哈工大 2010 年 春季学期

集合论与图论 试题

题号	一	二	三	四	总分
分数					

学号	
姓名	

注意行为规范

遵守考场纪律

主管领导审核签字

本试卷满分 90 分

（计算机科学与技术学院 09 级各专业）

一、填空(本题满分 10 分，每空各 1 分)

1．设 A,B 为集合，则 $(A\setminus B)\cup B=A$ 成立的充分必要条件是什么？（ $B\subseteq A$ ）

2．设 $X=\{1,2,\cdots,n\},Y=\{1,2\}$，则从 X 到 Y 的满射的个数为多少？（ 2^n-2 ）

3．在集合 $A=\{2,3,4,8,9,10,11\}$ 上定义的整除关系“|”是 A 上的偏序关系，则最大元是什么？（ 无 ）

4．设 $A=\{a,b,c\}$，给出 A 上的一个二元关系，使其同时不满足自反性、反自反性、对称性、反对称和传递性的二元关系。（ $R=\{(a,a),(b,c),(c,b),(a,c)\}$ ）

5．设 Σ 为一个有限字母表，Σ 上所有字（包括空字）之集记为 Σ^*，则 Σ^* 是否是可数集？（ 是 ）

6．含 5 个顶点、3 条边的不同构的无向图个数为多少？（ 4 ）

7．若 G 是一个 (p,p) 连通图，则 G 至少有多少个生成树？（ 3 ）

8．如图所示图 G，回答下列问题：

（1）图 G 是否是偶图？（ 不是 ）

（2）图 G 是否是欧拉图？（ 不是 ）

（3）图 G 的色数为多少？（ 4 ）

二、简答下列各题（本题满分 40 分）

1. 设 A,B,C,D 为任意集合，判断下列等式是否成立？若成立给出证明，若不成立举出反例。（6分）

（1）$(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(B\times D)$；

（2）$(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$。

解：（1）不成立。例如 $A=D=\phi,B=c=\{a\}$ 即可。

（2）成立。$\forall(x,y)\in(A\cap B)\times(C\cap D)$，有 $x\in A\cap B,y\in C\cap D$，即 $x\in A,x\in B,y\in C,y\in D$。所以 $(x,y)\in A\times C,(x,y)\in B\times D$，因此 $(x,y)\in(A\times C)\cap(B\times D)$，从而 $(A\cap B)\times(C\cap D)\subseteq(A\times C)\cap(B\times D)$。

反之，$\forall(x,y)\in(A\times C)\cap(B\times D)$，有 $x\in A,x\in B,y\in C,y\in D$。即

$(x,y)\in(A\cap B)\times(C\cap D)$，从而$(A\times C)\cap(B\times D)\subseteq(A\cap B)\times(C\cap D)$。

因此，$(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$。

2. 设G是无向图，判断下列命题是否成立？若成立给出证明，若不成立举出反例。（6分）

（1）若图G是连通图，则G的补图G^C也是连通图。

（2）若图G是不连通图，则G的补图G^C是连通图。

解：（1）G^C不一定是连通图。

（2）G^C一定连通图。

因为G不连通，故G至少有两个分支，一个是G_1，另外一些支构成的子图是G_2。

对于G^c中任意两个顶点u和v：

（1）若$u\in V_1,v\in V_2$，则u与v不在G中邻接。由补图的定义可知：u与v必在G^c中邻接；

（2）若$u,v\in V_1$(或V_2)，取$w\in V_2$(或V_2)，则u与w，w与v在G都不邻接，故u与w，w与v在G^c必邻接，于是uwv就是G^c中的一条路。

综上可知，对G^c中任两个顶点u和v之间都有路连接，故G^c是连通的。

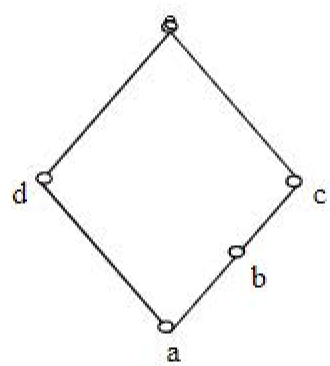
3．设集合$A=\{a,b,c,d,e\}$，A上的关系定义如下：（6分）

$R=\{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(b,b),(b,c),$
$(b,e),(c,c),(c,e),(d,d),(d,e),(e,e)\}$。则

（1）写出R的关系矩阵；（2）验证(A,R)是偏序集；（3）画出$Hasse$图。

解：（1）R所对应的关系矩阵为M_R为：

$$M_R=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$



（2）由关系矩阵可知：

对角线上的所有元素全为1，故R是自反的；$r_{ij}+r_{ji}\le 1$，故R是反对称的；

R^2对应的关系矩阵M_{R^2}为：$M_{R^2}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}=M_R$。

因此 R 是传递的。

综上可知：故 R 是 A 上的偏序关系，从而 (A,R) 是偏序集。

（3）(A,R) 对应的 $Hasse$ 图如图所示。

4．设 A 是有限集合，$f:A\to A$。则（3 分）

（1）若 f 是单射，则 f 必是满射吗？反之如何？

（2）若 A 是无限集合，结论又如何？

解：（1）f 是单射，则 f 必是满射；反之也成立；

（2）若 A 是无限集合，结论不成立。

举例： 令 N＝{1，2，3，…}，则

（1）设 $s:N\to N$，$\forall n\in N, S(n)=n+1$。显然，S 是单射，但不是满射。

（2）设 $t:N\to N$，$\forall n\in N, t(1)=1, t(n)=n-1, n\geq 2$。显然，$T$ 是满射，但不是单射。

5．（4 分）

（1）根据你的理解给出关系的传递闭包的定义；

（2）设 $A=\{a,b,c,d\}$，A 上的关系 $R=\{(a,b),(b,c),(c,a)\}$，求关系 R 的传递闭包 R^+。

解：（1）设 R 是集合 A 上的二元关系，则 A 上包含 R 的所有传递关系的交称为关系 R 的传递闭包。

（2）$R^+=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(a,c),(b,a),(b,c),(c,a),(c,b)\}$

6．由 6 个顶点，12 条边构成的平面连通图 G 中，每个面由几条边围成？说明理由。（4 分）

解： 每个面由 3 条边围成。

在图 G 中，$p=6$，$q=12$，根据欧拉公式 $p-q+f=2$，得 $f=8$。

因为简单平面连通图的每个面至少由 3 条边围成，所以假设存在某个面由大于 3 条边围成，则有：$3f<2q$，即 $24<24$，矛盾。

故每个面至多由 3 条面围成，于是 G 中每个面由 3 条边围成的。

7．设 $G=(V,E)$ 是至少有一个顶点不是孤立点的图。若 $\forall v\in V, \deg v$ 为偶数，则 G 中是否必有圈？说明理由。（4 分）

解： G 中必有圈。

令 P 是 G 中的一条最长的路，$P:v_1v_2\cdots v_n$，则由 $\deg v_1\geq 2$ 知，必有某个顶点 u 与 v_i 邻接。由于 P 是最长路，所以 u 必是 $v_3,v_4,\cdots,v_n$ 中的某个 $v_i, i\geq 3$。于是，$v_1v_2\cdots v_iv_1$ 是 G 的一个回路。

8．设T是一个有n_0个叶子的二元树，出度为2的顶点为n_2，则n_0与n_2有何关系？说明理由。（4分）

解：n_0与n_2的关系为：$n_0 = n_2 + 1$

由$\sum_{v\in V} id(v_i) = \sum_{v\in V} od(v_i) = q$且$q = p-1$，得$2\times n_2 + 1\times(p - n_2 - n_0) = p-1$，

得$n_0 = n_2 + 1$。

9．已知有向图D的邻接矩阵$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，则（3分）

（1）画出邻接矩阵为A的有向图D的图解；

（2）写出D的可达矩阵R；

（3）写出计算两顶点之间长为k的有向通道条数的计算方法。

解：（1） （2）$\begin{pmatrix} 11111 \\ 11111 \\ 00111 \\ 00111 \\ 00111 \end{pmatrix}$；（3）$(A^k)_{ij}$。

三、证明下列各题（本题满分40分，每小题各5分）

1．设G是一个(p,q)图，证明：G是树$\Leftrightarrow G$无圈且$p = q+1$。

证：$\Rightarrow$因为G是树，所以G是无圈；

其次对G的顶点数p进行归纳证明p=q+1。

当p为1或2时，连通图G中显然有p=q+1。

假设对一切少于p个顶点的树结论成立；

今设G是有p个顶点树，从G中去掉任一条边x，则G-x恰有两个支。由归纳假设，每个支中顶点数与边数之间有关系式：$p_1=q_1+1$，$p_2=q_2+1$。

所以，$p=p_1+p_2=q_1+q_2+2=(q_1+q_2+1)+1=q+1$。

$\Leftarrow$只须证明G连通即可。

假设G不连通，则必有k个支且k≥2。由于每个支都是连通的且无回路，故每个支都是树。于是，对每个支都有$p_i = q_i + 1, i = 1,2,\cdots,k$。于是，$p = \sum_{i=1}^{k} p_i = \sum_{i=1}^{k} q_i + k = q + k$。

由假设k≥2，这与p=q+1相矛盾。因此，G是连通的。即G是树。

2．设$f: X \to Y$，证明：f是单射$\Leftrightarrow \forall F \in 2^X, f^{-1}(f(F)) = F$。

证：（1）$\Rightarrow \forall x\in f^{-1}(f(F))$，则 $f(x)\in f(F)$，于是 F 中必存在 x_1，使得 $f(x)=f(x_1)$。因为 f 是单射，故必有 $x=x_1$。即 $x\in F$，所以 $f^{-1}(f(F))\subseteq F$。

反过来，　$\forall x\in F, f(x)\in f(F)$，从而有 $x\in f^{-1}(f(F))$，所以 $F\subseteq f^{-1}(f(F))$。

因此 $f^{-1}(f(F))=F$。

$\Leftarrow$ 假设 f 不是单射，则 $\exists x_1,x_2\in X, x_1\neq x_2$，但 $f(x_1)=f(x_2)=y$。令 $F=\{x_1\}$，于是 $f^{-1}(f(F))=f^{-1}(f(\{x_1\})=f^{-1}(\{y\})=\{x_1,x_2\}$，故有 $\{x_1,x_2\}=F=\{x_1\}$，矛盾。

即 f 一定为单射。

3．设 G 是一个 $p(p\geq 3)$ 个顶点的图。u 和 v 是 G 的两个不邻接的顶点，并且

$$\deg u+\deg v\geq p。$$

证明：G 是哈密顿图 $\Leftrightarrow G+uv$ 是哈密顿图。

证明：$\Rightarrow$ 显然成立。

$\Leftarrow$ 假设 G 不是哈密顿图，则有题意知在 G 中必有一条从 u 到 v 的哈密顿路。不妨设此路为 $uv_2v_3\cdots v_{p-1}v$，令 $\deg v_1=k$，$\deg v_p=l$，则在 G 中与 u 邻接的顶点为 u_{i1}，u_{i2}，…，u_{ik}，其中 $2=i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant p-1$。这时顶点 u_{ir-1} $(r=2, 3\cdots, k)$ 不能与顶点 v_p 邻接。因为此时 G 有哈密顿回路 $uv_2\cdots v_{ir-1}vv_{p-1}\cdots v_{ir}u$，因此 v_p 至少与 u，v_2，…，v_{p-1} 中的 k 个顶点不邻接。于是，$l\leqslant p-1-k$，从而 $k+1\leqslant p-1$，与题设矛盾，故 G 是哈密顿图。

4．设 R 是 A 上的一个二元关系，证明：R 是对称的 $\Leftrightarrow R=R^{-1}$。

证：$\Rightarrow \forall (x,y)\in R$，由 R 的对称性有 $(y,x)\in R$，即 $(x,y)\in R^{-1}$，从而 $R\subseteq R^{-1}$

反之，$\forall (y,x)\in R^{-1}$，则 $(x,y)\in R$。由 R 的对称性有：$(y,x)\in R$，从而 $R^{-1}\subseteq R$

故 $R=R^{-1}$

$\Leftarrow \forall x$，$y\in X$，若 $(x,y)\in R$，由 $R=R^{-1}$，得 $(x,y)\in R^{-1}$，即 $(y,x)\in R$，故 R 是对称的。

5．设 R 是 A 上的一个二元关系，令 $S=\{(a,b)\mid \exists c\in A$，使得 $(a,c)\in R$ 且 $(c,b)\in R\}$。

证明：若 R 是 A 上的等价关系，则 S 也是 A 上的等价关系；

证：因为 R 是自反的，所以 $\forall a\in A$，有 $(a,a)\in R$。根据 S 的定义，有 $(a,a)\in S$，所以 S 是自反的；

若 $(a,b)\in S$，则 $\exists c\in A$，使得 $(a,c)\in R$ 且 $(c,b)\in R$。因为 R 是对称的，所以 $(b,c)\in R$ 且 $(c,a)\in R$，根据 S 的定义有 $(b,a)\in S$，所以 S 是对称的；

若 $(a,b)\in S$，$(b,c)\in S$，则 $\exists d\in A$，使得 $(a,d)\in R$ 且 $(d,b)\in R$。因为 R 是传递的，所以 $(a,b)\in R$。

则 $\exists e\in A$，使得 $(b,e)\in R$ 且 $(e,c)\in R$。因为 R 是传递的，所以 $(b,c)\in R$。

根据 S 的定义有 $(a,c)\in S$。所以 S 是传递的。

综上可知：S 是等价关系。

6. 利用康托对角线法证明：若 A 可数，则 2^A 不可数。

证：因为 $2^A \sim Ch(A)=\{f \mid f: A\to\{0,1\}\}$，所以只须证明 $Ch(A)$ 不可数即可。$\forall f\in Ch(A)$，f 可表为0，1 的无穷序列。若 $Ch(A)$ 可数，则 $Ch(A)$ 的元素可排列成无重复项的无穷序列 $f_1,f_2,f_3,\cdots$。每个 f_i 可表成 0，1 的无穷序列 $f_{i1},f_{i2},f_{i3},\cdots$。用对角线法构造一个 0，1 序列 $g_1,g_2,g_3,\cdots$：若 $f_{11}=0$，则 $g_1=1$；若 $f_{11}=1$ 则 $g_1=0$。一般地，若 $f_{ii}=0$，则 $g_i=1$；如果 $f_{ii}=1$，则 $g_i=0$，$i=1,2,3,\cdots$，则 $g_1,g_2,\cdots$ 确定的函数 $g\in Ch(A)$，但 $g\neq f_i, i=1,2,\cdots$，矛盾。所以，2^A 不可数。

7. 设 $G=(V,E)$ 是一个 (p,q) 图，若 G 是一个 $K-$正则偶图，证明：$p\geq 2K$。

证：因为 G 中无三角形且 G 为 $K-$正则图，所以 $Kp=2q\leq 2(p/2)^2=p^2/2$，

因此，$p\geq 2K$。

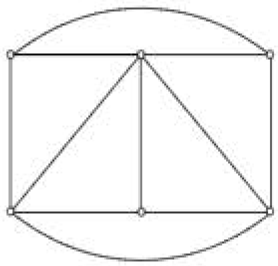
8. 设 G 是顶点 $p\geq 11$ 的平面图，证明：G 的补图 G^c 是非平面图。

证：反证法：假设图 G 的补图 G^c 也是平面图，令 $G=(p,q)$，$G^c=(p_1,q_1)$，则 $p=p_1$，而 $q+q_1=p(p-1)/2$ ………… （1）

又因为 G 和 G^c 都是平面图，故 $q\leq 3p-6$，$q_1\leq 3p-6$。相加得：

$$q+q_1\leq 6p-12 \qquad (2)$$

由（1），（2）的得：$q+q_1=p(p-1)/2\leq 6p-12$，展开有：$p^2-13p+24\leq 0$，于是 $p<11$。与题设矛盾，所以 G^c 不是平面图。



哈工大 2011 年 春季学期

集合论与图论考试题

题号	一	二	三	四	总分
分数					

学号	
姓名	

注意行为规范

遵守考场纪律

主管领导审核签字

本试卷满分 100 分

（计算机学院、英才学院 10 级）

一、填空(本题满分 10 分，每空各 1 分)

1.设 $f:X\to Y, g:Y\to Z$，若 $g\circ f$ 是单射，则 f 与 g 哪个是单射？（ f ）

2.集合 $A=\{a,b,c,d\}$，A 上的关系 $R=\{(a,b),(b,c),(c,a)\}$，则 R^{+} 等于什么？

（ $R^{+}=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(a,c),(b,a)(b,c),(c,a),(c,b)\}$ ）

3 .设 X 是集合，$|X|$ = n ,则反自反或对称的关系有多少？($2^{n^2-n}+2^{(n^2+n)/2-2^{(n^2-n)/2}}$)

4. 设 $\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 是集合 A 的划分，若 $A_i\cap B\neq\phi$，$1\le i\le n$，则 $A\cap B$ 的划分是什么？ （ $A_1\cap B,A_2\cap B,\cdots,A_n\cap B$ ）

5.集合 $A=\{1,2,3,4,6,12\}$ 上的整除关系"|"是 A 上偏序关系，画出 Hasse 图。

（ ）

6.什么是无穷集合？

（凡能与自身真子集对等的集合都称为无穷集合 ）

7.设 G 为 p 阶简单无向图，$p>2$ 且 p 为奇数，G 和 G 的补图 G^c 中度数为奇数的顶点的个数是否一定相等？ （ 一定）

8.已知 p 阶简单无向图 G 中有 q 条边，各顶点的度数均为 3，又 $2p=q+3$，则图 G 在同构的意义下是否唯一？ （ 不唯一）

9. 若 G 是一个 (p,q) 连通图，则 G 至少有多少个圈？ （ q-p+1 ）

10. 设 T 是一个有 n_0 个叶子的二元树，出度为 2 的顶点为 n_2 ，则 n_0 与 n_2

满足什么关系？　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（n0=n2+1　）

二、简答下列问题(本题满分 30 分，1-6 小题 3 分，7-9 小题 4 分)

1．设 A,B 是集合，则 $A\Delta B=B$ 充分必要条件是什么？说明理由。（3 分）

答案： $A=\Phi$。

2．设 $f:X\to Y,C,D\subseteq Y$ ，则 $f^{-1}(C\Delta D)$ 与 $f^{-1}(C)\Delta f^{-1}(D)$ 满足什么关系？说明理由。

解：相等。 $f^{-1}(C\Delta D)=f^{-1}((C\setminus D)\cup(D\setminus C))=f^{-1}(C\setminus D)\cup f^{-1}(D\setminus C)=$

$$=(f^{-1}(C)\setminus f^{-1}(D))\cup(f^{-1}(D)\setminus f^{-1}(C))=f^{-1}(C)\Delta f^{-1}(D)。$$

3. 写出无向树的特征性质（至少 5 个）。（3 分）

（1）G 是树；

（2）G 的任两个不同顶点间有唯一的一条路联结；

（3）G 是连通的且 p=q+1；

（4）G 中无回路且 p=q+1；

（5）G 中无回路且任加一条边，得到有唯一回路的图；

（6）G 是连通的，并且若 p≥3，则 G 不是 K_p。又若 G 的任两个不邻接的

顶点间加一条边，则得到一个恰有唯一的一个回路的图；

（7）G 是极小连通图。

4．设 G 是一个 (p,q) 图，若 $q\ge p-1$ ，则 $k(G)\le[2q/p]$ 与 $k(G)\le[2p/q]$ 哪个正确？

说明理由。（3 分）

答案： $k(G)\le[2q/p]$。

5. K_5 是否是可平面图？说明理由。（3 分）

解： K_5 不是平面图。

若 K_5 是可平面图，则由欧拉公式成立有，5－10＋f＝2，即 f ＝7。

而每个面至少 3 条边，所以 3f≤2q ，从而 21≤20，矛盾。因此，K_5 不是可平面图。

6. 已知有向图 D 的邻接矩阵 $A=\begin{pmatrix}0111\\1010\\0001\\0000\end{pmatrix}$，则（3 分）

（1）画出邻接矩阵为 A 的有向图 D 的图解；

（2）写出 D 的可达矩阵 R ；

（3）写出计算两顶点之间长为 k 的有向通道条数的计算方法。

（1） （2）$R=\begin{pmatrix}1111\\1111\\0011\\0001\end{pmatrix}$ （3）$(A^k)_{ij}$。

7．每个自补图有多少个顶点？说明理由。（4 分）

解：每个自补图都有 $4n$ 或 $4n+1$ 个顶点

因为每个自补图 G 的对应的完全图的边数必为偶数，即 $q=p(p-1)/2$ 为偶数。而当 $p=1,2,3$ 时，图 G 无自补图，只有 $p\geq 4$ 时，图 G 才有自补图。于是 p 可写成如下形式：$4n,4n+1,4n+2,4n+3$，其中 n 为正整数；代入 $q=p(p-1)/2$ 中，只有 $4n,4n+1$ 才能使 q 为偶数，故每个自补图必有 $4n$ 或 $4n+1$ 个顶点。

8. 设 $N=\{1,2,3,\cdots\}$，试构造两个映射 f 和 g ：$N\to N$，使得 $gf=I_N$ 但 $fg\neq I_N$。（4 分）

解：$f:N\to N,\forall n\in N,f(n)=n+1$; $g:N\to N,\forall n\in N,g(1)=1,g(n)=n-1,n\geq 2$。

9．设 $f:A\to B,H\subseteq A$，令 H 在 A 中的余集 $H^c=A\setminus H$，则（4 分）

（1）当 f 是单射时，给出 $f(H^c)$ 和 $(f(H))^c$ 之间的关系，并给予证明。

（2）当 f 是满射时，给出 $f(H^c)$ 和 $(f(H))^c$ 之间的关系，并给予证明。

[（1）、（2）任选一种情况证明即可]

解：由定理知，$(f(H^c)) = f(\mathrm{A}\backslash\mathrm{H}) \supseteq f(\mathrm{A})\backslash f(H)$。

若 f 是满射，即 $f(A)=B$，有 $f(H^c) \supseteq (f(H))^c$。

若 f 是单射时，有 $f(H^c) \subseteq (f(H))^c$。

因为 $\forall y \in f(H^c)$，故存在 $x \in H^c$，使得 $y = f(x)$，从而 $x \notin H$；由 f 是单射，有 $f(x) \notin f(H)$（否则存在 $x_1 \in H$，使 $f(x_1) = f(x)$ 矛盾），即 $y \in (f(H))^c$。于是 $f(H^c) \subseteq (f(H))^c$。

三、证明下列各题（本题满分 60 分，每小题各 6 分）

1．设 A,B 是两个集合，$B \neq \varnothing$，试证：若 $A \times B = B \times B$，则 $A = B$。

证：$\forall x \in A$，因为 $B \neq \varnothing$，故在 B 中任取一元素 y，必有 $(x,y) \in A \times B$，因而 $(x,y) \in B \times B$，故 $x \in B$。从而 $A \subseteq B$。

反之，$\forall x \in B$，因为 $B \neq \varnothing$，故在 B 中任取一元素 y，必有 $(x,y) \in B \times B$，因而 $(x,y) \in A \times B$，故 $x \in A$。从而 $B \subseteq A$。

于是 $A = B$。

2.设 $f: X \to Y$，证明：f 是单射 $\Leftrightarrow \forall F \in 2^X, f^{-1}(f(F)) = F$。

证：$\Rightarrow$ $\forall x \in f^{-1}(f(F))$，则 $f(x) \in f(F)$，于是 F 中必存在 x_1，使得 $f(x) = f(x_1)$。因为 f 是单射，故必有 $x = x_1$。即 $x \in F$，所以 $f^{-1}(f(F)) \subseteq F$。

反过来，$\forall x \in F, f(x) \in f(F)$，从而有 $x \in f^{-1}(f(F))$，所以 $F \subseteq f^{-1}(f(F))$。

因此 $f^{-1}(f(F)) = F$。

$\Leftarrow$ 假设 f 不是单射，则 $\exists x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$，但 $f(x_1) = f(x_2) = y$。令 $F = \{x_1\}$，于是 $f^{-1}(f(F)) = f^{-1}(f(\{x_1\}) = f^{-1}(\{y\}) = \{x_1, x_2\}$，即 $\{x_1, x_2\} = F = \{x_1\}$，矛盾。

因此，f 为单射。

3．设 R 是 A 上的一个自反关系，证明：

R 是等价关系 $\Leftrightarrow$ 若 $(a,b)\in R$ 且 $(a,c)\in R$ ，则 $(b,c)\in R$ 。

证：$\Rightarrow$ R 是 A 上的等价关系。

若 $(a,b)\in R$ 且 $(a,c)\in R$，由 R 的对称性有：$(b,a)\in R$ 且 $(a,c)\in R$，

由 R 的传递性有：$(b,c)\in R$ 。

$\Leftarrow$R 是自反的，故 $\forall a\in A$ 有 $(a,a)\in R$ 。

若 $(a,b)\in R$，由 $(a,a)\in R$ 有 $(b,a)\in R$，所以 R 是对称的。

若 $(a,b)\in R$ 且 $(b,c)\in R$，由 R 的对称性有：

$(b,a)\in R$ 且 $(b,c)\in R$，故由题意得 $(a,c)\in R$，所以 R 是传递。

因此，R 是 A 上的等价关系。

4. 设 R 是 A 上的二元关系，证明：R 是传递的 $\Leftrightarrow$ $R\circ R\subseteq R$。

$\Rightarrow$ $\forall(a,c)\in R\ R$，则 $\exists b\in A$，使得 $(a,b)\in R$ 且 $(b,c)\in R$，由 R 的传递性知：

$(a,c)\in R$，于是 $R\ R\subseteq R$ 。

$\Leftarrow$ $\forall(a,b)\in R$ 且 $(b,c)\in R$，有 $(a,c)\in R\ R\subseteq R$，故 R 是传递的。

5.令 $N=\{1,2,3,\cdots\}$ ，$S=\{f\,|\,f:N\to\{0,1\}\}$, 利用康托对角线法证明 S 是不可数集。

证:假设从 N 到{0, 1}的所有映射之集可数，则可排成无重复项的无穷序列

$f_1,f_2,f_3,\cdots$ 。每个函数 f_i 确定了一个 0, 1 序列 $a_{i1},a_{i2},a_{i3},\cdots$ 。构造序列

$b_1,b_2,b_3,\cdots,b_i=1$，若 $a_{ii}=0$；否则 $b_i=0$ 。该序列对应的函数 $f(i)=b_i$，$i\in N$，不为

$f_1,f_2,\cdots$ 任一个，矛盾。

6. 设 $G=(V,E)$ 是一个有 p 个顶点的图。若对 G 的任两个不邻接的顶点 u 和 v ，

有 $\deg u+\deg v\geq p-1$ ，证明：G 是连通的。

证:若 G 不连通，则 G 至少有两个支。设 $G_1=(V_1,E_1)$ 是其中的一个支，其他各支构成的

子图为 $G_2=(V_2,E_2)$，$|V_1|=n_1,|V_2|=p-n_1$,，则任意 $\forall u\in V_1,v\in V_2$,，有

$$\deg u\le n_1-1,\deg v\le p-n_1-1。$$

于是，$\deg u+\deg v\le(n_1-1)+(p-n_1-1)=p-2$。

这与假设相矛盾，所以 G 是连通的。

7. 证明：完全图 K_9 中至少存在彼此无公共边的两条哈密顿圈和一条哈密顿路。

证：在 K_9 中，$\forall v\in V,\deg v=8\ge p/2$，由定理可知，必有一条哈密顿回路 C_1；令 G_1 为 K_9 中删除 C_1 中全部边之后的图，则 G_1 中每个顶点的度均为 $\deg v=6\ge p/2$，故 G_1 仍为哈密顿图，因而存在 G_1 中的哈密顿回路 C_2，显然 C_1 与 C_2 无公共边。再设 G_2 为 G_1 中删除 C_2 中的全部边后所得图，则 G_2 每个顶点的度均为 $\deg v=4$。又由定理可知 G_2 为半哈密顿图，因而 G_2 中存在哈密顿路。设 L 为 G_2 中的一条哈密顿路，显然 C_1,C_2,L 无公共边。

8. 设 G 是一棵树且 $\Delta(G)\ge k$，证明：G 中至少有 k 个度为 1 的顶点。

证：设 T 中有 p 个顶点，s 个树叶，则 T 中其余 $p-s$ 个顶点的度数均大于等于 2，且至少有一个顶点的度大于等于 k。由握手定理可得：

$$2q=2p-2=\sum_{i=1}^{p}deg(v_i)\ge 2(p-s-1)+k+s\text{，有 }s\ge k。$$

所以 T 中至少有 k 个树叶 。

9. 证明：一个没有有向圈的有向图中至少有一个入度为零的顶点。

证：设 D=(V,A) 是一个没有有向回路的有向图。考察 D 中任一条最长的有向路的第一个顶点 v，则 id(v)=0。因为若 id(v)≠0，则必有一个顶点 u 使得 (u,v)∈A。于是，

若 u 不在此最长路上，则此最长路便不是 D 中的最长路，这是与前面的假设相矛盾。

若 u 在此最长路上，则 D 中有有向回路，这与定理的假设矛盾。因此 id(v)=0。

10. 设 G 是一个没有三角形的平面图，证明：G 是 4-可着色的

证：（1）假设 $\forall v\in V$，$\deg(v)\ge 4$，则由握手定理有：$4p\le 2q$；由于 G 是一个没有

三角形的平面图，故$q\le 2p-4$，即$4p\le 4p-8$，矛盾。故假设不成立，即G中存在一个顶点v，使得$\deg(v)\le 3$。

(2)对顶点p进行归纳。

当$p=1,2,3,4$时，显示成立。

假设当$p=k$时，G是4-可着色的。

当$p=k+1$时，由于G是一个没有三角形的平面图，故由（1）可知：$\exists v\in V$，使得$\deg(v)\le 3$。**于是$G-v=G_1$便是一个具有k个顶点没有三角形的平面图，由归纳假设，**G_1是4-可着色的。

由于$\deg(v)\le 3$，故在G中用不同于与v相邻接的那些顶点在G_1中着色时所用的颜色**为v着色，G的其它顶点着色同G_1的4-可着色，这就得到了G一个4-可着色。**

哈工大 2012 年 春季学期

集合论与图论考试题

题号	一	二	三	四	总分
分数					

学号	
姓名	

注意行为规范

遵守考场纪律

主管领导审核签字

本试卷满分 100 分

（计算机学院 11 级）

一、填空（本题满分 10 分）

1. 求方程：$A\Delta X=B$ 的解。 ____________

2. 设 $X=\{1,2,\cdots,m\}$，$Y=\{a,b\}$，求 X 到 Y 的满射的个数。 ____________

3. 给定集合 $S=\{1,2,3,4,5\}$，找出 S 上的等价关系 R，此关系 R 能产生划分为 $\{1,2\}$，$\{3\}$，$\{4,5\}$。 $R=$ ____________

4. 在 A Ì $\{2,3,4,8,9,10,11\}$ 上定义的整除关系是偏序关系，则极大元是什么。

____

5. 什么是可数集合？ ____________

6. 图 G 是欧拉图当且仅当图 G 是 ____________

7. 若图 G 是自补图，则它所对应的完全图的边数一定是 ____________ 数。

8. 每棵树的中心含有多少个顶点？ ____________

9. 把平面分成 p 个区域，每两个区域都相邻，问 p 最大为多少？ ____________

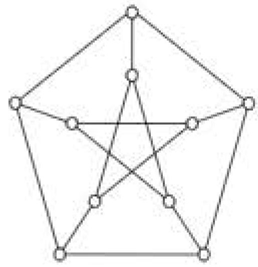
10. 若 $D=(V,A)$ 是单向连通的当且仅当 D 中有一条 ____________

二、简答下列各题（本题满分 30 分）

1. 设 R 是复数集合 A 上的一个二元关系且满足 $xRy \Leftrightarrow x-y=a+bi$，$a,b$ 为非负整数，试确定 R 的性质。（自反、反自反、对称、反对称、传递）

2. 如图所示是彼德森图G，回答问题：

（1）图G是否是偶图？ （2）图G是否是平面图？（3）图G的色数是多少？



3. 下列命题是否成立？若成立请证明之，若不成立请举反例。

（1）$(A\setminus B)\cup C=A\setminus(B\setminus C)$； （2）$A\cup(B\setminus C)=(A\cup B)\setminus C$；

4. 设$f:N\times N\to N, f((x,y))=xy$。则

（1）说明f，g是否是单射、满射或双射？ （2）求$f(N\times\{1\}), f^{-1}(\{0\})$。

5. （1）根据你的理解给出二元关系R传递闭包R^{+}的定义；

（2）若R是集合A上的反对称关系，则R^{+}一定是反对称的吗？举例说明。

6. （下列两题任选一题）

（1）已知a,b,c,d,e,f,g 7 个人中，a会讲英语；b会讲英语和汉语；c会讲英语、意大利语和俄语；d会讲汉语和日语；e会讲意大利语和德语；f会讲俄语、日语和法语；g会讲德语和法语。能否将他们的座位安排在圆桌旁，使得每个人都能与他身边的人交谈？

（2）今要将 6 个人分成 3 组（每组 2 个人）去完成 3 项任务，已知每个人至少与其余 5 个人中的 3 个人能相互合作，问：

(1)能否使得每组 2 个人都能相互合作？ (2)你能给出几种方案？

7. 设T是一个有n_0个叶子的二元树，出度为 2 的顶点为n_2，则n_0和n_2有何关系？说明理由。

8. 设G是一个(p,q)图，若$q \geq p$，则G中一定有圈吗?说明理由。

三、证明下列各题（本题满分 60 分）

1. 设 A,B 是两个集合，$B \neq \varnothing$，试证：若 $A \times B = B \times A$，则 $A = B$。

2. 证明：在 52 个整数中，必有两个整数，使得这两个整数之和或差能被 100 整除。

3. 设 $f: X \to Y$，证明：f 是满射 $\Leftrightarrow \forall E \in 2^{Y}, f(f^{-1}(E)) = E$。

4. 任选一题

（1）设R是集合A上的一个自反的和传递的关系；T是A上的一个关系，使得

$(a,b)\in T \Leftrightarrow (a,b)\in R$且$(b,a)\in R$。证明：$T$是$A$上的等价关系。

（2）设R,S是A上的等价关系，证明：$R\circ S$是等价关系$\Leftrightarrow$ $R\circ S = S\circ R$。

5. 若A可数，证明：2^A不可数。(利用康托对角线法)

6. 若G是一个恰有两个奇度顶点u和v的无向图，证明: G连通$\Leftrightarrow G+uv$连通。

7. 任选一题

(1) 证明：任一非平凡树中至少有两个度为 1 的顶点。

(2) 证明：恰有两个顶点度数为 1 的树必为一条通路。

8. 证明：若每个顶点的度数大于等于 3 时，则不存在有 7 条边的平面连通图。

9. 证明：在一个连通图中，两条最长的路有一个公共的顶点。

10. 用数学归纳法证明:每个比赛图中必有有向哈密顿路。