המכפלה הסקלרית

לאחר שראינו את ההקבלה בין הווקטור הגיאומטרי לווקטור האלגברי בפעולות החיבור והחיסור נפנה למכפלה הסקלרית.

כמו שראינו : $\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos\alpha$

בווקטור אלגברי המכפלה פשוטה יותר כי כל ווקטור בנוי מ-3 רכיבים הניצבים זה לזה כך שהמכפלות המעורבות מתאפסות ולכן :

$$\underline{u}\cdot\underline{v}=(u_1,u_2,u_3)\cdot(v_1,v_2,v_3)=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+u_3\cdot v_3$$

וכאשר רוצים למצוא זווית בין שני ווקטורים :

$$\cos\alpha=\frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}=\frac{u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+u_3\cdot v_3}{\sqrt{{u_1}^2+{u_2}^2+{u_3}^2}\cdot\sqrt{{v_1}^2+{v_2}^2+{v_3}^2}}$$

וכמו שלמדנו כאשר $\alpha=90^\circ$ $\cos\alpha=0$.

ולכן אם $\underline{u}\cdot\underline{v}=0$ הווקטורים מאונכים!

דוגמאות :

לג. מצאו את המכפלה הסקלרית של הווקטורים $\underline{u},\underline{v}$ לפי הנתונים הבאים :

1. $\underline{u}=(1,5,3)$ $\underline{v}=(-4,2,5)$
2. $\underline{u}=(7,-4,2)$ $\underline{v}=(1,0,3)$

פתרון :

1. $(1,5,3)\cdot(-4,2,5)=(1\cdot(-4))+(5\cdot 2)+(3\cdot 5)=-4+10+15=21$
2. $(7,-4,2)\cdot(1,0,3)=7+0+6=13$

לד. חשבו את ערכו של k כך שהווקטורים $\underline{u},\underline{v}$ יהיו מאונכים זה לזה.

1. $\underline{u}=(1,3,7)$ $\underline{v}=(-9,6,k)$
2. $\underline{u}=(3,k,8)$ $\underline{v}=(k,-4,5)$

פתרון :

1. $(1,3,7)\cdot(-9,6,k)=-9+18+7k=0$

$$7k=-9$$
$$k=\frac{9}{7}$$

2. $(3,k,8)\cdot(k,-4,5)=3k-4k+40=0$

$$40=k$$

לה. חשבו את הזווית בין הווקטורים $\underline{u},\underline{v}$ לפי הנתונים הבאים :

1. $\underline{u}=(-2,4,3)$ $\underline{v}=(5,7,-9)$
2. $\underline{u}=(3,7,8)$ $\underline{v}=(9,-15,4)$

פתרון :

לפי הנוסחא : $\cos\alpha=\dfrac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}$

.1 $$\cos\alpha=\frac{(-2,4,3)\cdot(5,7,-9)}{\sqrt{2^2+4^2+3^2}\cdot\sqrt{5^2+7^2+9^2}}=\frac{-10+28-27}{\sqrt{4+16+9}\cdot\sqrt{25+49+8}}$$

$$\cos\alpha=\frac{-9}{5.32\cdot 12.45}=\frac{-9}{67}=-0.13$$

$$\alpha=97.72^0$$

.2 $$\cos\alpha=\frac{(3,7,8)\cdot(9,-15,4)}{\sqrt{3^2+7^2+8^2}\cdot\sqrt{9^2+15^2+4^2}}=\frac{27-105+32}{\sqrt{9+49+64}\cdot\sqrt{81+225+16}}$$

$$\cos\alpha=\frac{-46}{11.05\cdot 17.94}=-0.23$$

$$\alpha=103.42^0$$

<u>בדיקת הבנה</u>

56. מצאו את המכפלה הסקלרית של הווקטורים $\underline{u},\underline{v}$ לפי הנתונים הבאים :
א. $\underline{u}=(4,-2,7)$ $\underline{v}=(5,3,8)$
ב. $\underline{u}=(-1,-3,-4)$ $\underline{v}=(7,8,-5)$
ג. $\underline{u}=(3,8,0)$ $\underline{v}=(0,0,1)$

57. חשבו את ערכו של k כך שהווקטורים $\underline{u},\underline{v}$ יהיו מאונכים זה לזה.
א. $\underline{u}=(k,1,3)$ $\underline{v}=(-2,7,-5)$
ב. $\underline{u}=(6,8,k)$ $\underline{v}=(k,-4,7)$
ג. $\underline{u}=(k,k+1,13)$ $\underline{v}=(k,3,-1)$

58. חשבו את הזווית בין הווקטורים הנתונים :
א. $\underline{u}=(4,2,-5)$ $\underline{v}=(6,-1,9)$
ב. $\underline{u}=(3,4,-1)$ $\underline{v}=(7,-2,5)$
ג. $\underline{u}=(11,12,13)$ $\underline{v}=(-9,1,-3)$

מכאן נוכל לעבור למציאת זוויות ונקודות במצולעים ובגופים מרחביים.

לו. נתון מרובע ABCD $A=(1,-2,5)$ $B=(3,4,2)$ $C=(-1.68,7.12,3.56)$ $D=(-5,2,7)$

א. הוכיחו כי המרובע הוא טרפז שווה שוקיים.

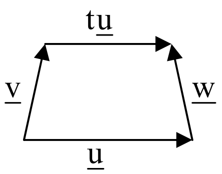
ב. מצאו את זוויות הבסיס.

ג. מצאו את הזוויות בין האלכסון לשוקיים.

פתרון :

א. כדי לבחון שהמרובע הוא טרפז עלינו למצוא 2 צלעות נגדיות מקבילות כלומר בעלות אותו <u>כיוון</u> ו-2 שאינן בעלות אותו כיוון.

נשרטט טרפז שווה שוקיים



כבר ראינו ששתי צלעות תהיינה מקבילות אם מתקיים שווקטור אחד הוא כפל בסקלר של ווקטור שני.

לדוגמא ווקטור $\underline{a}=(1,2,3)$ מקביל לווקטור $\underline{b}=(2,4,6)$ כיוון ש- $\underline{a}=\frac{1}{2}\underline{b}$ זה מבטיח שכיוונם זהה ורק אורכם שונה.

כך נבדוק גם הקבלה בטרפז.

נמצא את הווקטורים: $\overrightarrow{AB}=(3,4,2)-(1,-2,5)=(2,6,-3)$

$$\overrightarrow{BC}=(-1.68,7.12,3.56)-(3,4,2)=(-4.68,3.12,1.56)$$

$$\overrightarrow{CD}=(-5,2,7)-(-1.68,7.12,3.56)=(-3.32,-5312,3.44)$$

$$\overrightarrow{AD}=(-5,2,7)-(1,-2,5)=(-6,4,2)$$

עתה נבחן מי מהצלעות הנגדיות יכול להיות מקביל.

האם קיים t כך ש: $\overrightarrow{AB}=t\overrightarrow{CD}$?

אם כן צריך להתקיים: $(2,6,-3)=t(-3.32,-5.12,3.44)$

כלומר $2=t\cdot(-3.32)\Rightarrow t=-0.6$

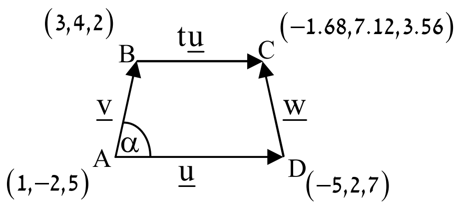
$$6=t(-5.12)\Rightarrow t=-1.17$$

כבר אנו רואים שאלו לא צלעות מקבילות, לא קיים t כזה.

נבדוק לגבי $\overrightarrow{BC}=t\overrightarrow{AD}$

האם $(-4.68,3.12,1.56)=t(-6,4,2)$

$$-4.68=t\cdot(-6)\Rightarrow t=0.78$$
$$3.12=t\cdot 4 \quad\Rightarrow t=0.78$$
$$1.56=t\cdot 2 \quad\Rightarrow t=0.78$$



כלומר קיים $t=0.78$ ולכן $\overrightarrow{BC}\,||\,\overrightarrow{AD}$

עתה ניתן לשרטט טרפז "נכון":

כדי להשלים את הסעיף עלינו לבחון אם הטרפז שווה שוקיים. כלומר $|\underline{v}|=|\underline{w}|$

כבר מצאנו: $\underline{v}=\overrightarrow{AB}=(2,6,-3)$

$$|\underline{v}|=\sqrt{2^2+6^2+(-3)^2}=7$$

$$\underline{w}=\overrightarrow{CD}=(-3.32,-5.12,3.44)$$

$$|\underline{w}|=\sqrt{(-3.32)^2+(-5.12)^2+3.44^2}=7$$

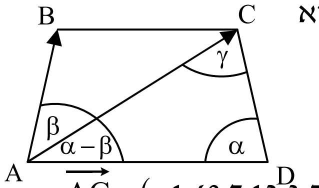
כלומר הטרפז הוא גם שווה שוקיים.

ב. נבחר את זווית הבסיס השמאלית

$$\cos\alpha=\frac{\underline{v}\cdot\underline{u}}{|\underline{v}|\cdot|\underline{u}|}=\frac{(2,6,-3)\cdot(-6,4,2)}{7\cdot\sqrt{6^2+4^2+2^2}}$$

$$\cos\alpha=\frac{-12+24-6}{7\cdot 7.48}=0.115$$

$$\alpha=83.4^0$$



ג. כדי למצוא זווית בין האלכסון לשוק יש תחילה למצוא את וקטור האלכסון:

נבחר אלכסון $\overrightarrow{AC}$ ושוק $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AC}=(-1.68,7.12,3.56)-(1,-2,5)=(-2.68,5.12,-1.44)$$

$$\overrightarrow{AB}=\underline{v}=(2,6,-3)$$ כבר ידוע

וכבר ראינו $$|\underline{v}|=7$$

$$\cos\beta=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{(-2.68,5.12,-1.44)\cdot(2,6,-3)}{\sqrt{2.68^2+5.12^2+1.44^2}\cdot 7}$$

$$\cos\beta=\frac{-5.36+30.72+4.32}{5.95\cdot 7}=\frac{29.68}{41.65}$$

$$\beta=44.6^0$$

את הזווית השנייה γ נמצא לפי חישובי זוויות:

$$\sphericalangle CAD=\alpha-\beta=83.4-44.6=38.8^\circ$$

$$\gamma=180-(\alpha-\beta)-\alpha=180-38.8-83.4$$

$$\gamma=57.8^0$$

לז. נתונה פירמידה מרובעת ABCDS שבסיסה ריבוע.

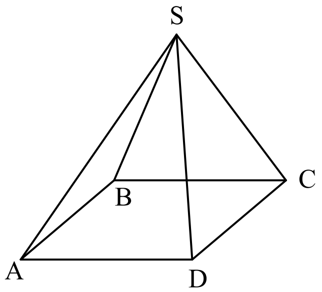
$A=(3,2,-10)$ $B=(4,4,10)$ $C=(22,-5,10)$ $D=(24,44,5)$

א. מצאו את הווקטור $\overrightarrow{DB}$.

ב. הוכיחו כי הווקטור $\overrightarrow{BS}$ מאונך למישור ABCD.

ג. הוכיחו כי $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{DS}$.

ד. מצאו את נפח הפירמידה.



פתרון:

נשרטט את הפירמידה.

א. כדי למצוא את הווקטור $\overrightarrow{BD}$.

עלינו תחילה למצוא את נקודה D.

למציאת נקודה D נשתמש בנתון שהבסיס הוא ריבוע ולכן $$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{BC}=(22,-5,10)-(4,4,10)=(18,-9,0)$$

ולמציאת נקודה D (כפי שכבר למדנו) $$D=A+\overrightarrow{BC}$$

$$D=(3,2,-10)+(18,-9,0)=(21,-7,-10)$$

ומכאן: $$\overrightarrow{BD}=(21,-7,-10)-(4,4,10)=(17,-11,-20)$$

ב. כדי להוכיח כי הווקטור $\overrightarrow{BS}$ מאונך למישור עלינו להראות שהוא מאונך לפחות ל-2 ישרים במישור.

נבחר ווקטורים $\overrightarrow{BC}$ ו- $\overrightarrow{BD}$.

$$\overrightarrow{BS}=(24,44,5)-(4,4,10)=(20,40,-5)$$

$$\overrightarrow{BS}\cdot\overrightarrow{BC}=(20,40,-5)\cdot(18,-9,0)=360-360+0=0$$

כלומר $\overrightarrow{BS}\perp\overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{BS}\cdot\overrightarrow{BD}=(20,40,-5)\cdot(17,-17,-20)=340-440+100=0$$

ומכאן ש- $\overrightarrow{BS}$ מאונך למישור הבסיס.

ג. כדי להוכיח $\overrightarrow{DS}\perp\overrightarrow{AC}$ יש למצוא את הווקטורים.

$$\overrightarrow{AC}=(22,-5,10)-(3,2,-10)=(19,-7,20)$$

$$\overrightarrow{DS}=(24,44,5)-(21,-7,-10)=(3,51,15)$$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DS}=(19,-7,20)\cdot(3,51,15)=57-357+300=0$$

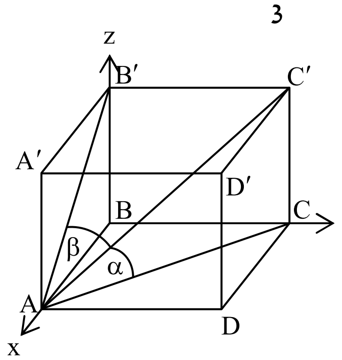
כלומר $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{DS}$

ד. למציאת הנפח $v=\frac{a^2\cdot h}{3}$

$$a=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{18^2+9^2+0}=20.12$$

$$h=\left|\overrightarrow{BS}\right|=\sqrt{20^2+40^2+5^2}=45$$

$$v=\frac{20.12^2\cdot 45}{3}=6075$$



לח. נתונה קובייה $ABCDA'B'C'D'$ שאורך צלעה a (ראו ציור)

א. הביעו את קודקודי הקובייה באמצעות a.

ב. מצאו את הזווית בין האלכסון הראשי לאלכסון הבסיס.

ג. מצאו את הזווית בין האלכסון הראשי ואלכסון הפאה.

פתרון:

א. בקובייה כל הצלעות שוות.

לפי הציור $B=(0,0,0)$

ומכאן "צועדים" כל פעם בגודל a לפי הצירים ומקבלים: $A=(a,0,0)$

$C=(0,a,0)$

$D=(a,a,0)$

באותו אופן: $A'=(a,0,a)$

$B'=(0,0,a)$

$C'=(0,a,a)$

$D'=(a,a,a)$

ב. $\overrightarrow{AC'}$ אלכסון ראשי.

$\overrightarrow{AC}$ אלכסון בסיס.

$$\overrightarrow{AC'}=(0,a,a)-(a,0,0)=(-a,a,a)$$

$$\overrightarrow{AC}=(0,0,a)-(a,0,0)=(-a,0,a)$$

$$\cos\alpha=\frac{(-a,a,a)\cdot(-a,0,a)}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}\cdot\sqrt{a^2+0+a^2}}=\frac{a^2+0+a^2}{\sqrt{3}\cdot a\cdot\sqrt{2}\cdot a}$$

$$\cos\alpha=\frac{2a^2}{\sqrt{6}\cdot a^2}=\frac{2}{\sqrt{6}}=0.816$$

$$\alpha=35.3^0$$

שימו לב! בגלל הסימטריה של הקובייה יכולנו לקחת כאלכסון ראשי את

$\overrightarrow{BD'}$ וכאלכסון בסיס את $\overrightarrow{BD}$ ולקבל אותה זווית.

אז היינו מקבלים:

$$\overrightarrow{BD'}=(a,a,a)$$

$$\overrightarrow{BD}=(a,a,0)$$

$$\cos\alpha=\frac{(a,a,a)\cdot(a,a,0)}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}\cdot\sqrt{a^2+a^2+0}}=\frac{2a^2}{\sqrt{6}\cdot a^2}$$

ומקבלים אותה זווית!

ג. נמצא זווית $\beta=\sphericalangle B'AC'$

$$\overrightarrow{AB'}=(0,0,a)-(a,0,0)=(-a,0,a)$$

$$\overrightarrow{AC'}=(-a,a,a)$$

$$\cos\beta=\frac{\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{AC'}}{\left|\overrightarrow{AB'}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC'}\right|}=\frac{(-a,0,a)\cdot(-a,a,a)}{\sqrt{a^2+0+a^2}\cdot\sqrt{a^2+a^2+a^2}}=\frac{2a^2}{\sqrt{6}}$$

$$\beta=35.3^\circ=\alpha$$

ומכאן אנו רואים שגם הזווית לפאות שווה (שוב זה הגיוני בגלל הסימטריה!).

ובכן אני תקווה שדוגמאות אלה מראות באופן ממצה את האפשרויות הטמונות בווקטורים אלגבריים ובפתרונות של מצולעים וגופים מרחביים.

בדוגמה האחרונה – למרות שלא נתון ה- a אנו עדיין יכולים למצוא את הזווית. ואכן זוויות אלה אינן תלויות באורך הצלעות אלא נובעות מהסימטריה של הקובייה בפני עצמה.

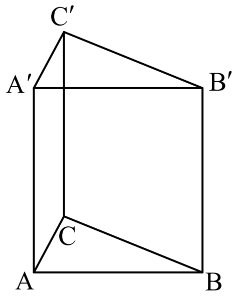
<u>תרגול עצמי</u>

59. נתון משולש ABC. $A=(7,-9,4)$ $B=(10,-10,2)$ $C=(6,-8,5)$

א. מצאו את זוויות המשולש.

ב. חשבו את שטח המשולש.

60. במנסרה $ABCA'B'C'$ נתון:



$A=(2,2,5)$ $B=(-1,2,5)$

$A'=(2,5,2)$ $C=(3,4,7)$

א. מצאו את שאר הקודקודים.

ב. מצאו את אחת מזוויות הבסיס וחשבו את שטחו.

(לפי: $s=\frac{a\cdot b\cdot \sin\alpha}{2}$)

ג. הוכיחו כי $\overrightarrow{AA'}$ מאונך למישור הבסיס.

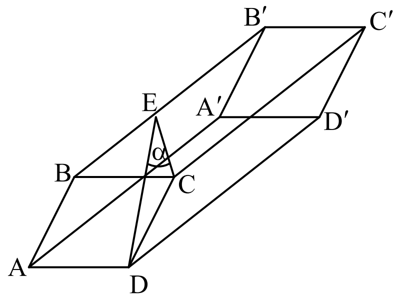
ד. חשבו את נפח המנסרה.

61. מצאו את ערכי t לפי הנתונים בסעיפים הבאים:

א. $\underline{u}=(3,-5,7)$ $\underline{v}=(1,-2,t)$ והזווית היא 52^0

ב. $\underline{u}=(5,-1,3)$ $\underline{v}=(t,1,2t)$ והזווית היא 60^0

62. במקבילון $ABCDA'B'C'D'$ נתון:



$A=(3,1,2)$ $B=(4,-1,6)$

$C=(6,0,1)$ $C'=(9,-3,7)$

תונה נקודה E המקיימת $\overrightarrow{BE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$

מצאו את הזווית $\sphericalangle DEC$.

63. במקבילון נתון: $A=(-1,0,1)$ $B=(0,-3,3)$ $C=(4,5,13)$ $A'=(22,1,11)$

א. הוכיחו כי המקבילון הוא תיבה.

ב. מצאו את הזווית החדה בין האלכסונים הראשיים $\overrightarrow{AC'}$ ו- $\overrightarrow{BD'}$.

ג. מצאו את נפח התיבה.

64. לאילו מזוגות הווקטורים בסעיפים הבאים קיים ערך של t שעבורו הווקטורים מאונכים.

עבורם מצאו את t.

א. $(1,3,t)$ ו- $(2,t,7)$

ב. $(-1,t,7)$ ו- $(2,t,3)$

ג. $(11,-5,t)$ ו- $(1,7,t+2)$

ד. $(t,1,9)$ ו- $(t-5,6,4)$

<u>הצגת ישר במרחב</u>

עד כה עסקנו בפעולות של ווקטורים וכמו שהגדרנו ווקטור יש לו כיוון <u>וגודל</u>. כאשר אנו רוצים לתאר ישרים עלינו "להשתחרר" מהגבלת הגודל, כי ישר בהגדרתו הוא <u>אינסופי</u>.

כדי להבין איך הדבר מתבצע במרחב נתבונן קודם כיצד ניתן ליישמו במישור (זה "קצת" יותר מוכר לנו).

מנושאים שלמדנו בעבר אנו יודעים שכדי לתאר ישר במישור עלינו למצוא לו נקודה ושיפוע.

נחליף את המילה שיפוע בכיוון. (כי אכן זה מה שהשיפוע מצביע עליו) ונקבל:

ישר יחיד מוגדר ע"י נקודה שעליו וכיוונו

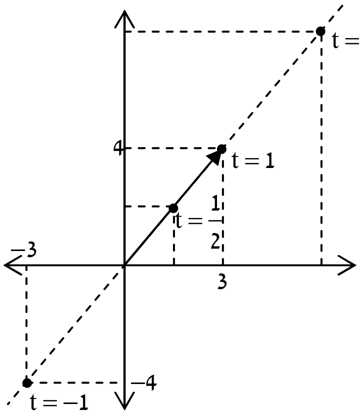
את <u>הכיוון</u> קל לנו לקבל בעזרת ווקטור. גם <u>נקודה</u> קל למצוא כי תמיד אפשר לקחת את נקודת היציאה של הווקטור.

אולם איך נוכל להתגבר על הקושי שלווקטור יש גודל?

ובכן לשם כך אנו מגדירים ש- t המקבל את כל המספרים הממשיים הרי שהוא מייצג אינסוף נקודות שכל אחת מהן היא עבור t ספציפי.

אוסף נקודות אלה מייצג <u>ישר אינסופי!</u>

כדי להבטיח שהבנתם את הרעיון אביא דוגמה מספרית.



הבה נבחן את הווקטור $(3,4)$

זהו ווקטור היוצא מהראשית, וגודלו 5.

עתה נתבונן בנקודות השונות שמתקבלות עבור $t(3,4)$.

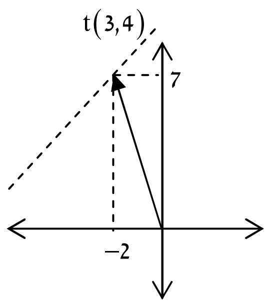
עבור $t=1$ הנקודה היא $(3,4)$

עבור $t=2$ הנקודה היא $(6,8)$

עבור $t=\frac{1}{2}$ הנקודה היא $(1.5,2)$

עבור $t=-1$ הנקודה היא $(-3,-4)$

אם נציב ב- t את כל המספרים הממשיים נקבל רצף של נקודות שיהיו <u>ישר אינסופי</u> שכיוונו ככיוון הווקטור $(3,4)$ והוא עובר דרך הראשית.



כאשר אנו רוצים לתאר ישר שאינו עובר דרך הראשית

אלא דרך נקודה אחרת, נניח $(-2,7)$

אנו למעשה מחברים שני ווקטורים.

הווקטור $(-2,7)$ יוצא מהראשית

ואליו מחברים את הווקטור $t(3,4)$.

בסופו של תהליך נקבל:

הישר l: $$l:\underline{x}=(-2,7)+t(3,4)$$

ובמילים: הישר l מורכב מאוסף כל הווקטורים $\underline{x}$ המקיימים את התנאים הרשומים אחרי הסימן =.

הבה נשווה בין כתיבה זו לבין כתיבה שכ"כ מוכרת לנו מעבר:

מציאת שיפוע הישר $$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{4}{3}$$

והנקודה שעליו $$(-2,7)$$

ולכן:
$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-7=\frac{4}{3}(x+2)$$
$$y=\frac{4}{3}x+\frac{29}{3}$$

כאן אנו רואים כיוון $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ ונקודה. אלא שהנקודה פה היא <u>מאולצת</u> להיות $x=0$ ולכן הנקודה היא $\left(0,\frac{29}{3}\right)$. ובמילים אחרות גם כאן יש מעין חיבור ווקטורי של

הכיוון $y=\frac{3}{4}x \leftarrow$ שהוא ישר העובר דרך הראשית

+ נקודה $\left(0,\frac{29}{3}\right) \leftarrow$ שהיא "וקטור ההזזה" מהראשית.

באופן כללי נסכם:

ההצגה של משוואת ישר היא: $\underline{v}+t\underline{u}$
$\underline{v}$ ווקטור <u>הנקודה</u> של הישר.
$\underline{u}$ ווקטור <u>הכיוון</u> של הישר.

לדוגמה:

אם אנו מחפשים ישר העובר דרך הנקודות $A=(3,2,-1)$ $B=(4,-6,7)$

נמצא תחילה את ווקטור הכיוון: $\overrightarrow{AB}=(1,-8,8)$

ונבחר את נקודה A כווקטור הנקודה ונקבל: $l:\underline{x}=(3,2,-1)+t(1,-8,8)$

כמובן שאין זה משנה לו היינו בוחרים בנקודה B את ווקטור הנקודה.

אז היינו מקבלים: $l:\underline{x}=(4,-6,7)+t(1,-8,8)$

ומכאן שמציאת ישר העובר דרך 2 נקודות A,B הוא על פי: $l:\underline{x}=A+t\overrightarrow{AB}$

או ביתר פירוט: $l:\underline{x}=(A_1,A_2,A_3)+t(B_1-A_1,B_2-A_2,B_3-A_3)$

לט. נתון הישר $l:\underline{x}=(3,-1,7)+t(1,0,3)$

איזו מהנקודות הבאות נמצאות על הישר ואיזו לא?

1. $(5,-1,13)$
2. $(1,-1,9)$

פתרון:

כדי למצוא את הנקודות הנמצאות על הישר עלינו להשוות את רכיבי הישר לרכיבי הנקודה. כלומר:

$$x=3+t\cdot 1$$
$$y=-1+t\cdot 0$$
$$z=7+t\cdot 3$$

ע"י השוואה עם רכיבי (x,y,z) של הנקודה נוכל לברר אם קיים t יחיד מתאים לקבלת רכיבי הנקודה.

עבור הנקודה $(5,-1,13)$

$$x=3+t\cdot 1=5 \quad \Rightarrow t=2$$
$$y=-1+t\cdot 0=-1 \quad \Rightarrow \text{כל } t$$
$$z=7+t\cdot 3=13 \quad \Rightarrow t=2$$

כלומר הנקודה $(5,-1,13)$ מקיימת: $(5,-1,13)=(3,-1,7)+2(1,0,3)$

ולכן נקודה זו על הישר.

עבור הנקודה $(1,-1,9)$:

$$x=3+t\cdot 1=1 \qquad \Rightarrow t=-2$$
$$y=-1+t\cdot 0=-1 \qquad \Rightarrow \text{כל } t$$
$$z=7+t\cdot 3=9 \qquad \Rightarrow t=\frac{2}{3}$$

אנו רואים <u>שאין</u> t יחיד שמתאים להשוואת רכיבי (x,y,z) ולכן נקודה זו <u>איננה</u> על הישר.

בשיטה זו קל מאוד להעביר מקביל לישר נתון כפי שנראה בדוגמה הבאה :

מ. מצאו משוואת ישר המקביל לישר $(1,0,2)+t(3,-2,5)$ ועובר דרך הנקודה $(1,1,1)$.

פתרון :

ישר מקביל מחייב <u>כיוון</u> זהה. ולכן ווקטור הכיוון של הישר המבוקש חייב להיות זהה לווקטור <u>הכיוון</u> של הישר הנתון. הנקודה המבוקשת צריכה להיות על הישר המבוקש וכדי להבטיח זאת אנו משלבים בין ווקטור הנקודה המבוקשת ווקטור הכיוון המבוקש :

$$l: \underline{x}=(1,1,1)+t(3,-2,5)$$

מא. נתונות 3 נקודות $A=(4,2,1)$ $B=(6,6,-3)$ $C=(6,4,-1)$

הוכיחו כי נקודות אלה נמצאות על ישר אחד.

פתרון :

הוכחה זו ניתנת לפתרון ב-2 אופנים עיקריים :

א. מציאת ישר ע״י שתיים מהנקודות ובדיקה אם הנקודה השלישית נמצאת עליו כפי שעשינו בדוגמה לט :

מציאת ישר :

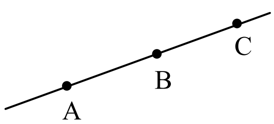
$$l: \underline{x}=(4,2,1)+t(6-4,6-2,-3-1)$$
$$l: \underline{x}=(4,2,1)+t(2,4,-2)$$

ובדיקת הנקודה $(5,4,-2)$:

$$x=4+t\cdot 2=5 \quad \Rightarrow t=\frac{1}{2}$$
$$y=2+t\cdot 4=4 \quad \Rightarrow t=\frac{1}{2}$$
$$z=1-t\cdot 4=-1 \quad \Rightarrow t=\frac{1}{2}$$

כלומר נקודה זו נמצאת על הישר.

ב. ניתן להוכיח זאת ע״י מציאת ווקטורי הכיוון של $\overrightarrow{AB}$ ושל $\overrightarrow{BC}$ (או $\overrightarrow{AC}$). אם לשני הווקטורים יש בדיוק אותו כיוון הרי שהנקודותצריכות להיות אותו ישר אחרת נקבל קו שבור.



בדיקת כיווני הוקטורים :

$$\overrightarrow{AB}=(2,4,-4)$$
$$\overrightarrow{BC}=(-1,-2,2)$$

ועתה נמצא אם יש t מתאים שייצור

$$\overrightarrow{AB}=t\overrightarrow{BC}$$

$2=-1\cdot t \Rightarrow t=-2$

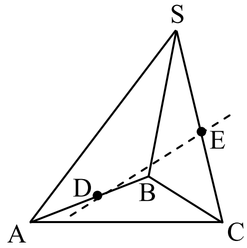
$4=-2\cdot t \Rightarrow t=-2$

$-4=2\cdot t \Rightarrow t=-2$

כלומר $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BC}$

ולכן יש להם אותו כיוון. הנקודה B נמצאת בשניהם ולכן שלושת הנקודות נמצאות על <u>אותו ישר!</u>

מב. נתון טטראדר ABCS



$A=(1,5,-3)$ $B=(3,-1,1)$

$C=(4,-2,7)$ $S=(0,2,5)$

D,E אמצעי הצלעות AB ו- CS בהתאמה.

מצאו את משוואת הישר העובר דרך הנקודות D,E.

פתרון:

מציאת D:

$$D=A+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(1,5,-3)+\frac{1}{2}(3-1,-1-1,1-(-3))$$

$$D=(1,5,-7)+(1,-3,2)=(2,2,-5)$$

מציאת E:

$$E=C+\frac{1}{2}\overrightarrow{CS}=(4,-2,7)+\frac{1}{2}(-4,4,-2)$$

$$E=(4,-2,7)+(-2,2,-1)=(2,0,6)$$

משוואת הישר העובר דרך הנקודות D,E:

$$l:\underline{x}=D+t\overrightarrow{DE}=(2,2,-5)+t(2-2,0-2,6+5)$$

$$l:\underline{x}=(2,2,-5)+t(0,-2,11)$$

<u>בדיקת הבנה</u>

65. מצאו את הישר העובר דרך הנקודות הנתונות:

א. $A=(1,-1,3)$ $B=(2,-4,7)$

ב. $A=(8,-6,2)$ $B=(7,9,-3)$

ג. $A=(5,2,-1)$ $B=(2,-5,-2)$

66. נתון הישר $l:\underline{x}=(3,-2,-1)+t(8,4,-2)$

אילו מהנקודות הבאות נמצאות על הישר ואילו לא:

א. $(-1,-4,0)$ ב. $(3,5,-9)$

ג. $(-1,-6,7)$ ד. $(13,6,-5)$

ה. $(4,-4,5)$ ו. $(15,4,-4)$

67. מצאו את משוואות הישרים המקבילים לישר $l: \underline{x} = (1,1,0) + t(4,-4,5)$ ועוברים דרך הנקודות:

א. $(4,-2,1)$ ב. $(12,6,-3)$ ג. $(3,-2,-1)$

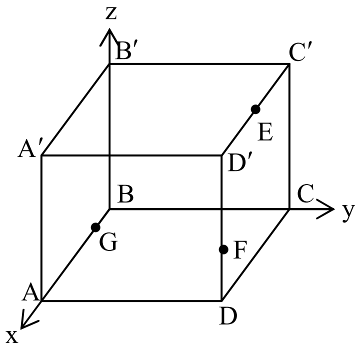
68. מצאו אילו מהנקודות A,B,C הנתונות נמצאות על ישר אחד ואילו לא.

א. $A=(-5,-2,-5)$ $B=(1,3,-2)$ $C=(3,8,1)$

ב. $A=(1,0,3)$ $B=(-1,5,4)$ $C=(3,7,-5)$

ג. $A=(-4,7,6)$ $B=(-3,9,9)$ $C=(6,3,0)$

69. נתונה קוביה שאורך צלעה 7 כמתואר בציון:



E אמצע צלע $D'C'$.

$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{DF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DD'}$

מצאו את משוואת הישר העובר דרך:

א. F,E ב. G,E ג. G,F

לאחר שלמדנו על מבנה ווקטורי של הישר במרחב נבדוק האם יש דרך מהירה לברר מה המצב ההדדי בין הישרים כלומר האם הם מקבילים מתלכדים וכו'.

כדי שנוכל לענות על שאלה זו עלינו להכיר את כל האפשרויות של מנח שני ישרים במרחב (מנח - המצב בו הם מונחים).

אם נבדוק את כל האפשרויות הרי שנמצא 4.

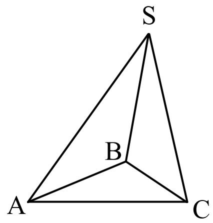
1. מצב בו שני ישרים חותכים זה את זה במרחב. כלומר יש להם נקודת חיתוך <u>אחת</u> משותפת.
2. מצב בו שני ישרים מתלכדים, כלומר הישרים נראים כישר אחד.
3. מצב בו שני ישרים מקבילים (מוכר לנו מלימודי עבר).
4. מצב בו שני ישרים מצטלבים. כלומר הם אינם מקבילים ואינם חותכים זה את זה.

כגון המקצועות AB ו- CS בטטראדר.

ברור לנו ש- AB לא מקביל ל- CS

אבל הוא גם לא חותך אותו.

אלה ישרים <u>מצטלבים</u>.



כדי להחליט איזה מצב מתאר שני ישרים: $l_1 : \underline{x} = A + t\underline{u}$

$l_2 : \underline{x} = B + s\underline{v}$

עלינו להשוות בין ישרים אלה. באופן מעשי אנו מחפשים s,t כאלה שיקיימו את 3 המשוואות:

$$A_1 + tu_1 = B_1 + sv_1$$
$$A_2 + tu_2 = B_2 + sv_2$$
$$A_3 + tu_3 = B_3 + sv_3$$

ועתה בודקים את התוצאות.

אם מצאנו פתרון יחיד ל- s,t הרי שהמצב בין הישרים הוא מצב 1. כלומר הם נחתכים.

אם מצאנו ש- s,t "נעלמים" במהלך הפתרון ומתקבלת זהות הרי שהישרים הם במצב 2. כי זה אומר שכל s,t יקיימו את הזהות וכל הנקודות נמצאות גם ב- l_1 וגם ב- l_2. כלומר הם מתלכדים.

כאשר s,t "נעלמים" ולא מתקבלת זהות המשמעות היא שאין אפילו נקודה אחת הקיימת בשני הישרים גם יחד.

לכן הישרים יכולים להיות מקבילים או מצטלבים. כדי לבדוק זאת אנו משווים את וקטורי הכיוון.

אם קיים k כך ש- $\underline{u}=k\underline{v}$ כלומר ווקטורי הכיוון מצביעים לאותו כיוון הרי שהמצב הוא מצב 3. כלומר הישרים מקבילים.

אם לא קיים k כזה אנו יודעים שהישרים מצטלבים.

מתוך הנחה שבקריאה ראשונה קשה להבין ולהכיל את כל ההסבר מומלץ לחזור אליו אחרי שנראה את הדוגמאות הבאות:

מג. מצאו מי מבין זוגות הישרים הבאים נחתכים, מקבילים מתלכדים או מצטלבים:

1. $l_1:\underline{x}=(3,1,2)+t(5,-1,6)$
   $l_2:\underline{x}=(1,1,-2)+s(10,-2,12)$
2. $l_1:\underline{x}=(1,3,5)+t(4,2,6)$
   $l_2:\underline{x}=(0,10,-1)+s(1,-2,3)$
3. $l_1:\underline{x}=(1,-1,0)+t(2,7,5)$
   $l_2:\underline{x}=(-1,8,-5)+s(6,21,15)$
4. $l_1:\underline{x}=(-2,4,1)+t(3,1,0)$
   $l_2:\underline{x}=(6,7,-5)+s(-1,1,2)$

פתרון:

1. $l_1:\underline{x}=(3,1,2)+t(5,-1,6)$
   $l_2:\underline{x}=(1,1,-2)+s(10,-2,12)$

כפי שהסברנו נשווה בין רכיבי x,y,z של הישרים ונבדוק אם נמצא פתרון יחיד ל- t,s.

נבנה 3 משוואות: $\mathrm{I}\quad 3+5t=1+10s$

$\mathrm{II}\quad 1-1t=1-2s$

$\mathrm{III}\quad 2+6t=-2+12s$

ממשוואה II קל לבודד את t: $\mathrm{II}\quad t=2s$

הצבה במשוואה I: $\mathrm{I}\quad 3+5\cdot 2s=1+10s$

מקבלים $3=1$

וזה כמובן מצביע שאין פתרון ל- t,s. כלומר אין נקודה משותפת לשני הישרים.

ממילא נותר לברר האם הם מקבילים או מצטלבים ולשם כך נבדוק את

ווקטור הכיוון ונחפש k שיקיים: $(5,-1,6)=k(10,-2,13)$

קל לראות ש: $k=2$

כלומר ווקטורי הכיוון מצביעים לאותו כיוון ולכן שני הישרים <u>מקבילים</u>.

2. $l_1 : \underline{x} = (1,3,5) + t(4,2,6)$

$l_2 : \underline{x} = (0,10,-1) + s(1,-2,3)$

שוב נתחיל בחיפוש אחר t,s :

$\text{I} \quad 1 + 4t = s$

$\text{II} \quad 3 + 2t = 10 - 2s$

$\text{III} \quad 5 - 6t = -1 + 3s$

נציב את משוואה I ב- II :

$\text{II} \quad 3 + 2t = 10 - 2(1 + 4t)$

$3 + 2t = 10 - 2 - 8t$

$10t = 5$

$t = \frac{1}{2}$

הצבה חוזרת במשוואה I :

$\text{I} \quad 1 + 4 \cdot \frac{1}{2} = s = 3$

עתה כדי לבדוק שאכן אלה t,s שנותנים פתרון עלינו להציב ולבדוק את נכונותם גם במשוואה III .

$\text{III} \quad 5 - 6 \cdot \frac{1}{2} = -1 + 3 \cdot 3$

$5 + 3 = -1 + 9$

$8 = 8$

ובכן מצאנו t,s כאלה המקיימים נקודה אחת משותפת לישרים. זה סימן שהם <u>נחתכים</u>.

עתה נוכל אף למצוא את <u>נקודת החיתוך</u> ע"י הצבת t במשוואת ישר l_1 :

$\underline{x} = (1,3,5) + \frac{1}{2}(4,2,6) = (3,4,8)$

בדיוק כמו שנקבל אם נציב את s בישר l_2 :

$\underline{x} = (0,10,-1) + s(1,-2,3) = (3,4,8)$

אם היה לכם ספק הרי שכאן אנו רואים שכל הצבה של t במשוואת ישר l_1 נותנת נקודה אחת. ובשני ישרים נחתכים הנקודה המשותפת זהה, ואין זה משנה אם מציבים את t במשוואה המתאימה או את s .

3. $l_1 : \underline{x} = (1,-1,0) + t(2,7,5)$

$l_2 : \underline{x} = (-1,8,-5) + s(6,21,15)$

מתחילים כרגיל בניסיון למצוא פתרון ל- t,s .

$\text{I} \quad 1 + 2t = -1 + 6s$

$\text{II} \quad -1 + 7t = 8 + 21s$

$\text{III} \quad 0 + 5t = -5 + 15s$

קל לראות ממשוואה III

$\text{III} \quad t = -1 + 3s$

הצבה ב- I

$\text{I} \quad 1 + 2(-1 + 3s) = -1 + 6s$

$1 - 2 + 6s = -1 + 6s$

$0 = 0$

מתקבלת זהות והמשמעות היא שלכל t שנבחר יש s שיתאים לו ויציג נקודה זהה.

כלומר כל הנקודות על ישר l_1 יכולות להתקבל גם על ישר l_2 ומכאן שהישרים <u>מתלכדים</u>.

.4 $l_1 : \underline{x} = (-2,4,1) + t(3,1,0)$

$l_2 : \underline{x} = (6,7,-5) + s(-1,1,2)$

מציאת t,s מתאימים:
$\text{I} \quad -2+3t = 6-s$

$\text{II} \quad 4+t = 7+s$

$\text{III} \quad 1 = -5+2s$

ממשוואה III מקבלים:
$6 = 2s$

$3 = s$

הצבה ב- I
$\text{I} \quad -2+3t = 6-3$

$3t = 5$

$t = \frac{5}{3}$

הצבה ובדיקה ב- II:
$\text{II} \quad 4+\frac{5}{3} \neq 7+3$

כלומר אין זהות <u>ואין נקודת חיתוך משותפת</u>!

כדי לבדוק אם הישרים מקבילים או מצטלבים עלינו לנסות למצוא

k המקיים:
$(3,1,0) = k(-1,1,2)$

מרכיב x:
$3 = -k \Rightarrow k = -3$

אבל הצבה ברכיב y:
$1 \neq -3$

ולכן לישרים אין אותו כיוון כלומר הישרים <u>מצטלבים</u>.

עתה חזרו לקרוא את ההסבר שלפני הדוגמאות ותוכלו להבין בהכללה כיצד מנתחים את המצב בין הישרים.

<u>בדיקת הבנה</u>

.70 מצאו את המצב ההדדי בין זוגות הישרים הבאים:

א. $l_1 : \underline{x} = (1,2,-7) + t(2,-3,6)$

$l_2 : \underline{x} = (7,-7,11) + s(4,-6,12)$

ב. $l_1 : \underline{x} = (4,-1,2) + t(3,-12,8)$

$l_2 : \underline{x} = (0,1,-1) + s(4,-16,24)$

ג. $l_1 : \underline{x} = (3,-2,6) + t(5,3,8)$

$l_2 : \underline{x} = (-1,3,0) + s(7,-2,3)$

ד. $l_1 : \underline{x} = (-1,3,2) + t(4,1,3)$

$l_2 : \underline{x} = (5,0,1) + s(1,-2,-2)$

ה. מצאו את נקודת החיתוך של הישרים הנחתכים.