

Quantum Mechanics

Wang Yapeng

2025 年 9 月 23 日

preface

量子力学诞生于 19 世纪，是物理学的一个重要分支。它主要研究微观粒子的行为和性质，如电子、原子、分子等。量子力学的基本原理包括波粒二象性、不确定性原理、量子叠加态等，这些原理与经典力学有很大的不同。

目录

| | |
|--|----------|
| preface | i |
| 1 Fundamental Concepts | 3 |
| 1.1 Bra , Ket & Operators | 3 |
| 1.1.1 Inner Product & Outer Product | 3 |
| 1.1.2 Hermitian Operators | 4 |
| 1.1.3 Eigenvalues & Eigenstates | 4 |
| 1.1.4 measurement | 4 |
| 1.1.5 commutation of operators & uncertainty principle | 4 |
| 1.2 Position & Momentum Operators | 5 |
| 1.2.1 Representation in Position Space | 5 |
| 1.2.2 Representation in Momentum Space | 5 |
| 1.2.3 the translation operator | 5 |
| 2 Quantum Dynamics | 7 |
| 2.1 Time Evolution | 7 |
| 2.2 Schrodinger Picture and Heisenberg Picture | 7 |
| 2.3 partile in one-dimensional potential | 7 |
| 2.3.1 free particle | 8 |
| 2.3.2 finite-deep potential well | 8 |
| 2.3.3 infinite potential well | 9 |
| 2.3.4 potential barrier & tunneling effect | 9 |
| 2.3.5 delta potential well & barrier | 9 |
| 2.4 Simple Harmonic Oscillator | 10 |
| 2.4.1 the solution in position presentation | 10 |
| 2.4.2 solution in quantum number presentation | 11 |
| 2.5 central field | 13 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 2.5.1 | Coulomb Field of Hydrogen Atom | 13 |
| 2.6 | Hamiltonian with time term | 13 |
| 3 | Angular Momentum and Rotation | 17 |
| 3.1 | Angular Momentum | 17 |
| 3.2 | the Quantum Number of Angular Momentum | 18 |
| 3.3 | Rotation | 19 |
| A | Mathematical Equations | 21 |
| A.1 | Hermitian ploynomial | 21 |
| A.2 | Sphere Harmonic Function | 21 |
| | Glossary | 23 |

Chapter 1

Fundamental Concepts

量子力学 (Quantum Mechanics) 有以下几个基本假设:

1. 系统的状态由希尔伯特空间 (Hilbert Space) 中的矢量描述。
2. 可观测量由厄米算符表示, 测量结果为该算符的本征值。
3. 态矢量的演化由薛定谔方程描述。

1.1 Bra , Ket & Operators

在量子力学中, 系统的状态由希尔伯特空间中的矢量表示, 通常称为右矢 (ket), 记作 $|\psi\rangle$ 。

右矢的复共轭称为左矢 (bra), 记作 $\langle\psi|$ 。

算符 (operator) 是作用在希尔伯特空间上的线性映射, 通常用花体字母表示, 如 \hat{A} 。算符的作用是将一个右矢映射到另一个右矢, 即 $\hat{A}|\psi\rangle = |\phi\rangle$ 。

1.1.1 Inner Product & Outer Product

左矢与右矢可以相乘得到一个复数, 称为内积, 记作 $\langle\phi|\psi\rangle$ 。内积满足以下性质:

- $\langle\psi|\psi\rangle \geq 0$, 且当且仅当 $|\psi\rangle = 0$ 时取等号。
- $\langle\phi|\psi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle^*$
- $\langle\phi|(\alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle)\rangle = \alpha\langle\phi|\psi_1\rangle + \beta\langle\phi|\psi_2\rangle$

右矢与左矢相乘得到一个算符, 称为外积, 记作 $|\psi\rangle\langle\phi|$ 。外积的作用是将 $|\phi\rangle$ 映射到 $|\psi\rangle$, 即 $(|\psi\rangle\langle\phi|)|\phi\rangle = |\psi\rangle$ 。

1.1.2 Hermitian Operators

算符 \hat{A} 的厄密共轭记作 \hat{A}^\dagger ，定义为满足以下关系的算符：

$$\langle \phi | \hat{A} \psi \rangle = \langle \hat{A}^\dagger \phi | \psi \rangle \quad (1.1)$$

如果 $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ ，则称 \hat{A} 为厄米算符。厄米算符具有以下性质：

- 本征值为实数。
- 不同本征值对应的本征矢量正交。
- 可以构成完备归一化的本征矢量组。

1.1.3 Eigenvalues & Eigenstates

对于算符 \hat{A} ，如果存在非零矢量 $|\psi\rangle$ 和标量 a ，使得

$$\hat{A} |\psi\rangle = a |\psi\rangle \quad (1.2)$$

则称 $|\psi\rangle$ 为 \hat{A} 的本征态， a 为对应的本征值。

在量子力学中，可观测量由厄米算符表示，测量结果为该算符的本征值。

1.1.4 measurement

测量一个可观测量 \hat{A} 时，系统的状态 $|\psi\rangle$ 会坍缩到 \hat{A} 的某个本征态 $|a\rangle$ ，测量结果为对应的本征值 a 。测量结果 a 出现的概率为

$$P(a) = |\langle a | \psi \rangle|^2 \quad (1.3)$$

测量后系统的状态变为 $|a\rangle$ 。

1.1.5 commutation of operators & uncertainty principle

两个算符 \hat{A} 和 \hat{B} 的对易子定义为

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \quad (1.4)$$

如果 $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ ，则称 \hat{A} 和 \hat{B} 对易。对易的算符可以同时具有确定的测量值。

如果 $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$ ，则称 \hat{A} 和 \hat{B} 不对易。根据不确定性原理，两个不对易的可观测量不能同时具有确定的测量值。具体地，对于两个可观测量 \hat{A} 和 \hat{B} ，它们的测量结果的不确定

性满足以下关系：

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\overline{[\hat{A}, \hat{B}]}| \quad (1.5)$$

其中 ΔA 和 ΔB 分别表示测量结果的标准差， $\bar{\cdot}$ 表示期望值。

1.2 Position & Momentum Operators

在一维空间中，位置算符 \hat{x} 和动量算符 \hat{p} 定义如下：

$$\hat{x} |x\rangle = x |x\rangle \quad (1.6)$$

$$\hat{p} |p\rangle = p |p\rangle \quad (1.7)$$

其中 $|x\rangle$ 和 $|p\rangle$ 分别为位置和动量的本征态。

位置本征态和动量本征态满足正交归一化条件：

$$\langle x' | x \rangle = \delta(x' - x) \quad (1.8)$$

$$\langle p' | p \rangle = \delta(p' - p) \quad (1.9)$$

其内积为

$$\langle x | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar} \quad (1.10)$$

进而可以得到位置和动量算符的对易关系：

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \quad (1.11)$$

1.2.1 Representation in Position Space

1.2.2 Representation in Momentum Space

1.2.3 the translation operator

平移算符 $\mathcal{T}(a)$ 定义为将位置平移 a 的算符，即

$$\mathcal{T}(a) |x\rangle = |x + a\rangle \quad (1.12)$$

Chapter 2

Quantum Dynamics

2.1 Time Evolution

量子态的时间演化由薛定谔方程描述：

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad (2.1)$$

其中 \hat{H} 是系统的哈密顿算符：

$$\hat{H} = -\frac{\hat{P}^2}{2m} + V(x) \quad (2.2)$$

2.2 Schrodinger Picture and Heisenberg Picture

对于量子系统的演化，有两种不同的视角，分别称为薛定谔绘景 (Schrodinger's Picture) 和海森堡绘景 (Heisenberg's Picture)。

在薛定谔绘景中，物理量代表的算符是不变的，量子态随时间变化。而在海森堡绘景中，量子态是不变的，物理量代表的算符随时间变化。这两种不同的绘景在物理意义上是等价的。

2.3 particle in one-dimensional potential

任何物理态都可以视为若干个本征态的线性叠加，在这里我们取能量本征态作为基矢。对于稳定一维势场中的能量本征态 $|E_i\rangle$,

$$\hat{U}(t) |E_i\rangle = \exp\left(-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right) |E_i\rangle = \exp\left(-\frac{iE_it}{\hbar}\right) |E_i\rangle. \quad (2.3)$$

因此有

$$\langle x | \hat{U}(t) | E_i \rangle = \exp\left(-\frac{iE_i t}{\hbar}\right) \langle x | E_i \rangle. \quad (2.4)$$

可以在坐标表象进行定态求解。

$\forall |x\rangle$, 有

$$\langle x | \hat{H} | E_i \rangle = E_i \langle x | E_i \rangle \quad (2.5)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \langle x | E_i \rangle = E_i \langle x | E_i \rangle \quad (2.6)$$

自然地, 其边界条件为:

1. 对于 $V(x) \neq \infty$ 的情形, $\frac{\hbar^2}{2m} \langle x | E_i \rangle$ 存在且有限;
2. 对于 $V(x) = \pm\infty$ 的情形, $\frac{\hbar^2}{2m} \langle x | E_i \rangle = \mp\infty$.

2.3.1 free particle

对于自由粒子, 其哈密顿量为

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} \quad (2.7)$$

显然, 其动量本征态就是能量本征态, 为 $|p\rangle$, 在位置表象下为

$$\psi(x, p) = \langle x | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar} \quad (2.8)$$

2.3.2 finite-deep potential well

对于一维的有限深方势阱 $V(x)$:

$$V(x) = \begin{cases} = -V_0, & x \in [0, a]; \\ = 0, & x < 0 \text{ or } x > a. \end{cases} \quad (2.9)$$

记 $\langle x | E_i \rangle = \psi(x)$ 分为三段,

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1(x), & x < 0; \\ \psi_2(x), & 0 \leq x \leq a; \\ \psi_3(x), & x > a. \end{cases} \quad (2.10)$$

其边界条件为:

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \quad (2.11)$$

$$\psi_2(a) = \psi_3(a) \quad (2.12)$$

$$\psi'_1(0) = \psi'_2(0) \quad (2.13)$$

$$\psi'_2(a) = \psi'_3(a) \quad (2.14)$$

2.3.3 infinite potential well

对于无限深势阱:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0, a); \\ +\infty, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2.15)$$

显然, 其势阱外的波函数总为 0, 势阱内的解为正弦函数:

$$\psi(x) = A \sin(\omega x + \varphi), \omega = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}. \quad (2.16)$$

根据边界条件 $\psi(0) = \psi(a) = 0$ 可以得到 $\varphi = 0, \omega x = n\pi$. 归一化得到本征态波函数与对应的能量本征态为:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}. \quad (2.17)$$

2.3.4 potential barrier & tunneling effect

2.3.5 delta potential well & barrier

对于 δ 势阱

$$V(x) = -V_0 \delta(x), \quad (2.18)$$

波函数分为束缚态 $E \leq 0$ 和散射态 $E > 0$.

散射态 对于从左侧入射的波函数:

$$\psi_1(x) = \exp\left(i\frac{px}{\hbar}\right) + R \exp\left(-i\frac{px}{\hbar}\right), x < 0; \quad (2.19)$$

$$\psi_2(x) = T \exp\left(i\frac{px}{\hbar}\right), x > 0. \quad (2.20)$$

在 $x = 0$ 处进行势函数积分:

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x) + V(x)\psi(x) - E\psi(x) \right] dx = 0. \quad (2.21)$$

积分得：

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(\psi'(x)|_{0+} - \psi'(x)|_{0-}) - V_0\psi(0) = 0. \quad (2.22)$$

结合边界条件 $\psi(0)|_{0+} = \psi(0)|_{0-}$ ，可以解得：

$$T = \frac{1}{1+\beta}, R = \frac{-\beta}{1+\beta}, \beta = \frac{mV_0}{ip\hbar}. \quad (2.23)$$

束缚态 双边波函数为指数形式，边界条件同式2.22. 有唯一解：

$$E = -\frac{mV_0^2}{2\hbar^2}. \quad (2.24)$$

δ 势垒 与之相似， δ 势垒仅有散射态，其解为：

$$T = \frac{1}{1-\beta}, R = \frac{\beta}{1-\beta}, \beta = \frac{mV_0}{ip\hbar}. \quad (2.25)$$

2.4 Simple Harmonic Oscillator

对于一维简谐势场

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2. \quad (2.26)$$

2.4.1 the solution in position presentation

在坐标表象中，定态薛定谔方程为：

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi = E\psi. \quad (2.27)$$

引入无量纲量 $\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x = \alpha x$ ，将方程简化为：

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + (\lambda - \xi^2)\psi = 0, \quad \lambda = \frac{2E}{\hbar\omega}. \quad (2.28)$$

尝试渐进求解，当 $\xi \rightarrow \infty$ 时，忽略 λ ，方程为：

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} = \xi^2\psi. \quad (2.29)$$

其解 $\psi \sim e^{\pm\xi^2/2}$.

因此，将原方程的解 ψ 写成 $\psi = H(\xi)e^{-\xi^2/2}$ ，其中 $H(\xi)$ 可通过多项式法进行求解。

将 $H(x)$ 带入可以得到：

$$\frac{d^2 H}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dH}{d\xi} + (\lambda - 1)H = 0. \quad (2.30)$$

这个方法得到的解称为厄米多项式 (详见附录A.1), 其存在收敛解的条件为

$$\lambda = 2n + 1, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots. \quad (2.31)$$

带入原方程可得波函数的本征值为：

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots. \quad (2.32)$$

2.4.2 solution in quantum number presentation

简谐势场的薛定谔方程还可以写成以下形式：

$$\frac{1}{2m} (\hat{p}^2 + m^2 \omega^2 \hat{x}^2) \psi = E\psi \quad (2.33)$$

参考平方差公式，可以定义算符：

$$a_{\pm} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} (\mp i\hat{p} + m\omega\hat{x}). \quad (2.34)$$

但是 \hat{x} 与 \hat{p} 不对易， a_{\pm} 同样不对易，不能简单套用平方差公式，需要进行检验：

$$\begin{aligned} a_- a_+ &= \frac{1}{2\hbar m\omega} \left[\hat{p}^2 + (m\omega\hat{x})^2 - im\omega [\hat{x}, \hat{p}] \right] \\ &= \frac{1}{\hbar\omega} \hat{H} + \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

同理，有：

$$a_+ a_- = \frac{1}{\hbar\omega} \hat{H} - \frac{1}{2}. \quad (2.36)$$

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(a_+ a_- + \frac{1}{2} \right). \quad (2.37)$$

可以得到这一对算符的对易关系：

$$[a_-, a_+] = 1. \quad (2.38)$$

容易证明，对于哈密顿量 \hat{H} 的本征态 ψ ， $a_+ \psi$ 也是 \hat{H} 的本征态：

对于 \hat{H} 和 a_+ :

$$\begin{aligned} [\hat{H}, a_+] &= \hbar\omega \left(a_+ a_- + \frac{1}{2} \right) a_+ - a_+ \hbar\omega \left(a_+ a_- + \frac{1}{2} \right) \\ &= \hbar\omega (a_+ a_- a_+ - a_+ a_+ a_-) \\ &= \hbar\omega a_+ [a_-, a_+] \\ &= \hbar\omega a_+. \end{aligned} \quad (2.39)$$

同理

$$[\hat{H}, a_-] = \hbar\omega a_-. \quad (2.40)$$

那么对于 \hat{H} 的本征态 ψ :

$$\hat{H}\psi = E\psi. \quad (2.41)$$

有

$$\hat{H}a_+\psi = (E + \hbar\omega)a_+\psi. \quad (2.42)$$

$$\hat{H}a_-\psi = (E - \hbar\omega)a_-\psi. \quad (2.43)$$

但是谐振子的能量不可能为无限低，因此存在一个能量的下界使得：

$$a_-\psi_0 = 0. \quad (2.44)$$

将方程展开为：

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} (i\hat{p} + m\omega\hat{x})\psi_0 &= 0 \\ (-\hbar\frac{\partial}{\partial x} + m\omega x)\psi_0(x) &= 0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

可以解得：

$$\psi_0(x) = A \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right) \quad (2.46)$$

归一化为：

$$\psi_0(x) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar}} \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right). \quad (2.47)$$

2.5 central field

对于中心力场 $V(\vec{x}) = V(r)$, 其定态薛定谔方程可写为:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{r}) + (V(r) - E)\psi(\vec{r}) = 0 \quad (2.48)$$

其中 Laplace 算符 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 可以按照极坐标展开为:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right\} \quad (2.49)$$

将 $\psi(\vec{r})$ 写成 $\frac{u(r)}{r}Y(\theta, \phi)$, 则有:

$$\nabla^2\psi(\vec{r}) = \frac{u''(r)}{r}Y(\theta, \phi) + \frac{u(r)}{r^3} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] Y(\theta, \phi). \quad (2.50)$$

将径向部分 $u(r)$ 与轴向部分 $Y(\theta, \phi)$ 分离开:

$$\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] Y(\theta, \phi) = AY(\theta, \phi) \quad (2.51)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}u''(r) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{u(r)}{r^2} + (V(r) - E)u(r) = 0 \quad (2.52)$$

其中轴向部分的解为[球谐函数](#)(详见附录):

$$\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] Y_{l,m}(\theta, \phi) = l(l+1)Y_{l,m}(\theta, \phi) \quad (2.53)$$

径向部分需要根据势能函数进行求解。

2.5.1 Coulomb Field of Hydrogen Atom

2.6 Hamiltonian with time term

Problems

1.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) = (E - ax) \psi(x) \quad (2.54)$$

2. 对于中心势场

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r < a; \\ 0, & r \geq a. \end{cases} \quad (2.55)$$

求 V_0 的最小值, 使得能量 $E = 0$ 的无角动量态存在。

Solution to Problems

1. a

2. 无角动量, 即 $l = 0$, 径向部分为:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}u''(r) + (V(r) - E)u(r) = 0. \quad (2.56)$$

可以写成:

$$u''(r) - \alpha u(r) = 0, \quad \alpha = \frac{2m}{\hbar^2}(V - E). \quad (2.57)$$

对于 $r < a$, $\alpha = -\frac{2mV_0}{\hbar^2} < 0$, 其解为

$$u_1(r) = A \sin \left(\sqrt{-\frac{2mV_0}{\hbar^2}} r \right), r < a. \quad (2.58)$$

对于 $r \geq a$, $\alpha = 0$, 其解为

$$u_2(r) = Br + C, r \geq a \quad (2.59)$$

边界条件为:

$$u_1(a) = u_2(a) \quad \rightarrow \quad A \sin \left(\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}} a \right) = Ba + C \quad (2.60)$$

$$u_1'(a) = u_2'(a) \quad \rightarrow \quad \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}} A \cos \left(\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}} a \right) = B \quad (2.61)$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{u_2(r)}{r} = 0 \quad \rightarrow \quad B = 0. \quad (2.62)$$

解得

$$A \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \right] = C, \quad \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}} a = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi. \quad (2.63)$$

对应 V_0 最小为 $\frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2}$.

Chapter 3

Angular Momentum and Rotation

3.1 Angular Momentum

定义角动量算符

$$\hat{L} = \hat{x} \times \hat{p}. \quad (3.1)$$

在平面直角坐标中有三个分量：

$$\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y \quad (3.2)$$

$$\hat{L}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z \quad (3.3)$$

$$\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x \quad (3.4)$$

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 \quad (3.5)$$

容易证明，角动量算符的对易关系为：

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_x] = 0; \quad (3.6)$$

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z; \quad (3.7)$$

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_z] = -i\hbar\hat{L}_y. \quad (3.8)$$

其余分量可以此类推。

但是角动量的平方与各个分量都是对易的：

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_i] = 0, \quad i = x, y, z. \quad (3.9)$$

由于角动量的三个分量并不对易，这意味着量子系统中只能同时准确观测到总角动量的幅值和某一个方向的角动量分量。我们取 \hat{L}^2 和 \hat{L}_z 作为描述角动量的一组力学量完全集。我们可以找到一组量子态 $|\psi\rangle$ ，满足：

$$\hat{L}^2 |\psi\rangle = \lambda |\psi\rangle, \quad \hat{L}_z |\psi\rangle = \mu |\psi\rangle. \quad (3.10)$$

3.2 the Quantum Number of Angular Momentum

仿照谐振子中的算符，可以定义角动量的升降算符：

$$\hat{L}_{\pm} \equiv \hat{L}_x \pm \hat{L}_y. \quad (3.11)$$

易证，升降算符的对易关系为：

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_{\pm}] = 0, \quad [\hat{L}_z, \hat{L}_{\pm}] = \pm \hbar \hat{L}_{\pm}. \quad (3.12)$$

可以证明，对于 \hat{L}^2, \hat{L}_z 的共同本征态 $|\psi\rangle, \hat{L}_{\pm} |\psi\rangle$ 也是 \hat{L}^2, \hat{L}_z 的共同本征态。

Proof

对于 $\hat{L}_{\pm} |\psi\rangle$ ：

$$\hat{L}^2 \hat{L}_{\pm} |\psi\rangle = \hat{L}_{\pm} \hat{L}^2 |\psi\rangle = \lambda \hat{L}_{\pm} |\psi\rangle. \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \hat{L}_z \hat{L}_{\pm} |\psi\rangle &= \hat{L}_{\pm} \hat{L}_z |\psi\rangle \pm \hbar \hat{L}_{\pm} |\psi\rangle \\ &= (\mu \pm \hbar) \hat{L}_{\pm} |\psi\rangle. \end{aligned} \quad (3.14)$$

与简谐振子相同， \hat{L}_z 的本征值也不可能无限增高或降低，存在两个本征态满足：

$$\hat{L}_+ |\psi\rangle_{\text{highest}} = 0, \quad \hat{L}_- |\psi\rangle_{\text{lowest}} = 0. \quad (3.15)$$

假设

$$\hat{L}^z |\psi\rangle_{\text{highest}} = \lambda_{\text{max}} |\psi\rangle_{\text{highest}}, \quad \hat{L}^z |\psi\rangle_{\text{lowest}} = \lambda_{\text{min}} |\psi\rangle_{\text{lowest}}$$

可以将 \hat{L}^2 写成:

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_\pm \hat{L}_\mp + \hat{L}_z^2 \mp \hbar \hat{L}_z. \quad (3.16)$$

那么

$$\begin{aligned} \hat{L}^2 |\psi\rangle_{\text{highest}} &= \hat{L}_z^2 \mp \hbar \hat{L}_z |\psi\rangle_{\text{highest}} \\ &= \mu^2 + \mu\hbar |\psi\rangle_{\text{highest}} \\ &= \mu(\mu + \hbar) |\psi\rangle_{\text{highest}}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

即 μ 最大满足 $\mu_{\max}(\mu_{\max} + \hbar) = \lambda$, 同理 μ 最小满足 $\mu_{\min}(\mu_{\min} - \hbar) = \lambda$.

这说明 $\mu_{\min} = -\mu_{\max}$, 且 $\mu_{\max} - \mu_{\min}$ 为 \hbar 的整数倍. 取量子数 m 标记 \hat{L}_z 的本征值:

$$\mu = m\hbar, \quad m = -l, -l+1, \dots, l-1, l; \quad l = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots. \quad (3.18)$$

显然 m 只能为整数或半整数。

对应的

$$\lambda = l(l+1)\hbar^2. \quad (3.19)$$

3.3 Rotation

附录 A

Mathematical Equations

A.1 Hermitian ploynomial

A.2 Sphere Harmonic Function

术语表

右矢 在量子力学中，右矢 (ket) 是希尔伯特空间中的一个元素，通常表示为 $|\psi\rangle$ ，它描述了量子系统的状态。右矢可以与左矢 (bra) 结合形成内积，用于计算量子态之间的关系和测量结果。 . 3

左矢 在量子力学中，左矢 (bra) 是希尔伯特空间中的一个元素，通常表示为 $\langle\psi|$ ，它是一个线性函数，可以作用于右矢 (ket) 以产生一个复数。左矢与右矢一起构成了内积的基础，用于描述量子态之间的关系和测量结果。 . 3

希尔伯特空间 希尔伯特空间 (Hilbert Space) 是量子力学中用于描述量子态的数学结构。它是一个完备的内积空间，允许定义向量的长度和角度，从而可以进行正交化和归一化等操作。希尔伯特空间中的每个向量对应一个量子态，而线性算符则作用于这些向量以描述物理量的测量和系统的演化。 . 3

海森堡绘景 Heisenberg's Picture. 7

球谐函数 .. 13

算符 在量子力学中，算符 (operator) 是作用在希尔伯特空间中的线性映射，用于描述物理量的测量和量子态的演化。常见的算符包括位置算符、动量算符和哈密顿算符等。算符通常表示为大写字母，如 A 、 B 等，并且可以通过对易关系来描述它们之间的相互作用。 . 3

薛定谔绘景 Schrodinger's Picture. 7

量子力学 量子力学 (Quantum Mechanics) 是研究微观粒子行为和性质的物理学分支，是现代物理学体系的重要基石。 . 3

