群教材课后习题及思考题(2)

一、课后习题作业题：

（1）举例说明两个子群的并可以不是子群。

（2）设 G_1 和 G_2 是群 G 的两个真子群。证明：$G_1 \cup G_2$ 是 G 的子群的充分必要条件是 $G_1 \subseteq G_2$ 或 $G_2 \subseteq G_1$。

（3）设 $(G_1,\circ)$ 和 $(G_2,*)$ 都是群，$\varphi: G_1 \to G_2$，φ 是满射且 $\forall a,b \in G_1$ 有：

$$\varphi(a,b) = \varphi(a) * \varphi(b)$$

非空，封闭，结合，幺，逆

证明：$\varphi^{-1}(e_2)$ 是 G_1 的子群，其中 e_2 为 G_2 的单位元素。

$//\varphi^{-1}(e_2) = \{x | x \in G_1 \wedge \varphi(x) = e_2\}$　//要求：此题需要提交作业

（4）设 $(Z,+)$ 为整数的加法群，令 $S_1 = \{5,7\}$，$S_2 = \{6,9\}$，请分别给出 (S_1) 与 (S_2)。最小公因子

（5）设 R 是全体实数之集，$G = \{f | f: R \to R, f(x) = ax + b, \forall x \in R, a \neq 0, b \in R\}$。试证：$G$ 是一个变换群。

（6）设 R^+ 是一切正实数之集，R 为一切实数之集。$(R^+, \times)$，$(R, +)$ 是群。令 $\varphi: R^+ \to R$，$\forall x \in R^+$，$\varphi(x) = \log_p x$，其中 p 是正数。证明：φ 是同构。

（7）证明：n 次单位根之集对复数的乘法构成一个循环群。背！

（8）找出模 12 的同余类加群的所有真子群。mod12 情况下的加法

（9）设 $G = (a)$ 是一个 n 阶循环群。证明：如果 $(r,n) = 1$，则 $(a^r) = G$。定理

//要求：此题需要提交作业

（10）假定群 G 的元素 a 的阶为 n，$(r,n) = d$，证明：a^r 的阶为 n/d。

二、思考题

（1）在讲义“2-4 网课”16/19 页中，将例题中的映射 φ 更改为 $\varphi(A) = PAP^{-1}$，证明 φ 仍为自同构。//要求：此题需要提交作业。

（2）对讲义“2-5 网课”18/19 页中的思考题，举例说明 $(a^m) = (a^d)$。互相包含