

群教材课后习题及思考题(1)

一、课后习题作业题:

(1) 设 R 为实数集, $S = \{(a,b) | a \neq 0, a,b \in R\}$ 。在 S 上利用通常的加法和乘法定

义二元运算 " \circ " 如下: $\forall (a,b), (c,d) \in S, (a,b) \circ (c,d) = (ac, ad+b)$

验证: (S, \circ) 是群。// 其实就是证明线性变换 $f(x)=ax+b$ 关于映射复合为群。

注意通项公式

(2) n 次方程 $x^n=1$ 的根称为 n 次单位根, 所有 n 次单位根之集记为 U_n 。证明:

U_n 对通常的复数乘法构成一个群。

$$a_1 + b_1 i$$

$$\frac{a_1}{a_1^2 + b_1^2} - \frac{b_1}{a_1^2 + b_1^2} i$$

(3) 设 $G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

试证: G 对矩阵乘法构成一个群。

(4) 设 a 和 b 是群 G 的两个元素。如果 $(ab)^2 = a^2 b^2$, 试证: $ab = ba$

(5) 设 G 是群。如果 $\forall a \in G, a^2 = e$, 试证: G 是交换群。

(6) 证明四阶群是交换群。// 要求: 此题需要提交作业

(7) 证明: 在任一阶大于 2 的非交换群里必有两个非单位元 a 和 b , 使得 $ab = ba$ 。

// 要求: 此题需要提交作业

(8) 有限群里阶大于 2 的元素的个数必为偶数。

(9) 证明: 偶数阶群里阶为 2 的元素的个数必为奇数。

(10) 设 a 为群 G 中的一个元素, a 的阶为 n , 且有正整数 m 使得 $a^m = e$, 则 n 能整除 m 。

(11) 偶数阶群里至少有一个阶为 2 的元素。

(12) 设 a_1, a_2, \dots, a_n 为 n 阶群 G 中的 n 个元素 (它们不一定各不相同)。证明:

存在整数 p 和 q ($1 \leq p \leq q \leq n$), 使得 $a_p a_{p+1} \cdots a_q = e$

二、思考题

(1) PPT 讲义 2-1 中 6/12 页中的思考题。

// 要求: 此题需要提交作业。