(\neg A \rightarrow \neg(B \rightarrow \neg C)) \rightarrow (\neg A \rightarrow C)$
3. $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow C) \rightarrow (\neg A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow C))$
4. $(\neg A \rightarrow \neg(B \rightarrow \neg C)) \rightarrow ((\neg A \rightarrow C) \rightarrow (\neg A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow C))$
5. $(\neg A \rightarrow \neg(B \rightarrow \neg C)) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow C))$

再证 $\vdash ((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(B \rightarrow \neg C))$

1. $((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \rightarrow (A \vee B)$
2. $((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \rightarrow (A \vee C)$
3. $((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$
4. $((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \rightarrow (\neg A \rightarrow C)$
5. $\neg B \rightarrow (((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \rightarrow A)$
6. $\neg C \rightarrow (((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \rightarrow A)$
7. $(B \rightarrow \neg C) \rightarrow (\neg(((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \rightarrow A) \rightarrow (((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \rightarrow A))$
8. $(B \rightarrow \neg C) \rightarrow (((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \rightarrow A)$
9. $((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \rightarrow ((B \rightarrow \neg C) \rightarrow A)$
10. $((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(B \rightarrow \neg C))$

□

1.10 命题演算形式系统 PC 的基本理论

定理 1.10.1 对 PC 中任意公式集合 Γ 和公式 $A, B, \Gamma \cup \{A\} \vdash_{PC} B$ 当且仅当 $\vdash_{PC} A \rightarrow B$ 。

以后用 $\Gamma; A$ 简记 $\Gamma \cup \{A\}$, 用 \vdash 简记 \vdash_{PC} 。

证明: \Leftarrow : 设

$$A_1, A_2, \dots, A_n (= A \rightarrow B)$$

是由 Γ 推出 $A \rightarrow B$ 的演绎, 那么

$$A_1, A_2, \dots, A_n, A, B$$

就是由 $\Gamma; A$ 推出 B 的演绎。

从而 $\Gamma \vdash_{PC} A \rightarrow B$ 蕴含 $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{PC} B$ 。 \Rightarrow : 设 $\Gamma; A \vdash B$, 对这个演绎的长度 n 用归纳法。当 $n = 1$ 时, B 或者是一个公理, 或者 $B \in \Gamma$, 或者 $B = A$ 。对于前两种情况可以构造由 Γ 推出 $A \rightarrow B$ 的演绎:

$$B, B \rightarrow (A \rightarrow B) (\text{公理}), A \rightarrow B$$

当 $B = A$ 的时候, $A \rightarrow B$ 就是 $A \rightarrow A$ 。 $A \rightarrow A$ 为 PC 中的一个定理, 因此 $A \rightarrow A$ 的证明就构成了一个从 Γ 到 $A \rightarrow A$ 的一个演绎。

现在设从 $\Gamma; A$ 推出 B 的演绎的长度 $n > 1$ 。如果 B 或者是一个公理, 或者 $B \in \Gamma$, 或者 $B = A$ 。仿照前面的方法可以构造出一个从 Γ 到 $A \rightarrow B$ 的演绎。如果 B 是在演绎过程中由 $B_i, B_j (i, j < n)$ 通过推理规则 MP 推导出来的, 那么 B_i, B_j 必为 $C, C \rightarrow B$, 由归纳假设有从 Γ 导出 $A \rightarrow C$ 和 $A \rightarrow (C \rightarrow B)$ 的演绎。连结这两个演绎并继续

.....

$$(l) A \rightarrow C$$

.....

$$(m) A \rightarrow (C \rightarrow B)$$

$$(m+1) (A \rightarrow (C \rightarrow B)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B))$$

$$(m+2) (A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$$(m+3) A \rightarrow B$$

$\Gamma \vdash A$ 读作 Γ 演绎 A , 或者 A 是 Γ 的演绎结果, 或者有以 Γ 为前提的 A 的演绎。 \square

定理 1.10.2 PC 是合理的, 即对任意公式 Γ 和公式 A , 如果 $\Gamma \vdash A$, 则 $\Gamma \Rightarrow A$ 。特别是如果 A 为 PC 中的定理 ($\vdash A$), 则 A 永真 ($\Rightarrow A$)。

证明: 设 $\Gamma \vdash A$ 的演绎序列 $A_1, A_2, \dots, A_m = A$ 的长度为 m 。 α 为弄真 Γ 中所有公式的指派, 今对 m 用数学归纳法, 证明 α 必弄真 A 。

当 $m = 1$ 时, $A_m = A$ 或者是公理或者是 Γ 的成员, 于是 $\alpha(A) = 1$ 。

设 $m = k, A_k = A$ 。如果 A_m 为公理或者 Γ 的成员或者 $A_k = A_j (j < k)$, 根据公理的永真性和归纳假设, 我们有 $\alpha(A) = 1$; 如果 A_k 是 $A_i, A_j (i, j < k)$ 通过分离规则导出来的, 由于 $\alpha(A_i) = 1, \alpha(A_j) = 1$, 所以 $\alpha(A_k) = 1$ 。□

定理 1.10.3 PC 是一致的, 即不存在公式 A , 使得 A 与 $\neg A$ 均为 PC 中的定理。

证明: 如果 $\vdash A, \vdash \neg A$, 那么 $\Rightarrow A, \Rightarrow \neg A$, 这是不可能的。□

定理 1.10.4 PC 不是完全的, 即存在公式 A , 使得 $\vdash A, \vdash \neg A$ 均不能成立。

证明: 对于命题公式 $p_1, \vdash p_1$ 和 $\vdash \neg p_1$ 都不成立, 否则如果 $\vdash p_1$ 那么 $\Rightarrow p_1$, 如果如果 $\vdash \neg p_1$ 那么 $\Rightarrow \neg p_1$ 。由于 p_1 为命题变元所以上述两个式子都不能成立。□

定义 1.10.1 PC 的理论 (theory) 指的是如下的集合:

$$Th(PC) = \{A | \vdash_{PC} A\}$$

PC 基于前提 Γ 的扩充 (extension) 指的是:

$$Th(PC \cup \Gamma) = \{A | \Gamma \vdash_{PC} A\}$$

定理 1.10.5 PC 的不一致的扩充必定是完全的, 但是至少有一个公式不是公式的一致扩充的定理。特别地, 当公式集合 Γ 不一致的时候, 扩充 $Th(PC \cup \Gamma)$ 是完全的; 当 Γ 一致时, 至少有一个公式 A 使得

$$A \notin Th(PC \cup \Gamma) (\text{即 } \Gamma \not\vdash A)$$

证明: PC 的不一致的扩充必定是完全的。由于 $Th(PC \cup \Gamma)$ 不一致, 所以有公式 A , 使得 $\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash \neg A$, 对于任意的公式 B ,

$$\dots, \neg A \rightarrow (A \rightarrow B), \neg A, A \rightarrow B, B$$

是公式 B 的一个演绎。所以 $Th(PC \cup \Gamma)$ 是完全的。

如果 $Th(PC \cup \Gamma)$ 一致, 则对于任意的公式 $A \in Th(PC), \Gamma \vdash \neg A$ 。□

定理 1.10.6 PC 是完备的, 即对任意公式集合 Γ 和公式 A , 如果 $\Gamma \Rightarrow A$, 那么 $\Gamma \vdash A$ 。特别地, 如果 $\Rightarrow A$, 即 A 永真, 那么 $\vdash A$, 即 A 是 PC 中的一个定理。

命题 1.10.1 如果 Γ 一致, $\Gamma \not\vdash A$, 那么 $\Gamma \cup \{\neg A\}$ 是也一致的。

证明: 设 $\Gamma \cup \{\neg A\}$ 不是一致的, 那么有公式 B , 使得 $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash B$ 并且 $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash \neg B$ 。

由于 $B \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$ 是 PC 的一个定理, 所以

$$\dots, B \rightarrow (\neg B \rightarrow A), B, \neg B \rightarrow A, \neg B, A$$

就构成了一个以 $\Gamma \cup \{\neg A\}$ 为前提的 A 演绎。所以 $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash A$, 于是 $\Gamma \vdash \neg A \rightarrow A$ 。由于 $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ 是 PC 的一个定理, 所以 $\Gamma \vdash A$, 矛盾。所以 $\Gamma \cup \{\neg A\}$ 是也一致的。 \square

命题 1.10.2 如果 Γ 一致, $\Gamma \vdash A$, 那么 $\Gamma \cup \{A\}$ 是也一致的。

证明: 如果 $\Gamma \cup \{A\}$ 不一致, 那么 $\Gamma \cup \{A\} \vdash \neg A$ 。从而 $\Gamma \vdash A \rightarrow \neg A$, 但 $(A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$ 是 PC 的一个定理, 所以 $\Gamma \vdash \neg A$, 这与 Γ 的一致性相矛盾。 \square

命题 1.10.3 如果 Γ 一致, 那么存在公式集合 Δ , 使得 $\Gamma \subseteq \Delta$, Δ 是一致的并且 Δ 是完全的。

证明: 设 $A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$ 是 PC 中所有公式的序列, 构造公式集合序列如下:

$$\Delta_0 = \Gamma$$

$$\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{A_n\} \text{ 如果 } \Delta_n \vdash A_n$$

$$\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{\neg A_n\} \text{ 如果 } \Delta_n \not\vdash A_n$$

然后让 $\Delta = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n$ 。这样的话由这种构造方式知道 Δ 是完全的。(因为由 Δ_i 的构造方式知对每一个公式 A_i , 或者 $A_i \in \Delta_i \subseteq \Delta$, 或者 $\neg A_i \in \Delta_i \subseteq \Delta$)

为了证明 Δ 也是一致的。我们首先说 $\Delta_i (i = 0, 1, 2, \dots)$ 都是一致的。(用归纳法。首先 $\Delta_0 = \Gamma$ 是一致的, 其次, 假设 Δ_n 一致, 如果 $\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{\neg A_n\}$, 这时 $\Delta_n \not\vdash A_n$ 。由前面的命题知 Δ_{n+1} 是一致的。

如果 $\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{A_n\}$, 这时 $\Delta_n \vdash A_n$ 。我们必须有 Δ_{n+1} 一致, 否则, 设有公式 B , 使得 $\Delta_{n+1} \vdash B, \Delta_{n+1} \vdash \neg B$, 由于 $\neg B \rightarrow (B \rightarrow A)$ 是一个定理, 所以 $\Delta_{n+1} \vdash A$ 对任意的公式 A 都成立, 于是 $\Delta_n \cup \{A_n\} \vdash \neg A_n$, 所以 $\Delta_n \vdash A_n \rightarrow \neg A_n$, 但是 $(A_n \rightarrow \neg A_n) \rightarrow \neg A_n$ 是 PC 的一个定理。所以 $\Delta_n \vdash \neg A_n$, 从而 Δ_n 是不一致的, 矛盾。)

另外, 对于任意公式 A , 如果 $\Delta \vdash A$, 则存在一个正整数 n , 使得 $\Delta_n \vdash A$ 。

因为 $\Delta \vdash A$, 设 $B_1, B_2, \dots, B_m (= A)$ 是公式 A 的以 Δ 为前提的演绎。对每个公式 B_i , 或者 $B_i \in \Delta$, 或者 B_i 是一个公理, 或者是前面的公式, 或者是分离规则由前面公式得到的公式。假设这个序列中 $B_{i_1}, \dots, B_{i_p} \in \Delta$, 所以有整数 n_1, \dots, n_p , 使得 $B_{i_k} \in \Delta_{n_k} (k = 1, 2, \dots, p)$, 令 n 为这些 n_k 中最大的, 即 $n = \max\{n_1, \dots, n_p\}$ 。于是由于 $\Delta_0 \subseteq \Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq \dots$, 所以 $\Delta_n \vdash A$ (因为上面序列的每个公式 B_i , 或者 $B_i \in \Delta_n$, 或者 B_i 是一个公理, 或者是前面的公式, 或者是分离规则由前面公式得到的公式)。

其次我们说 Δ 也是一致的, 不然的话设有 A_i , 使得 $\Delta \vdash A_i$ 并且 $\Delta \vdash \neg A_i$, 由于 A_i 和 $\neg A_i$ 的演绎均是有限长, 所以只要 n 足够大便有 $\Delta_n \vdash A_i$ 并且 $\Delta_n \vdash \neg A_i$, 这是不可能的, 因为 Δ_j 是一致的。(可以用归纳法证明。) \square

命题 1.10.4 上面构造的公式集合 Δ , 有如下性质: 对任一公式 A , $A \in \Delta$ 当且仅当 $\Delta \vdash A$

证明: 如果 $A \in \Delta$ 则显然 $\Delta \vdash A$ 。(书中用什么归纳法是证明不出来的) 设 $\Delta \vdash A$, 由 Δ 的一致性知 $\neg A \notin \Delta$, 设 A 是序列中的 A_n (其中 n 是自然数), 所以有 $\Delta_{n+1} \subseteq \Delta$ 知 $\neg A_n \notin \Delta_{n+1}$, 由此推知 $\Delta_n \vdash A_n$, 所以 $A_n \in \Delta_{n+1}$, 即 $A \in \Delta$ 。

设 $\Delta \vdash A, B_1, B_2, \dots, B_m (= A)$ 是 A 的以 Δ 为前提的演绎, 当 $m = 1$ 时, $A \in \Delta$ 或者是公理, 如果 A 是公理 (则 $A \in \Delta$)。设它的枚举号为 k (即它是 A_{k-1} , 由于 A_{k-1} 是公理, 所以 $\Delta_{k-1} \vdash A_{k-1}$, 所以 $A_{k-1} \in \Delta_k = \Delta_{k-1} \cup \{A_{k-1}\}$), 那么 $A \in \Delta_k$, 于是 $A \in \Delta$ 。

设 $m > 1, B_m = A$ 由 B_i 和 B_j 通过 MP 得到, 那么 $B_i \in \Delta$ 和 $B_j \in \Delta$, 从而有 m_1, m_2 , 使得 $B_i \in \Delta_{m_1}$ 和 $B_j \in \Delta_{m_2}$, 从而 $B_i, B_j \in \Delta_{\max\{m_1, m_2\}}$ 。于是 $\Delta_{\max\{m_1, m_2\}} \vdash B_m$, 设 $B_m = A$ 的枚举编号是 v , 即 $A = A_{v-1}$ 。

如果 $v > \max\{m_1, m_2\}$, 即 $v - 1 \geq \max\{m_1, m_2\}$, 所以 $\Delta_{\max\{m_1, m_2\}} \subseteq \Delta_{v-1}$, 从而 $\Delta_{v-1} \vdash B_m (= A_{v-1})$, 这样的话由 Δ_v 的定义知 $A_{v-1} = A = B_m \in \Delta_v \subseteq \Delta$ 。

如果 $v \leq \max\{m_1, m_2\}$, 所以 $\Delta_v \subseteq \Delta_{\max\{m_1, m_2\}}$ 。我们说 $A = A_{v-1} \in \Delta_v \subseteq \Delta$, 否则 $\neg A = \neg A_{v-1} \in \Delta_v$, 从而 $\Delta_v \vdash \neg A$, 进而 $\Delta_{\max\{m_1, m_2\}} \vdash \neg A (= B_m)$, 与 $\Delta_{\max\{m_1, m_2\}}$ 的一致性矛盾。 \square

命题 1.10.5 设 Γ 是 PC 的一致公式集合, 那么存在一个指派 ∂ , 使得对的任一公式 A , 都有 $\partial(A) = 1$ 。

证明: 设 Δ 是上面命题构造的公式集合, 因此 $\Gamma \subseteq \Delta$, Δ 一致并且完全。现在定义映射 $\bar{\partial}$ 如下:

$$\bar{\partial}(A) = \begin{cases} 1 & \text{当 } A \in \Delta \\ 0 & \text{当 } A \notin \Delta \end{cases}$$

1. 由于 Δ 是完全的, 所以 $\bar{\partial}$ 确实是公式集到 $\{0, 1\}$ 的映射。
2. 映射 $\bar{\partial}$ 满足真值运算 \neg, \rightarrow 。我们要证明:

$$\bar{\partial}(\neg A) = \begin{cases} 0 & \text{当 } \bar{\partial}(A) = 1 \\ 1 & \text{当 } \bar{\partial}(A) = 0 \end{cases}$$

$$\bar{\partial}(A \rightarrow B) = \begin{cases} 0 & \text{当 } \bar{\partial}(A) = 1 \text{ 并且 } \bar{\partial}(B) = 0 \\ 1 & \text{否则} \end{cases}$$

第一条很容易证明, 如果 $\bar{\partial}(A) = 1$, 那么由定义 $A \in \Delta$, 由 Δ 的一致性知, $\neg A \notin \Delta$, 于是 $\bar{\partial}(\neg A) = 0$ 。

第二条必须证明 $\bar{\partial}(A \rightarrow B) = 0$ 当且仅当 $\bar{\partial}(A) = 1$ 并且 $\bar{\partial}(B) = 0$ 。

设 $\bar{\partial}(A) = 1$ 并且 $\bar{\partial}(B) = 0$, 并且 $\bar{\partial}(A \rightarrow B) = 1$, 由定义知 $A \rightarrow B \in \Delta$, $A \in \Delta$, $B \notin \Delta$ ($\neg B \in \Delta$)。从而 $\Delta \vdash A, \Delta \vdash A \rightarrow B, \Delta \vdash \neg B$, 所以 $\Delta \vdash B, \Delta \vdash \neg B$, 与 Δ 的一致性矛盾。

反之, 如果 $\bar{\partial}(A \rightarrow B) = 0$, 并且 $\bar{\partial}(A) = 0$ 或者 $\bar{\partial}(B) = 1$ 。那么 $\neg(A \rightarrow B) \in \Delta, \neg A \in \Delta$ 或者 $B \in \Delta$ 。即 $\Delta \vdash \neg(A \rightarrow B), \Delta \vdash \neg A$ 或者 $\Delta \vdash B$ 。若 $\Delta \vdash \neg A$, 由于 $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ 为 PC 中的定理, 所以 $\Delta \vdash A \rightarrow B$, 矛盾。若 $\Delta \vdash B$, 由于 $B \rightarrow (A \rightarrow B)$ 为 PC 中的定理, 所以 $\Delta \vdash A \rightarrow B$, 矛盾。

取 $\bar{\partial}$ 在 PC 的原子公式集合上的限制而得到的指派 ∂ 。

我们说对于 PC 的任一公式 A , $\partial(A) = 1$ 当且仅当 $\bar{\partial}(A) = 1$ 。

用归纳法。如果 A 是原子公式, 那么 $\partial(A) = \bar{\partial}(A)$, 结论成立。对于公式 A , 如果 $A = \neg B$, 那么由归纳假设 $\partial(B) = \bar{\partial}(B)$, 于是 $\partial(A) = \bar{\partial}(A)$ 。如果 $A = C \rightarrow D$, 由归纳假设 $\partial(C) = \bar{\partial}(C), \partial(D) = \bar{\partial}(D)$ 。所以 $\bar{\partial}(A) = 0$ 当且仅当 $\bar{\partial}(C) = 1, \bar{\partial}(D) = 0$ 当且仅当 $\partial(C) = 1, \partial(D) = 0$, 当且仅当 $\partial(C \rightarrow D) = 0$, 当且仅当 $\partial(A) = 0$ 。所以 $\partial(A) = \bar{\partial}(A)$ 。□

下面证明定理。

设 A 为 PC 中的任一公式, Γ 为一个公式集合, $\Gamma \Rightarrow A$, 那么 $\Gamma \vdash A$ 。

如果 Γ 不是一致的, 那么 Γ 演绎 PC 中的所有公式, 所以 $\Gamma \vdash A$ 。如果 Γ 是一致的, 假设 $\Gamma \not\vdash A$, 那么 $\Gamma \cup \{\neg A\}$ 也是一致的, 由上面的命题知道, 存在一个指派 ∂ , 使得 ∂ 弄真集合 $\Gamma \cup \{\neg A\}$ 中的所有公式。从而这个指派弄真 Γ 中的所有公式, 可是弄假 A , 这与 Γ 逻辑蕴含 A 相矛盾。

定理 1.10.7 如果 PC 的公式集合 Γ 是一致的当且仅当它是可满足的。

证明：如果 PC 的公式集合 Γ 是一致的, 由命题 4 知存在一个指派 ∂ , 使得 ∂ 弄真 Γ 中的所有公式。所以 Γ 是可满足的。

反之, 如果 Γ 是可满足的, 那么它一定是一致的。否则存在公式 B 使得 $\Gamma \vdash B, \Gamma \vdash \neg B$, 于是 $\Gamma \Rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \neg B$, 这样的话, 如果指派 ∂ 弄真 Γ 中的所有公式, 那么 ∂ 弄真 B 和 $\neg B$, 这就矛盾了。所以 Γ 是不可满足的, 矛盾。 \square

定义 1.10.2 称形式系统 FS 具有紧致性, 如果对于 FS 的任一公式集合 Γ , 如果 Γ 的任一有穷子集可满足, 则 Γ 也可满足。

如果 Γ 不可满足, 则由上面的定理知它不一致, 从而存在公式 A , 使得 $\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash \neg A$ 。设这两个演绎中属于 Γ 的公式分别是 Γ_1, Γ_2 , 从而 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 是 Γ 有穷子集, 并且 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash A, \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \neg A$ 。矛盾。

1.11 命题演算形式系统 ND

ND 也是一个命题逻辑的演算系统, 和 PC 相比, 它更注重实用性, 推理也更加自然, 并且采用了五个真值联结词。

1. 语言部分的定义

首先有一个符号表 (字母表) $\Sigma = \{ (,), \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, p_1, p_2, p_3, \dots \}$ 。

公式的定义如下:

1. p_1, p_2, p_3, \dots 为 (原子) 公式。
2. 如果 A, B 是公式, 那么 $(\neg A), (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$ 也是公式。
3. 只有上述两条定义的表达式才是公式。

公式中最外层的括号可以省略。

2. 推理部分

公理集合包括一个元素:

$$\Gamma \cup \{A\} \vdash A \quad (\epsilon)$$

推理规则模式有 14 个:

(1) 假设引入规则,它出自于重言式 $B \rightarrow (A \rightarrow B)$:

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \cup \{A\} \vdash B} \quad (+)$$

(2) 假设消除规则,它出自于重言式 $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$:

$$\frac{\Gamma; A \vdash B, \Gamma; \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B} \quad (-)$$

(3) 析取 \vee 引入规则,它出自于重言式 $A \rightarrow A \vee B, B \rightarrow A \vee B$:

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}, \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \quad (\vee+)$$

或者改成更强的形式,因为 $(\neg A \rightarrow B) \leftrightarrow A \vee B$:

$$\frac{\Gamma; \neg B \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}, \frac{\Gamma; \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$$

(4) 析取 \vee 消除规则,它出自于重言式 $(A \vee B) \wedge (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow C$:

$$\frac{\Gamma; A \vdash C, \Gamma; B \vdash C, \Gamma \vdash A \vee B}{\Gamma \vdash C} \quad (\vee-)$$

(5) 合取 \wedge 引入规则,它出自于重言式 $A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \quad (\wedge+)$$

(6) 合取 \wedge 消除规则,它出自于重言式 $A \wedge B \rightarrow A, A \wedge B \rightarrow B$:

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}, \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} \quad (\wedge-)$$

(7) 蕴含 \rightarrow 引入规则:

$$\frac{\Gamma; A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \quad (\rightarrow+)$$

(8) 蕴含 \rightarrow 消除规则,这是分离规则:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash A \rightarrow B}{\Gamma \vdash B} \quad (\rightarrow-)$$

(9) \neg 引入规则:这是数学中的反证法。

$$\frac{\Gamma; A \vdash B, \Gamma; A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A} \quad (\neg+)$$

(10) \neg 消除规则,这条规则源于重言式 $A \rightarrow (\neg \rightarrow B)$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash B} \quad (\neg-)$$

(11) $\neg\neg$ 引入规则:

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \neg\neg A} \quad (\neg\neg+)$$

(12) $\neg\neg$ 消除规则:

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A} \quad (\neg\neg-)$$

(13) \leftrightarrow 引入规则:

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Gamma \vdash B \rightarrow A}{\Gamma \vdash A \leftrightarrow B} \quad (\leftrightarrow +)$$

(14) \leftrightarrow 消除规则:

$$\frac{\Gamma \vdash A \leftrightarrow B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}, \frac{\Gamma \vdash A \leftrightarrow B}{\Gamma \vdash B \rightarrow A} \quad (\leftrightarrow -)$$

定义 1.11.1 在 ND 中称 A 为 Γ 的演绎结果, 记为 $\Gamma \vdash_{ND} A$, 如果存在一个序列

$$\Gamma_1 \vdash A_1, \Gamma_2 \vdash A_2, \dots, \Gamma_m \vdash A_m (\Gamma \vdash A)$$

使得对任意的 $i = 1, 2, \dots, m, \Gamma_i \vdash A_i$ 或者公理, 或者是 $\Gamma_j \vdash A_j (j < i)$, 或者是对 $\Gamma_{j_1} \vdash A_{j_1}, \Gamma_{j_2} \vdash A_{j_2}, \dots, \Gamma_{j_k} \vdash A_{j_k} (j_1, j_2, \dots, j_k < i)$ 使用推理规则导出的公式, 其中 $j_1, j_2, \dots, j_k < i$ 。称 A 为 ND 的定理, 如果 $\Gamma \vdash A$, 并且 $\Gamma = \phi$ 。

例 1.11.1 证明对于任一公式 $A, A \vee \neg A$ 为 ND 的定理。

证明: 1. $A \vdash A \vee \neg A$

2. $\neg A \vdash A \vee \neg A$

3. $\vdash A \vee \neg A$

□

例 1.11.2 证明对于任意公式 $A, B, \neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ 为 ND 的定理。

证明: 1. $\neg(A \vee B), A \vdash A \vee B$

2. $\neg(A \vee B), A \vdash \neg(A \vee B)$

3. $\neg(A \vee B) \vdash \neg A$

这是证明的最关键的一步, 如果 $\neg(A \vee B)$, 并且 A , 那么就会出现矛盾。这与人们的思维习惯是一致的, 想从 $\neg(A \vee B)$, 证明 $\neg A$, 我就可以把 $\neg A$ 否定, 变成 A , 与 $\neg(A \vee B)$ 一起推出矛盾就可以了。而由 A 就知道 $A \vee B$ 是对的, 与 $\neg(A \vee B)$ 矛盾。上面的证明是人们思考过程的符号化处理。

同理

4. $\neg(A \vee B) \vdash \neg B$
5. $\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B$
6. $\vdash \neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
7. $\neg A \wedge \neg B, A \vee B, A \vdash A \wedge \neg A$
8. $\neg A \wedge \neg B, A \vee B, B \vdash B$
9. $\neg A \wedge \neg B, A \vee B, B \vdash \neg B$
10. $\neg A \wedge \neg B, A \vee B, B \vdash A \wedge \neg A$

为了从 $\neg A \wedge \neg B$ 证明 $\neg(A \vee B)$, 将 $\neg(A \vee B)$ 否定。这样就出现了 $\neg A \wedge \neg B$ 和 $A \vee B$ 同时成立, 我们找出矛盾就可以了。遇到 $A \vee B$ 推矛盾, 往往要分开讨论, 就是推出 A 成立的时候有矛盾并且 B 成立的时候也有矛盾。由于 $\neg A \wedge \neg B$ 即可以推出 $\neg A$ 又可以推出 $\neg B$ 。两种情况的矛盾都出来了。这段话用符号写出来就构成了上面的证明。

11. $\neg A \wedge \neg B, A \vee B \vdash A \wedge \neg A$
12. $\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)$
13. $\vdash \neg A \wedge \neg B \rightarrow \neg(A \vee B)$
14. $\vdash \neg A \wedge \neg B \leftrightarrow \neg(A \vee B)$

□

例 1.11.3 证明对于任意公式 $A, B, \neg A \rightarrow B \vdash A \vee B, A \vee B \vdash \neg A \rightarrow B$.

证明: 1. $\neg A \rightarrow B, \neg A \vdash B$

2. $\neg A \rightarrow B, \neg A \vdash A \vee B$

3. $\neg A \rightarrow B, A \vdash A \vee B$

4. $\neg A \rightarrow B \vdash A \vee B$

1. $\neg A \rightarrow B, \neg(A \vee B) \vdash \neg A$

2. $\neg A \rightarrow B, \neg(A \vee B) \vdash B$

3. $\neg A \rightarrow B, \neg(A \vee B) \vdash \neg B$

4. $\neg A \rightarrow B \vdash \neg\neg(A \vee B)$

5. $\neg A \rightarrow B \vdash (A \vee B)$

□

1. $(A \vee B) \vdash \neg A \rightarrow B$
2. $A \vee B, \neg A \vdash B$
3. $A \vee B, B, \neg A \vdash B$
4. $A \vee B, A, \neg A \vdash B$

1.12 形式系统 PC 和 ND 的等价性

我们已经给出了两个命题逻辑的公理系统, 命题演算形式系统 PC 和命题演算形式系统 ND。这两个系统各有自己的特点。在公理系统 ND 中, 定理的证明比较容易。

PC 中的公理都是 ND 的定理。

例 1.12.1 证明对于任意公式 A, B, C , 都有

1. $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$
2. $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
3. $\vdash (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

证明: 1. $A, B \vdash A (\epsilon)$

2. $A \vdash B \rightarrow A (\rightarrow +)$
3. $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A) (\rightarrow +)$

1. $A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash A (\epsilon)$
2. $A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash A \rightarrow B (\epsilon)$
3. $A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C) (\epsilon)$
4. $A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash B (\rightarrow -)$
5. $A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash B \rightarrow C (\rightarrow -)$
6. $A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C (\rightarrow -)$
7. $A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B \vdash A \rightarrow C (\rightarrow +)$
8. $A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C) (\rightarrow +)$

$$9. \vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) (\rightarrow +)$$

$$1. \neg A \rightarrow \neg B, B, \neg A \vdash B (\epsilon)$$

$$2. \neg A \rightarrow \neg B, B, \neg A \vdash \neg B (\epsilon)$$

$$3. \neg A \rightarrow \neg B, B \vdash \neg\neg A (\neg +)$$

$$4. \neg A \rightarrow \neg B, B \vdash A (\neg\neg -)$$

$$5. \neg A \rightarrow \neg B \vdash B \rightarrow A (\rightarrow +)$$

$$6. \vdash (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A) (\rightarrow +)$$

□

定理 1.12.1 $\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$

证明: • $\neg A, A \vdash A (\epsilon)$

$$\bullet \neg A, A \vdash \neg A (\epsilon)$$

$$\bullet \neg A, A \vdash B (\neg -)$$

$$\bullet \neg A \vdash A \rightarrow B (\rightarrow +)$$

$$\bullet \vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B) (\rightarrow +)$$

□

定理 1.12.2 $\vdash (\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$

证明: • $\neg A \rightarrow B, \neg A \rightarrow \neg B, \neg A \vdash \neg A (\epsilon)$

$$\bullet \neg A \rightarrow B, \neg A \rightarrow \neg B, \neg A \vdash \neg A \rightarrow B (\epsilon)$$

$$\bullet \neg A \rightarrow B, \neg A \rightarrow \neg B, \neg A \vdash \neg A \rightarrow \neg B (\epsilon)$$

$$\bullet \neg A \rightarrow B, \neg A \rightarrow \neg B, \neg A \vdash B (\rightarrow -)$$

$$\bullet \neg A \rightarrow B, \neg A \rightarrow \neg B, \neg A \vdash \neg B (\rightarrow -)$$

$$\bullet \neg A \rightarrow B, \neg A \rightarrow \neg B \vdash A (\neg -)$$

$$\bullet \neg A \rightarrow B \vdash (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A (\rightarrow +)$$

$$\bullet \vdash (\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A) (\rightarrow +)$$

□

我们可以给出一个新的公理系统, 这个系统与现在的 PC 可能不会完全一致。公理系统的公理是:

$$A_1 : B \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$$A_2 : \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$$A_3 : (\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$$

我们说这个公理系统与 PC 是一致的。我们可以证明 PC 的公理是这个系统的公理。

$$(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

| A | B | C | $A \rightarrow B$ | $A \rightarrow C$ | $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$ |
|-----|-----|-----|-------------------|-------------------|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

$$\neg(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow A \neg(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow \neg(B \rightarrow C)$$

Chapter 2

一阶谓词演算

一阶谓词演算是最重要的符号逻辑系统,其它的逻辑系统都被看作是它和命题演算系统的扩充、推广和归约。一阶谓词演算是程序设计理论、语义形式化以及程序逻辑研究的重要基础。还是程序验证、程序分析、综合以及自动生成、定理证明和知识表示技术的有力工具。

2.1 一阶谓词演算的基本概念

一个引子,叙述命题演算系统的不足。例如:

$$\frac{\text{所有实数的平方是非负的, } -\sqrt{3}\text{是实数}}{-\sqrt{3}\text{的平方是非负的}}$$

由于这一推理的逻辑关系并不反映在逻辑的联结词上面,所以在命题逻辑里面便不能完成这一推理过程。分析上述推理过程,我们可以分析出如下的逻辑成分:

(1) 表示客体性质和关系的语言成分——谓词 (predicates):

- 是实数 (表示性质的一元谓词)
- 是非负的 (表示性质的一元谓词)
- 是 的平方 (表示关系的二元谓词)

(2) 表示运算的语言部分——函词 (functions):

- 的平方 (表示一元运算的一元函词)

(3) 表示判断特性的语言成分——量词 (quanlifiers):

- 所有 (表示全称判断的全称量词)

2.1.1 谓词和函词

谓词是表示客体性质和关系的语言成分。

它附带着可以放置所讨论对象的位置称为空位。只有当空位上添入适当的对象后谓词才能成为关于所添对象的一个完整的语句。谓词携带空位的数目称为谓词的元数。谓词常用大写的拉丁字母或者字母串表示,其空位则用 e_1, e_2, e_3, \dots 表示,一律放在它们的后面,例子如下:

“... 是实数”为一元谓词,可以表示为 Re_1 。

“... 是非负的”为一元谓词,可以表示为 NNe_1 。

“... 是 ... 的平方”为二元谓词,可以表示为 Ee_1e_2 。

“... 小于 ... ”为二元谓词,可以表示为 Le_1e_2 。

“... + ... = ... ”为三元谓词,可以表示为 $Ae_1e_2e_3$ 。

当论域 U 确定以后,一元谓词对应于论域中对象的性质,这样的话就确定了论域中的一个子集。 $n(n \geq 2)$ 元谓词确定了论域中 n 个对象之间的关系,确定论域 U 的笛卡尔集合 U^n 的一个子集,对于 U^n 中的任意一个元素,它具有某一性质当且仅当属于表示此性质的谓词所确定的 U^n 的子集。因此对于任意一个谓词 $Pe_1e_2 \dots e_n$ 和任意的对象序列 $a_1, a_2, \dots, a_n (n \geq 1)$,可以对语句 $Pa_1a_2 \dots a_n$ 自然的赋予一个真值。如果 \bar{P} 表示 P 确定的 P^n 的子集,那么

$$Pa_1a_2 \dots a_n \text{ 为真当且仅当 } a_1, a_2, \dots, a_n \text{ 有关系 } P \text{ 当且仅当 } \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle \in \bar{P}$$

例 2.1.1 当论域 U 为实数域时, $R(-5)$ 为真,因为 $-5 \in \bar{R} \subseteq U$ (R 确定实数集合 \bar{R}); $NN(-5)$ 为假,因为 $-5 \notin \bar{NN} \subseteq U$ (NN 确定非负实数集合 \bar{NN}); $L(-3)(+2)$ 为真,因为 $-3 < +2, \langle -3, +2 \rangle \in \bar{L} \subseteq U^2$ (L 确定 U 上的小于关系 \bar{L}); $A(-2)(+2)(+5)$ 则为假,因为 $(-2) + (+2) \neq (+5), \langle -2, +2, +5 \rangle \notin \bar{A} \subseteq U^3$ (A 确定 U 上的三元关系 \bar{A});

我们把 $Re_1, NNe_1, Le_1e_2, Ae_1e_2e_3$ 等等叫做谓词命名式(简称谓词);把谓词的空位中填入对象后得到的形式叫做谓词填式。有的时候用谓词泛指这两者。用 $R^{(1)}, NN^{(1)}, L^{(2)}, A^{(3)}$ 等简单的表示上述谓词。

函词是表示某种操作的语言成分,对给定的若干对象,一个操作产生一个并且只产生一个新的对象。因此它也携带有安置操作对象的空位(也就是变目),空位填入对象以后函词表示的操作就产生唯一确定的一个对象。函词携带的空位的数目称为函词的元数。函词常用小写的拉丁字母或者字母串表示,它的空位也用 $e_1, e_2, e_3 \dots$ 来表示。写在函词的右边。例子:

“... .. 的平方”为一元函词,可以表示为 sqe_1 。

“... .. 和 的和”为二元函词可以表示为 $adde_1e_2$ 。

我们把 $sqe_1, adde_1e_2$ (或者简单的记为 $sq^{(1)}, add^{(2)}$) 这样的函词的表达形式称为函词的命名式, 或者简称函词。而把 $sqt_1, addt_1t_2$ (其中 t_1, t_2 是填入空位的对象) 称为函词 $sq^{(1)}, add^{(2)}$ 在 t_1, t_2 处的值, t_1, t_2 称为它们的变目值。

为了改善可读性, 我们经常对谓词填式的对象和函词的变目值用逗号和括号, 例如用 $L(x, y), add(x, y)$ 来代替 $Lxy, addxy$ 。

谓词和函词之间的关系:

谓词确定了一个函词(语句函词), 它作用于若干个对象, 得到的值是一个新的语句。

而函词确定了一个关系, n 元函词 f 确定了一个 $n + 1$ 元的关系 \bar{f} , 使得 $ft_1t_2 \cdots t_n = t$ 当且仅当 $\langle t_1, t_2, \cdots, t_n, t \in \bar{f} \rangle$ 。于是函词和谓词可以相互表示。

但是我们在理论的展开过程中仍然将这两者进行严格的区分。与谓词有关的是语句以及它的真值, 而与函词有关的是所讨论的对象或者论域中的个体。

谓词填式可以用真值联结词联结成更加复杂的语句, 而函词的值可以作为新的对象填在谓词和函词的空位中。

2.1.2 变元和常元

为了表示论域中的任意一个对象, 常常使用变元, 它以该论域作为变化域, 它可以是论域中的任意一元。例如:

(1) $x + y$ 表示任意两个实数的和。

(2) $x + y = 0$ 表示一个二元谓词填式, 填入的是两个任意取的实数。(x 和 y 互为相反数的时候为真, 否则为假)

(3) $x + y = y + x$ 表示一个四元谓词填式, 填入的是四个任意取的实数。但是要求第一空位和第四空位以及第二空位和第三空位分别填相同的数(无论 x 和 y 取什么数, 语句都真, 这表示加法的交换律)。

这里的变元的作用是:

1. 表示表达式中变元所在位置对于所讨论对象的任意性。
2. 表示表达式中各变元可取对象的独立性和相关性。(1)(2)(3) 中 x 和 y 相互独

立,(2)中两处 x 和 y 应分别取相同的对象。

3. 取代空位表示表达式的形式结构。

(4) $\sum_{i=1}^n f(i)$ 表示 $f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$, 这里的变元 i 是为了简化和式而引入的一个记号。和式不依赖于 i . $\sum_{i=1}^n f(i)$ 和 $\sum_{j=1}^n f(j)$ 表示的意义完全相同。

(5) 对所有 x, y , 有 $x + y = y + x$ 表示加法的交换律。这里语句的真假, 不依赖于 x, y , 换成对所有 u, v , 有 $u + v = v + u$ 也表示加法的交换律。

我们把(1)(2)(3)中的变元称为自由变元, 我们把(4)(5)中的变元称为约束变元,

区别: 自由变元可以做代入, 约束变元不能。约束变元可以改名, 自由变元不能。常常会有语义的变化。

常元: 表示确定个体的符号。 -5 表示 -5 , $Zhang_san$ 表示张三等等。

2.1.3 量词

$x > 0 \vee x = 0 \vee x < 0$ 表示“凡是数或者大于零、或者等于零、或者小于零”这里的 x 表示全称性的变元。

用 $F(x_0) = 0$ 表示“方程 $F(x) = 0$ 有解, 并且它的解是 x_0 ”

$\neg Px$ 表示并非所有的 x 都有性质 P , 所有的 x 都没有性质 P 。到底是哪一个?

量词的引入: $\forall x$ 表示对任意的 x , $\exists x$ 表示存在 x 。 $\forall x Px$ 表示对于所有的 x , x 都有性质 P 。 $\exists x Px$ 表示存在 x , 使得 x 有性质 P 。

给出 $\neg \forall x Px, \forall x \neg Px, \neg \exists x Px, \exists x \neg Px$ 的解释。

有了谓词、函词、量词、常元和变元便可以定义项和公式。

变元和常元是项, 如果 $f^{(n)}$ 是一个 n 元函词, t_1, t_2, \dots, t_n 是项, 那么 $ft_1 \cdots t_n$ 也是项。

谓词填式是公式, 对于任何变元 x 和公式 A, B , 表达式 $\forall x A, \exists x B$, 以及 A, B 由联结词组成的表达式都是公式。这样我们就可以表达几乎所有的命题。

例如:

$$\frac{\forall x(R(x) \rightarrow NN(sq(x))), R(-\sqrt{3})}{NNsq(-\sqrt{3})}$$

对任意的实数, 均有实数使得它们的和为零, 可以表示为 $\forall x(R(x) \rightarrow \exists y(R(y) \wedge add(x, y) = 0))$ 。

诗歌“生命诚可贵,爱情价更高,若为自由故,两者皆可抛。”表示如下:

$$\forall x(Mx \rightarrow P(life, x))$$

$$\forall x(Mx \rightarrow V(love, x))$$

$$F(i, free) \rightarrow G(i, lifei) \wedge G(i, lovei)$$

这里 Me 表示“ \dots 是人”, Pe 表示“ \dots 是宝贵的”, Ve 表示“ \dots 是有价值的”, Fe_1e_2 表示“ \dots 为 \dots 而斗争”, Ge_1e_2 表示“ \dots 愿意舍弃 \dots ”, 这些都是谓词。 $lifee$ 表示“ \dots 的生命”, $lovee$ 表示“ \dots 的爱情”, 它们都是函数。 i 和 $free$ 为常元, 表示我和自由。

如果想表示论域 U 的一个子集 P 中的所有元素, 可以用 $\forall x(Px \rightarrow \dots)$ 来表示。如果想表示论域 U 的一个子集 P 中有一个元素, 可以用 $\exists x(Px \wedge \dots)$ 来表示。

例 2.1.2 “每个整数都有一个相反的数”这句话, 在限定论域为整数集合时可以表示为 $\forall x\exists y(y = -x)$ 。如果在实数域上讨论问题, 则用 Ie 表示整数, 那么这句话就写成 $\forall x(Ix \rightarrow \exists y(Iy \wedge y = -x))$

量词的意义:

$\forall xA$ 为真当且仅当 $\neg(\exists x(\neg A))$ 为真。

$\exists xA$ 为真当且仅当 $\neg(\forall x(\neg A))$ 为真。

$\neg(\forall xA)$ 为真当且仅当 $\exists x(\neg A)$ 为真。

$\neg(\exists xA)$ 为真当且仅当 $\forall x(\neg A)$ 为真。

$\forall x\forall yA$ 为真当且仅当 $\forall y\forall xA$ 为真。

$\exists x\forall yA$ 为真当且仅当 $\exists y\forall xA$ 为真。

2.2 谓词公式

2.2.1 n 元关系和 n 元函数

设 U 为任一非空集合, 集合 $U \times U \times \dots \times U$ (n 个 U) 称为 n 个 U 的笛卡尔积 (cartesian product), 其定义如下:

$$U \times U \times \dots \times U = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1, x_2, \dots, x_n \in U\}$$

其中 (x_1, x_2, \dots, x_n) 由 U 中的 n 个元素组成, 称为有序 n 元组 (ordered n-tuple) 或简称为 n 元组 (n-tuple), 下面我们将 n 个 U 的笛卡尔积 $U \times U \times \dots \times U$ 简记为 $U^n (n \geq 1)$ 。

若 $H \subseteq U^n$, 则称 H 为 U 上的 n 元关系 (n-ary relation)。设 $f \in U^n \times V$, 此处 V 是一个集合, 若对任意的 $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in U^n$, 存在唯一的 $y \in V$, 使得 $((x_1, x_2, \dots, x_n), y) \in f$, 则称 f 为 U 上的 n 元函数 (n-ary function) 或称 f 是从 U^n 到 V 的函数 (function), 记作 $f: U^n \rightarrow V$ 。 U^n 称为 f 的定义域 (domain)。此处的集合 V 可以等于 U , 也可以不等于 U 。

当 $U = V$ 时, U 上的 n 元函数是 U 上的 $n+1$ 元关系, 但 U 上的 $n+1$ 元关系并不一定是 U 上的 n 元函数。

2.2.2 全称量词符号和存在量词符号

前面我们讨论了一个例子: 由所有学生都要学习数学和张三是学生, 可以推出张三学习数学。同时我们也指出, 尽管这是一个正确的推理, 但不能采用第一我们这个时候

2.3 一阶谓词演算形式系统

这里介绍的是一个简明的一阶谓词演算形式系统, 称为 FC。

2.3.1 一阶语言

一阶谓词演算形式系统称为一阶语言, 用 \mathcal{L} 表示一阶语言, FC 的语言记为 $\mathcal{L}(FC)$ 。

$\mathcal{L}(FC)$ 的字母表由以下的符号组成:

个体变元 $v_1, v_2, v_3 \dots$ (简称变元)

个体常元 $a_1, a_2, a_3 \dots$ (简称常元)

函词 $f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, f_3^{(1)} \dots$ (一元函词)

$f_1^{(2)}, f_2^{(2)}, f_3^{(2)} \dots$ (二元函词)

$\dots \dots$

$f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, f_3^{(n)} \dots$ (n 元函词)

$\dots \dots$

谓词 $P_1^{(1)}, P_2^{(1)}, P_3^{(1)} \dots$ (一元谓词)

$P_1^{(2)}, P_2^{(2)}, P_3^{(2)} \dots$ (二元谓词)

$\dots \dots$

$P_1^{(n)}, P_2^{(n)}, P_3^{(n)} \dots$ (n 元谓词)

$\dots \dots$

真值联结词: \rightarrow, \neg

量词: \forall

括号: $(,)$

我们用 L_v 表示个体变元集合, L_a 表示个体常元集合, L_f 表示函词符号的集合, L_p 表示谓词符号的集合, L_l 表示逻辑联结词和量词构成的集合。

于是 $\mathcal{L}(FC)$ 的字母表 $\Sigma = L_v \cup L_a \cup L_f \cup L_p \cup L_l$ 。令 $\Sigma^* = \{x_1 x_2 \dots x_n | x_1, x_2, \dots, x_n \in \Sigma, n = 0, 1, 2, \dots\}$, 注意, Σ^* 中含有一个空字符串 ϵ 。在 Σ^* 上; 定义代数运算 \circ 如下: 对 $\forall x_1 x_2 \dots x_n, y_1 y_2 \dots y_m \in \Sigma^*$,

$$(x_1 x_2 \dots x_n) \circ (y_1 y_2 \dots y_m) = x_1 x_2 \dots x_n y_1 y_2 \dots y_m$$

不难验证, 代数系 $(\Sigma^*, \circ, \epsilon)$ 构成一个么半群, ϵ 是这个么半群的么元。

$\mathcal{L}(FC)$ 的项定义如下:

(1) 变元和常元是项。

(2) 对任意正整数 n , 如果 t_1, t_2, \dots, t_n 为项, $f^{(n)}$ 为 n 元函词, 那么 $f^{(n)} t_1 t_2 \dots t_n$ 也为项。

(3) 除了有限次的使用 (1)(2) 得到的表达式以外, 其余的都不是项。

$\mathcal{L}(FC)$ 的公式定义如下:

(1) 对任意正整数 n , 如果 t_1, t_2, \dots, t_n 为项, $P^{(n)}$ 为 n 元谓词符号, 那么 $P^{(n)} t_1 t_2 \dots t_n$ 也为公式, 并称之为原子公式。

(2) 如果 A, B 为公式, v 为任意一个变元符号, 那么 $(\neg A), (A \rightarrow B), (\forall v A)$ 都是公式。

(3) 除了有限次的使用 (1)(2) 得到的表达式以外, 其余的都不是公式。

关于 $\mathcal{L}(FC)$ 的说明:

- (1) 这里的符号是抽象的。并无特别的意义。
- (2) 其它的联结词被看成是缩写符号。
- (3) $\mathcal{L}(FC)$ 中没有等词 $=$, 带有等词的以后展开。
- (4) 不含有任何函词的系統称为纯谓词演算系統。
- (5) 在 $\mathcal{L}(FC)$ 中引入命题符号, 或者 0 元函数符号作为命题符号, 这样命题演算系統 PC 就成为 FC 的一个子系統。

约定:

- (1) 为了增加可读性, 用 $f^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 代替 $f^{(n)}t_1t_2 \cdots t_n$, 用 $P^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 代替 $P^{(n)}t_1t_2 \cdots t_n$ 。
- (2) 和 PC 中一样, 最外层的括号可以省略。并且 $\forall v(\exists v)$ 的优先级高于所有的二元联结词, 和 \neg 同级。

定义 2.3.1 公式 A 称为量词 $\forall v(\exists v)$ 的辖域, 如果 $\forall v(\exists v)$ 与 A 毗连并且 A 的任何真截断 (如果 $A = ww', w' \neq \epsilon$, 那么我们称 w 为 A 的真截断) 都不是公式。

简单地说, 辖域就是量词的作用范围。

定义 2.3.2 公式 A 中, 变元 v 的某个出现叫做约束的出现, 如果该变元为 $\forall v(\exists v)$ 的指导变元, 并且出现在 $\forall v(\exists v)$ 的辖域内。否则该变元的出现为自由的出现。 A 中约束出现的变元称为约束变元, 自由出现的变元称为自由变元。

定义 2.3.3 称项 t 是对 A 中自由变元 v 可代入的, 如果 A 中 v 的任何自由出现都不在 $\forall u(\exists u)$ 的辖域内, 这里 u 是 t 中的任意一个变元。

定义 2.3.4 对公式 A 中变元 v 的所有自由出现都代换为项 t (t 对 A 中的 v 是可代入的) 的过程称为代入。代换后得到的公式称为 A 的代入实例, 记为 A_t^v 。如果 A 中没有 v 的自由出现则 A_t^v 就是 A 。

用记号 $A_{t_1, t_2, \dots, t_n}^{v_1, v_2, \dots, v_n}$ 表示对 A 中的变元 v_1, v_2, \dots, v_n 同时做代入, v_i 代为 t_i 。它与 $(\dots((A_{t_1}^{v_1})_{t_2}^{v_2})_{t_3}^{v_3} \dots)_{t_n}^{v_n}$ 是不同的。

定义 2.3.5 对公式 B 称为公式 A 的子公式, 如果 A 为形如 wBw' 的符号串, 其中 w, w' 是符号串, B 是公式。当 w 和 w' 中有一个不是空串, 我们就把 B 称为 A 的真子公式。

定义 2.3.6 设 v_1, v_2, \dots, v_n 为公式 A 的所有的自由变元, 那么公式 $\forall v_{i_1} \forall v_{i_2} \cdots \forall v_{i_r} A$ 称为 A 的全称化。其中 $1 \leq r \leq n, 1 \leq i_1, i_2, \dots, i_r \leq n$, 公式 $\forall v_1 \forall v_2 \cdots \forall v_n A$ 称为公式 A 的全称封闭式。当 A 无自由变元时, A 的全称封闭式就是它本身。

不含自由变元的公式称为命题, FC 中的公式是命题当且仅当它是一个全称封闭式。

2.3.2 一阶逻辑

一阶谓词演算系统中的理论部分称为一阶逻辑, 用 \mathcal{J} 表示。 FC 的理论部分用 $\mathcal{J}(FC)$ 表示。

公理部分, 由下列公式及其所有的全称化组成:

$$A_1: A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$A_2: (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$A_3: (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$A_4: \forall v A \rightarrow A_t^v (t \text{ 对 } A \text{ 中的变元 } v \text{ 可代入})$$

$$A_5: \forall v (A \rightarrow B) \rightarrow (\forall v A \rightarrow \forall v B)$$

$$A_6: A \rightarrow \forall v A (v \text{ 在 } A \text{ 中无自由出现})。$$

推理规则:

$$r_{mp}: \frac{A, A \rightarrow B}{B}$$

FC 中的定理、证明以及演绎、演绎结果的定义与 PC 中是一样的。下面举例说明 FC 中定理的证明。

例 2.3.1 证明: 对于 FC 中的任何公式 A , 变元 v , $\vdash_{FC} \forall v A \rightarrow A$

证明: 由于项 v 对 A 中的自由变元 v 总是可以代入的, 而 $\forall v A \rightarrow A_v^v$ 是公理, 并且 $A_v^v = A$, 所以 $\forall v A \rightarrow A$ 。 \square

例 2.3.2 证明: 对于 FC 中的任何公式 A , 变元 v , $\vdash_{FC} A \rightarrow \neg \forall v \neg A$, 也就是 $\vdash_{FC} A \rightarrow \exists v A$

证明: (1) $(\forall v \neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow \neg \forall v \neg A)$ (重言式)

(2) $\forall v \neg A \rightarrow \neg A$ (公理)

(3) $A \rightarrow \neg \forall v \neg A$ (分离规则) \square

定理 2.3.1 对于 FC 中的任何公式 A , 变元 v , 如果 $\vdash A$, 那么 $\vdash \forall v A$

证明: 对 A 的证明序列的长度用归纳法。

$m = 1$ 时 A 是公理, 如果 v 是 A 中的一个自由变元, 那么 $\forall v A$ 是一个全称化所以是公理; 如果 v 不是 A 中的一个自由变元, 那么由公理 $A \rightarrow \forall v A$ (v 在 A 中无自由出现) 以及 A 的证明就构成了 $\forall v A$ 的证明。总之有 $\vdash \forall v A$ 。

设 $A_1, A_2, \dots, A_k (= A)$ 是 A 的证明序列, 如果 A 为公理, 那么和前面的讨论一样可以有

$\vdash \forall v A$, 否则 A 是 $A_i, A_j (i, j < k)$ 通过推理规则 MP 得到的, 设 $A_j = A_i \rightarrow A$, 由归纳假设知 $\vdash \forall v A_i, \vdash \forall v (A_i \rightarrow A)$, 由公理 $\vdash \forall v (A_i \rightarrow A) \rightarrow (\forall v A_i \rightarrow \forall v A)$ 和分离规则有 $\vdash \forall v A_i \rightarrow \forall v A$, 再由分离规则知 $\vdash \forall v A$. \square

定理 2.3.2 对于 FC 中的任何公式集合 Γ , 公式 A , 以及不在 Γ 的任意公式里自由出现的变元 v , 如果 $\Gamma \vdash A$, 那么 $\Gamma \vdash \forall v A$

证明: 对 A 的演绎序列的长度用归纳法。

$m = 1$ 时 A 是公理, 或者 $A \in \Gamma$, 对于 A 是公理的情况, 如果 v 是 A 中的一个自由变元, 那么 $\forall v A$ 是一个全称化所以是公理; 如果 v 不是 A 中的一个自由变元, 那么由公理 $A \rightarrow \forall v A$ (v 在 A 中无自由出现) 以及 A 的证明就构成了 $\forall v A$ 的证明。如果 $A \in \Gamma$, 那么由于 v 不在 A 中自由出现, 于是由公理 $A \rightarrow \forall v A$ (v 在 A 中无自由出现) 以及 A 得到 $\forall v A$, 总之有 $\vdash \forall v A$ 。

设 $A_1, A_2, \dots, A_k (= A)$ 是 A 的 Γ 为前提的演绎序列, 如果 A 为公理, 或者 $A \in \Gamma$, 那么和前面的讨论一样可以有 $\vdash \forall v A$, 否则 A 是 $A_i, A_j (i, j < k)$ 通过推理规则 MP 得到的, 设 $A_j = A_i \rightarrow A$, 由归纳假设知 $\Gamma \vdash \forall v A_i, \Gamma \vdash \forall v (A_i \rightarrow A)$, 由公理 $\vdash \forall v (A_i \rightarrow A) \rightarrow (\forall v A_i \rightarrow \forall v A)$ 和分离规则有 $\Gamma \vdash \forall v A_i \rightarrow \forall v A$, 再由分离规则知 $\Gamma \vdash \forall v A$. \square

定理 2.3.3 对于 FC 中的任何公式集合 Γ , 公式 A , 以及不在 Γ 的任意公式里出现的常元 c , 存在不在 A 中出现的变元 v , 使得 $\Gamma \vdash A$, 蕴含 $\Gamma \vdash \forall v A_v^c$, 并且在 Γ 推出 $\forall v A_v^c$ 的演绎中无 c 的出现。

证明: 设由 Γ 推出 A 的演绎序列是 $A_1, A_2, \dots, A_m (= A)$, v 是不在诸 $A_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 中出现的第一个变元。那么我们说 $(A_1)_v^c, (A_2)_v^c, \dots, (A_m)_v^c (= (A)_v^c)$ 是由 Γ 推出 $(A)_v^c$ 的演绎序列。

因为由 $A_1, A_2, \dots, A_m (= A)$ 是 A 的演绎序列, 所以对每个公式 $A_i (i = 1, 2, \dots, m)$ A_i 或者是公理, 或者是 Γ 的一个成员, 或者是应用分离规则通过前面的公式得到的公式。

如果 A_i 是公理, 那么 $(A_i)_v^c$ 也是公理 (公理中的公式是公理模式可以代入任意的公式); 如果 A_i 是 Γ 的一个成员, 那么由于 c 不出现在 Γ 的任意一个公式里, 所以 $(A_i)_v^c = A_i$, 这样 $(A_i)_v^c \in \Gamma$; 如果 A_i 是应用分离规则通过前面的公式得到的公式, 不妨设是应用 $A_j, A_j \rightarrow A_i$ 得到的公式, 那么显然 $(A_i)_v^c$ 是 $(A_j)_v^c, (A_j \rightarrow A_i)_v^c$ 应用分离规则得到的公式。于是 $(A_1)_v^c, (A_2)_v^c, \dots, (A_m)_v^c (= (A)_v^c)$ 是由 Γ 推出 $(A)_v^c$ 的演绎序列。并且这个演绎序列中每个 c 都替换成了 v , 所以序列中没有 c 的出现。 \square

定理 2.3.4 设 Γ 为 FC 中的任一公式集合, A, B 为 FC 中的任意两个公式, 那么

$$\Gamma; A \vdash B \text{ 当且仅当 } \Gamma \vdash A \rightarrow B$$

证明: $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ 蕴含 $\Gamma; A \vdash B$ 很容易证明。

我们看相反的方向。

(1) 当 $A = B$ 的时候。 $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ 显然成立。

(2) 当 B 为公理或者 Γ 的成员时候。我们有 $\Gamma \vdash B$ 。而 $B \rightarrow (A \rightarrow B)$ 是一个公理, 所以我们有 $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ 成立。

(3) 当 B 由公式 C 以及 $C \rightarrow B$ 用分离规则得到, 由归纳假设 $\Gamma \vdash A \rightarrow C, \Gamma \vdash A \rightarrow (C \rightarrow B)$ 成立。又由公理 $(A \rightarrow (C \rightarrow B)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B))$ 得到 $(A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)$, 从而有公式 $A \rightarrow B$ 。于是得到了 $A \rightarrow B$ 以 Γ 为前提的演绎序列。于是 $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ 。 \square

定理 2.3.5 设 Γ 为 FC 中的任一公式集合, A, B 为 FC 中的任意两个公式, 那么

$$\Gamma; A \vdash \neg B \text{ 当且仅当 } \Gamma; B \vdash \neg A$$

证明: 设 $\Gamma; A \vdash \neg B$, 由演绎定理有 $\Gamma \vdash A \rightarrow \neg B$, 而 $(A \rightarrow \neg B) \leftrightarrow (B \rightarrow \neg A)$ 为一个重言式, 从而是一个定理, 即 $\vdash (A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$, 这样的话 $\Gamma \vdash B \rightarrow \neg A$, 从而又由演绎定理知 $\Gamma; B \vdash \neg A$ 。

很容易证明它的逆。 \square

定理 2.3.6 如果 FC 中的公式集合 $\Gamma \cup A$ 是不一致的, 那么 $\Gamma \vdash \neg A$ 。

证明: 由于 $\Gamma \cup A$ 是不一致的, 所以存在公式 B , 使得 $\Gamma \cup A \vdash B$, 并且 $\Gamma \cup A \vdash \neg B$, 由演绎定理知 $\Gamma \vdash A \rightarrow B$, 并且 $\Gamma \vdash A \rightarrow \neg B$, 由于 $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$ 为一个重言式, 所以是定理, 因此得到 $\Gamma \vdash \neg A$ 。 \square

定理 2.3.7 设 Γ 为 FC 中的任一公式集合, A, B 为 FC 中的任意两个公式, 并且变元 v 不在 Γ 的任何公式里面自由出现, 那么 $\Gamma; A \vdash B$ 蕴含 $\Gamma; \forall v A \vdash B$ 和 $\Gamma; \forall v A \vdash \forall v B$ 。

证明: 设 $\Gamma; A \vdash B$, 由演绎定理有 $\Gamma \vdash A \rightarrow B$, 因为变元 v 不在 Γ 的任何公式里面自由出现, 所以由前面的定理知 $\Gamma \vdash \forall v(A \rightarrow B)$, 由公理 5 知 $\Gamma \vdash \forall v A \rightarrow \forall v B$ 。所以 $\Gamma; \forall v A \vdash \forall v B$ 。又由前面的例子知 $\Gamma; \forall v A \vdash \forall B$ 。 \square

定理 2.3.8 设 Γ 为 FC 中的任一公式集合, A, B 为 FC 中的任意两个公式, 并且变元 v 不在 Γ 的任何公式以及公式 B 里面自由出现, 那么由 $\Gamma \vdash \exists v A$ 以及 $\Gamma; A \vdash B$ 可以推出 $\Gamma \vdash B$ 。

证明: 设 $\Gamma; A \vdash B$, 由演绎定理有 $\Gamma \vdash A \rightarrow B$, 所以 $\Gamma \vdash \neg B \rightarrow \neg A, \Gamma \vdash \forall v(\neg B \rightarrow \neg A)$, 进而有 $\Gamma \vdash \forall v \neg B \rightarrow \forall v \neg A$ 以及 $\Gamma \vdash \neg \forall v \neg A \rightarrow \neg \forall v \neg B$ 。这就是 $\Gamma \vdash \exists v A \rightarrow \exists v B$, 由 $\Gamma \vdash \exists v A$, 知道 $\Gamma \vdash \exists v B$, 由于 v 在 B 中没有自由的出现, 所以 $\neg B \rightarrow \forall v \neg B$ 为公理, 于是 $\Gamma \vdash \neg \forall v \neg B \rightarrow B$, 即 $\Gamma \vdash \exists v B \rightarrow B$, 这样有 $\Gamma \vdash B$ 。 \square

定理 2.3.9 (1) $\exists x \neg A(x) \vdash \neg \forall x A(x)$

(2) $\forall x \neg A(x) \vdash \neg \exists x A(x)$

证明: (1) $\exists x \neg A(x) \vdash \neg \forall x A(x)$ 的证明:

1. $\exists x \neg A(x), \neg A(x), \forall x A(x) \vdash \forall x A(x)$
2. $\exists x \neg A(x), \neg A(x), \forall x A(x) \vdash A(x)$
3. $\exists x \neg A(x), \neg A(x), \forall x A(x) \vdash \neg A(x)$
4. $\exists x \neg A(x), \neg A(x) \vdash \neg \forall x A(x)$
5. $\exists x \neg A(x) \vdash \exists x \neg A(x)$
6. $\exists x \neg A(x) \vdash \neg \forall x A(x)$

$\neg \forall x A(x) \vdash \exists x \neg A(x)$ 的证明:

1. $\neg \forall x A(x), \neg \exists x \neg A(x), \neg A(x) \vdash \neg A(x)$
2. $\neg \forall x A(x), \neg \exists x \neg A(x), \neg A(x) \vdash \exists x \neg A(x)$
3. $\neg \forall x A(x), \neg \exists x \neg A(x), \neg A(x) \vdash \neg \exists x \neg A(x)$
4. $\neg \forall x A(x), \neg \exists x \neg A(x) \vdash A(x)$
5. $\neg \forall x A(x), \neg \exists x \neg A(x) \vdash \forall x A(x)$
6. $\neg \forall x A(x), \neg \exists x \neg A(x) \vdash \neg \forall x A(x)$
7. $\neg \forall x A(x) \vdash \exists x \neg A(x)$

(2) $\forall x \neg A(x) \vdash \neg \exists x A(x)$ 的证明:

1. $\forall x \neg A(x), \exists x A(x), A(x) \vdash A(x)$
2. $\forall x \neg A(x), \exists x A(x), A(x) \vdash \forall x \neg A(x)$
3. $\forall x \neg A(x), \exists x A(x), A(x) \vdash \neg A(x)$
4. $\exists x A(x), A(x) \vdash \neg \forall x \neg A(x)$
5. $\exists x A(x) \vdash \neg \forall x \neg A(x)$

$\neg \exists x A(x) \vdash \forall x \neg A(x)$ 的证明:

1. $\neg \exists x A(x), A(x) \vdash A(x)$
2. $\neg \exists x A(x), A(x) \vdash \exists x A(x)$

$$3. \neg \exists x A(x), A(x) \vdash \neg \exists x A(x)$$

$$4. \neg \exists x A(x) \vdash \neg A(x)$$

$$5. \neg \exists x A(x) \vdash \forall x \neg A(x)$$

□

定理 2.3.10 (1) $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \vdash \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$

$$(2) \exists x(A(x) \vee B(x)) \vdash \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$$

证明： $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \vdash \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$ 的证明：

$$1. \forall x(A(x) \wedge B(x)) \vdash A(x) \wedge B(x)$$

$$2. \forall x(A(x) \wedge B(x)) \vdash A(x)$$

$$3. \forall x(A(x) \wedge B(x)) \vdash B(x)$$

$$4. \forall x(A(x) \wedge B(x)) \vdash \forall x A(x)$$

$$5. \forall x(A(x) \wedge B(x)) \vdash \forall x B(x)$$

$$6. \forall x(A(x) \wedge B(x)) \vdash \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$$

$\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \vdash \forall x(A(x) \wedge B(x))$ 的证明：

$$1. \forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \vdash \forall x A(x)$$

$$2. \forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \vdash \forall x B(x)$$

$$3. \forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \vdash A(x)$$

$$4. \forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \vdash B(x)$$

$$5. \forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \vdash A(x) \wedge B(x)$$

$$6. \forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \vdash \forall x(A(x) \wedge B(x))$$

$\exists x(A(x) \vee B(x)) \vdash \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$ 的证明：

$$1. \exists x(A(x) \vee B(x)), A(x) \vee B(x), A(x) \vdash A(x)$$

$$2. \exists x(A(x) \vee B(x)), A(x) \vee B(x), A(x) \vdash \exists x A(x)$$

$$3. \exists x(A(x) \vee B(x)), A(x) \vee B(x), A(x) \vdash \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$$

$$4. \exists x(A(x) \vee B(x)), A(x) \vee B(x), B(x) \vdash B(x)$$

$$5. \exists x(A(x) \vee B(x)), A(x) \vee B(x), B(x) \vdash \exists x B(x)$$

$$6. \exists x(A(x) \vee B(x)), A(x) \vee B(x), B(x) \vdash \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$$

$$7. \exists x(A(x) \vee B(x)), A(x) \vee B(x), B(x) \vdash A(x) \vee B(x)$$

$$8. \exists x(A(x) \vee B(x)), A(x) \vee B(x) \vdash \exists xA(x) \vee \exists xB(x)$$

$$9. \exists x(A(x) \vee B(x)) \vdash \exists xA(x) \vee \exists xB(x)$$

$\exists xA(x) \vee \exists xB(x) \vdash \exists x(A(x) \vee B(x))$ 的证明:

$$1. \exists xA(x) \vee \exists xB(x), \exists xA(x), A(x) \vdash A(x) \vee B(x)$$

$$2. \exists xA(x) \vee \exists xB(x), \exists xA(x), A(x) \vdash \exists x(A(x) \vee B(x))$$

$$3. \exists xA(x) \vee \exists xB(x), \exists xA(x) \vdash \exists x(A(x) \vee B(x))$$

$$4. \exists xA(x) \vee \exists xB(x), \exists xB(x), B(x) \vdash A(x) \vee B(x)$$

$$5. \exists xA(x) \vee \exists xB(x), \exists xB(x), B(x) \vdash \exists x(A(x) \vee B(x))$$

$$6. \exists xA(x) \vee \exists xB(x), \exists xB(x) \vdash \exists x(A(x) \vee B(x))$$

$$7. \exists xA(x) \vee \exists xB(x) \vdash \exists x(A(x) \vee B(x))$$

□

定理 2.3.11 (1) $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \vdash \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$

$$(2) \forall xA(x) \vee \forall xB(x) \vdash \forall x(A(x) \vee B(x))$$

$$(3) \exists x\forall yB(x, y) \vdash \forall y\exists xB(x, y)$$

证明: $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \vdash \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$ 的证明:

$$1. \exists x(A(x) \wedge B(x)), A(x) \wedge B(x) \vdash A(x)$$

$$2. \exists x(A(x) \wedge B(x)), A(x) \wedge B(x) \vdash \exists xA(x)$$

$$3. \exists x(A(x) \wedge B(x)), A(x) \wedge B(x) \vdash B(x)$$

$$4. \exists x(A(x) \wedge B(x)), A(x) \wedge B(x) \vdash \exists xB(x)$$

$$5. \exists x(A(x) \wedge B(x)), A(x) \wedge B(x) \vdash \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$$

$$6. \exists x(A(x) \wedge B(x)) \vdash \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$$

$\forall xA(x) \vee \forall xB(x) \vdash \forall x(A(x) \vee B(x))$ 的证明:

$$1. \forall xA(x) \vee \forall xB(x), \forall xA(x) \vdash A(x)$$

$$2. \forall xA(x) \vee \forall xB(x), \forall xA(x) \vdash A(x) \vee B(x)$$

$$3. \forall xA(x) \vee \forall xB(x), \forall xA(x) \vdash \forall x(A(x) \vee B(x))$$

$$4. \forall xA(x) \vee \forall xB(x), \forall xB(x) \vdash B(x)$$

5. $\forall x A(x) \vee \forall x B(x), \forall x B(x) \vdash A(x) \vee B(x)$
 6. $\forall x A(x) \vee \forall x B(x), \forall x B(x) \vdash \forall x (A(x) \vee B(x))$
 7. $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \vdash \forall x (A(x) \vee B(x))$
- $\exists x \forall y B(x, y) \vdash \forall y \exists x B(x, y)$ 的证明:
1. $\exists x \forall y B(x, y), \forall y B(x, y) \vdash B(x, y)$
 2. $\exists x \forall y B(x, y), \forall y B(x, y) \vdash \exists x B(x, y)$
 3. $\exists x \forall y B(x, y), \forall y B(x, y) \vdash \forall y \exists x B(x, y)$
 4. $\exists x \forall y B(x, y) \vdash \forall y \exists x B(x, y)$

2.4 一阶谓词演算形式系统的语义

一阶谓词演算形式系统的语义是对一阶谓词语言赋予的含义,即对每个个体常元,函词和谓词的指称,以及对变元的指派,对量词和联结词意义的规定。

定义 2.4.1 FC 的一阶语言 $\mathcal{L}(FC)$ 的一个语义是一个结构,该结构包括:

- (1) 非空集合 U , 称为论域或者个体域。
 - (2) 一个称为解释的映射 $I, I: L_a \cup f \cup p \rightarrow U \cup U_f \cup U_p$, 其中 U_f 是 U 上的所有函数符号 (一元, 二元等等) 构成的集合。 U_p 是 U 上的所有关系 (0 元, 1 元等等) 构成的集合。
- 对于任一常元 $a, I(a) \in U$ 。记为 \bar{a} 。
- 对于每一个 n 元函词 $f^{(n)}, I(f^{(n)})$ 为 U 上的一个 n 元函数, 记为 $\bar{f}^{(n)}$, 即 $\bar{f}^{(n)}: U^n \rightarrow U$ 。
- 对于每一个 n 元谓词 $P^{(n)}, I(P^{(n)})$ 为 U 上的一个 n 元关系, 记为 $\bar{P}^{(n)}$, 即 $\bar{P}^{(n)} \subseteq U^n$ 。当 $n = 1$ 时 $\bar{P}^{(1)}$ 为 U 的一个子集, 当 $n = 0$ 时 $\bar{P}^{(0)}$ 为 0 或者 1。

这样的话一个结构包括两个部分, 一个是论域 U , 一个是解释映射 I , 于是用 $\mathcal{U} = \langle U, I \rangle$ 表示这样一个结构。结构的全体用 T 表示。

定义 2.4.2 一阶谓词演算中, 一个指派 (在确定了系统的语义的前提下) 是指一个映射 $s: L_v \rightarrow U$ 。这个映射可以扩展到项的集合 L_t 到 U 的映射。对于任意的项 t

$$\bar{s}(t) = \begin{cases} s(v) & \text{当 } t \text{ 为变元 } v \text{ 时} \\ \bar{a} & \text{当 } t \text{ 为常元 } a \text{ 时} \\ \bar{f}^{(n)} \bar{s}(t_1) \cdots \bar{s}(t_n) & \text{当 } t \text{ 为 } f^{(n)} s(t_1) \cdots s(t_n) \text{ 时} \end{cases}$$

这里的映射 s 与解释 I 是相对独立的, 而 \bar{s} 依赖于 I 。

我们把“公式 A 在结构 \mathcal{U} 和指派 s 下取值真”记为 $\models_{\mathcal{U}} A[s]$, 反之记为 $\not\models_{\mathcal{U}} A[s]$ 。

$\models_{\mathcal{U}} A$ 表示在结构中, 对于一切指派 s , A 为真值 T , 即 $\models_{\mathcal{U}} A[s] \forall s$ 。

$\models_T A$ 或者 $\models A$ 表示公式 A 在任意的结构中都取真值 T 。这时我们说 A 永真。

定义 2.4.3 公式 A 在结构 \mathcal{U} 和指派 s 下取真值 T , 也就是 $\models_{\mathcal{U}} A[s]$ 定义如下:

(1) A 为原子公式 $P^{(n)}t_1 \cdots t_n$ 时

$$\models_{\mathcal{U}} A[s] \text{ 当且仅当 } \langle \bar{s}(t_1), \bar{s}(t_2), \dots, \bar{s}(t_n) \rangle \in \bar{P}^{(n)}$$

(2) A 为公式 $\neg B$ 时

$$\models_{\mathcal{U}} A[s] \text{ 当且仅当 } \not\models_{\mathcal{U}} B[s]$$

(3) A 为公式 $B \rightarrow C$ 时

$$\models_{\mathcal{U}} A[s] \text{ 当且仅当 } \models_{\mathcal{U}} B[s] \text{ 或者 } \models_{\mathcal{U}} C[s]$$

(4) A 为公式 $\forall v B$ 时

$$\models_{\mathcal{U}} A[s] \text{ 当且仅当 对每一个 } d \in U \text{ 有 } \models_{\mathcal{U}} A[s(v|d)]$$

其中 $s(v|d)$ 也是一个指派, 它的定义如下: 对于 L_v 中的任何一个元素 u

$$s(v|d)(u) = \begin{cases} s(u) & \text{当 } u \neq v \\ d & \text{当 } u = v \end{cases}$$

如果使用联结词 \vee, \wedge 和量词 \exists 的时候, 我们可以进一步的定义

$$\models_{\mathcal{U}} B \vee C[s] \text{ 当且仅当 } \models_{\mathcal{U}} B[s] \text{ 或者 } \models_{\mathcal{U}} C[s]$$

$$\models_{\mathcal{U}} B \wedge C[s] \text{ 当且仅当 } \models_{\mathcal{U}} B[s] \text{ 并且 } \models_{\mathcal{U}} C[s]$$

$$\models_{\mathcal{U}} \exists v B[s] \text{ 当且仅当 存在 } d \in U \text{ 使得 } \models_{\mathcal{U}} B[s(v|d)]$$

很容易的证明 $\models_{\mathcal{U}} \exists v B[s]$ 当且仅当 $\models_{\mathcal{U}} \neg \forall v \neg B[s]$ 。

因为 $\models_{\mathcal{U}} \neg \forall v \neg B[s]$ 当且仅当 $\models_{\mathcal{U}} \forall v \neg B[s]$ 即对于任意的 $d \in U$, $\models_{\mathcal{U}} \neg B[s(v|d)]$ 是不对的。

也就是对于任意的 $d \in U$, $\models_{\mathcal{U}} B[s(v|d)]$ 是不对的。也就是对于任意的 $d \in U$, $\models_{\mathcal{U}} B[s(v|d)]$ 都不成立是不对的。所以存在一个 $d \in U$, 使得 $\models_{\mathcal{U}} B[s(v|d)]$, 从而 $\models_{\mathcal{U}} \exists v B$ 。

例 2.4.1 考虑以下的结构, 它赋予只含有一个函词、一个谓词和一个常元的一阶谓词系统。

$U = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$, 即自然数集合。

$\bar{P}^{(2)}$ 为 N 上的 leq 关系。

$\bar{f}_1^{(1)}$ 为 N 上的后继函数 $\bar{f}_1^{(1)}(x) = x + 1$ 。

$\bar{a}_1 = 0$ 。

我们说 $\models P_1^{(2)} a_1 f_1^{(1)} v_1$ 。但是 $\models P_1^{(2)} f_1^{(1)} v_1 a_1[s]$ 对任何指派 s 都不成立。我们还有 $\models \forall v_1 P_1^{(2)} a_1 v_1$ 。

在证明 FC 中的公理 α 在 T 中的所有语义结构里均为真。即 α 永真或者 $\models_T \alpha$ 。公理 1,2,3, 显然成立。

现在说明公理 4。对于任何结构 \mathcal{U} 和指派 s , 有 $\models_{\mathcal{U}} \forall v A[s]$ 蕴含 $\models_{\mathcal{U}} A_t^v[s]$, 其中 t 对于 v 是可代入的。因为 $\models_{\mathcal{U}} \forall v A[s]$ 意味着对于任意的 $d \in U$, 有 $\models_{\mathcal{U}} A[s(v|d)]$, 令 $d = \bar{s}(t)$, 于是 $\models_{\mathcal{U}} \forall v A[s]$ 蕴含 $\models_{\mathcal{U}} A[s(v|\bar{s}(t))]$, 而 $\models_{\mathcal{U}} A[s(v|\bar{s}(t))]$ 就是 $\models_{\mathcal{U}} A_t^v[s]$, 如果 t 对于 v 是可代入的话。于是 $\models_{\mathcal{U}} \forall v A[s]$ 蕴含 $\models_{\mathcal{U}} A_t^v[s]$, 所以 $\models_{\mathcal{U}} (\forall v A \rightarrow A_t^v)[s]$ 。

现在证明公理 5。为了证明 $\forall v(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall v A \rightarrow \forall v B)$, 只需证明由 $\models_{\mathcal{U}} \forall v(A \rightarrow B)[s]$ 和 $\models_{\mathcal{U}} \forall v A[s]$ 可以推出 $\models_{\mathcal{U}} \forall v B[s]$ 成立即可。设 $d \in D$, 那么 $\models_{\mathcal{U}} A \rightarrow B[s(v|d)]$, 所以 $\models_{\mathcal{U}} A[s(v|d)]$ 或者 $\models_{\mathcal{U}} B[s(v|d)]$ 。因为 $\models_{\mathcal{U}} \forall v A[s]$, 所以 $\models_{\mathcal{U}} A[s(v|d)]$, 从而 $\models_{\mathcal{U}} B[s(v|d)]$ 对 $\forall d \in D$ 。所以 $\models_{\mathcal{U}} \forall v B[s]$ 。

现在证明公理 6。为了证明 $A \rightarrow \forall v A$ 永真, 只需证明对于任意的 \mathcal{U} 和 s , 只要 $\models_{\mathcal{U}} A[s]$ 就有 $\models_{\mathcal{U}} \forall v A[s]$ 。

设 $\models_{\mathcal{U}} A[s]$, d 为 U 中的任意一个元素, 由于 A 中没有自由出现的 v , 指派 v 是 U 中的什么元素对公式 A 没有影响, 所以 $\models_{\mathcal{U}} A[s(v|d)]$, 从而 $\models_{\mathcal{U}} \forall v A[s]$ 。

2.5 关于 FC 的重要元定理

2.5.1 FC 的合理性

定理 2.5.1 对于 FC 中的任意一个公式 A , 如果 $\vdash_{FC} A$, 那么 $\models_T A$ 。

证明: 对于 FC 中的, 每一个公理 α , 均有 $\models_T \alpha$, 我们可以证明推理规则 r_{mp} 的保真性, 即从 $\models_T A$ 和 $\models_T A \rightarrow B$, 可以推出 $\models_T B$ 。

因为 $\models_T A$ 和 $\models_T A \rightarrow B$, 所以对于任意的结构 \mathcal{U} 和指派 $s: L_v \rightarrow U$, 均有 $\models_{\mathcal{U}} A[s]$ 和 $\models_{\mathcal{U}} A \rightarrow B[s]$, 而由 $\models_{\mathcal{U}} A \rightarrow B[s]$ 的定义知或者 $\models_{\mathcal{U}} A[s]$ 或者 $\models_{\mathcal{U}} B[s]$ 。由于 $\models_{\mathcal{U}} A[s]$ 成立, 所以必有 $\models_{\mathcal{U}} B[s]$ 。

另外, 我们可以归纳的证明: 由 $\vdash_{FC} A$ 可以推出 $\models_T A$ 。□

定理 2.5.2 对于 FC 中的任意一个公式集合 Γ , 任意一个公式 A , 如果 $\Gamma \vdash_{FC} A$, 那么 $\Gamma \models_T A$ (使 Γ 为真的解释也使 A 为真)。

证明: 设 $\Gamma \vdash_{FC} A$, 我们对 A 的演绎长度用归纳法。如果 A 是公理, 那么上面的定理说明

$\vdash_T A$, 从而 $\Gamma \vdash_T A$ 。当 $A \in \Gamma$ 时, 显然 $\Gamma \vdash_T A$ 。

当 A 是由 B 和 $B \rightarrow A$ 推出的时候, 由于 B 和 $B \rightarrow A$ 具有比 A 更短的演绎。所以 $\Gamma \vdash_T B \rightarrow A, \Gamma \vdash_T B$, 从而 $\Gamma \vdash_T A$ 。 \square

定理 2.5.3 对于 FC 中的任意公式 A, B , 若 $\vdash A \rightarrow B$ 并且 $\vdash B \rightarrow A$, 那么 A, B 逻辑等价。即 $A \Leftrightarrow B$ 。

由上面的讨论知 $\vdash_T A \rightarrow B, \vdash_T B \rightarrow A$, 从而必有 $\vdash_T A, \vdash_T B$ 。

作为这个; 定理的一个推论, 我们有

定理 2.5.4 设 A 为 FC 中的任一公式, A' 是 A 的改名式, 并且 A' 改用的变元在 A 中无任何出现, A 与 A' 等价。即 $A \Leftrightarrow A'$ 。

定理 2.5.5 对于 FC 中的任意公式 A, B , 若 $\vdash A \rightarrow B$ 并且 $\vdash B \rightarrow A$, 并且 A 为公式 C 的子公式, D 为将公式 C 中的子公式 A 的若干出现替换为 B 得到的公式, 那么 $C \Leftrightarrow D, D \Leftrightarrow C$ 。

定理 2.5.6 FC 是一致的, 即不存在公式 A , 使得 $\vdash A$ 并且 $\vdash \neg A$ 。

如果那样的话, 对于任意的一个结构 \mathcal{U} , 有 $\models_{\mathcal{U}} A$ 和 $\models_{\mathcal{U}} \neg A$, 矛盾。

定理 2.5.7 FC 不是完全的, 即存在 FC 的公式 A , 使得 $\vdash A$ 和 $\vdash \neg A$ 都不成立。

证明: 对于原子公式 $P_1^{(1)}v_1$, $\vdash P_1^{(1)}v_1$ 和 $\vdash \neg P_1^{(1)}v_1$ 都不成立。否则将有 $\vdash_T P_1^{(1)}v_1$ 或者 $\vdash_T \neg P_1^{(1)}v_1$ 之一成立。例如 $\vdash_T P_1^{(1)}v_1$ 成立, 那么做一个结构 $\mathcal{U} = \langle U, I \rangle$, 使得 $I(P_1^{(1)}) \neq \phi$, 并且 $s(v_1) \notin I(P_1^{(1)})$, 于是 $\models_{\mathcal{U}} P_1^{(1)}v_1$ 。同理 $\vdash \neg P_1^{(1)}v_1$ 也不成立。 \square

反之, 上述定理说明如果存在 FC 的公式 A , 使得 $\Gamma \vdash A$ 和 $\Gamma \vdash \neg A$, 也就是 Γ 不一致, 那么 Γ 完全。所以有下面的定理:

定理 2.5.8 FC 的不一致的扩充必是完全的, 但至少有一个公式不是 FC 的一致扩充的定理。特别的, 当公式集合 Γ 不一致的时候, 扩充 $FC \cup \Gamma$ 是完全的; 当 Γ 一致的时候, 至少有一个公式 A 不是 $FC \cup \Gamma$ 的定理, 即 $\Gamma \not\vdash A$ 。

如果扩充是一致的, 那么就不是完全的, 所以如果 $\Gamma \vdash A$ 那么 $\Gamma \not\vdash \neg A$, 所以至少有一个公式不是一致扩充的定理。下面的说法顺理成章。当 Γ 一致的时候, 扩充 $FC \cup \Gamma$ 也一致, 所以有一个公式不是 (演绎) 定理。

这里, FC 的不一致的扩充指的是公式集合 $Th(FC \cup \Gamma)$ 不一致, 但是这样的话就有公式 B , 使得 $Th(FC \cup \Gamma) \vdash B, Th(FC \cup \Gamma) \vdash \neg B$, 由于 $Th(FC \cup \Gamma)$ 中的每个公式都有以 Γ 为前提的演绎, 所以 $\Gamma \vdash B, \Gamma \vdash \neg B$, 这反而说 Γ 不一致。

什么逻辑,逻辑就是要研究人们的思维规律。将人们日常的思维形式化,科学化。从 ND 这个系统就足以看到形式化和符号化的过程。而 PC 是一个简捷的系统,数学中强调的是简捷。用最少的语言完成最多的功能。所以看起来 PC 在证明过程中要麻烦一些,多走了几个圈子。这也是很正常的,因为他强调的是系统性。

2.5.2 FC 的完备性和其他

定义 2.5.1 FC^* 是 FC 的一个扩充,当且仅当, FC^* 是一个通过改变和扩大 FC 的公理集而得的形式系统,并且使得 FC 的定理仍保持为 FC^* 的定理。

定义 2.5.2 对某个一阶语言来说,所谓一阶系统是指 FC 的一个扩充。

定义 2.5.3 一阶系统 S 是一致的,如果不存在任何合式公式 A ,使得 A 和 $\neg A$ 皆为 S 的定理。

定义 2.5.4 一阶系统 S 是完全的,如果对于每个闭公式 A ,或者 $\vdash A$,或者 $\vdash \neg A$ 。

据此,显然可知 FC 是不完全的。

命题 2.5.1 令 S 是一致的一阶系统, A 为一闭公式且不是 S 的定理。如果 S^* 是通过对 S 补加 $\neg A$ 为新公理而得的扩充,那么 S^* 也一致。

命题 2.5.2 令 S 是一致的一阶系统,那么 S 存在完全的一致扩充。

命题 2.5.3 如果 S 是 FC 的一致扩充,那么 S^+ 也是一致的。

命题 2.5.4 如果 S 是 FC 的一致扩充,那么存在 (L) 的一个解释, S 的每个定理对该解释皆真。

前三个引理的证明比较简单,引理 2.32 的证明十分复杂,但是它却又是完备性定理证明的关键。

定理 2.5.9 对于 FC 的任何公式 A 有,如果 $\models_T A$,那么 $\vdash A$ 。

定理 2.5.10 对于 FC 的任一公式集合 Γ 和任一公式 A 有,如果 $\Gamma \models_T A$,那么 $\Gamma \vdash A$ 。

这里只要 $\Gamma = \phi$,这一定理就变成了上面的定理。

设 Γ 是一个一致的公式集合(否则必有 Γ 完全,从而 $\Gamma \vdash A$)。设 \mathcal{L}' 是一阶语言 \mathcal{L} 中新添入可数多个常元 c_1, c_2, \dots 所得到的新的一阶语言。

命题 2.5.5 那么 Γ 作为一阶语言 \mathcal{L}' 中的公式集合也是一致的。

证明: 否则, 设 Γ 在 \mathcal{L}' 中不一致, 并且 Γ 推出 α 和 $\neg\alpha$ 的演绎分别是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l (= \alpha)$, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m (= \neg\alpha)$, 这些公式当中至多包含有限多个新的常元。由定理 3.3 知在 \mathcal{L}' 中存在不在 α 中出现的变元 v (只要不出现在 $\Gamma \vdash \alpha$ 的证明序列中即可), 有 $\Gamma \vdash \forall v \alpha_v^c$ 。同理在 \mathcal{L}' 中存在不在 $\neg\alpha$ 中出现的变元 v (只要不出现在 $\Gamma \vdash \neg\alpha$ 的证明序列中即可), 有 $\Gamma \vdash \forall v \neg\alpha_v^c$ 。由于这两个证明序列只有有限多个变元, 所以必有一个变元 v 使得 $\Gamma \vdash \forall v \alpha_v^c$ 和 $\Gamma \vdash \forall v \neg\alpha_v^c$ 同时成立。于是 $\Gamma \vdash \alpha_v^c$ 和 $\Gamma \vdash \neg\alpha_v^c$ 同时成立。如果 α_v^c 中还有新的常元出现继续实施这一过程。最终我们证明在 \mathcal{L} 中有 $\Gamma \vdash \alpha_{v_1, v_2, \dots, v_k}^{c_1, c_2, \dots, c_k}$ 和 $\Gamma \vdash \neg\alpha_{v_1, v_2, \dots, v_k}^{c_1, c_2, \dots, c_k}$ 同时成立。这与 Γ 在 \mathcal{L} 中一致矛盾。

设公式和变元的序偶排序为 $\langle \alpha_1, u_1 \rangle, \langle \alpha_2, u_2 \rangle, \langle \alpha_3, u_3 \rangle, \langle \alpha_4, u_4 \rangle, \dots$ 。 θ_1 是 $\neg\forall u_1 \alpha_1 \rightarrow \neg\alpha_{c_1}^{u_1}$ (c_1 是 α_1 中不出现的第一个新常元)。 θ_2 是 $\neg\forall u_2 \alpha_2 \rightarrow \neg\alpha_{c_2}^{u_2}$ (c_2 是 α_2 和 θ_1 中不出现的第一个新常元)。 θ_3 是 $\neg\forall u_3 \alpha_3 \rightarrow \neg\alpha_{c_3}^{u_3}$ (c_3 是 α_3 和 θ_1, θ_2 中不出现的第一个新常元)。等等。。。

令 $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots\}$ 。

命题 2.5.6 $\Gamma \cup \Theta$ 是一致的。

证明: 假设 $\Gamma \cup \Theta$ 不一致, 那么存在公式 A 使得 $\Gamma \cup \Theta \vdash A$ 和 $\Gamma \cup \Theta \vdash \neg A$ 成立。由于这两个演绎的长度有限, 所以必存在有限的公式集合 $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{m+1}\} \subseteq \Theta$ 使得 $\Gamma \cup \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{m+1}\}$ 不一致。不妨假定这里的 m 是最小的。即 $\Gamma \cup \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$ 一致, 所以由定理 3.6 知 $\Gamma \cup \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\} \vdash \neg\theta_{m+1}$ 。设 $\theta_i = \neg\forall u_i \alpha_i \rightarrow \neg\alpha_{c_i}^{u_i}$, 即 $\Gamma \cup \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\} \vdash \neg(\neg\forall u_{m+1} \alpha_{m+1} \rightarrow \neg\alpha_{c_{m+1}}^{u_{m+1}})$ 。可以推得 $\Gamma \cup \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\} \vdash \neg\forall u_{m+1} \alpha_{m+1}$ 。 $\Gamma \cup \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\} \vdash \alpha_{c_{m+1}}^{u_{m+1}}$ 。(这是因为 $\neg(\neg\forall u_{m+1} \alpha_{m+1} \rightarrow \neg\alpha_{c_{m+1}}^{u_{m+1}}) \vdash \neg\forall u_{m+1} \alpha_{m+1}$ 和 $\neg(\neg\forall u_{m+1} \alpha_{m+1} \rightarrow \neg\alpha_{c_{m+1}}^{u_{m+1}}) \vdash \alpha_{c_{m+1}}^{u_{m+1}}$ 都是定理)。

由 $\Gamma \cup \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\} \vdash \alpha_{c_{m+1}}^{u_{m+1}}$ 和定理 3.3 知 $\Gamma \cup \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\} \vdash \forall u_{m+1} \alpha_{m+1}$ 。这说明 $\Gamma \cup \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$ 不一致, 矛盾。所以 $\Gamma \cup \Theta$ 是一致的。□

扩充 $\Gamma \cup \Theta$ 为公式集合 Δ 如下。设 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ 是全体公式的一个枚举, 令 $\Delta_0 = \Gamma \cup \Theta$,

$$\Delta_{n+1} = \begin{cases} \Delta_n \cup \{\alpha_n\} & \text{当 } \Delta_n \vdash \alpha_n \\ \Delta_n \cup \{\neg\alpha_n\} & \text{当 } \Delta_n \not\vdash \alpha_n \end{cases}$$

$$\Delta = \cup_{i=0}^{\infty} \Delta_i$$

命题 2.5.7 Δ 是一致的、完全的并且对于任意公式 α , $\Delta \vdash \alpha$ 当且仅当 $\alpha \in \Delta$ 。

可以参看命题逻辑的证明。

我们构造一个结构 $\mathcal{U}^* = \langle U^*, I^* \rangle$ 。 U^* 是 \mathcal{L} 中所有项的集合, 在 I^* 下, 对于任意函数符号 f 和常元 c , $f\bar{t}_1 \cdots \bar{t}_n$ 就是 $ft_1 \cdots t_n$

\bar{c} 就是 c 。而对任意的谓词符号 $P: \langle \bar{t}_1 \cdots, \bar{t}_n \rangle \in \bar{P}$ 当且仅当 $Pt_1 \cdots t_n \in \Delta$ 。令指派 s^* 如下 $s^*(v) = v$ 对于任意变元 v 成立。可以证明 $\bar{s}^*(t) = t$ 对于任意的项 t 成立。我们证明

$$\models_{\mathcal{U}^*} \alpha[s^*] \text{ 当且仅当 } \alpha \in \Delta$$

对 α 的结构用归纳法。(1) α 为原子公式 $Pt_1 \cdots t_n$ 时, $\models_{\mathcal{U}^*} \alpha[s^*]$ 当且仅当 $\langle \bar{t}_1 \cdots, \bar{t}_n \rangle \in \bar{P}$ 当且仅当 $Pt_1 \cdots t_n \in \Delta$ 。

(2) α 为公式 $\neg\beta$ 时, $\models_{\mathcal{U}^*} \alpha[s^*]$ 当且仅当 $\not\models_{\mathcal{U}^*} \beta[s^*]$ 当且仅当 $\beta \notin \Delta$ 当且仅当 $\neg\beta \in \Delta$ 。

(3) α 为公式 $\beta \rightarrow \gamma$ 时, $\models_{\mathcal{U}^*} \alpha[s^*]$ 当且仅当 $\models_{\mathcal{U}^*} \beta[s^*]$ 或者 $\models_{\mathcal{U}^*} \gamma[s^*]$ 当且仅当 $\beta \notin \Delta$ 或者 $\gamma \in \Delta$ 当且仅当 $\neg\beta \in \Delta$ 或者 $\gamma \in \Delta$ 当且仅当 $\Delta \vdash \neg\beta$ 或者 $\Delta \vdash \gamma$ 当且仅当 $\Delta \vdash \beta \rightarrow \gamma$ 当且仅当 $\beta \rightarrow \gamma \in \Delta$

(4) α 为公式 $\forall v\beta$ 时, $\models_{\mathcal{U}^*} \alpha[s^*]$ 蕴含 $\models_{\mathcal{U}^*} \beta[s^*(v|c)]$ (这里的 c 取那个特殊的 c , 不在 β 中出现), 于是蕴含 $\models_{\mathcal{U}^*} \beta_c^v[s^*]$ 蕴含 $\beta_c^v \in \Delta$ 蕴含 $\neg\beta_c^v \notin \Delta$ 蕴含 $\neg\forall v\beta \notin \Delta$ (因为 $\neg\forall v\beta \rightarrow \neg\beta_c^v \in \Delta$) 蕴含 $\forall v\beta \in \Delta$ 。

反之 $\forall v\beta \in \Delta$ 蕴含 $\beta_d^v \in \Delta$ (对任意的 d 成立, 因为 $\forall v\beta \rightarrow \beta_d^v$ 是一个公理), 从而 $\models_{\mathcal{U}^*} \beta_d^v[s^*]$ 从而 $\models_{\mathcal{U}^*} \beta[s^*(v|d)]$ 从而 $\models_{\mathcal{U}^*} \forall v\beta[s^*]$ 。

正文待续.....

Chapter 3

真值和演绎

3.1 唯一阅读定理

这一小节的基本内容是引理 4.1 和定义 1.5 以及定义 1.6。引理保证一阶语言 L_1 中出现的公式和项只能用唯一的方法解读,它是归纳论证的基础。

1.1 设 A 是一个集合,由 A 中元素组成的长度为 n 的序列是一个从集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 到 A 的映射。 i 的象称为序列的第 i 项。对应于 $n = 0$ 的是空序列。长度为 1 的序列可以看成是 A 的元素。

长度为 n 的序列也可以写成这种形式: $a_1, \dots, a_i, \dots, a_n$, 其中 a_i 是其第 i 项。数 i 称为项 a_i 的指标。如果 $P = (a_1, \dots, a_n)$ 和 $Q = (b_1, \dots, b_m)$ 是两个序列,他们的拼接 PQ 是长度为 $n + m$ 的序列 $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$, 若 $i \leq n$, 则其第 i 项是 a_i , 若 $n + 1 < i \leq n + m$, 第 i 项是 b_{i-n} 。类似地,我们可以定义有限个序列的拼接。

序列 Q 在 P 中的一个出现是指序列 P 的一个拼接表示 P_1QP_2 。用序列 R 替换 Q 在 P 中的那个出现就得到序列 P_1RP_2 。

设 Π^+, Π^- 是集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的两个互不相交的子集。映射 $c: \Pi^+ \rightarrow \Pi^-$ 称为括号映射,如果它是双射并且满足:

1. 对任意的 $i \in \Pi^+$, 有 $c(i) > i$;
2. 对任意的 $i, j, j \in [i, c(i)]$ 当且金当 $c(j) \in [i, c(i)]$ 。

引理 3.1.1 给定集合 Π^+ 和 Π^- , 如果括号映射存在, 那么它是唯一的。

证明: 令 $\epsilon: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ 。 ϵ 对 Π^+ 中的元素取 1, 对 Π^- 中的元素取 -1, 其他的元素取 0。我们说, 对任意的 $i \in \Pi^+$, 任意的括号映射 $c: \Pi^+ \rightarrow \Pi^-$ 和任意满足 $1 \leq k \leq c(i) - i$

的正整数 k

$$\sum_{j=i}^{c(i)} \epsilon(j) = 0, \quad \sum_{j=i}^{c(i)-k} \epsilon(j) > 0.$$

□

通过这两个关系式,马上可以证明引理是成立的,因为只要 $c: \Pi^+ \rightarrow \Pi^-$ 是一个括号映射,那么必有: $c(i)$ 是满足 $l > i$ 并且 $\sum_{j=i}^l \epsilon(j) = 0$ 的最小的 l 。

第一个关系式区间 $[i, c(i)]$ 中出现的 Π^+ 和 Π^- 中的元素是成对出现的

3.2 命题逻辑部分

习题 3.2.1 在 ND 中证明 $\vdash ((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A) \leftrightarrow B$

证明：只需证明 $\vdash ((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A) \rightarrow B$ 和 $\vdash B \rightarrow ((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A)$ 。

对 $\vdash B \rightarrow ((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A)$, 只需要证明

$B \vdash (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A$.

而这又变成需要证明

$B \vdash (A \leftrightarrow B) \rightarrow A$ 和 $B \vdash A \rightarrow (A \leftrightarrow B)$.

对 $B \vdash (A \leftrightarrow B) \rightarrow A$, 可以给出证明:

1. $B \square (A \leftrightarrow B) \vdash A \leftrightarrow B$ 公理 (\in)
2. $B \square (A \leftrightarrow B) \vdash B \rightarrow A$ 等价消除 $\leftrightarrow -$
3. $B \square (A \leftrightarrow B) \vdash B$ 公理 (\in)
4. $B \square (A \leftrightarrow B) \vdash A$ (2) 和 (3) 用 ($\rightarrow -$)
5. $B \vdash (A \leftrightarrow B) \rightarrow A$ (4) 用 ($\rightarrow +$)

对 $B \vdash A \rightarrow (A \leftrightarrow B)$, 给出证明如下:

1. $B, A \vdash A$ 公理 (\in)
2. $B, A, B \vdash A$ 对 (1) 用假设引入规则 ($+$)
3. $B, A \vdash B \rightarrow A$ 对 (2) 用 ($\rightarrow +$)
4. $B, A \vdash B$ 公理 (\in)
5. $B, A, A \vdash B$ 对 (4) 假设引入规则 ($+$)
6. $B, A \vdash A \rightarrow B$ 对 (5) 用 ($\rightarrow +$)
7. $B, A \vdash A \leftrightarrow B$ 对 (3) 和 (6) 用 ($\leftrightarrow +$)
8. $B \vdash A \rightarrow (A \leftrightarrow B)$ 对 (7) 用 ($\rightarrow +$)

对于 $\vdash ((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A) \rightarrow B$ 只需要证明

$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A \vdash B$

只需证明

$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, A \vdash B$ 和 $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A \vdash B$

对于 $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, A \vdash B$ 证明如下:

1. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, A \vdash A$ 公理 (ϵ)
2. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, A \vdash (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A$ 公理 (ϵ)
3. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, A \vdash A \rightarrow (A \leftrightarrow B)$ 对 (2) 用 $(\leftrightarrow -)$
4. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, A \vdash A \leftrightarrow B$ 对 (1) 和 (3) 用 $(\rightarrow -)$
5. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, A \vdash A \rightarrow B$ 对 (4) 用 $(\leftrightarrow -)$
6. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, A \vdash B$ 对 (1) 和 (5) 用 $(\rightarrow -)$

对于 $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A \vdash B$ 证明如下:

1. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A \vdash \neg A$ 公理 (ϵ)
2. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A, A \vdash \neg A$ 对 (1) 假设引入规则 (+)
3. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A, A \vdash A$ 公理 (ϵ)
4. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A, A \vdash B$ 对 (2) 和 (3) 用 $(\neg -)$
5. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A \vdash A \rightarrow B$ 对 (4) 用 $(\rightarrow +)$
6. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A, B \rightarrow A \vdash A \rightarrow B$ 对 (5) 假设引入规则 (+)
7. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A, B \rightarrow A \vdash B \rightarrow A$ 公理 (ϵ)
8. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A, B \rightarrow A \vdash A \leftrightarrow B$ 对 (6) 和 (7) 用 $(\leftrightarrow +)$
9. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A, B \rightarrow A \vdash (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A$ 公理 (ϵ)
10. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A, B \rightarrow A \vdash (A \leftrightarrow B) \rightarrow A$ 对 (9) 用 $(\leftrightarrow -)$
11. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A, B \rightarrow A \vdash A$ 对 (8) 和 (10) 用 $(\rightarrow -)$
12. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A, B \rightarrow A \vdash \neg A$ 公理 (ϵ)
13. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A \vdash \neg(B \rightarrow A)$ 对 (11) 和 (12) 用 $(\neg +)$
14. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A, \neg B \vdash \neg(B \rightarrow A)$ 对 (13) 用 (+)
15. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A, \neg B \vdash \neg B$ 公理 (ϵ)
16. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A, \neg B, B \vdash \neg B$ 对 (15) 用 (+)
17. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A, \neg B, B \vdash B$ 公理 (ϵ)

18. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A, \neg B, B \vdash A$ 对 (16) 和 (17) 用 $(\neg-)$

19. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A, \neg B \vdash B \rightarrow A$ 对 (18) 用 $(\rightarrow +)$

20. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A \vdash \neg\neg B$ 对 (14) 和 (19) 用 $(\neg+)$

21. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A \vdash B$ 对 (20) 用 $(\neg\neg-)$

3.3 谓词逻辑部分

习题 3.3.1 设 A, B 为 FC 中的任意公式, 变元 v 在公式 A 中无自由出现, 证明:

$$(1) \vdash (A \rightarrow \exists v B) \rightarrow \exists v(A \rightarrow B)$$

$$(2) \vdash \exists v(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \exists v B)$$

$$(3) \vdash (\forall v B \rightarrow A) \rightarrow \exists v(B \rightarrow A)$$

$$(4) \vdash \exists v(B \rightarrow A) \rightarrow (\forall v B \rightarrow A)$$

证明: (1) $\vdash (A \rightarrow \exists v B) \rightarrow \exists v(A \rightarrow B)$

$$1. \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$$2. (A \rightarrow B) \rightarrow \exists v(A \rightarrow B)$$

$$3. \neg A \rightarrow \exists v(A \rightarrow B)$$

$$4. B \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$$5. \neg(A \rightarrow B) \rightarrow \neg A$$

$$6. \forall v(\neg(A \rightarrow B) \rightarrow \neg A)$$

$$7. \forall v \neg(A \rightarrow B) \rightarrow \forall v \neg A$$

$$8. \neg \forall v \neg A \rightarrow \neg \forall v \neg(A \rightarrow B)$$

$$9. \exists v A \rightarrow \exists v(A \rightarrow B)$$

$$10. \vdash (A \rightarrow \exists v B) \rightarrow \exists v(A \rightarrow B)$$

习题 3.3.2 设 s 为一个指派 t 和 t' 为 FC 中的项, A 为 FC 的公式, 对 t 和 A 的构成归纳证明:

$$(1) \bar{s}(t_{t'}^v) = \overline{s(v|\bar{s}(t'))}(t)$$

$$(2) \models_T A_t^v[s] \text{ 当且仅当 } \models_T A[s(v|\bar{s}(t))]$$

证明: (1) 当 $t = a$ 时, $\bar{s}(t_{t'}^v) = \bar{s}(a_{t'}^v) = \bar{s}(a) = I(a)$; $\overline{s(v|\bar{s}(t'))}(t) = \overline{s(v|\bar{s}(t'))}(a) = I(a)$

$$\text{当 } t = x \text{ 时, } \bar{s}(x_{t'}^v) = \bar{s}(x) = s(x); \overline{s(v|\bar{s}(t'))}(x) = s(v|\bar{s}(t'))(x) = s(x)$$

$$\text{当 } t = v \text{ 时, } \bar{s}(t_{t'}^v) = \bar{s}(v_{t'}^v) = \bar{s}(t'); \overline{s(v|\bar{s}(t'))}(t) = \overline{s(v|\bar{s}(t'))}(v) = s(v|\bar{s}(t'))(v) = \bar{s}(t')$$

$$\text{当 } t = f(t_1, t_2, \dots, t_n) \text{ 时, } \bar{s}(t_{t'}^v) = \bar{s}(f(t_{1_{t'}^v}, t_{2_{t'}^v}, \dots, t_{n_{t'}^v})) = \bar{f}(\bar{s}(t_{1_{t'}^v}), \bar{s}(t_{2_{t'}^v}), \dots, \bar{s}(t_{n_{t'}^v}));$$

$$\overline{s(v|\bar{s}(t'))}(t) = \overline{s(v|\bar{s}(t'))}(f(t_1, t_2, \dots, t_n)) = \bar{f}(\overline{s(v|\bar{s}(t'))}(t_1), \overline{s(v|\bar{s}(t'))}(t_2), \dots, \overline{s(v|\bar{s}(t'))}(t_n))$$

由归纳假设知, $\bar{s}(t_{1_{t'}}^v) = \overline{s(v|\bar{s}(t'))}(t_1)$, $\bar{s}(t_{2_{t'}}^v) = \overline{s(v|\bar{s}(t'))}(t_2)$, \dots , $\bar{s}(t_{n_{t'}}^v) = \overline{s(v|\bar{s}(t'))}(t_n)$

所以有 $\bar{s}(t_{t'}^v) = \overline{s(v|\bar{s}(t'))}(t)$

(2) $\models_T A_t^v[s]$ 当且仅当 $\models_T A[s(v|\bar{s}(t))]$

当 $A = P(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 时, $\models_T A_t^v[s]$ 当且仅当 $\models_T (P(t_1, t_2, \dots, t_n))_t^v[s]$ 当且仅当 $\models_T (P(t_{1_t}^v, t_{2_t}^v, \dots, t_{n_t}^v))[s]$ 当且仅当 $(\bar{s}(t_{1_t}^v), \bar{s}(t_{2_t}^v), \dots, \bar{s}(t_{n_t}^v)) \in \bar{P}$ 当且仅当 $(\overline{s(v|\bar{s}(t))}(t_1), \overline{s(v|\bar{s}(t))}(t_2), \dots, \overline{s(v|\bar{s}(t))}(t_n)) \in \bar{P}$ 当且仅当 $\models_T (P(t_1, t_2, \dots, t_n))[s(v|\bar{s}(t))]$ 当且仅当 $\models_T A[s(v|\bar{s}(t))]$

当 $A = \neg B$ 时, $\models_T A_t^v[s]$ 当且仅当 $\models_T \neg B_t^v[s]$ 当且仅当 $\not\models_T B_t^v[s]$ 当且仅当 $\not\models_T B[s(v|\bar{s}(t))]$ 当且仅当 $\models_T \neg B[s(v|\bar{s}(t))]$ 当且仅当 $\models_T A[s(v|\bar{s}(t))]$

当 $A = B \rightarrow C$ 时, $\models_T A_t^v[s]$ 当且仅当 $\models_T (B \rightarrow C)_t^v[s]$ 当且仅当 $\models_T (B_t^v \rightarrow C_t^v)[s]$ 当且仅当 $\not\models_T B_t^v[s]$ 或者 $\models_T C_t^v[s]$ 当且仅当 $\not\models_T B[s(v|\bar{s}(t))]$ 或者 $\models_T C[s(v|\bar{s}(t))]$ 当且仅当 $\not\models_T (B \rightarrow C)[s(v|\bar{s}(t))]$ 当且仅当 $\models_T A[s(v|\bar{s}(t))]$

当 $A = \forall x B$ 时, $\models_T A_t^v[s]$ 当且仅当 $\models_T (\forall x B)_t^v[s]$ 当且仅当 $\models_T \forall x B_t^v[s]$ 此时, t 中没有 x 的出现, 否则不可代入, 而 $\models_T \forall x B_t^v[s]$ 当且仅当对任意的 $d \in U$, $\models_T B_t^v[s(x|d)]$ 当且仅当对任意的 $d \in U$, $\models_T B[s(x|d)(v|\overline{s(x|d)}(t))]$ 当且仅当对任意的 $d \in U$, $\models_T B[s(x|d)(v|\bar{s}(t))]$ (这是由于 x 不在 t 中出现, 所以 $\overline{s(x|d)}(t)$ 就是 $\bar{s}(t)$) 当且仅当对任意的 $d \in U$, $\models_T B[s(v|\bar{s}(t))(x|d)]$ 当且仅当 $\models_T \forall x B[s(v|\bar{s}(t))]$ 当且仅当 $\models_T A[s(v|\bar{s}(t))]$

习题 3.3.3 将“每个作家都写过作品, 有的作家没写过小说, 所以有的作品不是小说”表示成 FC 中的符号串 A, B, C 。并证明 $\{A, B\} \vdash C$ 。

证明: $A = (\forall x)(\exists y)W(x, y)$, $B = (\exists z)(\forall u)(N(u) \rightarrow \neg W(z, u))$, $C = (\exists v)\neg N(v)$ 。

只需证明 $\{A, B, \neg C\} \vdash \text{contrary}$

1. $(\forall x)(\exists y)W(x, y)$ 假设
2. $(\forall u)(N(u) \rightarrow \neg W(z, u))$ 假设
3. $\neg(\exists v)\neg N(v)$ 假设
4. $(\forall v)N(v)$ 假设变形
5. $(\forall v)N(v) \rightarrow N(w)$ 公理
6. $N(w)$ 分离
7. $(\forall u)(N(u) \rightarrow \neg W(z, u)) \rightarrow (N(w) \rightarrow \neg W(z, w))$ 公理
8. $(N(w) \rightarrow \neg W(z, w))$ 分离

9. $\neg W(z, w)$ 分离

10. $(\forall w)\neg W(z, w)$ 全称推广

11. $(\forall w)\neg W(z, w) \rightarrow (\exists z)(\forall w)\neg W(z, w)$ 定理

12. $(\exists z)(\forall w)\neg W(z, w)$ 分离

从而

$$\{(\forall x)(\exists y)W(x, y), (\forall u)(N(u) \rightarrow \neg W(z, u)), \neg(\exists v)\neg N(v) \vdash (\exists z)(\forall w)\neg W(z, w)$$

因为 z 在 $(\exists z)(\forall w)\neg W(z, w)$ 中无自由出现, 所以

$$\{(\forall x)(\exists y)W(x, y), (\exists z)(\forall u)(N(u) \rightarrow \neg W(z, u)), \neg(\exists v)\neg N(v) \vdash (\exists z)(\forall w)\neg W(z, w)$$

由改名定理知 $(\forall x)(\exists y)W(x, y) \rightarrow (\forall z)(\exists w)W(z, w)$ 所以

$$\{(\forall x)(\exists y)W(x, y), (\exists z)(\forall u)(N(u) \rightarrow \neg W(z, u)), \neg(\exists v)\neg N(v) \vdash (\forall z)(\exists w)W(z, w)$$

而 $\neg(\forall z)(\exists w)W(z, w) = (\exists z)(\forall w)\neg W(z, w)$ 。

证明: $A = (\forall x)(\exists y)(Z(y) \wedge W(x, y)), B = (\exists z)(\forall u)(N(u) \rightarrow \neg W(z, u)), C = (\exists v)(Z(v) \wedge \neg N(v))$

令 $\Gamma = \{(\forall v)(Z(v) \rightarrow N(v)), (\exists z)(\forall u)(N(u) \rightarrow \neg W(z, u))\}$, 显然

$$\Gamma \cup \{(\forall u)(N(u) \rightarrow \neg W(z, u))\} \vdash N(y) \rightarrow \neg W(z, y)$$

$$\Gamma \cup \{(\forall u)(N(u) \rightarrow \neg W(z, u))\} \vdash Z(y) \rightarrow N(y)$$

$$\Gamma \cup \{(\forall u)(N(u) \rightarrow \neg W(z, u))\} \vdash Z(y) \rightarrow \neg W(z, y)$$

$$\Gamma \cup \{(\forall u)(N(u) \rightarrow \neg W(z, u))\} \vdash (\forall y)(Z(y) \rightarrow \neg W(z, y))$$

$$\Gamma \cup \{(\forall u)(N(u) \rightarrow \neg W(z, u))\} \vdash (\exists z)(\forall y)(Z(y) \rightarrow \neg W(z, y))$$

由于 $\Gamma \vdash (\exists z)(\forall u)(N(u) \rightarrow \neg W(z, u))$

所以 $\Gamma \vdash (\exists z)(\forall y)(Z(y) \rightarrow \neg W(z, y))$

也就是 $\{(\forall v)(Z(v) \rightarrow N(v)), (\exists z)(\forall u)(N(u) \rightarrow \neg W(z, u))\} \vdash (\exists z)(\forall y)(Z(y) \rightarrow \neg W(z, y))$

但 $\neg((\exists z)(\forall y)(Z(y) \rightarrow \neg W(z, y))) = (\forall z)(\exists y)(Z(y) \wedge W(z, y))$

$$\neg(\forall v)(Z(v) \rightarrow N(v)) = (\exists v)(Z(v) \wedge \neg N(v))$$

所以 $\{(\forall z)(\exists y)(Z(y) \wedge W(z, y)), (\exists z)(\forall u)(N(u) \rightarrow \neg W(z, u))\} \vdash (\exists v)(Z(v) \wedge \neg N(v))$

$\{A, B\} \vdash C$

证明: $A=(\forall z)(\exists y)(Z(y) \wedge W(z, y))$

$$B=(\exists z)(\forall u)(N(u) \rightarrow \neg W(z, u))$$

$$C=(\exists v)(Z(v) \wedge \neg N(v))$$

$$\Gamma = \{A, B, \neg C\}$$

1. $\Gamma \vdash \exists y((Z(y) \wedge W(z, y)))$
2. $\Gamma \vdash \neg(Z(v) \wedge \neg N(v))$
3. $\Gamma \vdash Z(v) \rightarrow N(v)$
4. $\Gamma \vdash (\exists z)\forall u((N(u) \rightarrow \neg W(z, u)))$
5. $\Gamma \cup (\forall u)(N(u) \rightarrow \neg W(z, u))$
6. $\Gamma \vdash N(v) \rightarrow \neg W(z, v)$
7. $\Gamma \vdash Z(v) \rightarrow \neg W(z, v)$
8. $\Gamma \vdash (\exists y)(Z(y) \wedge W(z, y))$
9. $\Gamma \cup \{Z(y) \wedge W(z, y)\} \vdash Z(y)$
10. $\Gamma \cup \{Z(y) \wedge W(z, y)\} \vdash W(z, y)$
11. $\Gamma \vdash Z(y)$
12. $\Gamma \vdash W(z, y)$
13. $\Gamma \vdash \neg W(z, y)$
14. $A, B \vdash C$

习题 3.3.4 $\models \exists v_1(P_1v_1 \rightarrow \forall v_1P_1v_1)$

证明: 这里的公式在日常生活中有很多模型,例如:

班级里一定有一个人,如果他吸烟那么班级里所有的人都吸烟。

或者

地球上一定有一个人,如果他是外星人,那么所有人就都是外星人。

要证明的式子相当于

$$\models \neg \forall v_1 \neg (P_1v_1 \rightarrow \forall v_1 P_1v_1)$$

也就是

$$\not\models \forall v_1 \neg (P_1 v_1 \rightarrow \forall v_1 P_1 v_1)$$

对于任意的解释 $U = \langle D, I \rangle$, 如果 $I(P_1) = D$, 那么 $\models_U \forall v_1 P_1 v_1$, 进而 $\models_U (P_1 v_1 \rightarrow \forall v_1 P_1 v_1)$, 从而 $\models_U \exists v_1 (P_1 v_1 \rightarrow \forall v_1 P_1 v_1)$ 。

如果 $I(P_1) \neq D$, 那么 $d_0 \in D$ 使得 $d_0 \notin I(P_1)$, 也就是 $\not\models_U P_1 v_1[s(v_1|d_0)]$, 所以 $\models_U (P_1 v_1 \rightarrow \forall v_1 P_1 v_1)[s(v_1|d_0)]$, 这样我们有 $\models_U \exists v_1 (P_1 v_1 \rightarrow \forall v_1 P_1 v_1)$ 。

总之我们有 $\models_U \exists v_1 (P_1 v_1 \rightarrow \forall v_1 P_1 v_1)$ 。

故 $\models \exists v_1 (P_1 v_1 \rightarrow \forall v_1 P_1 v_1)$ 。