补充：逻辑知识

一、数理逻辑简介

1. 逻辑：研究推理过程的规律和性质的科学。
2. 数理逻辑：用数学方法研究推理的规律，
   特别是数学证明的规律。
3. 数学方法：建立符号体系，并在符号体系中
   表述和证明定理。
4. 数理逻辑的分支
   (1) 证明论：把数学本身作为研究对象，
   证明数学系统的协调性（相容性）。
   (2) 模型论：研究形式语言和它的解释或
   模型之间的联系。
   (3) 递归论：递归函数及其等价的系统，
   如：Turing机、λ-演算、Post系统、正规算法等。
   (4) 公理化集合论：用公理方法建立集合论系统。
   四个分支均建立在逻辑演算的基础上。
5. 逻辑演算：用形式化方法处理逻辑推理，
   特别是数学中所用推理。~~之所以~~逻辑演算
   之称是因为形式化推理过程与代数演算相似。
   包括有：命题逻辑、一阶逻辑（谓词逻辑）
   高阶逻辑、模态逻辑、构造逻辑、无穷逻辑。

二、命题逻辑

研究以命题为基本单位构成的前提和结论之间的可推导关系，不把谓词和量词分析出来。

1. 命题：具有确切真值的陈述句，记为P，Q等。 0/1

P＝"张三是学生" Q＝"$x+y\geq 0$"，"你要出去吗？" 不是命题

(1) 原子命题：不能再分解为更简单命题的命题。

(2) 复合命题：由命题联结词组合而成（结构形式）

$\neg$ $\wedge$ $\vee$ $\rightarrow$ $\leftrightarrow$

否定、合取、析取、蕴含、等价

$\wedge$：既…又…，不仅…而且…，虽然…但是…，并且，和，与

$\rightarrow$：$(P\rightarrow Q)$ 如P则Q，只要P就Q，P仅当Q，只有Q才P，除非Q否则$\neg P$

$\leftrightarrow$ 等价、当且仅当、充分必要、iff

优先级：$\neg > \{\wedge, \vee\} > \rightarrow > \leftrightarrow$

例1. "山无陵，江水为竭，冬雷震震，夏雨雪，天地合，乃敢与君绝"。则可形式化为：

$\underbrace{山无陵}_{P_1}$，$\underbrace{江水为竭}_{P_2}$，$\underbrace{冬雷震震}_{P_3}$，$\underbrace{夏雨雪}_{P_4}$，$\underbrace{天地合}_{P_5}$，$\underbrace{乃敢与君绝}_{Q}$

① 假 $\underline{P_1\wedge P_2\wedge P_3\wedge P_4\wedge P_5\rightarrow Q}$ 真

② $Q\rightarrow P_1\wedge P_2\wedge P_3\wedge P_4\wedge P_5$ then 假 假

"$P\rightarrow Q$"为假 iff P真Q假。为什么？ iff 真 "$(P\rightarrow Q)\wedge\neg Q\rightarrow\neg P$"

① 不能推出错的"$P\rightarrow Q=Q\rightarrow P$" ② 真的得能推出

(3) 命题公式（递归定义）

① 原子命题是公式；

② 如果 P，Q 为公式，则 $\neg P$，$P\wedge Q$，$P\vee Q$，$P\to Q$，$P\leftrightarrow Q$ 是公式；

③ 只有经有限步使用①②得到的才是公式。

(4) 公式的赋值（解释）：命题变元的一组真值。

公式 P 在赋值 I 下是真的，则称 I 满足 P。

(5) 公式分类 ①永真（重言）②永假（矛盾）

③ 可满足（不是永假）

(6) 一些等价关系：

$P\leftrightarrow Q \equiv (P\to Q)\wedge(Q\to P)$ （等价）

$P\to Q \equiv \neg P\vee Q$ （蕴含）

$P\to Q \equiv \neg Q\to\neg P$ （假言易位）

$P\leftrightarrow Q \equiv \neg P\leftrightarrow\neg Q$ （等价否定）

$(P\to Q)\wedge(P\to\neg Q) \equiv \neg Q$ （归谬）

$\neg P$

三、谓词逻辑

1. 命题逻辑的局限：无法解决与命题的结构和成分有关的推理，而只能进行命题间关系的推理。

例如：三段论：① 所有人都是要死的；—— P

② 苏格拉底是人；—— Q

③ 苏格拉底是要死的。—— R

2. 命题函数 $P(x)$：x是哈工大学生。

P：谓词，x：个体词。　　$\frac{\text{个体词}+\text{谓词}}{\text{逻辑语言}}$

个体词：常量 $a,b,c,\cdots$，变量 $x,y,z,\cdots$

n元谓词：$P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

例如 $F(x,y)$：x是y的父亲。

3. 量词

命题函数的局限：$\neg P(x)$ —— 所有x都没有性质P / 不是所有x都有性质P

全称量词 $\forall x$　　$(\forall x)\underline{P(x)}$

存在量词 $\exists x$.　　$(\exists x)\underline{P(x)}$　> 辖域.

$\forall x P(x)$ —— 全称肯定判断　　　$\exists x P(x) \equiv \neg\forall x \neg P(x)$

$\neg\forall x P(x)$ —— 全称否定 ——　　　$\forall x P(x) \equiv \neg\exists x \neg P(x)$

$\exists x P(x)$ —— 特称肯定 ——　　　$\exists x \neg P(x) \equiv \neg\forall x P(x)$

$\neg\exists x P(x)$ —— 特称否定 ——　　　$\forall x \neg P(x) \equiv \neg\exists x P(x)$

x分自由出现和约束出现二种.

4. 合式公式（递归定义）

(1) 原子公式是合式公式；（没有逻辑联结词）.

(2) 若P, Q是合式公式，则$\neg P$, $\neg Q$, $P\vee Q$, $P\wedge Q$, $P\to Q$, $P\leftrightarrow Q$是合式公式；

(3) 若P是合式公式，则$\forall x P$, $\exists x P$是合式公式；

(4) 只有有限次使用①—③形成的才是合式公式。

5. 公式分类

永真、矛盾、可满足。

6. 真值函数

约定

P Q	$H_{\to}(P,Q)$
T T	T
T F	F
F T	T
F F	T

例2. 罗素悖论。

有一位理发师规定："我为且仅为那些不为自己理发的人理发"

设 $P(x)$：x 是一位理发师；

$Q(x,y)$：x 为 y 理发。

则上述命题可以符号化为：

$$\exists x(P(x)\wedge\forall y(Q(x,y)\leftrightarrow\neg Q(y,y)))$$

可见，谓词逻辑比命题逻辑的形式化描述（表述）能力强。

四. 证明与推理

1. 推理定律（命题演算）

(1) ① $G\wedge H\Rightarrow G$ （简化规则）

② $G\wedge H\Rightarrow H$

(2) ③ $G\Rightarrow G\vee H$ （添加规则）

④ $H\Rightarrow G\vee H$

(3) ⑤ $\neg G \Rightarrow G \to H$

⑥ $H \Rightarrow G \to H$

(4) ⑦ $\neg(G \to H) \Rightarrow G$

⑧ $\neg(G \to H) \Rightarrow \neg H$

(5) ⑨ $G, H \Rightarrow G \wedge H$

(6) ⑩ $\neg G, G \vee H \Rightarrow H$ （选言/析取三段论）

⑪ $\neg G,\ G \bar{\vee} H \Rightarrow H$

(7) ⑫ $G, G \to H \Rightarrow H$ （分离规则）

(8) ⑬ $\neg H, G \to H \Rightarrow \neg G$ （否定后件式）

(9) ⑭ $G \to H, H \to I \Rightarrow G \to I$ （假言三段论）

(10) ⑮ $G \vee H, G \to I, H \to I \Rightarrow I$ （二难推论）

2. 演绎法.

从前提出发，依据公认的推理规则和推理定律，推导出一个结论来。

3. 推理规则 （命题演算）

(1) P规则（前提引用规则），推导过程中，可随时引入前提集合中的任意一个前提。

(2) 规则T（逻辑结果引用规则），推导过程中可随时引入公式S，S是由其前的一个或多个公式推导出来的逻辑结果。

(3) 规则CP（附加前提规则）

如果能从给定的前提集合Γ与公式P推导出S，则能从此前提集合Γ推导出P→S。

4. 间接证明法（反证法）

∵ $P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$.

∴ 为了间接地证明 $P \Rightarrow Q$，可以假设Q为假（$\neg Q$），然后证明P为假（$\neg P$）。

5. 推理定律（谓词演算）

(1) ⑯ $(\forall x)G(x) \Rightarrow (\exists x)G(x)$

(2) ⑰ $(\forall x)G(x) \vee (\forall x)H(x) \Rightarrow (\forall x)(G(x) \vee H(x))$

⑱ $(\exists x)(G(x) \wedge H(x)) \Rightarrow (\exists x)G(x) \wedge (\exists x)H(x)$

(3) ⑲ $(\forall x)(G(x) \to H(x)) \Rightarrow (\forall x)G(x) \to (\forall x)H(x)$

⑳ $(\forall x)(G(x) \to H(x)) \Rightarrow (\exists x)G(x) \to (\exists x)H(x)$

(4) ㉑ $(\exists x)(\forall y)G(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)G(x,y)$

㉒ $(\forall x)(\forall y)G(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)G(x,y)$

㉓ $(\forall y)(\forall x)G(x,y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)G(x,y)$

㉔ $(\exists y)(\forall x)G(x,y) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)G(x,y)$

㉕ $(\forall x)(\exists y)G(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\exists x)G(x,y)$

㉖ $(\forall y)(\exists x)G(x,y) \Rightarrow (\exists x)(\exists y)G(x,y)$

6. 推理规则（谓词演算）

(1) US（全称特指规则）

$(\forall x)G(x) \Rightarrow G(y)$ 其中 $G(y)$ 对 y 是自由的。

推广：$(\forall x)G(x) \Rightarrow G(c)$，$c$ 为任意个体常量。

(2) ES（存在特指规则）

$(\exists x)G(x) \Rightarrow G(c)$，$c$ 为特定个体常量。

(3) UG（全称推广规则）

$G(y) \Rightarrow (\forall x)G(x)$，$G(y)$ 对 x 是自由的。

(4) EG（存在推广规则）

$G(c) \Rightarrow (\exists x)G(x)$，$c$ 为特定的个体常量

推广：$G(y) \Rightarrow (\exists x)G(x)$，$G(y)$ 对 x 是自由的。

7. ~~综合推理~~例题：苏格拉底三段论

设 $H(x)$：x 是人；$M(x)$：x 是要死的。

s：苏格拉底。 $(\forall x)(H(x)\rightarrow M(x)), H(s) \Rightarrow M(s)$.

证明：(1) $(\forall x)(H(x)\rightarrow M(x))$

(2) $H(s)\rightarrow M(s)$

(3) $H(s)$

(4) $M(s)$