

Statistical Physics

Wang Yapeng

2025 年 9 月 26 日

目录

1	近独立粒子的最概然分布	3
1.1	粒子状态的描述	3
1.2	系统微观状态的描述	4
1.3	Boltzman Distribution	5
1.4	Boltzman 统计	6
1.4.1	热力学量的统计表达	6
1.5	理想气体状态方程	6
1.5.1	麦克斯韦分布	7
1.5.2	能量均分定理	7
2	系综理论	9
	Glossary	10

Chapter 1

近独立粒子的最概然分布

1.1 粒子状态的描述

假设粒子的自由度为 r , 经典力学告诉我们, 粒子的运动状态由 r 个广义坐标 q 以及对应的广义动量 p 确定, 粒子的能量是其广义坐标和广义动量的函数:

$$\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{q}, \mathbf{p}). \quad (1.1)$$

\mathbf{p} 和 \mathbf{q} 张成一个 $2r$ 维的线性空间, 称为 μ 空间, 粒子任意时刻的状态为 μ 空间中的一个点, 运动轨迹为 μ 空间中的一条线。

在量子力学中, 粒子状态由 Hilbert 空间中的矢量描述, 实际应用中常用一组量子数描述。

下面介绍几个简单例子:

自由粒子 理想气体的分子和金属的自由电子可以视为自由粒子, 有三个自由度:

$$x, y, z, p_x = m\dot{x}, p_y = m\dot{y}, p_z = m\dot{z}. \quad (1.2)$$

其能量就是粒子的动能

$$\varepsilon = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2). \quad (1.3)$$

一维谐振子 一维谐振子只有一个自由度

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2. \quad (1.4)$$

其运动轨迹在 μ 空间中为一个椭圆。

转子 转子只有两个自由度

$$\varepsilon = \frac{1}{2I} \left(p_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} p_\varphi^2 \right) \quad (1.5)$$

在量子力学中转子的能量为

$$\varepsilon = \frac{M^2}{2I}, M^2 = l(l+1)\hbar^2, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.6)$$

$$M_z = m\hbar, m = -l, \dots, l. \quad (1.7)$$

1.2 系统微观状态的描述

近独立粒子系统是指系统中粒子的相互作用很弱，相互作用势能远小于粒子动能，可以忽略粒子间的相互作用，比如理想气体。

近独立粒子系统中系统的能量可以描述为单粒子能量的和：

$$E = \sum_i^N \varepsilon_i. \quad (1.8)$$

在经典力学的视角下，全同粒子是可分辨的，这样的系统称为**玻尔兹曼系统 (Boltzman System)**，而在量子力学视角下，全同粒子是无法分辨的，按照组成粒子的不同分为玻色系统和费米系统。

Theorem 1.1 (等概率原理) 对于平衡状态的孤立系统，系统各个可能的微观状态出现的概率是相等的。

对于一个系统中的 N 个粒子，能级 ε_i 简并度为 ω_i ，对应 a_i 个粒子，显然系统的总能量为

$$E = \sum_l a_l \varepsilon_l. \quad (1.9)$$

对于**玻尔兹曼系统**，系统的微观状态总数为

$$\Omega_{M.B.} = \frac{N!}{\prod_l a_l!} \prod_l \omega_l^{a_l}. \quad (1.10)$$

对于玻色系统

$$\Omega_{B.E.} = \prod_l \frac{(\omega_l + a_l - 1)!}{a_l! (\omega_l - 1)!}. \quad (1.11)$$

对于费米系统

$$\Omega_{F.D.} = \prod_l \frac{\omega_l!}{a_l! (\omega_l - a_l)!}. \quad (1.12)$$

当能级中的粒子数远小于该能级的简并度，即 $a_l \ll \omega_l$ 时，后两者都可以近似为

$$\Omega_{B.E.} \approx \frac{\Omega_{M.B.}}{N!}, \quad \Omega_{F.D.} \approx \frac{\Omega_{M.B.}}{N!}. \quad (1.13)$$

也就是说这两个系统的宏观特征与玻尔兹曼系统是一致的。

1.3 Boltzman Distribution

根据等概率原理，我们可以认为微观状态数最多的分布出现的概率是最大的，因此称为最概然分布。玻尔兹曼系统粒子的最概然分布就称为玻尔兹曼分布 (Boltzman Distribution)。

在接下来的讨论之前，我们先声明一个近似关系：

$$\ln m! = m(\ln m - 1), m \gg 1. \quad (1.14)$$

玻尔兹曼系统的微观态总数为

$$\Omega = \frac{N!}{\prod_l a_l!} \prod_l \omega_l^{a_l}. \quad (1.15)$$

取对数可以得到：

$$\ln \Omega = N(\ln N - 1) - \sum_l a_l(\ln a_l - 1) + \sum_l a_l \ln \omega_l. \quad (1.16)$$

对 a_l 分别求导，可以得到微观态总数最多的条件：

$$a_l = \omega_l e^{-\alpha - \beta \varepsilon_l}. \quad (1.17)$$

即处于某一状态的粒子数目与能级简并度成正比，与能级能量的指数成反比。参数 α, β 可以通过以下等式计算得到：

$$N = \sum_s e^{-\alpha - \beta \varepsilon_s}. \quad (1.18)$$

$$E = \sum_s \varepsilon_s e^{-\alpha - \beta \varepsilon_s}. \quad (1.19)$$

1.4 Boltzman 统计

1.4.1 热力学量的统计表达

内能为粒子无规则运动总能量的统计平均:

$$U = \sum_l a_l \varepsilon_l = \sum_l \varepsilon_l \omega_l e^{-\alpha - \beta \varepsilon_l}. \quad (1.20)$$

引入配分函数 Z_1 :

$$Z_1 = \sum_l \omega_l e^{-\beta \varepsilon_l}. \quad (1.21)$$

则有

$$N = e^{-\alpha} Z_1. \quad (1.22)$$

$$U = -N \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_1. \quad (1.23)$$

即为内能的统计表达式。

压强为

$$p = \frac{N}{\beta} \frac{\partial}{\partial V} \ln Z_1. \quad (1.24)$$

熵定义为

$$S = k \ln \Omega \quad (1.25)$$

其中 $k = \frac{1}{\beta T} = 1.381 \times 10^{-23} \text{J} \cdot \text{K}^{-1}$, 为玻尔兹曼常数。

1.5 理想气体状态方程

理想气体的配分函数为

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{1}{h^3} \iiint dx dy dz \iiint e^{-\beta \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m}} dp_x dp_y dp_z. \\ &= V \left(\frac{2\pi m}{h^2 \beta} \right)^{3/2}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

压强为

$$p = \frac{N}{\beta} \frac{\partial}{\partial V} \ln Z_1 = \frac{NkT}{V}. \quad (1.27)$$

1.5.1 麦克斯韦分布

通过玻尔兹曼分布可以得到分子速率的分布

$$f(v) = Ae^{-\frac{mv^2}{2kT}}. \quad (1.28)$$

其中 $A = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2}$ 为归一化常数。这个分布称为麦克斯韦分布。

可以得到粒子的平均速率为

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

平均动能为

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT.$$

1.5.2 能量均分定理

Theorem 1.2 (能量均分定理) 对于温度为 T 的平衡状态的经典系统，粒子能量中每一个平方项的平均值 (每一个自由度的动能) 等于 $\frac{1}{2}kT$ 。

利用能量均分定理，可以很方便地对系统能量进行求解。例如：

单原子分子的内能为

$$U = \frac{3}{2}NkT.$$

定容热容为

$$C_v = \frac{3}{2}kT.$$

定压热容为

$$C_p = C_v + Nk = \frac{5}{2}kT.$$

双原子分子有 5 个自由度，分子的内能为

$$U = \frac{5}{2}NkT.$$

定容热容为

$$C_v = \frac{5}{2}kT.$$

定压热容为

$$C_p = C_v + Nk = \frac{7}{2}kT.$$

Chapter 2

系综理论

