

近世代数习题作业 2

1. 设 A 是半群 (S, \circ) 的非空子集, $\langle A \rangle$ 为由 A 生成的子半群, 证明:

$$\langle A \rangle = \{x \mid \exists a_1, a_2, \dots, a_n \in A \text{ 使 } x = a_1 a_2 \cdots a_n, n \geq 1\}$$

不会

2. 设 (M, \circ, e) 是一个幺半群, $a \in M$ 称为幂等元, 如果 $a \circ a = a$ 。证明: 如果 M 是可交换的幺半群, 则 M 的所有幂等元之集是 M 的一个子幺半群。✓

3. 循环幺半群的子幺半群是否还是循环幺半群? 请举例说明你的结论。不会

4. 设循环幺半群 $(M, \circ, e) = \langle a \rangle$, 且 $a^6 = e$, 请分别给出 $\langle a^i \rangle = ? (i = 2, 3, 4, 5)$ 。

5. 设 (M_1, \circ, e_1) 与 $(M_2, *, e_2)$ 是两个幺半群, $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ 的同态。证明: $\varphi^{-1}(e_2)$

是 M_1 的一个子幺半群。✓ $\varphi^{-1}(e_2)$ 是否是 M_1 的理想?

$$\varphi^{-1}(e_2) = \{x \mid x \in M_1 \wedge \varphi(x) = e_2\}$$

6. 根据幺半群同构的 Cayley 定理, 自己举例说明一个幺半群同构于一个变换幺半群。✓

7. 试证: 两个同态的合成还是同态。✓

证明 子幺半群: { 幺元
封闭性