משוואות מעריכיות בשני נעלמים

משוואות מעריכיות בשני נעלמים עובדות תמיד על בסיס של הצבה. לעיתים ההצבה ברורה ופשוטה ולעיתים יש צורך בהצבה מתוחכמת. עם הזמן והתרגול לומדים מתי להשתמש באיזו הצבה.

דוגמאות:

ו. פתרו את מערכות המשוואות הבאות:

1. $3^x - 4 \cdot 3^y = -9$

   $x + y = 5$

2. $3^{2x-3y} = 243$

   $5^{x-y-1} = 25$

3. $2^{x-1} + 3^{y+2} = 7$

   $2^x + 3^{3+y} = 17$

4. $3^{x+y-1} + 2^{2x+y+1} = 41$

   $3^{x+y} - 2^{2x+y+3} = -101$

5. $3^x \cdot 4^y = 36$

   $9^x \cdot 7^y = 567$

6. $x^{y+1} = y^{3y}$

   $y^y = x$

7. $x^y = y^x$

   $x^3 = y^5$

פתרון:

1. $3^x - 4 \cdot 3^y = -9$

   $x + y = 5$

בתרגילים שבהם נתון באופן מפורש הקשר בין x ל-y

קל לעבור להצבה על ידי בידוד משתנה: $y = 5 - x$

והצבה במשוואה הנגדית: $3^x - 4 \cdot 3^{5-x} = -9$

מכאן ההמשך הוא לפי פתרון פונקציה מעריכית בנעלם אחד:

$t = 3^x$

$t - \frac{4 \cdot 3^5}{t} = -9$

$t^2 - 972 = -9t$

$t^2 + 9t - 972 = 0$

$t_1 = 27 \qquad t_2 = -36$

$27 = 3^x$ לא מתאים

$\underline{x = 3}$

ואחרי הצבה חוזרת: $\underline{y=5-x=2}$

והתשובה: $(3,2)$

2. $3^{2x-3y}=243$

$5^{x-y-1}=25$

כאן אנו מוצאים של משוואה היא בבסיס שווה – הראשונה

בבסיס 3 והשניה בבסיס 5. לכן: $3^{2x-3y}=3^{5}$

$5^{x-y-1}=5^{2}$

ולפי שוויון מעריכים: $2x-3y=5$

$x-y-1=2$

ופתרון שתי משוואות אלו:

ממשוואה (2) $x=3+y$

הצבה במשוואה נגדית: $2(3+y)-3y=5$

$6-y=5$

$\underline{y=1}$

ואחרי הצבה חוזרת: $\underline{x=3+1=4}$

והתשובה $(4,1)$

3. $2^{x-1}+3^{y+2}=7$

$2^{x}+3^{3+y}=17$

כאשר המשוואות בבסיסים מעורבים מתחילים

ב"הוצאת מספרים" כמו שראינו למעלה: $\dfrac{2^{x}}{2}+9\cdot 3^{y}=7$

$2^{x}+27\cdot 3^{y}=17$

עכשיו אנחנו מזהים שיש שני משתנים $3^{y},2^{x}$.

ניתן לכל אחד מהם שם אחר: $m=3^{y},k=2^{x}$ ונקבל:

$\dfrac{k}{2}+9m=7$

$k+27m=17$

פתרון של המשוואות: $k+18m=14$

$k+27m=17$

ועל ידי חיסור: $-9m=-3$

$m=\dfrac{1}{3}$

$3^{y}=\dfrac{1}{3}$

$\underline{y=-1}$

הצבה חוזרת:

$$k+27\cdot\frac{1}{3}=17$$

$$k=8$$

$$2^x=8$$

$$\underline{x=3}$$

והתשובה $(3,-1)$

דוגמא נוספת לאותו רעיון קיימת גם בתרגיל הבא:

4. $3^{x+y-1}+2^{2x+y+1}=41$

$$3^{x+y}-2^{2x+y+3}=-101$$

$$\frac{3^{x+y}}{3}+2\cdot 2^{2x+y}=41$$

$$3^{x+y}-8\cdot 2^{2x+y}=-101$$

והמשתנים $m=2^{2x+y}, k=3^{x+y}$

$$\frac{k}{3}+2m=41$$

$$k-8m=-101$$

$$k+6m=123$$

$$k-8m=-101$$

ועל ידי חיסור

$$14m=224$$

$$m=16$$

$$2^{2x+y}=16=2^4$$

(1) $\underline{2x+y=4}$

הצבה חוזרת:

$$k+6\cdot 16=123$$

$$k=27$$

$$3^{x+y}=27=3^3$$

(2) $\underline{x+y=3}$

קיבלנו שתי משוואות בשני נעלמים:

$$2x+y=4$$

$$x+y=3$$

ועל ידי חיסור:

$$\underline{x=1}$$

וכמובן

$$\underline{y=2}$$

והתשובה: $(1,2)$

5. $3^x\cdot 4^y=36$

$$9^x\cdot 7^y=567$$

במשוואות אלה אנו רואים שאין קשר בין הבסיסים המעורבים 4,7.

אולם התבוננות חוזרת מראה את הקשר $9^x=(3^2)^x$

כאן כדאי לבודד את 3^x ולקבל:

$$3^x = \frac{36}{4^y}$$

ועל ידי הצבה במשוואה הנגדית:

$$\left(\frac{36}{4^y}\right)^2 \cdot 7^y = 567$$

$$\frac{1296 \cdot 7^y}{4^{2y}} = 567$$

טיפ:
סכום המספרים במונה ובמכנה מתחלק ב-9 ולכן כדאי להתחיל בצמצום 9

העברת אגפים:

$$\frac{7^y}{16^y} = \frac{567}{1296}$$

על ידי צמצום אגף ימין:

$$\frac{7^y}{16^y} = \frac{7}{16}$$

$$\left(\frac{7}{16}\right)^y = \frac{7}{16}$$

$$\underline{y = 1}$$

הצבה חוזרת:

$$3^x = \frac{36}{4^y} = 9$$

$$\underline{x = 2}$$

והתשובה $(2,1)$

6. $x^{y+1} = y^{3y}$

$$y^y = x$$

כאן אנו מוצאים שנתון x אולם בעזרת משתנה עם מעריך. זה די מפחיד אבל אנחנו נבטח בעולם ונחזיק אצבעות ונציב את x במשוואה הנגדית:

$${y^y}^{\,y+1} = y^{3y}$$

ולפי חוקי חזקות:

$$y^{y^2+y} = y^{3y}$$

ולכן

$$y^2 + y = 3y$$

$$y^2 - 2y = 0$$

$\underline{y_1 = 2}$ $\quad y_2 = 0$ - לא מתאים $(a > 0)$

הצבה חוזרת:

$$2^2 = x$$

$$\underline{x = 4}$$

והתשובה: $(4,2)$

ובכן אל חשש – לפעמים תרגילים אלו הם דווקא יותר פשוטים.

ואין לשכוח כמובן את הפתרון הפשוט ביותר שהוא $(1,1)$.

והתשובה הסופית: $(1,1)$ $(4,2)$.

<u>תרגול פתור</u>

7. $x^y = y^x$

$$x^3 = y^5$$

פתרון:

כאן הפתרון קצת יותר מורכב אך גם הוא נשען על הצבות:

נבודד את x במשוואה הראשונה:

$$x = y^{\frac{x}{y}}$$

נציב במשוואה הנגדית:

$$y^{\frac{3x}{y}} = y^5$$

$$\frac{3x}{y} = 5$$

$$\frac{3}{5}x = y$$

נציב שוב באותה משוואה:

$$x^3 = \left(\frac{3}{5}x\right)^5$$

$$x^3 = \left(\frac{3}{5}\right)^5 \cdot x^5$$

אחרי צמצום x^3:

$$\left(\frac{5}{3}\right)^5 = x^2$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{2.5} = x = 3.586$$

$$y = \frac{3}{5} \cdot 3.586 = 2.151$$

<u>בדיקת הבנה: 37</u>

37. א. $\begin{cases} 5^x - 5^y = 500 \\ x - y = 1 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} 3^{x+1} - 3^{y+1} = -72 \\ x + y = 4 \end{cases}$ ג. $\begin{cases} 2^{x+y} = 256 \\ 3^{x-y} = 9 \end{cases}$

ד. $\begin{cases} 3^{x-2} + 5^y = 28 \\ 3^x - 5^{y-1} = 22 \end{cases}$ ה. $\begin{cases} x^{2y} = y^{y^2+2y} \\ x = y^{y+1} \end{cases}$ ו. $\begin{cases} x^y = y^x \\ x^4 = y^5 \end{cases}$

<u>אי שוויונים מעריכיים</u>

כבר הזכרנו שהפונקציה המעריכית היא חד-חד ערכית. עובדה זו מסייעת לנו בפתרון אי שוויונים, כי עבור $a > 1$ אנו יודעים שמתקיים:

אם $a^x > a^y$

אז $x > y$

כלומר הפונקציה עולה. אבל...

עבור $\underline{0 < a < 1}$ הפונקציה יורדת!

למשל $\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3$ למרות ש- $2 < 3$.

כלומר עבור $0 < a < 1$ מתקיים:

אם $a^x > a^y$

אז $\underline{x < y}$

ואת ההבדל הזה יש לזכור היטב בכל הנושא של אי שוויונים מעריכיים.

כל שאר הפעולות המתמטיות נשארות כפי שאנו מכירים.

ז. פתרו את אי השוויונים הבאים:

1. $3^x < 243$
2. $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 4$
3. $5^{4x+5} > 25^{4-2x}$
4. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+6} > \left(\frac{1}{9}\right)^{3.5x}$
5. $\sqrt{2} \cdot 2^{2x+1} < 2^x \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-x}$
6. $2 \cdot 4^x - 4 \cdot 2^x < 2^x - 2$

פתרון:

1. $3^x < 243$

$3^x < 3^5$ לפי חוקי חזקות:

$a > 1$

$\underline{x < 5}$

2. $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 4$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ לפי חוקי חזקות:

$a < 1$

$\underline{x < -2}$

3. $5^{4x+5} > 25^{4-2x}$

$5^{4x+5} > 5^{8-4x}$

$4x+5>8-4x$ $\quad a>1$

$8x>13$

$\underline{x>\frac{13}{8}}$

4. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+6}>\left(\frac{1}{9}\right)^{3.5x}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+6}>\left(\frac{1}{3}\right)^{7x}$

$a<1$

$x^2+6<7x$

מעבר לפתרון אי שוויון ריבועי: $x^2-7x+6<0$

(פתרו באופן עצמאי)

הפתרון: $\underline{1<x<7}$

5. $\sqrt{2}\cdot 2^{2x+1}<2^x\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{-x}$

$2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{2x+1}<2^x\cdot 2^{2x}$

$2^{2x+1.5}<2^{3x}$

$a>1$

$2x+1.5<3x$

$\underline{x>1.5}$

6. $2\cdot 4^x-4\cdot 2^x<2^x-2$

נעבור לבסיס 2: $2\cdot 2^{2x}-4\cdot 2^x<2^x-2$

$2\cdot 2^{2x}-4\cdot 2^x-2^x+2<0$

$2\cdot 2^{2x}-5\cdot 2^x+2<0$

הצבה: $t=2^x$ $\quad 2t^2-5t+2<0$

גם כאן הגענו לאי שוויון ריבועי:

פתרון: $\frac{1}{2}<t<2$

כלומר: $\frac{1}{2}<2^x<2$

$2^{-1}<2^x<2^1$

$\underline{-1<x<1}$ $\quad a>1$

בדיקת הבנה תרגיל 38

38. א. $4^{x} \le 64$ ב. $\left(\frac{1}{9}\right)^{x} < \frac{1}{27}$ ג. $\left(\frac{1}{y}\right)^{2x+3} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x+7}$

ד. $2^{x^2-15} < 4^{10-x}$ ה. $5\cdot 3^{x} - 9^{x} < 2\cdot 3^{x} - 54$

1. א.

ב.

ג.

ד.

2. א.

ב.

ג.

ד.

ה.

3. א. 3

ב. -2

ג. 2.5

ד. 1.5

ה. 3

ו. 2

ז. 2

4. א. 2

ב. 3

ג. 3

ד. 1.5

ה. 2

ו. 2

5. א. 1,12

ב. 2

ג.

ד.

6. 4

7. -0.75

8. 0.5

9. 4

10. 1

11. 0.75

12. $\frac{10}{7}$

13. -2

14. $\frac{1}{2},-1$

15. $-5,2$

16. $\frac{2}{5}$

17. $-1,-3$

18. 3

19. 3

20. 1

21. 2

22. 3

23. 2

24. 1

25. $-1,2$

26. 2

27. 2

28. 5

29. 2

30. 3

31. -1

32. 3

33. -2

34. $8,-2$

35. $3,-7,1$

36. $4,5,-1$

37. א. $(4,3)$

ב. $(1,3)$

ג. $(5,3)$

ד. $(3,2)$

ה. $(8,2)$

ו.

38. א. $x \le 3$

ב. $x > 1.5$

ג. $x > \frac{1}{3}$

ד. $-7 < x < 5$

$x > 9$