מבוא

יום אחד קם לו איש חביב ומחליט לחקור את ההבדל בין אשליה למציאות. הוא שם לב לעובדה שכל שאנו תופסים כמציאות הוא השתקפויות שבעיננו נראים כמציאות. אך האם מציאויות אלה אכן קיימות? אם נאמר שכן מה נעשה לגבי חלומותינו שהרי גם הם נראים לנו (לפחות בשעת החלום) כמציאות מוחלטת? כך עבר האיש מנושא לנושא וניסה כוחו בנקודת אחיזה מציאותית וודאית כלשהי. הוא טבע את המושג "אני חושב משמע אני קיים" כלומר עצם העובדה שיש מחשבה מצביעה על קיום של ישות כלשהי שהיא האני שלי. עוד נושא היה בבחינת מציאות ממשית והוא האלגברה. שהרי האלגברה מופשטת מכל אחיזה פיזית ולעולם נוכל לסמוך על כך שחיבור שני מספרים ייתן את סכומם. אין הדבר תלוי בהשתקפויות אלא במחשבה בלבד. אולם כאשר בא איש יקר זה לתת את אותו התוקף גם לגיאומטריה הוא נתקל בבעיה קשה. הגיאומטריה תלויה בציור. וציור הוא דבר מאוד גס (לכל קו יש רוחב ואין הוא ישר לחלוטין וכד'). חשב האיש יום ויומיים והחליט להוכיח את כל משפטי הגיאומטריה על בסיס האלגברה. כך בצנעה פיתח האיש את ענף הגיאומטריה האנליטית. שמו של האיש הוא רנה דקארט (31 במרץ 1596 - 11 בפברואר 1650), והוא ידוע כאבי הפילוסופיה המודרנית. המתעניין יוכל למצוא את תמצית תורתו בספרו "הגיונות". כדאי להזכיר עוד עובדת חיים שכיום על בסיס אותה התחלה צנועה נשענת כמעט כל הגרפיקה במחשבים ובתכנות שירטוט לסוגיהם.

כדי לדבר בשפה אחת עלינו להכיר כמה מהמושגים הקשורים להנדסה אנליטית.

נקודה: לנקודה אין מימד. היא עצמה אינה נראית כי אין לה שטח כלשהו. כאשר אנו מסמנים נקודה אנו מסמנים עיגול. אמנם קטן אך כזה שיש לו כבר שטח. אחרת הייתה הנקודה שסימנו בלתי נראית. ובעצם זהו ההבדל בין הנקודה האמיתית לזו המסומנת. שהאמיתית היא בלתי נראית.

ישר: הישר שאנו ממשיגים. הוא ישר אינסופי שאין לו רוחב כלל. הרי הוא כמין חוט דק מן הדק. זאת מכיוון שהוא אוסף של אינסוף נקודות וכבר ראינו שלנקודה אין מימד כלומר הרוחב של הנקודה הוא אפס ולכן גם רוחב הישר הוא אפס. (לכאורה נראה הדבר תמוהה – איך ניתן לחבר הרבה מאוד נקודות חסרות מימד ולקבל מימד של אורך?? התשובה נמצאת בפיתוח תורת הגבולות וזה מעבר לתכנית הלימודים בבי"ס)

מרחק: מרחק הוא אורך המסלול הקצר ביותר אותו יש לעבור כדי להגיע מאובייקט אחד לאחר. לכן המרחק בין שתי נקודות הוא הישר המחבר ביניהן. המרחק בין נקודה לישר הוא המרחק של האנך לישר העובר דרך הנקודה שגם הוא המרחק הקצר ביותר ביניהם, וכן הלאה...

מערכת צירים: מערכת שרירותית שבה אנו מיצגים שני צירים ניצבים. אחד מהם מיצג את המרחק (ראה ערך)האופקי מנקודת 0. והשני את המרחק (ראה ערך) האנכי מנקודת 0.

צירי השיעורים: אלה אותם צירים המרכיבים את מערכת הצירים (ראה ערך)

ראשית הצירים: נקודה שאנו מגדירים אותה כנקודת 0 עבור צירי השיעורים (ראה ערך)

שיפוע: גודל המייצג את הזווית שבין ישר כלשהו עם הציר האופקי של מערכת הצירים (ראה ערך).

ציר x : מוסכם על הכול שהוא הציר האופקי.

ציר y : מוסכם על הכול שהוא הציר האנכי.

עליה וירידה: הפונקציה עולה – באותם מקומות שככל ש- x גדל גם y גדל (הזווית עם ציר ה-x חדה).

הפונקציה יורדת – באותם מקומות שככל ש-x גדל y קטן (הזווית עם ציר ה-x כהה).

שעורי נקודה: אלו הם שני מספרים.

השמאלי מייצג את המרחק האופקי במערכת הצירים (שיעור ה-x)

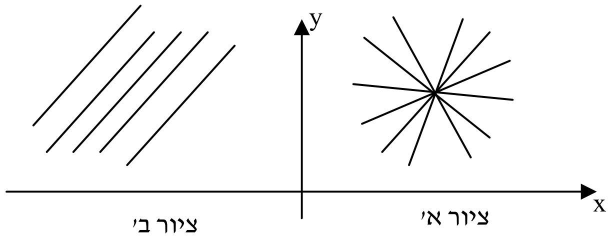
הימני מייצג את המרחק האנכי במערכת הצירים (שיעור ה- y).

מעגל: הקו היוצר את העיגול.

עיגול: השטח התחום על ידי המעגל.

<u>הגדרת הישר (תזכורת והרחבה)</u>

כדי להגדיר ישר יחיד במשור אנו זקוקים לשני מאפיינים. נקודה דרכה הוא עובר וכיוון שמאפיין אותו. מאפיין אחד בלבד לא יספיק לנו. אם לא יאפיינו עבורנו את הישר על ידי כיוונו נוכל דרך נקודה נתונה להעביר אינסוף ישרים בכיוונים שונים ולא נדע לאיזה מהם הכוונה. (כמו בציור א׳).
אם לא יגדירו לנו את הנקודה דרכה הוא עובר גם אז נוכל להעביר אינסוף ישרים מקבילים ולא נדע למי מהם הכוונה (כמו בציור ב׳)

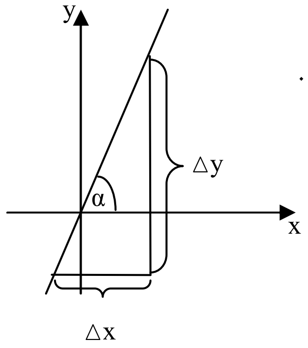


דבר זה אנו יכולים למצוא גם בחיי היומיום.
יום אחד חיפשתי אחר כתובת מסוימת. פניתי לאחד העוברים ושבים והוא ענה לי: "תמשיך ישר עד הרמזור ואחר כך תפנה ימינה".
במשפט קצר זה קיבלתי למעשה תיאור של שני ישרים.
חצי ראשון: "תמשיך ישר .." הנקודה המתוארת היא הנקודה בה אנו עומדים והכיוון הוא בכיוון ההתקדמות שלי. כלומר הנתיב אופיין על ידי נקודה וכיוון.
בהמשך: " עד הרמזור ...ימינה" גם כאן אנו יכולים למצוא נקודה וכיוון. הנקודה היא הרמזור והכיוון ימינה. כלומר אנו רואים שבכל פעם שאנו רוצים לתאר מסלולים אנו נזקקים לישרים. ובכל פעם שאנו מתארים ישר אנו משתמשים בנקודה וכיוון.

אחרי שברור לנו שלצורך הגדרת ישר אנו זקוקים לנקודה וכיוון עלינו לברר לעצמנו איך מגדירים נקודה ואיך מגדירים כיוון.
הגדרת נקודה היא פשוטה. כבר ראינו שנקודה מוגדרת על ידי שני מספרים $(x_0; y_0)$ קימת הסכמה כללית במתמטיקה שכאשר אנו מציינים x_0 אנו מתכוונים לכל מספר שיוגדר עבור ציר x (אולם הוא מספר ידוע!! כאן x אינו מייצג משתנה.) רק כאשר מציינים x ללא לווי של כתב תחתי כלשהו אז הוא מייצג משתנה.
כנ"ל לגבי y: כאשר הוא מופיע ללא ציון מספר בכתב תחתי – y – הוא משתנה אולם y_0 מיצג מספר כלשהו עבור ציר y.
לכן $(x_0; y_0)$ זהו ייצוג של נקודה.
הגדרת כיוון של ישר:
לצורך הגדרת כיוון אנו משתמשים בשיפוע של הישר. שיפוע מוגדר כגודל המייצג את הזווית שבין הישר לציר ה – x . מכיוון שכל ישר אינסופי חייב בשלב כלשהו לחתוך את ציר ה – x (או להיות מקביל אליו) לכן אנו יכולים לקבוע על פי הזוית שתיווצר את הכיוון של הישר. במצב של הקבלה אנו מבינים שהזווית בין הישר וציר ה – x הוא 0.

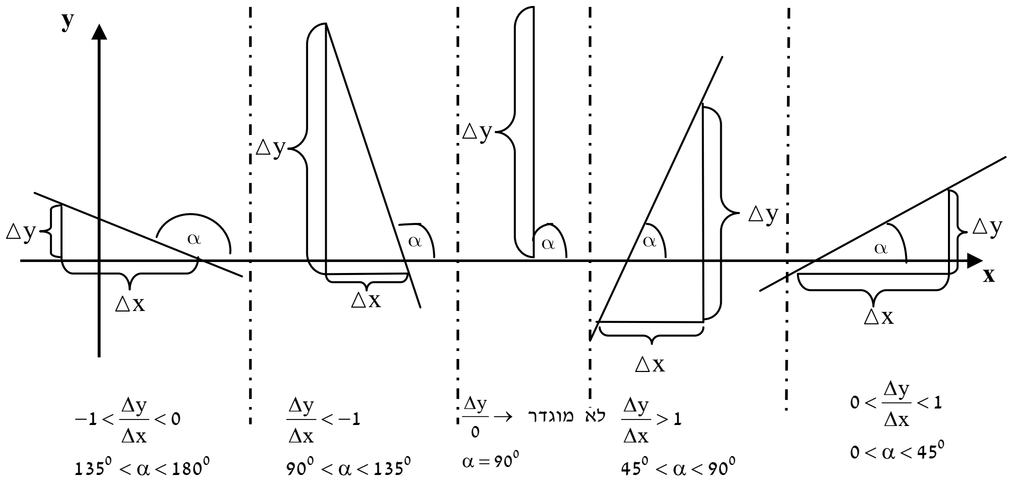
כאן יש לנו קושי מסוים. אם נגדיר את השיפוע על פי הזוית כלומר 60^0 או כל זווית אחרת יהיה השיפוע בעל מימד של מעלות. אנו באלגברה איננו מעוניינים במימדים וביחידות נלוות לגדלים ולפונקציות שאנו בונים. אנו דבקים בגדלים ובפונקציות חסרי מימד. לכן במקום לכתוב את הזוית נבחר השיפוע כיחס בין שני אורכים. איך עושים זאת?

בונים משולש ישר זווית כך שקטע מהישר הוא היתר. היחס בין אורך Δy לבין אורך Δx שהוא למעשה יחס בין שני ניצבים מוגדר כשיפוע הישר.



כמו שאנו רואים בציור יש קשר ישיר בין היחס $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ לבין הזווית α.

למעשה שיפוע של ישר מוגדר כ - $\tan\alpha$ כאשר α היא הזווית בין הישר לכיוון החיובי של ציר ה-x



עתה אנו רואים ביתר בהירות את הקשר בין השיפוע וכיוון הישר. כמו כן אנו יכולים לראות את הקשר בין השיפוע לבין עליה וירידה. מתוך הציור אנחנו רואים שכאשר הזווית היא עד 90^0 הפונקציה עולה והשיפוע חיובי. כאשר הזווית מעל 90^0 הפונקציה יורדת והשיפוע שלילי.

אמנם ל"מסיה" דקארט לא היה את הכלים של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי אבל לנו יש כלים אלה ונעשה בהם שימוש .

מכיוון שהשיפוע של ישר הוא קבוע אנו יכולים להתייחס לשיפוע זה כנגזרת הפונקציה

ולקבל (כפי שכבר למדנו): $f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m$

כאשר m קבוע.

עתה לפי החשבון האינטגרלי: $f(x) = \int m(\Delta x) = mx + n$

כאשר n מחליף את הקבוע c שהיינו רגילים אליו (רק בשל התאמת אותיות לנוסחה המוכרת).

ומכאן שמשוואת קו ישר היא כל משוואה שתבניתה: $y = mx + n$

ו- m הוא שיפוע הישר.

עתה נעבור לדוגמה של מציאת ישר במישור.

א. מה משוואת הישר ששיפועו 3 והוא עובר דרך הנקודה $(1; 5)$?

פתרון:

מתוך השיפוע אנחנו כבר יודעים שהתבנית היא: $y=3x+n$.

כדי למצוא את n נציב את הנקודה הנתונה שלנו. כי אם זו משוואת הישר צריכה המשוואה להתקיים עבור **<u>כל</u>** נקודה על הישר. גם עבור הנקודה הנתונה ולכן נציב את <u>המקרה הפרטי</u>:

$x = 1$ $\quad y = 5$ ונקבל: $5 = 3 \cdot 1 + n$

והפתרון: $n = 2$

וכפי שאנו מכירים משוואת הישר היא: $\underline{y = 3x + 2}$

מאיליו גם יובן שהפרמטר n הוא נקודת חיתוך המשוואה עם ציר y. כי בכל משוואת ישר

עבור $x = 0$ $\Leftarrow$ $y(0) = n$

עתה נוכל לראות איך לפתח את הנוסחה למציאת ישר:

התבנית הכללית של הישר: $y = mx + n$

כל נקודה (x_0,y_0) מקיימת: $y_0 = mx_0 + n$

ועל ידי חיסור המשוואות: $y - y_0 = mx - mx_0$

והנוסחה: $y - y_0 = m(x - x_0)$

ומעתה:

נוסחה למציאת ישר על פי נקודה ושיפוע:

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

ובדוגמה שלנו: $(x_0, y_0) = (1,5)$ $m = 3$

ולכן: $y - 5 = 3(x - 1)$

ואחרי פתיחת סוגריים והעברת אגפים: $y = 3x + 2$

קיבלנו את אותו פתרון.

כדי להבין את הקשר בין המשוואה לישר עלינו להיזכר בהגדרה של פונקציה. אם אנחנו מעוניינים בהגדרת הישר עלינו למצוא את **<u>החוקיות</u>** של כל הנקודות הנכללות בו. ולכן כמו בכל פונקציה:

1.כל נקודה על הישר (השייכת לישר) חייבת לקיים את המשוואה .

2.המשוואה מתארת (או מייצגת) את כל הנקודות ששייכות לישר.

ב. מה משוואת הישר המקביל לישר $y = 2x - 5$ ועובר דרך הנקודה $(-3; 5)$?

פתרון:

כבר ראינו שלכל הישרים המקבילים יש אותו שיפוע. לכן אנו יכולים ללמוד מהמשוואה הנתונה שהשיפוע הוא $m=2$ הנקודה כבר נתונה לנו באופן מפורש $(-3; 5)$ וכבר ראינו שמשיפוע ונקודה אנו יכולים לקבל משוואה על ידי הצבה:

$$y - 5 = 2(x - (-3))$$

$$y - 5 = 2(x + 3)$$

והמשוואה המבוקשת: $y = 2x + 8$

כבר נתקלנו בבעיות בהם לא ניתנת הנקודה באופן מפורש אלא ברמיזה. וראינו שבמקרים אלו עלינו למצוא קודם את הנקודה ורק אחר כך את המשוואה:

ג. מה משוואת הישר ששיפועו 5- והוא עובר בנקודת החיתוך של הישר $y = 2x + 4$ עם ציר ה-x?

פתרון:

תחילה עלינו למצוא את הנקודה המפורשת. מכיוון שנתון שהנקודה היא נקודת חיתוך עם ציר ה-x אנו יודעים שבנקודה זו מתקיים: $y = 0$.

על ידי הצבה במשוואה הנתונה: $0 = 2x + 4$

ועל ידי פתרון המשוואה: $-2x = 4 \quad / : (-2)$

מקבלים: $x = -2$

כלומר הנקודה דרכה עובר הישר המבוקש היא $(-2;0)$.

השיפוע הנתון לנו הוא $m=-5$.

עתה נחזור להצבה ונמצא: $y-0=-5(x+2)$

ומשוואת הישר: $y=-5x+10$

לעיתים אנו נדרשים למציאת נקודת חיתוך בין שני ישרים. לשם כך עלינו להבין מה המשמעות של נקודה זו. בדיוק כפי שנהגנו בחיתוך של שתי פונקציות גם כאן כאשר שני ישרים נחתכים באותה נקודה אנו יודעים שזוג המספרים $(x_0;y_0)$ מתאים לשתי המשוואות.
במילים אחרות זהו הפתרון של מערכת שתי המשוואות ואנו מוצאים זוג זה על ידי טכניקת הפתרון של מערכת המשוואות בשני נעלמים.

לדוגמה:

מצא את נקודת החיתוך של הישר $y=3x-1$ עם הישר $y=-2x+4$.

כדי למצוא את הנקודה נכתוב את המשוואות בצורה המקובלת:

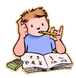
$$1)\ y=3x-1$$
$$2)\ y=-2x+4$$

על ידי חיסור: (1)-(2) נקבל $0=5x-5$

והתוצאה: $x=1$

$y=2$

כלומר נקודת החיתוך היא $(1;2)$.



<u>בדיקת הבנה</u>

1. מצאו משוואת ישר ששיפועו 5 ועובר דרך הנקודה: $(-1,3)$.
2. מצאו משוואת ישר המקביל לישר: $4x-2y+7=0$ ועובר דרך הנקודה: $(2,-3)$.
3. מצאו משוואת ישר ששיפועו -2 ועובר דרך נקודת החיתוך של הישרים:
   $x-2y-7=0$ ו- $3x+5y=1$
4. מה משוואת הישר המקביל לישר $y=-x+7$ ועובר דרך נקודת החיתוך של שני הישרים:
   $y=7x-28$ ו- $y=-2x-1$?

<u>חישוב שטחים בין ישרים וצירי השיעורים</u>

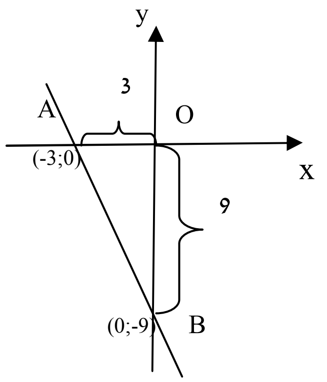
לעיתים אנו נדרשים לחשב שטח המוגבל על ידי ישר כלשהו וצירי השיעורים. מרגע שמצאנו את משוואת הישר אנו מיד יכולים לדעת את נקודות החיתוך של הישר עם הצירים. (כזכור עבור ציר x מתקיים $y=0$ ועבור ציר y מתקיים $x=0$.)

עתה אנו יכולים להתייחס אל המשולש כאל משולש ישר זווית ולהכיל עליו את הנוסחה:

$$\boxed{s=\frac{\text{מכפלת הניצבים}}{2}}$$

דוגמה :

ד. מה שטח המשולש שנוצר מהישר $y = -3x - 9$ ומצירי השיעורים?



פתרון :

תחילה (כמו בכל שאלה בחישוב שטחים נשרטט)

עתה נעבור להצבה :

עבור נקודה A נציב $y = 0$ ונקבל :

$$0 = -3x - 9$$

והפתרון הוא : $x = -3$

כלומר נקודת החיתוך היא $(-3;0)$.

ואורך הניצב הוא 3.

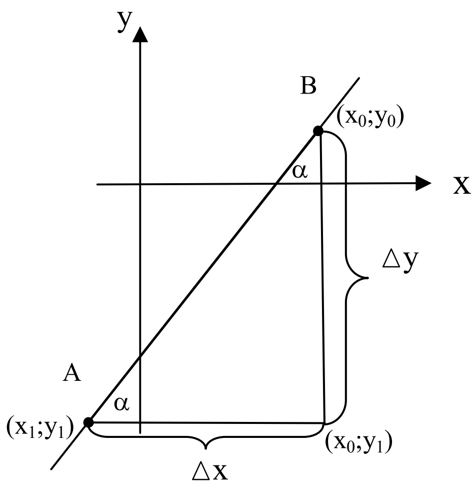
באותו אופן אנו כבר יודעים שנקודה B היא $(0;-9)$.

ולכן אורך הניצב הוא : 9.

עתה לפי הנוסחה אנו מציבים : $S_{ABO} = \frac{3 \cdot 9}{2} = 13.5$.

אחד החוקים הבסיסיים שאנו מכירים בגיאומטריה הוא שבין שתי נקודות עובר ישר אחד ואחד בלבד.
אם כך הבה נראה כיצד אנו יכולים למצוא את משוואת ישר זה.

נגדיר לעצמנו את השאלה :



מה משוואת היש העובר דרך הנקודות $B = (x_0;y_0)$

ו- $A = (x_1;y_1)$?

נתחיל כמו תמיד בשרטוט הבעיה והצבת הנתון.

עתה נשלים את המשולש ישר הזווית כך שהקטע AB ,
יהיה היתר במשולש.

כבר ראינו שכדי להגדיר ישר אנו זקוקים לשיפוע ולנקודה.

השיפוע במקרה זה : $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\alpha$

אבל אנחנו יודעים ש : $\Delta x = x_0 - x_1$ ו : $\Delta y = y_0 - y_1$

ועל ידי הצבה נקבל את הנוסחה : $\boxed{m = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}}$

ונקודה הרי כבר נתונה לנו (אפילו שתיים). נבחר אחת מהנקודות הנתונות ונציב כמו שלמדנו ונקבל את משוואת הישר.

דוגמה :

ה. מה משוואת הישר העובר דרך הנקודות : $A = (3;-1)$ ו- $B = (-7;9)$?

פתרון :

שלב א' נמצא את השיפוע (לפי הנוסחה) : $m = \frac{-1-9}{3-(-7)} = \frac{-10}{10} = -1$

כלומר : $m = -1$ ונבחר בנקודה $(7;-9)$.

ועל ידי הצבה : $y + 9 = -1(x - 7)$

ומשוואת הישר : $y = -x - 2$

ו. האם הנקודה (2;-4) נמצאת על הישר הזה (כלומר האם היא שייכת לישר שמצאנו ב- ה.)?

פתרון:

כדי לדעת את התשובה עלינו להציב את שעור ה- x של הנקודה החדשה ולראות אם שעור ה- y שמתקבל אכן זהה למשוואה, אם כן, הרי שהנקודה מקיימת את משוואת הישר והיא שייכת לישר. אם ה-y שמתקבל שונה, זה סימן שהנקודה איננה מקיימת את משוואת הישר, ולכן אינה נקודה השייכת לישר זה.

במקרה שלנו: נציב $x = 2$ ונקבל: $y = -2 + 2 = 0$

כמו שאנחנו רואים $y = 0 \neq 4$

כלומר: הנקודה איננה על הישר הנתון.

ז. האם ניתן למצוא נקודה אחרת שנמצאת על הישר (שונה מאלו שניתנו בדוגמה)?

פתרון:

התשובה היא כן בהחלט כל שעלינו לעשות הוא להציב איזשהו x שנבחר ונקבל את ה- y המתאים למשוואה. הזוג שנקבל הוא נקודה על הישר.

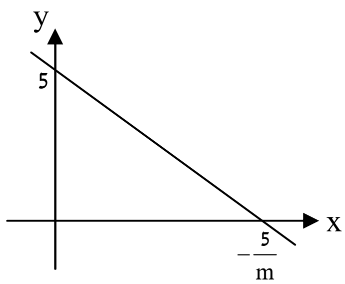
כפי שכבר ראינו הזוג: (2;0) הוא נקודה על הישר

או אם נבחר את $x = 0$ ואז נקבל: $y = -0 + 2 = 2$

ולכן גם הנקודה (0; 2) נמצאת על הישר.

לעתים ניתן לתחכם את השאלות "קצת" כמו בדוגמה הבאה:

ח. השטח הכלוא בין הישר: $y = mx + 5$ לבין השיעורין, הוא: $s = 2.5$. מצאו את משוואת הישר.



פתרון:

מתוך המשוואה אנו יודעים שנקודת החיתוך של הישר עם ציר y הוא 5.

כלומר הניצב האנכי הוא: 5 יח'.

למציאת שיעור ה- x בו חותך הישר את ציר ה- x, נציב:

$$0 = mx + 5$$

$$-\frac{5}{m} = x$$

ומהצבה בנוסחת השטח: $s = \dfrac{5 \cdot \left(-\dfrac{5}{m}\right)}{2} = 2.5 \quad \Rightarrow \quad -\dfrac{5}{m} = 1 \quad \Rightarrow \quad -5 = m$

ומשוואת הישר: $\underline{y = -5x + 5}$

<u>בדיקת הבנה</u>

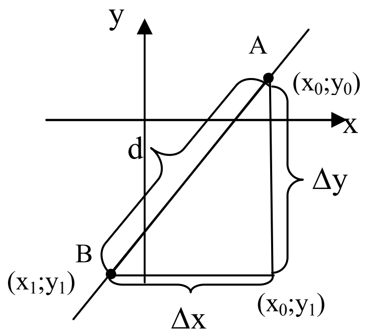
5. מצאו משוואת ישר העובר דרך הנקודות: $B(y, -2)$ $A(-1{,}3)$
6. מצאו משוואת ישר העובר דרך נקודת החיתוך של המשוואה: $y = 2x - 4$
עם ציר x, ודרך נקודת
החיתוך של הישרים: $y=2x+1$, $x - 2y = 7$

7. שטח המשולש הנוצר על ידי הישר : $y = mx - 4$ וצירי השיעורים, הוא 4 .
מצאו את משוואת הישר.
8. בין הישר : $y = x + n$ לבין צירי השיעורים, כלוא משולש ששטחו 4.5 .
מצאו את משוואת היתר.

כפי שאנו רואים הרבה מתוך הנוסחאות להנדסה אנליטית נשענות על המשולש ישר הזווית. גם הנוסחה למציאת מרחק בין שתי נקודות במישור נשענת על משולש זה.

בעיה :

מה המרחק בין שתי הנקודות :
$A = (x_0; y_0)$ ו – $B = (x_1; y_1)$?



גם כאן נתחיל בציור.

מתוך משפט פיתגורס אנחנו למדים ש : $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = (\Delta z)^2$

וכבר למדנו ש : $\Delta x = x_0 - x_1$ ו : $\Delta y = y_0 - y_1$

אם נציב גם את : $\Delta z = d$ נקבל : $(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 = d^2$

ואחרי הוצאת שורש נקבל את הנוסחה :

$$\boxed{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2} = d}$$

דוגמה :

ט. מה המרחק בין הנקודות (3;2) ו- (8;-5)

פתרון :
$$d = \sqrt{(8-3)^2 + (-5-2)^2} = \sqrt{25+49} = \sqrt{74}$$

י. הוכיחו כי המשולש שקדקודיו : $A(9,7)$ $B(2,-4)$ $C(-4,8)$, הוא שווה שוקיים.

פתרון :

כדי להוכיח שהמשולש שווה שוקיים, נמצא את אורך צלעותיו :

$$d_{AB} = \sqrt{(9-2)^2 + (7+4)^2} = \sqrt{49+121} = \sqrt{170}$$
$$d_{BC} = \sqrt{(9-2)^2 + (8+4)^2} = \sqrt{36+144} = \sqrt{180}$$
$$d_{AC} = \sqrt{(-4-9)^2 + (8-7)^2} = \sqrt{169+1} = \sqrt{170}$$

ומכאן רואים ש- : $AB = AC$

כלומר המשולש שווה שוקיים כאשר A זווית הראש.

יא. מצאו האם המרובע שקדקודיו הם : $A(9,3)$ $B(1,-3)$ $C(3,1)$ $D(7,4)$,
הוא טרפז שווה שוקיים.

פתרון :

שאלה זו מבקשת לבדוק שני דברים :

א. שהמרובע הוא טרפז.

ב. שהטרפז שווה שוקיים.

נתחיל בהוכחת הטרפז :

כדי לבדוק שהמרובע הוא טרפז, נמצא את השיפועים של הישרים :

$$m_{AB} = \frac{3+3}{9-1} = \frac{6}{8} = 1\frac{3}{4}$$

$$m_{DC} = \frac{-3-1}{1-3} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$m_{CD} = \frac{1-4}{3-7} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

$$m_{DA} = \frac{4-3}{7-9} = \frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

ומכאן אנו רואים שזהו אכן טרפז. $AB \| CD$ אבל BC אינו מקביל ל- DA .

עכשיו נעבור לבדיקת שוויון השוקיים :

נבדוק רק את BC , DA (אלה השוקיים) :

$$d_{BC} = \sqrt{(1-3)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

$$d_{AD} = \sqrt{(9-7)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

הטרפז איננו שווה שוקיים.

יב. מצאו נקודות על הישר : $y = 3x - 4$ שמרחקן מהנקודה $(4,3)$ הוא 5.

פתרון :

מתוך הנוסחה אנו יודעים ש- : $\sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} = 5$

לכאורה, זו משוואה אחת עם שני נעלמים.

אבל נתון לנו <u>הקשר</u> בין x ל- y , שהוא משוואת הישר עצמו,

כי כל נקודה על היתר מקיימת משוואה זו.

ולכן :

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} = 5$$

$$(x-4)^2 + (3x-7)^2 = 25$$

$$x^2 - 8x + 16 + 9x^2 - 42x + 49 = 25$$

$$10x^2 - 50x + 40 = 0$$

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = 4$$

$$y_1 = -1 \qquad y_2 = 8$$

והנקודות : $(1,-1)$ $(4,8)$

<u>בדיקת הבנה</u>

9. נתון ריבוע ששניים מקדקודיו הסמוכים הם : $B(5,7)$ $A(3,-4)$

מצאו את שטח הריבוע.

10. האם המרובע שקדקודיו : $D(2,1)$ $C(4,5)$ $B(1,1)$ $A(-1,5)$

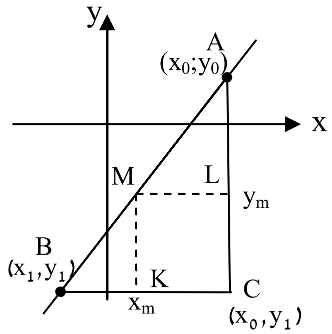
הוא טרפז שווה שוקיים ?

11. מצאו נקודות על הישר : $y = -x + 3$ שמרחקן מן הנקודה $(7,5)$ הוא $\sqrt{45}$.

עוד נוסחה העושה שימוש במשולש היא נוסחה למציאת <u>נקודת אמצע של קטע</u>.

הגדרת הבעיה: מהי נקודת האמצע של קטע AB אם נתון ש: $A=(x_0;y_0)$ ו- $B=(x_1;y_1)$?

גם כאן נשרטט את הבעיה ונשלים את השרטוט



למשולש ישר זווית. בנוסף נגדיר את נקודת האמצע באות M

כך ש: $M=(x_m;y_m)$.

כפי שאנו רואים נוצרו עתה עוד שני משולשים

ישרי זווית: ΔBMK ו- ΔAML .

אם נתון שנקודה M היא נקודת אמצע של קטע AB

אז K יהיה ההיטל של הנקודה על הקטע BC.

ולכן נקודה K היא אמצע BC. ומכאן: $KB=\frac{x_0-x_1}{2}$

ולכן: $x_m=x_1+\frac{x_0-x_1}{2}$

הכפלה במכנה: $2x_m=2x_1+x_0-x_1$

ולבסוף: $\boxed{x_m=\frac{x_0+x_2}{2}}$

כך לגבי נקודה C: $LC=\frac{y_0=y_1}{2}$

ולכן: $y_m=y_1+\frac{y_0-y_1}{2}$

הכפלה במכנה: $2y_m=2y_1+y_0-y_1$

$\boxed{y_m=\frac{y_0+y_2}{2}}$

לסיכום:

כדי למצוא את נקודה M אמצע קטע AB מתקיים:
$x_m=\frac{x_A+x_B}{2}$ $\quad$ $y_m=\frac{y_A+y_B}{2}$

דוגמה:

יג. מהי נקודת האמצע של קטע AB אם נתון: A(3;6) ו- B(-8;0) ?

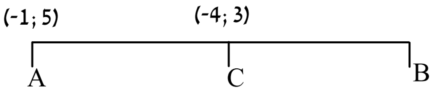
פתרון:

$$x_m=\frac{3+(-8)}{2}=-2.5$$

$$y_m=\frac{6+0}{2}=3$$

תשובה: נקודת האמצע היא: <u>(−2.5,3)</u>

כמו בכל נוסחה גם כאן אין הכרח שקצות הקטע יהיו נתונים ונתבקש לחפש את האמצע לעיתים המצב דווקא הפוך לדוגמה :



יד. מהם שעורי הנקודה B בציור הנתון אם C היא אמצע קטע AB?

פתרון :

הפעם אנו משתמשים באותה הנוסחה ורק מחליפים את הנעלם :

$$-4=\frac{-1+x_B}{2} \qquad 3=\frac{5+y_B}{2}$$

$$-8=-1+x_B \qquad 6=5+y_B$$

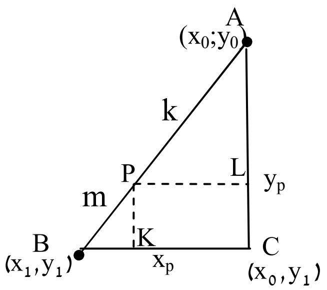
$$x_B=-7 \qquad y_B=1$$

והתשובה : $B=(-7,1)$.

<u>חלוקת קטע ביחס נתון</u> :

הרחבת נוסחת אמצע קטע לחלוקה ביחס כלשהו נעשית באותו אופן.

חלקו את הקטע שקצותיו : $B(x_1,y_1)$ $A(x_0,y_0)$ ביחס של $m:k$.



פתרון :

שרטוט : בדיוק כפי שראינו במציאת אמצע קטע, אלא שהפעם מחלקים את Δx ל- $(m+k)$ חלקים.

m חלקים נמצאים בקטע KB, ו- k חלקים בקטע KC .

ולכן :
$$KB=\frac{x_0-x_1}{m+k}\cdot m$$

$$x_p=\frac{x_0-x_1}{m+k}\cdot m+x_1$$

הכפלה ב : $(m+k)$
$$(m+k)x_p=mx_0-\cancel{mx_1}+\cancel{mx_1}+kx_1$$

$$\boxed{x_p=\frac{kx_1+mx_0}{m+k}}$$

כך גם :
$$CL=\frac{y_1-y_0}{m+k}\cdot m$$

$$y_d=\frac{y_1-y_0}{m+k}\cdot m+y_0$$

$$\boxed{y_d=\frac{ky_0+my_1}{m+k}}$$

לסיכום :

כאשר נתון קטע : $B(x_0,y_0)$ $A(x_1,y_1)$ ומחלקים אותו ביחס : $\frac{m}{k}=\frac{AD}{PB}$, מתקיים :

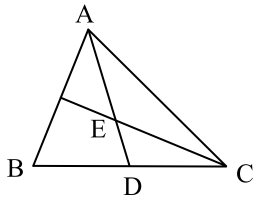
$$x_p=\frac{kx_0+mx_1}{m+k} \qquad y_d=\frac{ky_0+my_1}{m+k}$$

טיפ תזכורת :
היחס המחלק מכפיל תמיד את הנקודה הרחוקה ממנו.

לדוגמה :

טו. נתון משולש שקדקודיו : $A(4,3)$ $B(2,-1)$ $C(-6,5)$

מצאו את נקודת מפגש התיכונים במשולש.



פתרון :

שרטוט :

לפתרון הבעיה ניתן לבחור תיכון כלשהו. נניח : AD .

D היא נקודת האמצע BC ,

ולכן : $y_p = \frac{5-1}{2} = 2$ $\quad x_D = \frac{-6+2}{2} = -2$

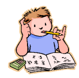
$D(-2,2)$

מתוך הגיאומטריה אנו יודעים שהתיכונים נחתכים ביחס של : $AE : ED = 2:1$

ולכן : $x_E = \frac{1 \cdot 4 + 2(-2)}{3} = 0$

$y_E = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 2}{3} = \frac{7}{3}$

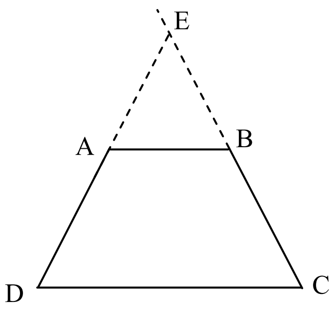
נקודת מפגש התיכונים : $E(0, \frac{7}{3})$



<u>בדיקת הבנה</u>

12. נתון משולש : $A(3,4)$ $B(-1,6)$ $C(-7,-2)$
מצאו את משוואת התיכונים של המשולש.

13. במשולש ישר זווית ABC העבירו תיכון BD .
נתון : $A(1,7)$ $B(0,5)$ $D(4.5,4)$
א. מצאו את שיעורי קדקוד C של המשולש.
ב. הנקודה : $(0.25,2.5)$ מחלקת את הצלע AC ביחס : $AP : PC = m : k$.
מצאו את k, m .
ג. דרך הנקודה P העבירו מקביל לצלע BC .
מצאו את נקודת הפגישה של המקביל עם הצלע BC .



טז. בטרפז $ABCD$ נתון : $A(6,1)$ $B(8,2)$ $D(5,-2)$,
ונתון שאחת הצלעות היא : $x + 3y = 14$.
נקודה E היא נקודת החיתוך של המשך השוקיים (ראו ציור).
1. מצאו את קדקוד C .
2. מצאו את שיעורי נקודה E .
3. מצאו את שטח המשולש EDC .

פתרון:

1. כרגיל עלינו להתחיל בשרטוט, אולם כדי לדעת כיצד לשרטט עלינו לבחון היכן ממוקמת הצלע שמשוואתה נתונה. לשם כך נציב את הנקודות הידועות לנו במשוואה, ונראה איזו מהן מקיימת את המשוואה.

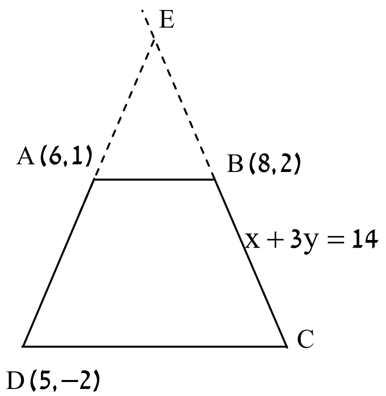
אם נקודות A,B מקיימות שתיהן את המשוואה, הרי שהצלע היא AB.

אם נקודות A,D מקיימות שתיהן את המשוואה, הרי שהצלע היא AD.

אבל אם רק נקודה D מקיימת את המשוואה, נסיק מכך שהצלע היא CD.

כך גם אם רק נקודה B מקיימת את המשוואה, נוכל ללמוד שהצלע היא BC.

לכן נתחיל בהצבת הנקודות:



עבור נקודה $A(6,1)$: $6+3\cdot 1\neq 14$

עבור נקודה $B(8,2)$: $8+3\cdot 2=14$

בדיקת נקודה: $D(5,-2)$: $5+3\cdot(-2)\neq 14$

מכאן שרק נקודה B מקיימת את המשוואה.

ולכן השרטוט:

כפי שאנו רואים, נקודה C היא חיתוך שתי הצלעות: BC ו- CD.

משוואת BC נתונה לנו, לכן נותר לנו רק למצוא את משוואת CD.

$AB\parallel DC$ ולכן: $m_{DC}=m_{AB}=\frac{1-2}{6-8}=\frac{1}{2}$

בהצבת נקודה $D(5,-2)$: $y+2=\frac{1}{2}(x-5)$

$y=0.5x-4.5$

הצבת משוואה זו במשוואה הנתונה: $x+5y=14$

$x+3(0.5x-4.5)=14$

$2.5x-13.5=14$

$2.5x=27.5$

$x=11$

$y=1$

והנקודה: $\underline{C(11,1)}$

2. כדי למצוא את קדקוד E עומדות בפנינו שתי אפשרויות:

I. למצוא את משוואת AD ולמצוא את נקודת החיתוך של AD עם BC.

II. למצוא את היחס $AB:DC$ ועל פי חלוקת קטע למצוא את נקודה E.

הפעם (לצורך התרגול) נשתמש באפשרות II.

נמצא את אורך AB: $d_{AB}=\sqrt{(6-8)^2+(1-2)^2}=\sqrt{5}$

נמצא את אורך BC : $d_{BC}=\sqrt{(5-11)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{45}$

והיחס : $\frac{AB}{DC}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{45}}=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$

ומתוך הגיאומטריה אנו יודעים : $\frac{AB}{DC}=\frac{EA}{ED}=\frac{1}{3}$

ולכן : $DA:AE=2:1$

ולפי נוסחת חלוקת קוטר ביחס נתון :

$1=\frac{2\cdot y_E+1\cdot(-2)}{3}$ $6=\frac{2\cdot x_E+1.5}{3}$

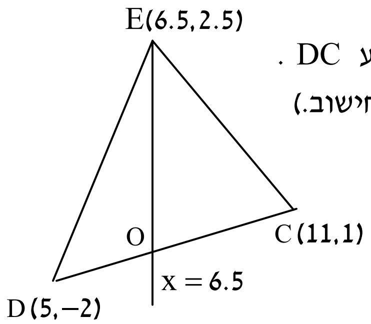
$3=2y_E-2$ $18=2x_E+5$

$2.5=y_E$ $6.5=x_E$

והנקודה : $\underline{E(6.5,2.5)}$

3. בהמשך נלמד כיצד למצוא גובה של משולש, אולם בינתיים אנו יכולים להשתמש בידע שכבר צברנו, ולשרטט את המשולש EDC ואת הישר $x=6.5$.

(הערה : הבחירה לשרטט $x=6.5$ היא מפני שהוא חותך את הצלע DC .
באותו אופן יהיה ניתן להעביר את היתר $y=1$ ולבצע את אותו חישוב.)



נמצא את נקודה O .

כבר מצאנו (בסעיף 1) שמשוואת DC : $y=0.5x-4.5$

עבור $x=6.5$ נקבל: $y=0.5\cdot6.5-4.5=1.25$

והמרחק OA : $OA=2.5-(-1.25)=3.75$

וכפי שכבר למדנו : $s_{ADO}=\frac{3.75\cdot1.5}{2}=2\frac{13}{16}$

$s_{ADC}=\frac{3.75\cdot4.5}{2}=8\frac{7}{16}$

$s_{ADC}=11.25$

כפי שכבר אמרנו, בפועל נלמד למצוא את הגובה ולהשתמש בנוסחה הרגילה למציאת שטח משולש.
בסעיף זה אנו לומדים איך לאלתר פתרונים גם במקום שבו לכאורה אין לנו כלים להתמודד.
תמיד כדאי להעֵז ; המֵעֵז – מצליח!

יז. 1. מה משוואת הישר העובר דרך נקודה (5;-2) ומקביל לישר $y=-3x+12$?
2. מהם נקודות החיתוך של ישר זה עם הצירים?
3. האם הנקודה (2;7) נמצאת על הישר?
4. מצאו נקודה נוספת הנמצאת על הישר שמצאת בסעיף א'.
5. שרטטו את הישר כמערכת צירים.
6. מה שטח המשולש המוגבל על ידי הישר ומערכת הצירים?

פתרון:

1. הישר המבוקש מקביל לישר $y = -3x + 12$ ולכן שיפועו הוא -3.

הנקודה הנתונה היא $(5;-2)$.

ועל ידי הצבה: $y + 2 = -3(x - 5)$

והמשוואה המבוקשת: $y = -3x + 13$

2. כבר הזכרנו ש- n הוא נקודת החיתוך עם ציר y ולכן הנקודה היא $(0;13)$.

חיתוך ציר x מתקבל על ידי הצבה של $y = 0$ כלומר

יש לפתור את המשוואה: $0 = -3x + 13$

והפתרון הוא: $x = 4\frac{1}{3}$

ונקודת החיתוך עם ציר ה-x היא: $\underline{(4\frac{1}{3};0)}$

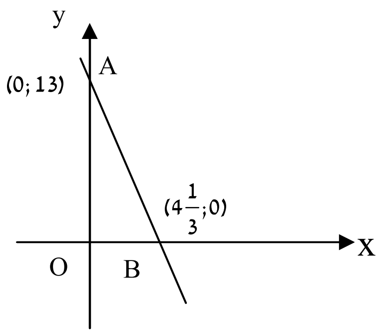
3. כדי לברר אם הנקודה נמצאת על הישר יש להציב את שיעור ה- x במשוואת הישר ולראות אם מתקיים y. נציב $x = 2$ ונקבל: $-3 \cdot 2 + 13 = -6 + 13 = 7$

כפי שאנו רואים התוצאה מתאימה לשיעור ה- y של הנקודה הנתונה כלומר היא נמצאת על הישר.

4. כדי למצוא נקודה נוספת עלינו להציב x שרירותי כלשהו. נניח שנבחר את $x = -1$

הצבה: $y = -3 \cdot (-1) + 13 = 16$

ומכאן שגם הנקודה $(-1;16)$ נמצאת על הישר.



5. כדי לשרטט את הישר מספיק להציב שתי נקודות על מערכת הצירים ולהעביר ישר ביניהם.

כמובן שנוח להציב נקודות שכבר מצאנו.

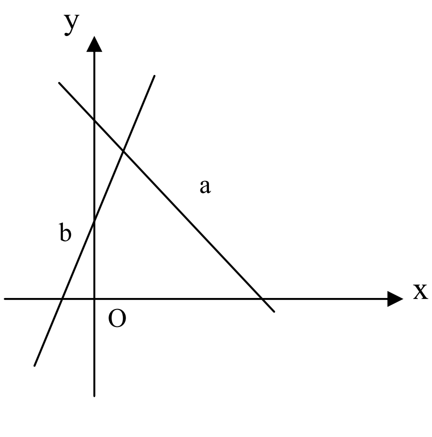
הבה נבחר את נקודות החיתוך עם הצירים

כלומר $(0;13)$ ו- $(4\frac{1}{3},0)$.

6. מתוך השרטוט אנו למדים ש- $AO = 13$ ו- $BO = 4\frac{1}{3}$

אם נציב גדלים אלה בנוסחת שטח משולש נקבל: $S_{ABO} = \dfrac{13 \cdot 4\frac{1}{3}}{2} = 28\frac{1}{6}$.

יח. לפניך שירטוט המתאר שני ישרים.



נתונות שלוש משוואות:

1) y=2x+2

2) y=-x+7

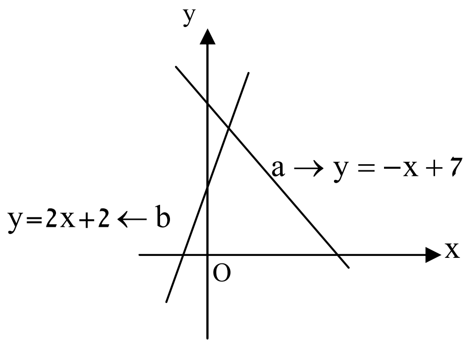
3) y=-x+2

1. מי מהמשוואות הנתונות יכול לתאר את הישר a ומי את b?
2. בהסתמך על ההתאמה בסעיף א׳ מה נקודות החיתוך של הישרים עם ציר ה-x?
3. מה נקודת החיתוך של שני הישרים?
4. מה שטח המשולש המוגבל על ידי שני הישרים וציר ה-x?

פתרון:

1. מתוך השרטוט אנו רואים שישר b עולה כלומר השיפוע שלו חיובי. מתוך המשוואות אנו רואים שרק משוואה (1) יש לה שיפוע חיובי והוא 2. לכן אנחנו יכולים לקבוע שרק משוואה (1) יכולה להתאים לישר b.

קצת יותר קשה לקבוע מי מהמשוואות מתארת את ישר a כי לשתי המשוואות האחרות יש אותו שיפוע שלילי. במקרה זה עלינו להסתמך על המספרים המייצגים את n. כידוע לנו מספרים אלה מתאימים לחיתוך ציר ה- y . אם נתבונן נראה שבמשוואה (2) נקודת החיתוך היא 7 . ובמשוואה (3) היא 2. כדי שנדע מי מהם המתאימה גם כאשר לא מצוינות קואורדינטות על הציר, אנו יכולים להשוות את נקודות החיתוך עם אלה של הישר b. לפי קביעתנו ישר b חותך את ציר ה-y בנקודה 2. לפי הציור אנחנו למדים שישר a חותך את ציר ה-y בנקודה גבוהה יותר כלומר ה- n המתאים לישר a חייב להיות גדול יותר מ- 2 ולכן רק משוואה (2) תתאים לישר זה.



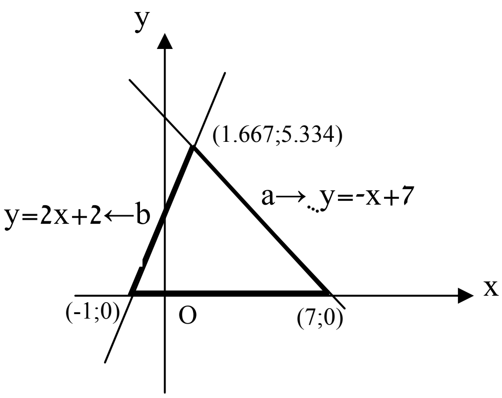
לסיכום אנו יכולים לקבוע ש:

ישר a מתאים למשוואה $y = -x + 7$.

ישר b מתאים למשוואה $y = 2x + 2$.

לשם הנוחות נעתיק שוב את הציור ונוסיף עליו את הפתרון של א'.

2. כבר ראינו שכדי למצוא נקודת חיתוך עם ציר x עלינו להציב $y = 0$.



לכן עבור ישר a נקבל: $0 = -x + 7$

והפתרון הוא: $x=7$

עבור יש b נקבל: $0 = 2x + 2$

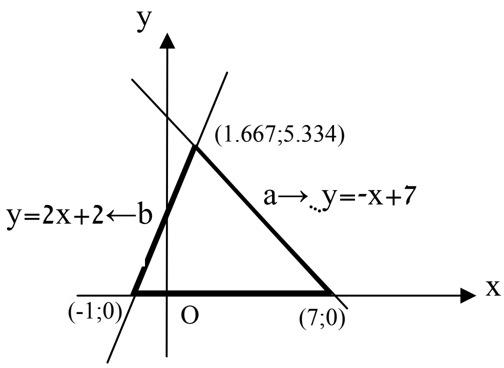
והפתרון הוא: $x = -1$

נציב את הנקודות בציור .

3. כזכור חיתוך שני פונקציות הוא על ידי פתירת שתי משוואות בשני נעלמים:

$1)\ \ y = 2x + 2$

$2)\ \ y = -x + 7$



ועל ידי חיסור מקבלים: $0 = 3x - 5$

על ידי העברת אגפים: $5 = 3x$

ועל ידי חלוקה נקבל: $x = 1.667$

הצבה במשוואה (1): $y = 2 \cdot 1.667 + 2 = 5.334$

כלומר נקודת החיתוך היא: $\underline{(1.667;5.334)}$

4. שטח המשולש המבוקש מוגבל על ידי ציר ה-x ושני הישרים ולכן הוא חייב להיות המשולש המודגש.

כדי למצוא את שטחו עלינו למצוא את אורך הבסיס ואת הגובה. את אורך הבסיס נמצא על ידי חיסור נקודות החיתוך של הישרים עם ציר ה- x: $7 - (-1) = 8$

את הגובה קל לנו למצוא כי הוא למעשה שיעור ה-y של נקודת החיתוך בין הישרים שחישבנו.

ולכן שטח המשולש הוא: $s = \frac{8 \cdot 5.334}{2} = \underline{21.336}$.

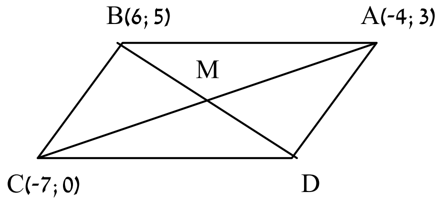
יט. נתונה מקבילית ששלושה מקודקודיה הם : $C=(-7;0)$ $B=(6;5)$ $A=(-4;3)$ וקודקוד רביעי D שמיקומו אינו נתון.

1. מהם שעורי הקודקוד D?
2. מה אורך האלכסונים?
3. מה משוואת האלכסון הגדול?

פתרון :

בכל בעיה בהנדסה אנליטית כדאי להתחיל בשרטוט כללי. איננו צריכים לשרטט במדויק ואפילו לא במערכת צירים. אך כדאי שהנתונים יהיו זמינים לנו על הדף.

במקרה שלפנינו נתון לנו שמדובר במקבילית. לכן נשרטט לעצמנו מקבילית כל שהיא ונציב עליה את הנקודות הנתונות.

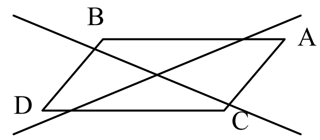


<u>שימו לב!</u>

למיקום האותיות יש משמעות. אותיות שכנות בסדר האלפביתי יתארו תמיד צלע ולעולם לא אלכסון.

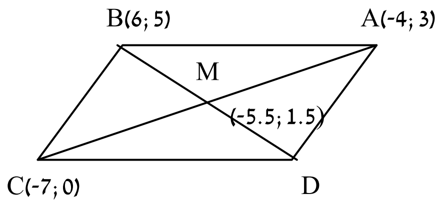
כלומר : AB, BC, CD, DA תמיד יתארו צלעות. לעומתם הצמדים : AC,BD תמיד יהיו אלכסונים!

למי שעדיין לא הבין את המשמעות-
אסור לכתוב אותיות במקבילית כך :
כי אז AC הוא צלע ולא אלכסון ואילו
BC הוא אלכסון ולא צלע!



עתה אנו יכולים לפנות לפתרון :

1. מתוך תכונות המצולעים אנחנו יודעים שאלכסוני המקבילית חוצים זה את זה. כלומר נקודה M היא אמצע הקטע AC לכן קל מאוד למצוא את שיעוריה :



$$x_M = \frac{-7+(-4)}{2} = -5.5$$

$$y_M = \frac{0+3}{2} = 1.5$$

כלומר : $\underline{M=(-5.5;1.5)}$

עתה אנו יכולים למצוא על ידי אותה נוסחה את נקודה D. לפי :

$$5.5 = \frac{6+x_D}{2} \qquad 1.5 = \frac{5+y_D}{2}$$

$$11 = 6+x_D \qquad 11 = 6+x_D$$

$$5 = x_D \qquad -2 = y_D$$

כלומר : $\underline{D=(5;-2)}$

2. לאחר שנתונים לנו כל הנקודות נוכל לחשב את אורך שני האלכסונים :

לפי נוסחת המרחק בין שתי נקודות : $d=\sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2}$

$$d_{AC} = \sqrt{(-7-(-4))^2+(0-3)^2}$$

$$d_{AC} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 4.24$$

$$d_{BD} = \sqrt{(6-5)^2+(5-(-2))^2}$$

$$d_{BD} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 7.07$$

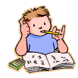
והתשובה : אורך האלכסון (הקטן) AC הוא 4.24 יחידות ואורך הלכסון (הגדול) BD הוא 7.07 יחידות (מכאן אנו רואים שהציור שלנו לא מתאים אולם עדיין הוא מסייע לנו במהלך הפתרון) .

3. האלכסון הגדול הוא BD (הוא ארוך יותר מ- AC). לכן עלינו למצוא משוואת ישר על ידי שתי הנקודות הידועות : $B(6;5)$ $D(5;-2)$.

השיפוע : $m=\frac{5-(-2)}{6-5}=\frac{7}{1}=7$

ובהצבה בנוסחה : $y-5=7(x-6)$

ומשוואת האלכסון היא : $\underline{y=42x-37}$.



תרגול עצמי

14. נתון משולש שקדקודיו : $(1,5)$ $(-1,3)$ $(-2,-1)$
הראו כי גם במשולש זה מתקיים המשפט :
קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתו.
15. במשולש ABC נתון $A(2,3)$ $B(0,1)$ התיכון לצלע BC מקביל לציר ה- x ואורכו 1 .
מצאו את קדקוד C (שתי אפשרויות).
16. משוואות שתי צלעות סמוכות במקבילית הן : $y=2x$ $x+3y=2$
שיעורי אחד הקדקודים הוא : $(-4,2)$, ואורך האלכסון היוצא מקדקוד זה הוא 5 .
מצאו את קדקודי המקבילית (שתי אפשרויות).
17. קדקודי המשולש הם : $(4,-2)$ $(-2,6)$ $(8,2)$
א. מצאו את נקודת מפגש התיכונים.
ב. מצאו את שטח המשולש.
18. נקודת מפגש התיכונים במשולש הוא : $(3,5)$
משוואת שתיים מצלעותיו הן : $10y-x-11=0$ $2y=11x+13$
מצאו את קדקודי המשולש.
19. משוואת הבסיס של משולש ש״ש הוא : $y=-2x+5$
אורך השוקיים הוא : 5 , ואחד הקדקודים הוא : $(11,-2)$
מצאו את קדקודי המשולש ואת משוואת התיכון לבסיס.

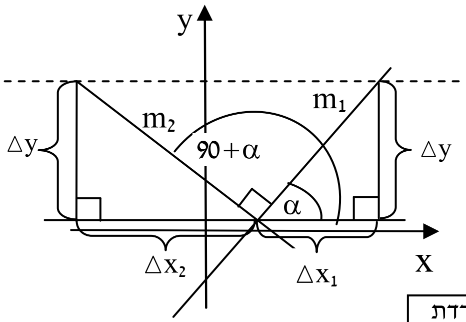
<u>תנאי לניצבות בין שני ישרים</u>

ראשית נבהיר מה משמעות המשפט שנכתב למעלה. כאשר אנו אומרים תנאי לניצבות... הכוונה היא איזה סימן צריך להיות לשני ישרים נתונים שיצביע על העובדה שהם ניצבים, או לחלופין איך נבנה ישר שיהיה ניצב לישר אחר.

ניצבים – כלומר מאונכים – יש ביניהם זווית של 90^0 . זה כולל גבהים זה כולל ניצבים במשולש ישר זווית זה כולל אנכים למיניהם בקיצור כל מצב בין שני ישרים שדורש זווית ישרה.

עתה נבחן מה מצביע על קשר כזה.

כמו שכבר ראינו כל ההנדסה האנליטית סובבת סביב משולש ישר זווית גם כאן נבנה את הקשר מתוך משולשים ישרי זווית שייבנו על שני ישרים.



בשרטוט שלנו העברנו ישר מקביל לציר ה-x העובר דרך נקודת החיתוך של שני ישרים מאונכים.

כמו כן שרטטנו את המשולשים ישרי הזווית כך שאורך הניצב Δy שווה בשניהם.

המשולש הימני מקיים: $m_1 = \dfrac{\Delta y}{\Delta x_1} = \tan\alpha$

המשולש השמאלי מקיים: $m_2 = \dfrac{\Delta y}{\Delta x_2} = \tan(90+\alpha)$ (הזווית נמדדת מציר x החיובי!)

מכפלת השיפועים נותנת:

$$\tan\alpha\cdot\tan(90+\alpha) = \frac{\sin\alpha\cdot\sin(90+\alpha)}{\cos\alpha\cdot\cos(90+\alpha)} = \frac{\sin\alpha\sin(90-\alpha)}{\cos\alpha\cdot(-\cos(90-\alpha))} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot(-\sin\alpha)} = -1$$

כלומר התנאי לניצבות בין הישרים הוא:

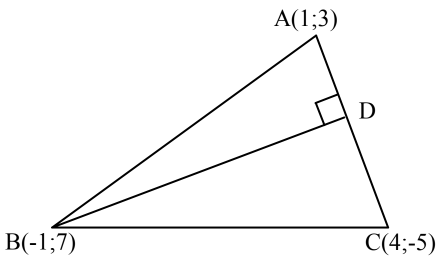
$$\boxed{m_1\cdot m_2 = -1}$$

באופן מעשי אנו נוטים להעביר אגפים ולקבל: $m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$ ובמילים: שיפוע של ישר אחד הפכי (שמחליפים מונה ומכנה) ונגדי (בסימן הפוך) לישר השני.

נבחן מספר דוגמאות לשאלות עם תנאי ניצבות:

כ. נתון משולש שקודקודיו הם: $C(4;-5)$ $B(-1;7)$ $A(1;3)$ מה משוואת הגובה היורד מקודקוד B?

פתרון:



תחילה נשרטט את השאלה (באופן סכימטי) ונרשום את כל הנתונים.

נוסיף על הציור גם את מה שנדרש בשאלה.

כלומר נשרטט את הגובה היורד מנקודה B ונקרא לה D. עתה אנו רואים שהמשוואה הנדרשת היא משוואת BD. מכיוון שלא נתון לנו ישרות שפוע הישר BD עלינו ללמוד עליו מהשיפוע של AC. אך גם שיפוע זה אינו ניתן במפורש אלא רק ברמז על ידי שתי הנקודות של הקודקודים A ו-C. לכן נמצא ראשית את השיפוע של הישר AC: $m_{AC} = \dfrac{3-(-5)}{1-4} = \dfrac{8}{3}$

מכאן אנו למדים ששפוע הישר BD הוא: $-\dfrac{3}{8}$.

הנקודה B (דרכה עובר הישר) נתונה באופן מפורש ועל ידי הצבה ופתרון אנו מקבלים:

הצבה בנוסחה: $y - 7 = -\dfrac{3}{8}(x+1)$

לפיכך משוואת הישר היא: $\underline{y = -\dfrac{3}{8}x + 6\dfrac{5}{8}}$.

לעיתים נמצא שמשוואות כאלה נכתבות באופן הבא: $8y + 3x = 53$

למשוואה זו אנו מגיעים אחרי הכפלה ב- 8 והעברת אגפים. אולם משוואה כזו למרות שהיא מייצגת קו ישר אינה מלמדת אותנו על השיפוע ועל נקודת החיתוך עם ציר ה- y. לכן למשוואות מהסוג הזה אנו קוראים משוואות כלליות של ישרים לעומת הכיתוב $y = mx + n$ שנקראת המשוואה הפרמטרית של ישר. כי בסגנון כזה של כתיבה אנו מזהים את הפרמטר m כשיפוע ואת הפרמטר n כחיתוך ציר y.

כא. נתונה המשוואה $10y-5x+25=0$ מה משוואת האנך לישר זה העובר בנקודת החיתוך של הישר הנתון עם ציר ה-x ?

פתרון :

כדי למצוא את השיפוע של הישר המבוקש עלינו קודם למצוא את השיפוע של הישר הנתון. לשם כך עלינו לעבור לכיתוב בסגנון המשוואה הפרמטרית.

נתחיל בהעברת אגפים : $10y=5x-25$

עכשיו נחלק במקדם של y ‏(10) : $y=\frac{1}{2}x+2.5$

מכאן אנו למדים ששיפוע הישר הנתון הוא : $\frac{1}{2}$ ושיפוע הישר המבוקש הוא -2 .

עתה עלינו למצוא את הנקודה. מתוך הנתון אנו יודעים שעלינו למצוא את נקודת החיתוך של הישר הנתון עם ציר x כלומר יש להציב במשוואה הנתונה $y=0$.

מקבלים : $0=\frac{1}{2}x+2.5$

והפתרון : $0=x+5$

$x=-5$

הנקודה היא : $(-5;0)$

עתה אנו יכולים למצוא את המשוואה המבוקשת :

$y-0=-2(x+5)$

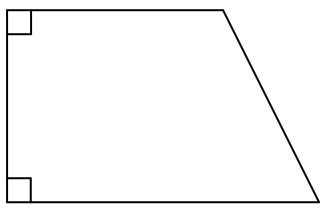
והמשוואה : $\underline{y=-2x-10}$

כב. נתון מרובע שקודקודיו הם : $A(2;3)$ $B(12;7)$ $C(21;-1)$ $D(6;-7)$

צריך להוכיח כי המרובע הוא טרפז ישר זווית.

פתרון :

תחילה נשרטט טרפז ישר זוית כלשהוא. מתוך השרטוט אנו נוכחים שכדי שמרובע יהיה טרפז ישר זווית עליו לקיים את התנאים הבאים :



1. שני הבסיסים מקבילים
2. אחד השוקיים מאונך להם
3. אחד השוקיים **__איננו__** מאונך לבסיסים

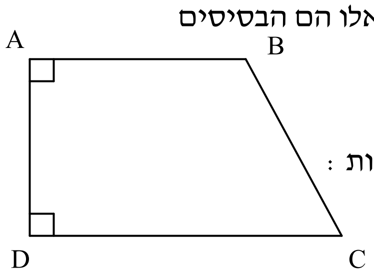
נבדוק אם התנאים הנ"ל מתקיימים על פי שיפועי הקטעים הנתונים.

$$m_{AB}=\frac{7-3}{12-2}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

$$m_{BC}=\frac{-1-7}{21-12}=\frac{-8}{9}=-\frac{8}{9}$$

$$m_{CD}=\frac{-7-(-1)}{6-21}=\frac{-6}{-15}=\frac{2}{5}$$

$$m_{AD}=\frac{-7-3}{6-2}=\frac{-10}{4}=-\frac{5}{2}$$



מהחישוב הנ״ל אנו רואים כי 1. AB מקביל ל- CD כלומר אלו הם הבסיסים

2. AD מאונך לשני הבסיסים

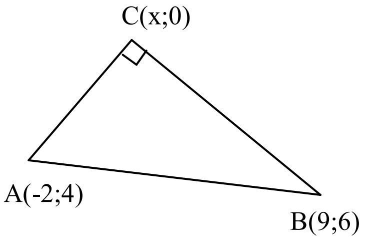
3. BC איננו מאונך לבסיסים

עתה אנו יכולים להשלים את הציור ולהציב עליו את הנקודות :

עכשיו אנו יכולים גם לקבוע בוודאות כי נקודות אלה מתארות טרפז ישר זווית.

כג. במשולש ישר זווית ABC נתון : $A(-2;4)$ $B(9;6)$ ונתון שנקודה C נמצאת על ציר ה- x מהו קודקוד C ?

פתרון :



ראשית נשרטט משולש ישר זווית ונציב עליו את כל הנתונים.

(האם מובן למה הצבנו את נקודה C כאשר y=0?)

לפי דרישת השאלה AC ניצב ל- BC.

עתה נציב את הידוע לנו על ישרים ניצבים : $m_{AC}=-\frac{1}{m_{BC}}$

בדוגמה שלנו :

$$\frac{4}{-2-x}=-\frac{9-x}{6}$$

$$4\cdot 6=-(-2-x)(9-x)$$

$$24=-(-18-9x+2x+x^2)$$

$$24=18+7-x^2$$

$$x^2-7x+6=0$$

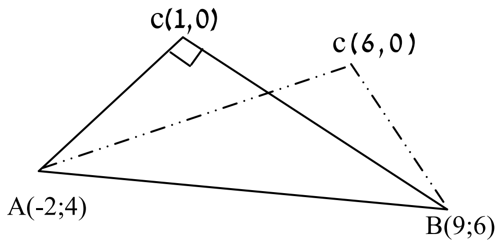
$$x_1=6 \qquad x_2=1$$

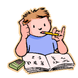
מה המשמעות של שתי התשובות?

ובכן באמת קיימות שתי אפשרויות פתרון לשאלה.

ישנם שני משולשים ישרי זווית שיקיימו את תנאי הבעיה.

(ראו שירטוט)





<u>בדיקת הבנה</u>

20. נתון משולש שקדקודיו : $A(-2,5)$ $B(3,-1)$ $C(7,1)$

א. מצאו את משוואת הגובה היורד לצלע BC .

ב. מצאו את משוואת הגובה היורד לצלע AC .

21. שניים מקדקודי משולש ישר זווית הם : $A(2,5)$ $B(5,2)$

מצאו את שיעורי קדקוד C אם נתון שהוא מונח על ציר y .

22. קדקודי מרובע הם : $A(6,2)$ $B(5,-1)$ $C(-4,2)$ $D(-3,5)$

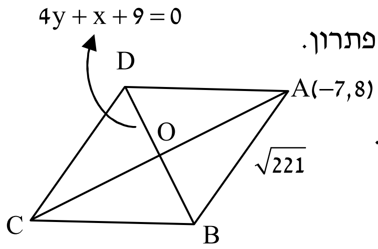
א. הוכיחו כי המרובע הוא מלבן .

ב. מצאו את משוואות הצלעות .

עכשיו יש בידינו כלי נוסף לפתור בעיות שונות במצולעים, ונראה כיצד לעשות בו שימוש.

כד. במעוין נתון הקדקוד : $A(-7,8)$. משוואת אחד האלכסונים היא : $4y + x + 9 = 0$,
ואורך צלע המעוין הוא : $\sqrt{221}$.
מצאו את קדקודי המעוין.

פתרון :



כפי שכבר שמתם לב, שאלות כאלה דורשות אסטרטגיית פתרון.
תחילה נשרטט מעוין ונציב עליו את הנתונים.
לשם כך עלינו לבדוק מי מהאלכסונים נתון לנו כמשוואה.
נציב את A במשוואה הנתונה : $4 \cdot 8 - 7 + 9 \neq 0$
ולכן ברור לנו שזהו אלכסון BD .
קל למצוא את משוואת AC כי ידוע לנו שהאלכסונים מאונכים זה לזה במעוין.
נוכל למצוא את השיפוע , והנקודה A כבר נתונה.
מחיתוך האלכסונים נמצא את O .
על ידי נוסחת אמצע קטע נוכל למצוא את קדקוד C .
על פי המרחק הנתון AC , ובהצבת משוואת האלכסון BD שמצאנו, נוכל למצוא גם את הקדקודים B,D .
אחרי שיש בידינו דרך פעולה , הגיע הזמן לפעול!
שלב א' – מציאת משוואת AC :

משוואת BD :

$$4y + x + 9 = 0$$
$$y = -\frac{1}{4}x - \frac{9}{4}$$
$$m_{BC} = -\frac{1}{4}$$
$$m_{AD} = 4$$

ובעזרת הנקודה הנתונה :

$$y - 8 = 4(x + 17)$$
$$\underline{y = 4x + 36}$$

שלב ב' – מציאת נקודה O :

על פי חיתוך האלכסונים :

$$4x + 36 = -\frac{1}{4}x - \frac{9}{4}$$
$$16x + 144 = -x - 9$$
$$17x = -153$$
$$x = -9$$
$$y = 0$$

ועל ידי הצבה נקבל : $\underline{O(-9,0)}$

שלב ג' – מציאת קדקוד C :

על פי נוסחת אמצע קטע :

$$-9 = \frac{-7 + x_D}{2}$$
$$x_D = -11$$
$$0 = \frac{8 + y_D}{2}$$
$$y_D = -8$$

קיבלנו קדקוד C : $\underline{D(-11,-8)}$