Quantum Mechanics

Wang Yapeng

2025 年 9 月 5 日

preface

量子力学诞生于 19 世纪，是物理学的一个重要分支。它主要研究微观粒子的行为和性质，如电子、原子、分子等。量子力学的基本原理包括波粒二象性、不确定性原理、量子叠加态等，这些原理与经典力学有很大的不同。

目录

Chapter 1

Fundamental Concepts

量子力学（Quantum Mechanics） 有以下几个基本假设：

1. 系统的状态由希尔伯特空间（Hilbert Space）中的矢量描述。
2. 可观测量由厄米算符表示，测量结果为该算符的本征值。
3. 态矢量的演化由薛定谔方程描述。

1.1 Bra , Ket & Operators

在量子力学中，系统的状态由希尔伯特空间中的矢量表示，通常称为右矢（ket），记作 $|\psi\rangle$。

右矢的复共轭称为左矢（bra），记作 $\langle\psi|$。

算符（operator）是作用在希尔伯特空间上的线性映射，通常用花体字母表示，如 $\mathcal{A}$。算符的作用是将一个右矢映射到另一个右矢，即 $\mathcal{A}|\psi\rangle = |\phi\rangle$。

1.1.1 Inner Product & Outer Product

左矢与右矢可以相乘得到一个复数，称为内积，记作 $\langle\phi|\psi\rangle$。内积满足以下性质：

- $\langle\psi|\psi\rangle \geq 0$，且当且仅当 $|\psi\rangle = 0$ 时取等号。
- $\langle\phi|\psi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle^*$
- $\langle\phi|(\alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle)\rangle = \alpha\langle\phi|\psi_1\rangle + \beta\langle\phi|\psi_2\rangle$

右矢与左矢相乘得到一个算符，称为外积，记作 $|\psi\rangle\langle\phi|$。外积的作用是将 $|\phi\rangle$ 映射到 $|\psi\rangle$，即 $(|\psi\rangle\langle\phi|)\,|\phi\rangle = |\psi\rangle$。

1.1.2 Hermitian Operators

算符 $\mathcal{A}$ 的厄密共轭记作 $\mathcal{A}^\dagger$，定义为满足以下关系的算符：

$$\langle\phi|\mathcal{A}\psi\rangle = \left\langle\mathcal{A}^\dagger\phi\middle|\psi\right\rangle \tag{1.1}$$

如果 $\mathcal{A} = \mathcal{A}^\dagger$，则称 $\mathcal{A}$ 为厄米算符。厄米算符具有以下性质：

- 本征值为实数。
- 不同本征值对应的本征矢量正交。
- 可以构成完备归一化的本征矢量组。

1.1.3 Eigenvalues & Eigenstates

对于算符 $\mathcal{A}$，如果存在非零矢量 $|\psi\rangle$ 和标量 a，使得

$$\mathcal{A}\,|\psi\rangle = a\,|\psi\rangle \tag{1.2}$$

则称 $|\psi\rangle$ 为 $\mathcal{A}$ 的本征态，a 为对应的本征值。

在量子力学中，可观测量由厄米算符表示，测量结果为该算符的本征值。

1.1.4 measurement

测量一个可观测量 $\mathcal{A}$ 时，系统的状态 $|\psi\rangle$ 会坍缩到 $\mathcal{A}$ 的某个本征态 $|a\rangle$，测量结果为对应的本征值 a。测量结果 a 出现的概率为

$$P(a) = |\,\langle a|\psi\rangle\,|^2 \tag{1.3}$$

测量后系统的状态变为 $|a\rangle$。

1.1.5 commutation of operators & uncertainty principle

两个算符 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的对易子定义为

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A} \tag{1.4}$$

如果 $[\mathcal{A},\mathcal{B}]=0$，则称 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 对易。对易的算符可以同时具有确定的测量值。

如果 $[\mathcal{A},\mathcal{B}]\neq 0$，则称 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 不对易。根据不确定性原理，两个不对易的可观测量不能同时具有确定的测量值。具体地，对于两个可观测量 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$，它们的测量结果的不确定性满足以下关系：

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2}|\overline{[\mathcal{A},\mathcal{B}]}| \tag{1.5}$$

其中 ΔA 和 ΔB 分别表示测量结果的标准差，$\overline{\ }$ 表示期望值。

1.2 Position & Momentum Operators

在一维空间中，位置算符 $\hat{x}$ 和动量算符 $\hat{p}$ 定义如下：

$$\hat{x}\,|x\rangle = x\,|x\rangle \tag{1.6}$$

$$\hat{p}\,|p\rangle = p\,|p\rangle \tag{1.7}$$

其中 $|x\rangle$ 和 $|p\rangle$ 分别为位置和动量的本征态。

位置本征态和动量本征态满足正交归一化条件：

$$\langle x'|x\rangle = \delta(x'-x) \tag{1.8}$$

$$\langle p'|p\rangle = \delta(p'-p) \tag{1.9}$$

其内积为

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{ipx/\hbar} \tag{1.10}$$

进而可以得到位置和动量算符的对易关系：

$$[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar \tag{1.11}$$

1.2.1 Representation in Position Space

1.2.2 Representation in Momentum Space

1.2.3 the translation operator

平移算符 $\mathscr{T}(a)$ 定义为将位置平移 a 的算符，即

$$\mathcal{T}(a)\,|x\rangle = |x+a\rangle \tag{1.12}$$

Chapter 2

Quantum Dynamics

2.1 Time Evolution

量子态的时间演化由薛定谔方程描述:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi(t)\right\rangle = \mathcal{H}\left|\psi(t)\right\rangle \tag{2.1}$$

其中 $\mathcal{H}$ 是系统的哈密顿算符。

2.2 Schrodinger Picture and Heisenberg Picture

2.3 partile in one-dimensional potential

2.3.1 free particle

2.3.2 infinite-deep potential well

2.3.3 finite potential well

2.3.4 potential barrier & tunneling effect

2.3.5 delta potential well & barrier

2.4 harmonic oscillator

术语表

右矢 在量子力学中，右矢（ket）是希尔伯特空间中的一个元素，通常表示为 $|\psi\rangle$，它描述了量子系统的状态。右矢可以与左矢（bra）结合形成内积，用于计算量子态之间的关系和测量结果。. 3, 4

左矢 在量子力学中，左矢（bra）是希尔伯特空间中的一个元素，通常表示为 $\langle\psi|$，它是一个线性函数，可以作用于右矢（ket）以产生一个复数。左矢与右矢一起构成了内积的基础，用于描述量子态之间的关系和测量结果。. 3, 4

希尔伯特空间 希尔伯特空间（Hilbert Space）是量子力学中用于描述量子态的数学结构。它是一个完备的内积空间，允许定义向量的长度和角度，从而可以进行正交化和归一化等操作。希尔伯特空间中的每个向量对应一个量子态，而线性算符则作用于这些向量以描述物理量的测量和系统的演化。. 3

算符 在量子力学中，算符（operator）是作用在希尔伯特空间中的线性映射，用于描述物理量的测量和量子态的演化。常见的算符包括位置算符、动量算符和哈密顿算符等。算符通常表示为大写字母，如 A、B 等，并且可以通过对易关系来描述它们之间的相互作用。. 3

量子力学 量子力学（Quantum Mechanics）是研究微观粒子行为和性质的物理学分支，是现代物理学体系的重要基石。. 3