עתה נעבור לחקירת פונקציות.

נגזרת הפונקציה הלוגריתמית :

כמו תמיד : $\left(\log_a x\right)' = m$

לשם נוחות נתחיל דווקא במקרה $a = e$.

אז מתקיים : $\left(\ln x\right)' = m$

ובכתיבה מפורשת : עבור $h \to 0$ $\left(\ln x\right)' = \dfrac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h}$

ולפי חוקי הלוגריתמים : $\left(\ln x\right)' = \dfrac{\ln\dfrac{x+h}{x}}{h} = \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{h}{x}\right)}{h}$

כדי לפתח את הלוגריתם הזו עלינו לחזור לרגע להגדרה של e כפי שהוא מופיע בנגזרת הפונקציה המעריכית. שם ראינו : כאשר $\alpha \to 0$ $\dfrac{e^{\alpha} - e^{0}}{\alpha} = 1$

(החלפנו את h ב- α כדי לא להתבלבל בין h של הנגזרת כאן ובין זה המופיע למעלה).

על ידי העברת אגפים : $e^{\alpha} - e^{0} = \alpha$

$$e^{\alpha} - 1 = \alpha$$

$$e^{\alpha} = 1 + \alpha$$

ובהפעלת ln על שני האגפים : $\ln e^{\alpha} = \ln(1+\alpha)$

אבל $\ln e^{\alpha} = \alpha$ ולכן עבור $\alpha \to 0$: $\alpha = \ln(1+\alpha)$

(ואכן זה מתקיים – אתם מוזמנים לנסות במחשבון עבור $\alpha = 0.0003$).

כעת נחזור ללוגריתם שקיבלנו.

אם $h \to 0$ אז ודאי שגם $\dfrac{h}{x} \to 0$!

ועל ידי הצבה $\alpha = \dfrac{h}{x}$: $\left(\ln x\right)' = \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{h}{x}\right)}{h} = \dfrac{\dfrac{h}{x}}{h}$

ואחרי צמצום : $\left(\ln x\right)' = \dfrac{\dfrac{1}{x}}{1} = \dfrac{1}{x}$

כלומר $\boxed{\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}}$

ואם רוצים לגזור פונקציה בבסיס אחר?

ובכן האמת היא שכל מספר ניתן להסבה לכתיב חזקות עם בסיס e, אבל הנגזרת היא קלה למציאה :

$$\left(\log_a x\right)' = \left(\frac{\log_e x}{\log_e a}\right)' = \left(\frac{1}{\ln a}\cdot \ln x\right)' = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln a}$$

כלומר $$\boxed{\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x\ln a}}$$

וכפי שכבר למדנו בנושא נגזרות - כל כללי הנגזרת שכבר למדנו מתקיימים גם בפונקציה זו.

דוגמאות :

לג. גזרו את הפונקציות הבאות :

1. $y = 2\ln x$
2. $y = x\ln x$
3. $y = \dfrac{x}{\ln x}$
4. $y = \ln(x^2 - 2x)$
5. $y = 4\ln\dfrac{x+2}{x^2-7}$
6. $y = \sqrt{\ln(x^2-9)}$
7. $y = \ln\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}$

פתרון :

1. $y = 2\ln x$

$$\underline{y' = \frac{2}{x}}$$

2. $y = x\ln x$

$$\underline{y' = 1\cdot\ln x + \frac{x}{x} = \ln x + 1}$$ (פונקצית מכפלה!)

3. $y = \dfrac{x}{\ln x}$

$$\underline{y' = \frac{1\cdot\ln x - \frac{x}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}}$$ (פונקצית מנה)

4. $y = \ln(x^2 - 2x)$

$$\underline{y' = \frac{1}{x^2-2x}\cdot(2x-2) = \frac{2x-2}{x^2-2x}}$$ (פונקציה מורכבת)

5. $y = 4\ln\dfrac{x+2}{x^2-7}$

תחילה גוזרים את ה-ln ואח"כ נגזרת מנה:

$$y'=4\cdot\frac{x^2-7}{x+2}\cdot\frac{1\cdot(x^2-7)-2x(x+2)}{(x^2-7)^2}$$

$$y'=\frac{4}{x+2}\cdot\frac{x^2-7-2x(x+2)}{x^2-7}$$

$$\underline{y'=\frac{-4x^2-16x-28}{(x+2)(x^2-7)}}$$

6. $y=\sqrt{\ln(x^2-9)}$

$$y'=\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{\ln(x^2-9)}}\cdot\frac{1}{x^2-9}\cdot\cancel{2}x$$

$$\underline{y'=\frac{x}{(x^2-9)\sqrt{\ln(x^2-9)}}}$$

7. $y=\ln\sqrt{\frac{x}{x^2-1}}$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{\frac{x}{x^2-1}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{x^2-1}}}\cdot\frac{1\cdot(x^2-1)-2x\cdot x}{(x^2-1)^2}$$

$$y'=\frac{-x^2-1}{2\left(\frac{x}{x^2-1}\right)\cdot(x^2-1)^2}$$

$$\underline{y'=\frac{-x^2-1}{2x(x^2-1)}}$$

בדיקת הבנה 105

<u>חקירת פונקציה לוגריתמית</u>

בהנחה שעד כה רכשתם מיומנות רבה בנושא חקירת הפונקציות בכלל אביא רק כמה דוגמאות על מנת לראות כיצד חקירה זו מיושמת בפונקציות לוגריתמיות.

נתחיל בתיאור הפונקציה הבסיסית:

לב. חקרו את הפונקציה $y=\ln x$ ושרטטו סקיצה שלה.

פתרון:

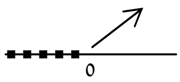
תחום הגדרה: $x>0$

נקודות קיצון : אין

אסימפטוטות : אנכית - $x=0$

אופקית - אין

תחומי עליה וירידה :



חיתוך צירים : $(1,0)$

שרטוט

<u>תחום הגדרה :</u> לפי הגדרת הפונקציה הלוגריתמית $\underline{x>0}$.

<u>נקודות קיצון :</u> $y=\ln x$

$$y'=\frac{1}{x}$$

אבל : $\frac{1}{x}\neq 0$ לכל x

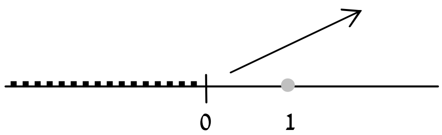
לכן אין נקודות קיצון.

<u>אסימפטוטות :</u>

אנכית : הפונקציה הלוגריתמית מיוחדת בכך שככל שמתקרבים ל- $x=0$ מימין הפונקציה נעשית יותר ויותר שלילית ולכן למעשה $\underline{x=0}$ היא אסימפטוטה אנכית.

אופקית : עבור $x\to\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\ln x=\infty$ הפונקציה מתבדרת <u>ואין לה גבול</u>.

<u>תחומי עליה וירידה :</u>



$$y'=\frac{1}{x}$$

$$y'(1)=\frac{1}{1}>0$$

הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

<u>חיתוך צירים :</u>

עבור $x=0$ הפונקציה לא מוגדרת!

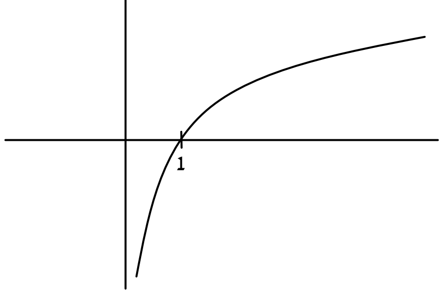
עבור $y=0$ $\leftarrow$ $0=\ln x$

$$x=e^0$$

$$\underline{x=1}$$

נקודת החיתוך : $(1,0)$

<u>שרטוט :</u>



לה. חקרו את הפונקציה $y = 2x\ln(3x)$.

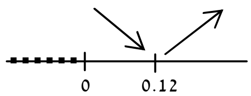
פתרון :

תחום הגדרה : $x > 0$

נקודות קיצון : $(0.12, -0.25)$ מינימום

אסימפטוטות : אין

תחומי עליה וירידה :



חיתוך צירים : $(\frac{1}{3}, 0)$

שרטוט

<u>תחום הגדרה :</u> לפי הגדרת הפונקציה הלוגריתמית $3x > 0 \quad \leftarrow \quad \underline{x > 0}$

<u>נקודות קיצון :</u> $y = 2x\ln(3x)$

(פונקצית מכפלה) $y' = 2\ln(3x) + 2x \cdot \frac{3}{3x}$

$y' = 2\ln(3x) + 2$

$0 = 2\ln(3x) + 2$

$\ln(3x) = -1$

$3x = e^{-1}$

$\underline{x = 0.12}$

מציאת y : $y(0.12) = 2 \cdot 0.12 \cdot \ln(3 \cdot 0.12) = -0.25$

נקודת קיצון : $(0.12, -0.25)$

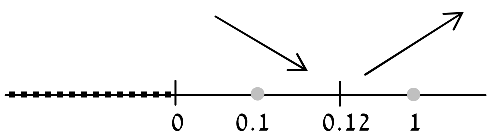
<u>אסימפטוטות :</u>

אנכית : במקרה זה עבור $x \to 0$ אמנם פונקצית ה-ln שואפת ל- $-\infty$ אולם המכפלה ב-x גורמת לכל הפונקציה לשאוף ל-0. לכן : $\lim_{x \to 0} 2x\ln(3x) = 0$ ואין אסימפטוטה אנכית.

אופקית : גם אין כי עבור $x \to \infty$, הפונקציה מתבדרת.

לכן אין אסימפטוטות.

<u>תחומי עליה וירידה :</u>



$$y'=2\ln(3x)+2$$

$$y'(0.1)=2\ln 0.3+2<0$$

$$y'(1)=2\ln 1+2>0$$

והתחומים: עבור $0<x<0.12$ הפונקציה יורדת

עבור $x>0.12$ הפונקציה עולה

$(0.12,-0.25)$ נקודת מינימום

<u>חיתוך צירים:</u>

עבור $x=0$ גם כאן הפונקציה אינה מוגדרת.

עבור $y=0$ $\leftarrow$ $0=2x\ln(3x)$

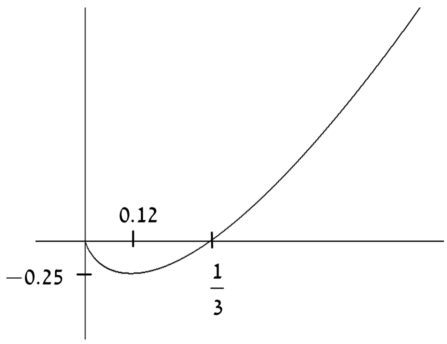
$\ln(3x)=0$ $\quad 2x\neq 0$ $(x\neq 0)$

$$3x=e^0=1$$

$$\underline{x=\frac{1}{3}}$$

נקודת החיתוך: $(\frac{1}{3},0)$.

<u>שרטוט:</u>



ולדוגמה מורכבת יותר:

לו. חקרו את הפונקציה $y=\frac{\sqrt{x}}{\ln x+1}$ ושרטטו סקיצה.

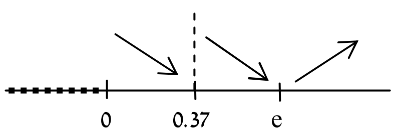
פתרון:

תחום הגדרה: $x>0$, $x\neq 0.37$

נקודות קיצון: $(e,\frac{\sqrt{e}}{2})$ מינימום

אסימפטוטות: אנכית - $x=0.37$

תחומי עליה וירידה:



חיתוך צירים: אין

שרטוט

<u>תחום הגדרה:</u>

כאן ישנן 3 הגבלות שונות:

בגלל השורש: $x \geq 0$

בגלל ה-ln: $x > 0$

בגלל החילוק: $\ln x + 1 \neq 0$

$$\ln x \neq -1$$

$$x \neq e^{-1} = 0.37$$

ולכן התחום הוא $x > 0$, $x \neq 0.37$.

<u>נקודות קיצון:</u> $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\ln x + 1}$

נסמן $u' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \quad \leftarrow \quad u = \sqrt{x}$

$$v' = \frac{1}{x} \quad \leftarrow \quad v = \ln x + 1$$

$$y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x + 1) - \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x + 1)^2}$$

$$y' = \frac{\frac{\ln x + 1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{x}}{(\ln x + 1)^2} = \frac{\frac{\ln x + 1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}}{(\ln x + 1)^2}$$

$$0 = \frac{\ln x + 1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

נכפול ב- $2\sqrt{x}$: $0 = \ln x + 1 - 2$

$$\ln x = 1$$

$$\underline{x = e}$$

מציאת y: $y(e) = \dfrac{\sqrt{e}}{\ln e + 1} = \dfrac{\sqrt{e}}{2}$

נקודת קיצון: $(e, \dfrac{\sqrt{e}}{2})$

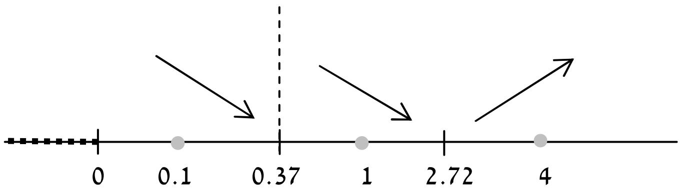
<u>אסימפטוטות:</u>

אנכית: ככל ש- $x \to 0$ גם $\sqrt{x} \to 0$, ולכן אין אסימפטוטה אלא התכנסות לנקודה (0,0) . בגלל המכנה אנו יודעים שקיימת אסימפטוטה אנכית ב- $x = 0.37$.

אופקית: עבור $x \to \infty$ פונקצית השורש גדלה מהר יותר מפונקצית ה-ln ולכן אין אסימפטוטה אלא התבדרות.

לסיכום: אסימפטוטה אנכית – $x = 0.37$.

תחומי עליה וירידה:



$$y'=\frac{\frac{\ln x+1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{(\ln x+1)^2}$$

$$y'(0.1)=\frac{\frac{\ln 0.1+1}{2\sqrt{0.1}}-\frac{1}{\sqrt{0.1}}}{(\ln 0.1+1)^2}<0$$

$$y'(1)=\frac{\frac{\ln 1+1}{2\cdot 1}-\frac{1}{1}}{(\ln 1+1)^2}<0$$

$$y'(4)=\frac{\frac{\ln 4+1}{2\cdot 2}-\frac{1}{2}}{(\ln 4+1)^2}>0$$

<u>טיפ</u>: כאשר עובדים עם שורשים כדאי להציב מספרים "נוחים" במקרה שלנו 1,4

והתחומים: עבור $0<x<0.37$, $0.37<x<2.72$ הפונקציה יורדת

עבור $x>2.72$ הפונקציה עולה

$(e,\frac{\sqrt{e}}{2})$ נקודת מינימום

<u>חיתוך צירים</u>:

עבור $x=0$ הפונקציה לא מוגדרת

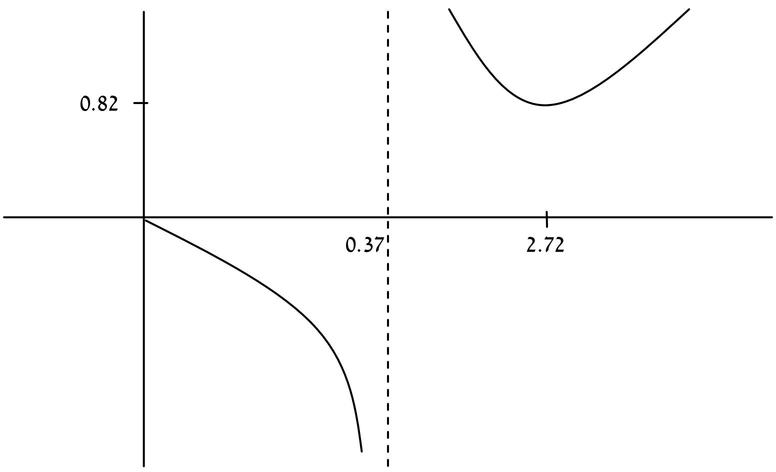
עבור $y=0$ $\leftarrow$ $0=\frac{\sqrt{x}}{\ln x+1}$

$\sqrt{x}=0$

אבל: $x\neq 0$

אין נקודות חיתוך עם הצירים!

<u>שרטוט</u>:



כפי שאתם רואים אין הבדל בין חקירת פונקציות רציונאליות או לוגריתמיות ; כולן נפתרות על פי אותם עקרונות. לכן נעבור ישר לתרגול עצמי.

בדיקת הבנה : תרגיל 106

גם שאר שימושי הנגזרת נפתרים כמו בכל פונקציה אחרת.

לז. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $y=\log_3 x$ העובר בנקודה שבה $x=3$.

פתרון :

מציאת שיפוע : $y'=\frac{1}{x\ln 3}$

$$y'(3)=\frac{1}{3\ln 3}=0.3$$

מציאת y : $y(3)=\log_3 3=1$

והמשוואה : $y-1=0.3(x-3)$

$$y-1=0.3x-0.9$$

$$\underline{y=0.3x+0.1}$$

לח. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $y=\frac{x}{\ln x}$ ששיפועו $\frac{1}{4}$ (ניתן לבטא את התשובות באמצעות e).

פתרון : $y'=\frac{\ln x-\frac{x}{x}}{(\ln x)^2}=\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}=\frac{1}{4}$

$$4\ln x-4=\ln^2 x$$

הצבה $t=\ln x$: $t^2-4t+4=0$

$$t=2$$

$$\ln x=2$$

$$x=e^2$$

מציאת y : $y=\frac{e^2}{\ln e^2}=\frac{e^2}{2}$

והמשוואה : $y-\frac{e^2}{2}=\frac{1}{4}(x-e^2)$

$$\underline{y=\frac{1}{4}x-\frac{e^2}{2}}$$

לט. מהנקודה $(0,1)$ העבירו ישר המשיק לפונקציה $y=\ln x$. מצאו את משוואת המשיק.

פתרון :

מכיוון שבפונקציה הנתונה $x \neq 0$ ברור שהנקודה הנתונה היא נקודה שאיננה על הפונקציה.

כדי למצוא את נקודת ההשקה:

נזכור:
$$m = y' = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

$$y' = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{\ln x - 1}{x - 0}$$

$$1 = \ln x - 1$$

$$\ln x = 2$$

$$x = e^2$$

מציאת y:
$$y = \ln e^2 = 2$$

והשיפוע:
$$y' = \frac{1}{e^2}$$

והמשוואה:
$$y - 2 = \frac{1}{e^2}(x - e^2)$$

$$y - 2 = \frac{1}{e^2}x - 1$$

$$\underline{y = \frac{x}{e^2} + 1}$$

בקית הבנה: תרגיל 107

תרגול עצמי

אינטגרל של פונקציה לוגריתמית

מכיוון שהאינטגרל הוא "פעולה הפוכה" לנגזרת קל לראות ש - $\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$.

כמו תמיד כל שאר כללי האינטגרציה מתקיימים גם בפונקציה זו.

דוגמאות:

$$\int \frac{3}{x}dx = 3\ln x + C$$

תזכורת:
מחלקים במקדם של x

$$\int \frac{7}{2x+15}dx = 7\frac{\ln(2x+15)}{2} + C$$

בפונקציה זו קל להביא לידי ביטוי אינטגרל הדורש חלוקת רב-איבר ברב-איבר כפי שכבר למדנו.

כדי למצוא את:
$$\int \frac{x+10}{x-3}dx$$

יש צורך תחילה בחילוק:

$$\begin{array}{rl} & 1 \\ \hline x+10 & \big| \, x-3 \\ -\ \underline{x-3} & \\ 13 & \end{array}$$

אחרי החילוק אנו מקבלים:

$$\int \frac{x+10}{x-3}dx = \int 1 + \frac{13}{x-3}dx = x + 13\ln(x-3) + C$$

כך גם במקרה של: $\int\left(\frac{2x^3+5x^2-4x+1}{2x+8}\right)dx$

תחילה נבצע חלוקה:

$$\begin{array}{rl} & x^2-1.5x+4 \\ \hline 2x^3+5x^2-4x+1 & \big| 2x+8 \\ -\ \underline{2x^3+8x^2} & \\ -3x^2-4x & \\ -\ \underline{-3x^2-12x} & \\ 8x+1 & \\ -\ \underline{8x+32} & \\ -31 & \end{array}$$

ומכאן: $\int\left(\frac{2x^3+5x^2-4x+1}{2x+8}\right)dx=\int\left(x^2-1.5x+4-\frac{31}{2x+8}\right)dx=$

$$=\frac{x^3}{3}-\frac{1.5x^2}{2}+4x-\frac{31\ln(2x+8)}{2}+C$$

ובאינטגרלים המביאים לפונקציה מורכבת: $\int\left(\frac{3x^2-14x+5}{x^3-7x^2+5x}\right)dx$

במקרה זה קל לראות ש: $\left(x^3-7x^2+5x\right)'=3x^2-14x+5$

ולכן: $\int\left(\frac{3x^2-14x+5}{x^3-7x^2+5x}\right)dx=\ln\frac{1}{x^3-7x^2+5x}+C$

במקרים יותר סבוכים נשתמש בטכניקה שכבר למדנו:

$$\int\left(\frac{3x^3-x}{3x^4-2x^2+8}\right)dx$$

נציב: $u=3x^4-2x^2+8$

ואז: $\frac{du}{dx}=12x^3-4x=4\left(3x^3-x\right)$

$$\frac{1}{4}du=\left(3x^3-x\right)dx$$

נציב בחזרה באינטגרל הנתון:

$$\int\left(\frac{3x^3-x}{3x^4-2x^2+8}\right)dx=\int\frac{\frac{1}{4}du}{u}=\frac{1}{4}\ln u+C=\frac{1}{4}\ln(3x^4-2x^2+8)+C$$

<u>בדיקת הבנה:</u>

<u>מציאת פונקציה קדומה</u>

גם כאן עקרונות הפתרון אינם שונים מאלה שלמדנו ולכן נביא מספר מצומצם של דוגמאות:

מ. מצאו פונקציה $f(x)$ המקיימת $f'(x)=\frac{1}{2x+1}$ ועוברת דרך הנקודה $(2,\ln 5)$.

פתרון: $f(x)=\int\frac{1}{2x+1}dx=\frac{\ln(2x+1)}{2}+C$

ונתון: $f(2)=\ln 5$

לכן: $\frac{\ln(2\cdot 2+1)}{2}+C=\ln 5$

$$\frac{\ln 5}{2}+C=\ln 5$$

$$C=\frac{\ln 5}{2}$$

והפונקציה: $\underline{f(x)=\frac{\ln(2x+1)}{2}+\frac{\ln 5}{2}}$

מא. מהי הפונקציה $f(x)$ שנגזרתה $f'(x)=\frac{2x+3}{x^2+3x-2}+5$ ומקיימת $f(2)=\ln 8+10$?

פתרון: $f(x)=\int\left(\frac{2x+3}{x^2+3x-2}+5\right)dx$

נציב: $u=x^2+3x-2$

ואז: $du=(2x+3)dx$

כלומר: $f(x)=\int\frac{du}{u}+5dx$

הסבר: ההצבה של u ו-du היא רק עבור האיבר השמאלי כלומר:

$$\frac{2x+3}{x^2+3x-2}=\frac{du}{u}$$

אבל האיבר 5 נשאר 5<u>dx</u> ולכן אנו צריכים לבצע שני אינטגרלים:

1. עבור $\int\frac{du}{u}$ זוהי אינטגרציה לפי המשתנה u

2. עבור $\int 5dx$ זוהי אינטגרציה לפי המשתנה x

לכן: $f(x)=\int\frac{du}{u}+\int 5dx=\ln u+5x+C$

אבל $u=x^2+3x-2$ ולכן: $f(x)=\ln(x^2+3x-2)+5x+C$

ונתון: $f(2)=\ln 8+10$

לכן: $\ln(4+6-2)+10+C=\ln 8+10$

$$C=0$$

והפונקציה: $f(x)=\ln(x^2+3x-2)+5x$

מב. מצאו את הפונקציה $f(x)$ על פי הנתונים: $f'(x)=\frac{x^3-4x^2+2x-5}{x-3}$ ו- $f(6)=48-\ln 3$.

פתרון:

נתחיל בחילוק הנגזרת:

$$\begin{array}{rl} & x^2-x-1 \\ \hline & x^3-4x^2+2x-5 \,\big|\, x-3 \\ - & \underline{x^3-3x^2} \\ & -x^2+2x \\ - & \underline{-x^2+3x} \\ & -x-5 \\ - & \underline{-x+3} \\ & -8 \end{array}$$

כלומר: $$f'(x)=x^2-x-1-\frac{8}{x-3}$$

ומעתה הכל פשוט יותר: $$f(x)=\int\left(x^2-x-1-\frac{8}{x-3}\right)dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-x-8\ln(x-3)+C$$

$$f(6)=72-18-6-8\ln 3+C=48-\ln 3$$

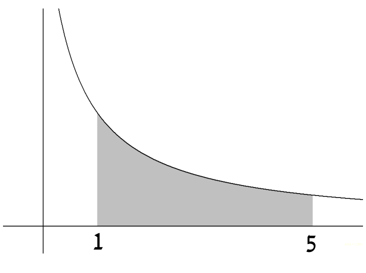
$$C=7\ln 3$$

והפונקציה: $$f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-x-8\ln(x-3)+7\ln 3$$

תרגול עצמי:

מציאת שטחים:

גם כאן נסתמך על ידע קודם ונביא רק מספר דוגמאות מצומצם.



מג. מצאו את השטח המוגבל בין

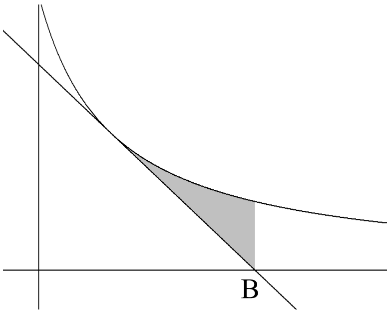
בין גרף הפונקציה $y=\frac{2}{2x+1}$,

בין ציר ה-x והישרים $x=1$, $x=5$.

פתרון:

$$S=\int_1^5\frac{2}{2x+1}dx=\frac{2\ln(2x+1)}{2}\Big|_1^5=\ln(2x+1)\Big|_1^5$$

$$S=\ln 11-\ln 3=1.3$$



מד. נתונה הפונקציה $y=\frac{4x+4}{x^2+2x+1}$.

דרך הנקודה שבה $x=1$ העבירו משיק לגרף הפונקציה.

המשיק חותך את ציר ה-x בנקודה B.

א. מצאו את משוואת המשיק.

ב. מצאו את השטח המוגבל בין הפונקציה, המשיק והישר $x=B$.

פתרון:

א. מציאת משוואת המשיק: $y=\frac{4x+4}{x^2+2x+1}$

$$y'=\frac{4(x^2+2x+1)-(4x+4)(2x+2)}{(x^2+2x+1)^2}$$

לאחר פתיחת סוגריים וכינוס איברים: $y'=\frac{-4x^2-8x-4}{(x^2+2x+1)^2}$

הצבה $x=1$: $y'(1)=\frac{-16}{16}=\underline{-1=m}$

מציאת ערך y: $y(1)=\frac{4\cdot1+4}{1+2+1}=2$

והמשוואה: $y-2=-1(x-1)$

$\underline{y=-x+3}$

ב. מציאת גבולות:

$x_1=1$

$x_2=B \leftarrow$ $0=-x+3$

(B היא נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה-x) $x_2=3$

והשטח:

$$S=\int_1^3\left[\frac{4x+4}{x^2+2x+1}-(-x+3)\right]dx$$

לפי שטח בין שתי פונקציות

לשם נוחות נפרק את האינטגרל לשניים:

$$S=\int_1^3\frac{4x+4}{x^2+2x+1}dx-\int_1^3(-x+3)dx$$

האינטגרל השמאלי כפי שכבר ראינו מביא לפונקציה מורכבת

ולכן: $u=x^2+2x+1$

$du=(2x+2)dx$

$$\int_1^3 \frac{4x+4}{x^2+2x+1}dx = \int_1^3 \frac{2}{u}du = 2\ln(x^2+2x+1)\Big|_1^3 =$$

$$= 2\ln 16 - 2\ln 4 = 5.54 - 2.77 = 2.77$$

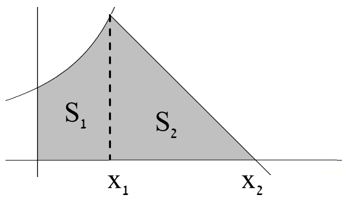
$$\int_1^3 (-x+3)dx = -\frac{x^2}{2} + 3x\Big|_1^3 = (-4.5+9) - (-0.5+3) = 2$$

והשטח המבוקש: $S = 2.77 - 2 = \underline{0.77}$

מה. מצאו את השטח המוגבל בין גרף

הפונקציה $y = \frac{1}{1-2x}$, הישר $y = 3-4x$

וצירי השיעורים ברביע הראשון.



פתרון:

מציאת גבולות:

מציאת x_1:

$$\frac{1}{1-2x} = 3-4x$$

$$1 = (3-4x)(1-2x)$$

$$8x^2 - 10x + 2 = 0$$

$x = \frac{1}{4}$ או $x = 1$

נבדוק מי מהם ברביע הראשון (אפשר להציב בשתי הפונקציות):

$y(1) = 3-4 = -1$ לא מתאים

$y(\frac{1}{4}) = 3 - 4\cdot\frac{1}{4} = 3-1 = 2$ מתאים

מציאת x_2:

$$3-4x = 0$$

$$x_2 = \frac{3}{4}$$

מציאת שטחים:

$$S_1 = \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{1-2x}dx = \frac{\ln(1-2x)}{-2}\Big|_0^{\frac{1}{4}} = \frac{\ln\frac{1}{2}}{-2} - \frac{\ln 1}{-2} = 0.35$$

$$S_2 = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} (3-4x)dx = 3x - \frac{4x^2}{2}\Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} = 3x - 2x^2\Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} =$$

$$= \left(\frac{9}{4} - 2\cdot\frac{9}{16}\right) - \left(\frac{3}{4} - 2\cdot\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{2}$$

והשטח: $S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2} + 0.35 = \underline{0.85}$

מו. לפונקציה $y = \frac{1}{ax}$ העבירו נורמל שמשוואתו $9y - 3x = 8$.

א. מצאו את הפרמטר a.

ב. חשבו את השטח המוגבל על ידי הפונקציה, הנורמל וצירי השיעורים.

פתרון:

א. מציאת הפרמטר a:

תחילה ננסה למצוא את a בעזרת הנגזרת והשוואה עם שיפוע <u>המשיק</u>:

$$9y - 3x = 8$$

$$y = \frac{3}{9}x + \frac{8}{9}$$

ומכאן: $$m = \frac{1}{3} \text{ נורמל}$$

$$m = -3 \text{ משיק}$$

נגזרת הפונקציה: $$y' = -3 = -\frac{1}{(ax)^2} \cdot a$$

$$-3 = -\frac{a}{(ax)^2}$$

$$(1)\quad 3ax^2 = 1$$

מכיוון שקיבלנו משוואה עם שני נעלמים נחפש עוד משוואה.

אנו יודעים שבנקודת החיתוך של הנורמל עם הפונקציה מתקיים:

$$\frac{1}{ax} = \frac{3}{9}x + \frac{8}{9}$$

$$(2)\quad 9 = 3ax^2 + 8ax$$

נציב את (1) ב-(2): $$9 = 1 + 8ax$$

$$\underline{1 = ax}$$

הצבה חוזרת ב-(1): $$3ax \cdot x = 1$$

$$3 \cdot 1 \cdot x = 1$$

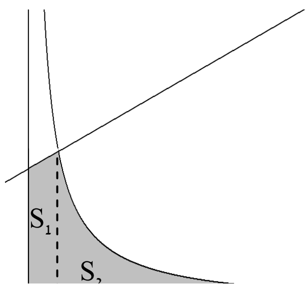
$$x = \frac{1}{3}$$

ולכן: $$a = 3$$

נשים לב שבמהלך הפתרון קיבלנו גם את השיעור $x = \frac{1}{3}$ של נקודת החיתוך!

ב. מציאת השטח:

נתחיל בשרטוט:



$$S_1=\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{3}{9}x+\frac{8}{9}dx=\frac{3x^2}{18}+\frac{8}{9}x\Big|_0^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{\frac{1}{3}}{18}+\frac{8}{27}\right)-0=\frac{17}{54}$$

$$S_2=\int_{\frac{1}{3}}^{5}\frac{1}{3x}dx=\frac{\ln(3x)}{3}\Big|_{\frac{1}{3}}^{5}=\frac{\ln 15}{3}-\frac{\ln 1}{3}=0.9$$

והשטח:

$$S=S_1+S_2=\frac{17}{54}+0.9=\underline{1.21}$$

בדוגמה זו אנו רואים שכאשר אסטרטגית הפתרון ברורה ועושים שימוש במיומנויות הפתרון שכבר נלמדו ניתן לפתור גם תרגילים מורכבים.

<u>תרגול עצמי:</u>

תרגול כללי