**近世代数课后习题作业1部分参考解答**

1. 参见讲义1-2的思考解答。
2. 参见讲义1-2中6/16页中例2。

3.

**证明：**只须证：对，若有，则必有。

由结合律知，，从而，又为左消去元，故有，而也为左消去元，所以有。

/////////////////////////////////////

4.

**证明：**由普通加法和乘法满足交换律知所定义的二元运算满足交换律。

1. 证为幺半群

①由定义知二元运算显然为上的一个二元代数运算，即为一代数系；

②又对有：

=，即满足结合律。

③单位元：对有

2）左消去元

由



若，则：





可得：，即

因为（为无理数）所以，从而

5.

推理不正确：

1. 由推不出 ，这里看不出满足右消去律。

2）这里不能保证，从而在半群中元素可能无意义，因为不能保证半群中一定有逆元素。

///////////////////////////

6.

**证明：**设为有限半群，且。设，则可得：

则由的有限性知，使得，不妨设，即，。

从而有：，则两边同时连续左乘可得，且满足，从而运用递归调用可得，即，令即可。

////////////////////////////

7.

**证明：**

I.证为半群：

1. 由定义知满足封闭性；
2. 显然满足结合律。

II.设为的单位元，则对，有，即，，由结合律：，，由的任意性知与为关于运算的左右单位元，而为幺半群，故有，

，则由逆元素的定义知为关于运算的逆元素，即为满足的条件。

/////////////////////////////////

8.

证明：说明扩充了一个单位元封闭性显然，验证一下结合律即可。

/////////////////////////////////

9．

**证明：**

1. 结合律：由集合论知识知集合的对称差运算满足结合律，故为半群；//这里结合律可以直接调用，不用再验证。
2. 单位元：对有；
3. 逆元：对有，即为自身。

故为群。

/////////////////////////////////

10．

**证明**：主要验证一下结合律，显然。

/////////////////////////////////

11．

**证明：**先证

由已知得：对有，

则有，下证

因为

所以

再证

，下证

因为

所以。

////////////////////////////////

12．

**证明：**由为半群，则由结合律得：对有：

由已知可得：或，即或为左零半群，或为右零半群。