



בדיקת הבנה

87. נתונות הצגות פרמטריות על המישורים הבאים.
מצאו את ההצגה הכללית של כל מישור.
- א. $\pi: \underline{x} = (1, 3, -5) + t(-1, 7, 2) + s(2, -1, -3)$
- ב. $\pi: \underline{x} = (7, -2, -9) + t(2, -1, -3) + s(3, 2, -5)$
88. נתונות המשוואות הכלליות של מישורים. מצאו את ההצגה הפרמטרית של מישורים אלה.
- א. $x - 2y + 5z - 10 = 0$
- ב. $7x + 2y - 7z + 50 = 0$
89. מצאו את משוואת המישור: $l_1: \underline{x} = (3, 2, -1) + t(5, 6, 7)$ העובר דרך הנקודה: $(-1, 2, 5)$.
90. נתונים הישרים הבאים:
- I $l_1: \underline{x} = (1, 2, 7) + t(3, -2, 7)$
- $l_2: \underline{x} = (-1, 5, 6) + s(1, 5, 1)$
- II $l_1: \underline{x} = (0, 1, 3) + t(-2, -4, 8)$
- $l_2: \underline{x} = (-1, 2, -10) + s(4, -10, -4)$
- א. הוכיחו כי l_1 ניצב ל- l_2 .
- ב. מצאו את משוואת המישור הניצב לישר l_1 ומכיל את l_2 .
91. מצאו את ההצגה הכללית של המישורים העוברים דרך הנקודות הבאות:
- א. $A(1, 3, -1)$ $B(-1, 7, 9)$ $C(6, 5, -1)$
- ב. $A(1, 26, -5)$ $B(-2, -5, 7)$ $C(9, 11, -6)$



תרגול עצמי

92. מצאו את משוואת הישר המאונך למישור הנתון ועובר דרך נקודה A:
- א. $x - 3y + 7z - 15 = 0$ $A(1, -2, 3)$
- ב. $3x + 2y - 9z + 4 = 0$ $A(-2, 7, 6)$
- ג. $-x - 4y + z - 10 = 0$ $A(2, -1, 1)$
93. מצאו את ההצגה הפרמטרית של המישור הניצב לישר הנתון ועובר דרך הנקודה A:
- א. $l: \underline{x} = (0, 1, 1) + t(3, 2, -4)$ $A(3, -1, 5)$
- ב. $l: \underline{x} = (1, 0, -2) + t(7, -5, -2)$ $A(1, -6, 4)$
- ג. $l: \underline{x} = (2, 1, -8) + t(4, -6, 3)$ $A(2, 1, -8)$

94. מישור π_1 עובר דרך הנקודה A ומאונך לוקטור \overline{AB} .
- מישור π_2 עובר דרך הנקודה B ומאונך לוקטור \overline{AB} .
- מצאו את משוואות המישורים אם הנקודות הן:
- א. $A=(1,1,3)$ $B=(-1,2,5)$
- ב. $A=(2,-4,7)$ $B(6,-3,-4)$
95. נתונה משוואת מישור: $2x + 3y - 5z + 5 = 0$ והנקודה: $A(1,0,-1)$.
- מצאו את משוואת המישור המקביל למישור הנתון ועובר דרך הנקודה A.
- (הדרכה: וקטור המקדמים של מישורים מקבילים שווה.)
96. מצאו הצגה כללית של מישור על פי הנקודות הבאות:
- א. $A(5,-2,3)$ $B(1,-2,3)$ $C(3,-1,2)$
- ב. $A(4,-1,5)$ $B(7,-1,-1)$ $C(3,1,-2)$
97. מצאו הצגה פרמטרית של מישור המקביל לוקטור \underline{u} ועובר דרך הנקודות A, B.
- א. $\underline{u} = (-1, 3, 7)$ $A(3, -2, 5)$ $B(6, 7, -8)$
- ב. $\underline{u} = (2, 5, -3)$ $A(-1, 4, 0)$ $B(9, -4, 1)$
98. נתונות הנקודות A, B, C.
- מצאו מי מבין הנקודות הבאות קובעות מישור יחיד, ומצאו עבורן את משוואת המישור.
- א. $A(1, -3, 4)$ $B(3, 5, -8)$ $C(7, 2, 6)$
- ב. $A(1, -2, 5)$ $B(6, -3, 9)$ $C(2, -1, 3)$
- ג. $A(3, 2, 1)$ $B(-6, -4, -2)$ $C(7, 2, 5)$
- ד. $A(4, -5, 6)$ $B(-1, 3, 8)$ $C(1, -2, 3)$
99. נתונים: הישר l והנקודה A.
- בדקו אם הישר והנקודה קובעים מישור יחיד.
- אם כן, מצאו את משוואת המישור היחיד.
- א. $l: \underline{x} = (7, -1, 2) + t(1, 5, -4)$ $A(3, -4, 2)$
- ב. $l: \underline{x} = (-1, 3, 5) + t(0, 2, 8)$ $A(1, -2, 4)$
- ג. $l: \underline{x} = (-6, 5, 5) + t(2, -4, 6)$ $A(-5, 3, 8)$
100. מי מבין הנקודות הבאות נמצאת במישור: $\pi: \underline{x} = (-1, 3, 5) + t(4, 2, 7) + s(3, -2, 8)$?
- $A(3, -1, 1)$ $B(2, -7, 7)$ $C(4, 2, -5)$
- $D(-3, 5, 7)$ $E(-15, 13, 15)$ $F(20, -16, 14)$
101. נתונות ההצגות הפרמטריות הבאות. מצאו את המשוואה הכללית של המישורים.
- א. $\pi: \underline{x} = (3, -1, 5) + t(6, -4, 8) + s(7, -3, 5)$
- ב. $\pi: \underline{x} = (1, -1, 1) + t(0, 2, 8) + s(3, -1, 5)$
- ג. $\pi: \underline{x} = (0, 0, 0) + t(1, 0, 0) + s(0, 1, 0)$

102. נתונות המשוואות הכלליות של מישורים. מצאו את ההצגה הפרמטרית שלהם.

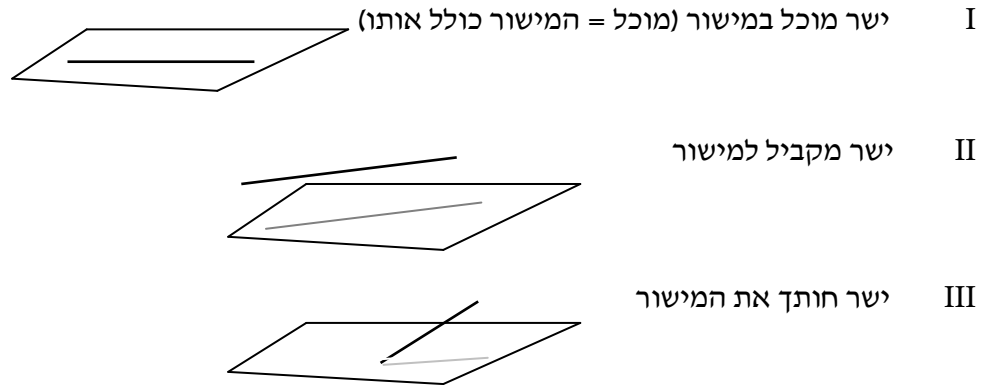
א. $x - 2y + 5z + 10 = 0$

ב. $-2x + 5y - 4z - 7 = 0$

ג. $x + y = 0$

מצב הדדי בין ישר למישור

אנו מכירים 3 מצבים של ישר ביחס למישור:



כדי להבדיל בין המצבים השונים אנו בודקים אם קיים שוויון בין הנקודות שעל הישר לבין הנקודות שעל המישור.

אם מקבלים אינסוף פתרונים - הישר מוכל במישור.

אם מתקבל פתרון יחיד - הישר חותך את המישור.

ואם מתקבל שאין פתרון - הישר מקביל למישור.

דוגמה:

נ"ה. נתון המישור: $\pi: \underline{x} = (-2, 7, 5) + t(4, 1, 3) + s(7, 3, 9)$

ונתונים הישרים: $l_1: \underline{x} = (1, 1, 6) + r(5, 5, 10)$

$l_2: \underline{x} = (7, 3, 1) + r(3, 1, 6)$

$l_3: \underline{x} = (1, 8, 11) + r(2, 1, 9)$

מי מבין הישרים עובר במישור, ומי חותך את המישור?

פתרון:

נשווה בין הישר l_1 למישור π .

I $-2 + 4t + 7s = 1 + 5r$

נקבל 3 משוואות:

II $7 + t + 2s = 1 + 5r$

III $5 + 3t + 9s = 6 + 10r$

IV $t = -6 + 5r - 2s$

ממשוואה II נוח לבדוד את t :

$-2 + 4(-6 + 5r - 2s) + 7s = 1 + 5r$

הצבה ב- I:

$-2 - 24 + 20r - 8s + 7s = 1 + 5r$

$s = -27 + 15r$

$t = -6 + 5r - 2(-27 + 15r)$

נציב ב- IV:

$t = 48 - 25r$

$$5 + 3(48 - 25r) + 9(-27 + 15r) = 6 + 10r \quad \text{נציב } t, s \text{ ב- III} :$$

$$5 + 144 = 75r - 243 + 135r = 6 + 10r$$

$$50r = 100$$

$$\underline{r = 2}$$

$$s = -27 + 15 \cdot 2 = 3 \quad \text{הצבה ב- s} :$$

$$t = 48 - 25 \cdot 2 = -2 \quad \text{הצבה ב- t} :$$

וקיבלנו פתרון יחיד, כלומר הישר חותך את המישור.

אם אנו מעוניינים לדעת באיזו נקודה הוא חותך, כל שעלינו לעשות הוא

להציב את r בישר או את t, s במישור ולקבל את הנקודה.

אנו, כמובן, נבחר להציב את r בישר (זה "קצת" יותר פשוט).

$$A = (1, 1, 6) + 2(5, 5, 10) \quad \text{נקודת החיתוך } A :$$

$$A = 1 + 10, 1 + 10, 6 + 20 = \underline{11, 11, 26}$$

עתה נשווה את משוואת ישר l_2 עם המישור.

$$\text{I} \quad -2 + 4t + 7s = 7 + 3r \quad \text{שוב נמצא 3 משוואות} :$$

$$\text{II} \quad 7 + t + 2s = 3 + r$$

$$\text{III} \quad \underline{5 + 3t + 9s = 1 + 6r}$$

$$\text{IV} \quad t = -4 + r - 2s \quad \text{ממשוואה II} :$$

$$-2 + 4(-4 + r - 2s) + 7s = 7 + 3r \quad \text{הצבה ב- I} :$$

$$-2 - 16 + 4r - 8s + 7s = 7 + 3r$$

$$s = -25 + r$$

$$t = -4 + r - 2(-25 + r) \quad \text{הצבה ב- IV} :$$

$$t = -4 + r + 50 - 2r$$

$$t = 46 - r$$

$$5 + 3(46 - r) + 9(-23 + r) = 1 + 6r \quad \text{הצבה ב- III} :$$

$$5 + 138 - 3r - 225 + 9r = 1 + 6r$$

$$-62 = 0$$

אין פתרון! ומכאן שהישר מקביל למישור, ואין כל נקודת חיתוך!

עתה נשווה את ישר l_3 עם המישור:

$$-2 + 4t + 7s = 1 + 2r$$

I

$$\text{II} \quad 7 + t + 2s = 8 + r$$

$$\text{III} \quad \underline{5 + 3t + 9s = 11 + 9r}$$

$$t = 1 + r - 2s \quad \text{ממשוואה II} :$$

$$\text{I} \quad -2 + 4(1 + r - 2s) + 7s = 1 + 2r$$

$$-2 + 4 + 4r - 8s + 7s = 1 + 2r$$

$$s = 1 + 2r$$

$$t = 1 + r - 2(1 + 2r) = -1 - r$$

$$\text{III} \quad 5 + 3(-1 - r) + 9(1 + 2r) = 11 + 9r$$

$$5 - 3 - 3r + 9 + 18r = 11 + 9r$$

$$\underline{0 = 0}$$

מתקבלת זהות, כלומר לכל r שנציב, נוכל למצוא t, s מתאימים.

ויש אינסוף פתרונים.

הישר מוכל במישור !

באופן דומה ניתן למצוא מצב הדדי בין ישר למישור כאשר המישור נתון בהצגה כללית.

$$\text{נ"ו. נתונה משוואת מישור: } x + 2y - 4z + 10 = 0$$

מי מבין הישרים הבאים מוכל במישור, מי מקביל למישור, ומי חותך את המישור?

$$l_1: \underline{x} = (3, -4, 1) + t(8, 2, 3)$$

$$l_2: \underline{x} = (-18, 2, -1) + t(1, -2, 5)$$

$$l_3: \underline{x} = (-4, 1, 2) + t(14, -1, 3)$$

$$l_4: \underline{x} = (-7, 6, 4) + t(11, 4, 5)$$

פתרון:

בכל פעם שאנו רוצים להשוות בין ישר הנתון בהצגה הפרמטרית, למישור הנתון בהצגה כללית,

$$\text{עלינו לזכור שאם הישר הוא: } l: \underline{x} = (u_1, u_2, u_3) + t(v_1, v_2, v_3)$$

$$x = u_1 + tv_1 \quad \text{רכיבי } x, y, z \text{ הם:}$$

$$y = u_2 + tv_2$$

$$z = u_3 + tv_3$$

$$\text{כך כאשר מציבים את ישר } l_1 \text{ במשוואת המישור נקבל: } x = 3 + 8t$$

$$y = -4 + 2t$$

$$z = 1 + 3t$$

$$\text{על ידי הצבה במישור הנתון: } 3 + 8t + 2(-4 + 2t) - 4(1 + 3t) + 10 = 0$$

$$3 + 8t - 8 + 4t - 4 - 12t + 10 = 0$$

$$1 = 0$$

כלומר אין פתרון ל- t . המשמעות: אין נקודה משותפת למישור ולישר,

ולכן זה ישר מקביל למישור.

$$\text{בדיקה של } l_2: x = -18 + t$$

$$y = 2 - 2t$$

$$z = -1 + 5t$$

$$\text{הצבה במשוואת המישור: } -18 + t + 2(2 - 2t) - 4(-1 + 5t) + 10 = 0$$

$$-18 + t + 4 - 4t + 4 - 20t + 10 = 0$$

$$0 = 23t$$

$$0 = t$$

זהו פתרון יחיד עבור t , לכן ישר זה חותך את המישור,

$$\text{ונקודת החיתוך היא: } A = (-18, 2, -1) + 0(1, -2, 5)$$

$$\text{כלומר: } A(-18, 2, -1)$$

$$\text{בדיקה לישר } l_3: x = -4 + 14t$$

$$y = 1 - t$$

$$z = -2 + 3t$$

$$\text{הצבה: } -4 + 14t + 2(1 - t) - 4(-2 + 3t) + 10 = 0$$

$$-4 + 14t + 2 - 2t - 8 - 12t + 10 = 0$$

$$0 = 0$$

מקבלים אינסוף פתרונות, ולכן ישר זה מוכל במישור.

לסיום ישר l_4 :

הצבה: (מצאו לבד את x, y, z).

$$-7 + 11t + 2(6 + 4t) - 4(4 + 5t) + 10 = 0$$

$$t = -1 \quad \text{ומקבלים:}$$

פתרון יחיד. הישר חותך את המישור, ונקודת החיתוך היא:

$$A = (-7, 6, 4) - 1(11, 4, 5)$$

$$A(-18, 2, -1)$$

עכשיו נוכל לראות גם את המצב בין שני ישרים ומישור.

האם ניתן למצוא מישור יחיד בין ישרים מתלכדים?

התשובה, כמובן, שלילית כי ישר אחד אינו מגדיר מישור יחיד.

ישרים נחתכים או ישרים מקבילים מגדירים מישור יחיד.

דוגמאות:

נ"ז. הוכיחו כי הישרים l_1 ו- l_2 נחתכים, ומצאו את משוואת המישור המכיל את שניהם.

$$l_1 : \underline{x} = (2, -1, 3) + t(1, -5, 3)$$

$$l_2 : \underline{x} = (-2, 4, -10) + s(2, 5, 7)$$

פתרון:

$$\text{I} \quad 2 + t = -2 + 2s \quad \text{תחילה נוכיח כי הישרים נחתכים:}$$

$$\text{II} \quad -1 - 5t = 4 + 5s$$

$$\text{III} \quad \underline{3 + 3t = 10 + 7s}$$

$$t = -4 + 2s \quad \text{ממשוואה I:}$$

$$-1 - 5(-4 + 2s) = 4 + 5s \quad \text{הצבה ב-II:}$$

$$-1 + 20 - 10s = 4 + 5s$$

$$15 = 15s$$

$$\underline{1 = s}$$

$$t = -4 + 2 \cdot 1 = -2 \quad \text{הצבה חוזרת:}$$

$$3 + 3 \cdot (-2) = -10 + 7 \cdot 1 \quad \text{בדיקה במשוואה III:}$$

$$-3 = -3$$

משוואת המישור המוגדר היא פשוטה!

בוחרים את אחת הנקודות הנתונות של הישרים, למשל $(2, -1, 3)$,

ומשלבים אותה עם שני ווקטורי הכיוון של שני הישרים:

$$\pi : \underline{x} = (2, -1, 3) + t(1, -5, 3) + s(2, 5, 7)$$

מכיוון שכל שני ווקטורים הם בסיס למישור, לכן אין זה משנה אילו ווקטורים נוכיח, ובלבד שהם עצמם לא יהיו באותו כיוון.

כבר ראינו שהישרים נחתכים, כלומר ווקטורי הכיוון שונים. לכן אנו יכולים לבחור בהם כווקטורים שיהיו בסיס למישור כולו.

כך גם בדוגמה הבאה :

נ"ח. הוכיחו כי הישרים l_1 ו- l_2 מקבילים, ומצאו את משוואת המישור ששניהם מוכלים בו.

$$l_1 = (4, -2, 7) + t(2, 6, 8)$$

$$l_2 = (-1, 7, 5) + s(4, 12, 16)$$

פתרון :

$$\text{I} \quad 4 + 2t = -1 + 4s$$

תחילה נוכיח כי הישרים מקבילים :

$$\text{II} \quad -2 + 6t = 7 + 12s$$

$$\text{III} \quad 7 + 8t = 5 + 16s$$

$$2t = -5 + 4s$$

ממשוואה I :

$$t = -2.5 + 2s$$

$$-2 + 6(-2.5 + 2s) = 7 + 12s$$

הצבה ב- II :

$$-2 - 15 + 12s = 7 + 12s$$

$$0 = 24$$

אין פתרון .

$$(2, 6, 8) = k(4, 12, 16)$$

קל לראות שווקטורי הכיוון תלויים :

$$k = \frac{1}{2}$$

וכפי שכבר למדנו, אלה ישרים מקבילים! כדי למצוא את המישור המכיל אותם, אין להשתמש בשני הווקטורים כי הם מצביעים על כיוון אחד.

אולם ברור שהמישור מכיל את שתי הנקודות הנתונות : $A(4, -2, 7)$ ו- $B(-1, 7, 5)$,

לכן גם ווקטור \overrightarrow{AB} חייב להיות במישור זה.

$$\overrightarrow{AB} = (-5, 9, -2)$$

נמצא אותו תחילה :

משוואת המישור תהיה בשילוב של הנקודה $(-1, 7, 5)$ עם ווקטור הכיוון של הישרים

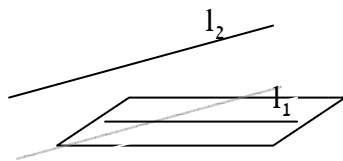
ווקטור הכיוון \overrightarrow{AB} .

$$\pi : \underline{x} = (-1, 7, 5) + t(5, 9, -2) + s(2, 6, 8)$$

כלומר :

דרך 2 ישרים מצטלבים לא עובר מישור. אבל ניתן למצוא מישור שיכיל ישר אחד ויהיה מקביל לשני.

כמו בדוגמה הבאה :



נ"ח. הוכיחו כי הישרים l_1 ו- l_2 מצטלבים.

ומצאו את משוואת המישור המכיל את ישר l_1 ומקביל לישר l_2 .

$$l_1 : \underline{x} = (1, -2, 7) + t(2, 3, -4)$$

$$l_2 : \underline{x} = (5, 4, 9) + s(-6, 3, 5)$$

פתרון :

$$\text{I} \quad 1 + 2t = 5 - 6s$$

נוכיח כי הישרים מצטלבים :

$$\text{II} \quad -2 + 3t = 4 + 3s$$

$$\text{III} \quad 7 - 4t = 9 + 5s$$

$$2t = 4 - 6s$$

ממשוואה I :

$$\text{IV} \quad t = 2 - 3s$$

$$-2 + 3(2 - 3s) = 4 + 3s$$

הצבה ב- II :

$$-2 + 6 - 9s = 4 + 3s$$

$$0 = 12s$$

$$0 = s$$

$$t = 2 - 3 \cdot 0 = 2$$

הצבה ב- IV :

$$7 - 4 \cdot 2 = 9 + 5 \cdot 0$$

בדיקה ב- III :

$$-1 = 9$$

ולכן אין נקודות חיתוך בין הישרים.

אולם קל לראות שגם לא קיים k , כך ש-: $(2, 3, -4) = k(-6, 3, 5)$ ולכן הישרים מצטלבים.

כדי למצוא מישור המכיר את ישר l_1 הוא צריך להיות משולב מישר זה. אולם אנו נדרשים

למישור המקביל לישר l_2 , כלומר ווקטור הכיוון מקביל למישור המבוקש, לכן נשלב אותו

$$\pi: \underline{x} = (1, -2, 7) + t(2, 3, -4) + s(-6, 3, 5)$$



בדיקת הבנה

102. נתון המישור: $x + y - 2z - 1 = 0$

אילו מהישרים הבאים מוכלים במישור, אילו מקבילים למישור, ואילו חותכים את המישור?

א. $l: \underline{x} = (1, 5, -3) + t(-1, -11, -5)$

ב. $l: \underline{x} = (2, 0, 7) + t(1, 5, -9)$

ג. $l: \underline{x} = (4, 2, 8) + t(1, 8, 11)$

ד. $l: \underline{x} = (3, -5, 3) + t(4, -3, 5)$

ה. $l: \underline{x} = (-2, 5, 8) + t(-11, -9, -10)$

ו. $l: \underline{x} = (9, -7, -6) + t(-12, 2, -5)$

ז. $l: \underline{x} = (-3, -15, -1) + t(1, 2, -1)$

103. נתון המישור: $\pi: \underline{x} = (1, 0, 2) + t(3, -1, 5) + s(2, -6, 7)$

מי מהישרים הבאים מוכל במישור, מי מקביל אליו, ומי חותך את המישור הנתון?

א. $l: \underline{x} = (2, -3, 6) + r(2, -2, 4)$

ב. $l: \underline{x} = (6, -7, 14) + r(-1, 11, -9)$

ג. $l: \underline{x} = (7, 2, -1) + r(4, 4, 3)$

104. הוכיחו כי הישרים l_1 ו- l_2 נחתכים, ומצאו את משוואת המישור המכיל את שניהם.

$$l_1: \underline{x} = (1, 2, -3) + t(3, 6, -3)$$

$$l_2: \underline{x} = (-2, 4, 8) + s(3, 2, -7)$$

105. הוכיחו כי הישרים l_1 ו- l_2 מקבילים, ומצאו את משוואת המישור המכיל את שניהם.

$$l_1: \underline{x} = (4, 8, -6) + t(1, 7, -3)$$

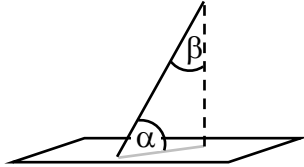
$$l_2: \underline{x} = (1, -2, 3) + s(2, 14, -6)$$

106. הוכיחו כי הישרים l_1 ו- l_2 מצטלבים, ומצאו את משוואת המישור המכיל את ישר l_1 ומקביל ל- l_2 .

$$l_1 : \underline{x} = (3, 4, -2) + t(7, -2, 8)$$

$$l_2 : \underline{x} = (1, 1, 9) + s(-4, -1, 6)$$

זווית בין ישר למישור



זווית בין ישר למישור מוגדרת כזווית שבין הישר לבין היטלו במישור.
אם נעלה ניצב מההיטל, הוא יפגוש את הישר (ראו ציור).
כך נוצר משולש ישר זווית.

אנו, כמובן, מחפשים את זווית α . אולם כבר ראינו שאת ווקטור הניצב קל למצוא - זהו ווקטור המקדמים (A, B, C) של המישור, ואת ווקטור כיוון הישר אנו יודעים. לכן על פי המכפלה הסקלרית קל למצוא את $\cos \beta$.

ומכיון שבכל משולש ישר זווית יתקיים: $\sin \alpha = \cos \beta$, נוכל לבנות את הנוסחה למציאת הזווית על פי:

$$\sin \alpha = \frac{|\underline{h} \cdot \underline{u}|}{\|\underline{h}\| \|\underline{u}\|}$$

כאשר \underline{h} - ווקטור המקדמים של המישור
 \underline{u} - ווקטור הכיוון של הישר

סימן הערך המוחלט בא כדי להבטיח שנקבל את הזווית החדה.
דוגמה:

נ"ט. נתונה משוואת מישור: $x - y + 5z - 7 = 0$ ונתון הישר: $l : \underline{x} = (1, -1, 2) + t(4, 3, 8)$
מצאו את הזווית בין הישר למישור.
פתרון:

ווקטור המקדמים הוא: $\underline{h} = (1, -1, 5)$

ווקטור כיוון הישר הוא: $\underline{u} = (4, 3, 8)$

$$\sin \alpha = \frac{|(1, -1, 5) \cdot (4, 3, 8)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 5^2} \cdot \sqrt{4^2 + 3^2 + 8^2}} = \frac{41}{5.19 \cdot 9.43} = 6.838$$

והזווית:

$$\alpha = 57^\circ$$

כאשר המישור נתון בהצגה פרמטרית, אנו פשוט מעבירים קודם, את ההצגה הפרמטרית למשוואה כללית, כפי שכבר למדנו, (כמו שהבטחתי, יש לזה שימוש). ואז ממשיכים רגיל.

ס. נתונה ההצגה הפרמטרית של מישור: $\pi : \underline{x} = (1, -2, 3) + t(7, -1, 5) + s(-3, 2, 9)$

ונתון הישר: $l : \underline{x} = (2, -5, 6) + t(-4, 6, 8)$

מצאו את הזווית בין הישר למישור.

פתרון:

תחילה נמצא את המשוואה הכללית של המישור:

$$I \quad (7, -1, 5) \cdot (A, B, C) = 0$$

$$II \quad (-3, 2, 9) \cdot (A, B, C) = 0$$

$$\text{I} \quad 7A - B + 5C = 0$$

$$B = 7A + 5C$$

$$\text{II} \quad -3A + 2B + 9C = 0$$

$$-3A + 2(7A + 5C) + 9C = 0$$

$$-3A + 14A + 10C + 9C = 0$$

$$11A = -19C$$

$$A = -19 \quad C = 11$$

$$B = 7 \cdot -19 + 5 \cdot 11 = -78$$

ווקטור מקדמי המישור: $(-19, -78, 11)$

שימו לב! כאשר מחפשים רק את הזווית, אין צורך למצוא את D, אלא רק את ווקטור המקדמים.

$$\sin \alpha = \left| \frac{(-19, -78, 11)(-4, 6, 8)}{\sqrt{19^2 + 78^2 + 11^2} \cdot \sqrt{4^2 + 6^2 + 8^2}} \right| = \frac{304}{81 \cdot 10.77} \quad \text{ומכאן:}$$

$$\sin \alpha = 0.348$$

$$\alpha = 20.4^\circ$$

ס"א. בטראדר נתון: $A(1, 2, -1)$ $B(1, 0, 3)$ $C(2, 4, 5)$ $S(7, 3, 9)$

מצאו את הזווית בין הצלע SA לבין המישור ABC.

פתרון:

תחילה נמצא את משוואת המישור.

נוח להתחיל בהצבה פרמטרית (לפי $\pi: \underline{x} = C + t(CB) + s(CA)$):

$$\pi: \underline{x} = (2, -1, 5) + t(1 - 2, 0 + 1, 3 - 5) + s(1 - 2, 2 + 1, -1 - 5)$$

$$\pi: \underline{x} = (2, -1, 5) + t(-1, 1, -2) + s(-1, 3, -6)$$

נמצא את ווקטור המקדמים (A, B, C) להצגה הכללית:

$$\text{I} \quad -A + B - 2C = 0$$

$$\text{II} \quad -A + 3B - 6C = 0$$

$$\text{I} \quad A = B - 2C$$

$$\text{II} \quad -B + 2C + 3B - 6C = 0$$

$$2B = 4C$$

$$B = 2 \quad C = 1$$

$$A = 2 - 2 = 0$$

ווקטור המקדמים: $(0, 2, 1)$

$$\vec{SA} = (-6, -3, -10)$$

עתה נמצא את הווקטור \vec{SA} :

הצבה בנוסחה:

$$\sin \alpha = \left| \frac{(-6, -3, -10)(0, 2, 1)}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 10^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2}} \right| = \frac{16}{12.04 \cdot 2.24} = 0.594$$

$$\underline{\alpha = 36.5^\circ}$$

בדיקת הבנה



107. מצאו את הזווית הנוצרת בין הישר: $l: \underline{x} = (1, 1, 1) + t(2, 4, -7)$ לבין המישור: $-x + 2y - z + 11 = 0$
108. מצאו את הזווית הנוצרת בין הישר: $l: \underline{x} = (-2, 9, 5) + t(1, -3, 4)$ לבין המישור: $\pi: \underline{x} = (1, 0, 5) + t(-4, 2, 8) + s(1, -6, 5)$
109. 4 קדקודי טטראדר הם: $A(2, -1, 5)$ $B(-4, 6, -9)$ $C(0, 5, -3)$ $S(6, -7, 9)$ מצאו את הזוויות בין הצלעות: SA , SB , SC לבין המישור: ABC

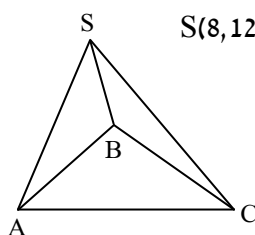
תרגול עצמי



120. נתון המישור: $(7, 2, -4) + t(6, -5, 3) + s(4, -1, -8)$
- א. מי מבין הישרים הבאים חותך את המישור, מי מקביל לו, ומי מוכל בו?
- $l_1: \underline{x} = (11, 1, -12) + r(2, -4, 11)$
- $l_2: \underline{x} = (3, 1, -3) + r(-2, -3, 19)$
- $l_3: \underline{x} = (21, -12, 13) + r(-10, 13, -25)$
- $l_4: \underline{x} = (1, 9, -8) + r(-2, 7, 8)$
- $l_5: \underline{x} = (7, 12, 2) + r(2, 5, 9)$
- $l_6: \underline{x} = (9, 2, 2) + r(4, -8, 22)$
- $l_7: \underline{x} = (3, 3, 4) + r(8, -9, 14)$
- $l_8: \underline{x} = (7, 6, -5) + r(-20, 12, 10)$
- $l_9: \underline{x} = (1, 8, -2) + r(1, -3, -7)$
- ב. עבור הישרים החותכים את המישור מצאו את הזווית בין הישר למישור.
- ג. עבור הישרים המקבילים למישור מצאו ווקטור המאונך לשניהם וחיתך את הישר.
121. הוכיחו כי זוגות הישרים הבאים מצטלבים, ומצאו את ההצבה הפרמטרית של מישור המכיל את ישר l_1 ומקביל לישר l_2 .
- א. $l_1: \underline{x} = (2, -4, 5) + t(7, -1, 8)$ $l_2: \underline{x} = (1, -1, 3) + s(-2, 7, 2)$
- ב. $l_1: \underline{x} = (-5, 6, 9) + t(2, -1, 3)$ $l_2: \underline{x} = (2, -3, -8) + s(1, -3, 9)$
- ג. $l_1: \underline{x} = (-4, -4, 9) + t(7, -1, -1)$ $l_2: \underline{x} = (1, 1, 1) + s(-3, -5, 6)$
122. בדקו מי מבין זוגות הישרים הבאים קובעים מישור יחיד. עבורם מצאו את משוואת המישור.
- א. $l_1: \underline{x} = (6, -4, 5) + t(3, -1, 2)$ $l_2: \underline{x} = (3, 7, 1) + s(6, -2, 4)$
- ב. $l_1: \underline{x} = (2, -8, -6) + t(7, -7, 2)$ $l_2: \underline{x} = (5, 1, 8) + s(5, -4, -4)$
- ג. $l_1: \underline{x} = (1, 9, -6) + t(1, 1, 0)$ $l_2: \underline{x} = (3, -5, 2) + s(2, -3, -5)$

123. נתונות הנקודות: $A(1, -6, 0)$ $B(3, 5, -4)$ $C(-1, 6, 2)$ A, B, C

- מצאו את המשוואה הכללית של המישור העובר ביניהם.
- מצאו את משוואת הישר הניצב למישור, ועובר דרך הראשית.
- מצאו את נקודת החיתוך של הישר שמצאתם בסעיף ב, עם המישור שמצאתם בסעיף א.



124. בטראדר נתון: $A(1, -1, 2)$ $B(3, 5, -2)$ $C(7, -2, 4)$ $S(8, 12, 30)$

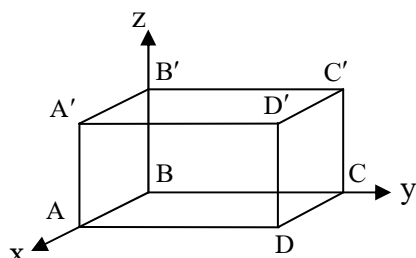
- מצאו את הזווית בין SC למישור ABC .
- הוכיחו כי SC מצטלב עם AB .
- מצאו את הזווית בין AB ל- SC .

125. מצאו את הזווית בין הישרים למישורים הבאים:

א. $l: \underline{x} = (1, -1, 1) + t(5, 1, 3)$ $\pi: \underline{x} = (3, 1, -2) + t(1, -4, 5) + s(-2, 6, 2)$

ב. $l: \underline{x} = (1, 0, 1) + t(7, -2, 3)$ $2x + 3y - 4z + 10 = 0$

ג. $l: \underline{x} = (4, -5, 6) + t(1, -2, 1)$ $-x + y + 2z = 0$



126. נתונה תיבה: $ABCD A'B'C'D'$

$A(1, 0, 0)$ $B(0, 0, 0)$ $C(0, 3, 0)$ $B'(0, 0, 5)$

- מצאו את משוואת מישור $BB'D'D$.
- מצאו את הזווית בין האלכסון AC' לבין המישור שמצאתם בסעיף א.
- הוכיחו כי האלכסונים AC' ו- BD מצטלבים, ומצאו את הזווית ביניהם.
- מצאו את משוואת המישור המכיל את האלכסון BD ומקביל לאלכסון AC' .

127. הוכיחו כי בקובייה האלכסון הראשי יוצר זוויות שוות עם מישורי הפאות.

(הדרכה: נוח לבחור קובייה שצלעה a , וש אחד הקדקודים - $(0, 0, 0)$.)

מצב הדדי בין מישורים

בדיוק כפי שבחנו מצב הדדי בין ישרים, נבחן עתה מצב הדדי בין מישורים, אלא שכאן יש פחות אפשרויות:

- שני מישורים יכולים להתלכד (כלומר כל הנקודות נמצאות בשניהם).
 - שני מישורים יכולים להיות מקבילים.
 - שני מישורים יכולים להיחתך, אלא שחיתוך מישורים יוצר ישר שלאורכו הם נחתכים (ולא נקודה). גם הגישה לגילוי המצב ההדדי דומה בישרים ובמישורים. אנו משווים את הנקודות ומוצאים:
 - אם קיימת זווית בין המשוואות - המישורים מתלכדים.
 - אם אין פתרון - המישורים מקבילים.
 - אם יש פתרון עם דרגת חופש - המישורים נחתכים.
- דרגת החופש מצביעה על כך שהחיתוך הוא של ישר, ולכן יש אינסוף נקודות שוות בין המישורים.