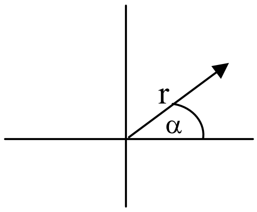
לאחר שמיצינו את ההבנה בנושא וקטורים בעזרת הצגתם כחץ גיאומטרי, נעבור עתה ונבחן את הצגתם בדרך אלגברית.

<u>הווקטור האלגברי</u>



ידוע לנו שכל נקודה במישור ניתנת לייצוג ע"י שתי נקודות (x,y).

כשלמדנו טריגונומטריה, הצבענו על כך שכל נקודה במישור ניתנת לתיאור גם ע"י מרחק הנקודה מהראשית (r) והזווית בין r לציר x.

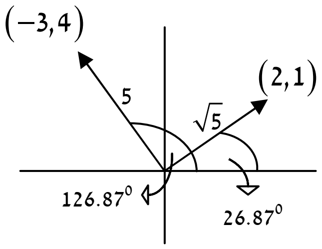
זוהי ההצגה הפולרית של הנקודה.

ההצגה הפולרית היא בדיוק הגדרת הווקטור.

יש לה גודל - r , וכיוון - α.

ומכאן שכל וקטור ניתן לתיאור ע"י שתי נקודות (x,y) <u>כאשר אנו מניחים את קצה זנבו בראשית</u> !

לדוגמה :



הנקודה $(2,1)$ מתארת וקטור שגודלו $\sqrt{5}$,

וכיוונו 26.56^0 עם ציר ה- x החיובי.

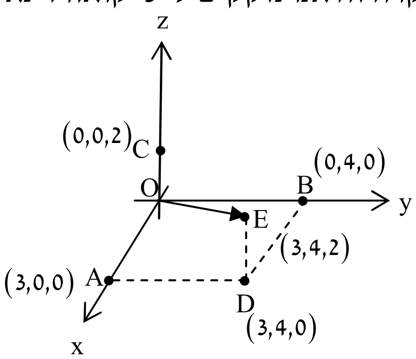
כך גם וקטור $(-3,4)$ גודלו 5 ,

והזווית היא 126.87^0.

באופן זה אנו רואים שניתן לתאר וקטורים ע"י קואורדינאטות קרטזיות, כלומר קואורדינאטות של הצירים הראשיים.

חשוב לזכור: בהצגה זו מוסכם עלינו שכל וקטור יוצא מנקודת הראשית !

באותו אופן אנו גם מציגים וקטורים במרחב. אלא שבמקרה זה אנו נזקקים ל- 3 קואורדינאטות (x,y,z) כדי לייצג וקטור שכאמור, תחילתו בראשית.



נתבונן בווקטור $\underline{u} = \overrightarrow{OE} = (3,4,2)$.

אנו רואים כי עבור וקטור זה (בנקודה E)

$x = 3 \quad y = 4 \quad z = 2$.

מתוך מה שכבר למדנו, אנו יודעים כי :

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}$$

אבל : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OB}$

ולכן : $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ ①

ואילו : $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DE}$

אבל: $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OC}$

ולכן : $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}$ ②

הצבה של ① בתוך ② : $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

מכאן אנו מגלים שכל וקטור אלגברי הוא, למעשה, חיבור של הווקטורים על הצירים שגודלם לפי הקואורדינאטות המתאימות, וכולם ניצבים זה לזה.

עכשיו נוכל להגדיר גודל של וקטור.

לפי מה שכבר למדנו: $|\underline{u}| = \sqrt{\underline{u}^2}$

נגדיר: $|\underline{u}| = (x, y, z)$

אבל ראינו ש: $(x, y, z) = (\underline{x} + \underline{y} + \underline{z})$

כלומר הווקטור על ציר x + הווקטור על ציר y + הווקטור על ציר z.

ולכן: $|\underline{u}| = \sqrt{(\underline{x} + \underline{y} + \underline{z})}$

ומכיוון ש- x, y, z הם כיוונים ניצבים זה לזה,

כל המכפלות המעורבות נופלות, ומקבלים: $|\underline{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

כך מקבלים את הגודל של הווקטור באופן אלגברי!

דרך שנייה היא למצוא את האורך על פי פיתגורס.

אם נחזור להתבונן בציור, נמצא: $\left|\overrightarrow{OD}\right|^2 = 3^2 + 4^2$

כך גם: $\left|\overrightarrow{OE}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OD}\right|^2 + 2^2$

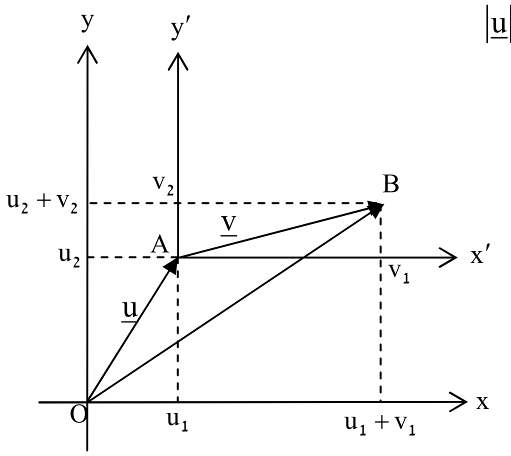
$$\left|\overrightarrow{OE}\right|^2 = 3^2 + 4^2 + 2^2$$

$$\left|\overrightarrow{OE}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 2^2}$$

ושוב חוזרים לאותה תבנית. שוב הווקטור מוגדר: $|\underline{u}| = (x, y, z)$

גודלו: $|\underline{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

<u>חיבור וקטורים בגישה אלגברית</u>



בגישה זו חיבור וקטורי נעשה פשוט מאוד.

נציג חיבור וקטורים דו-מְמַדיים:

נגדיר: $\underline{u} = (u_1, u_2)$ $\underline{v} = (v_1, v_2)$

u_1, v_1 - שיעורי ה- x של הווקטורים.

u_2, v_2 - שיעורי ה- y של הווקטורים.

תחילה נשרטט על מערכת צירים x, y את הווקטור $\underline{u}$.

בקצהו נעתיק את וקטור $\underline{v}$ על מערכת צירים x', y'.

מתוך מה שלמדנו, אנו יודעים: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

מהתבוננות בציור, אנו רואים ש- $\overrightarrow{OB} = ((u_1 + v_1), (u_2 + v_2))$

ועכשיו ברור לנו שחיבור וקטורים בשיטה האלגברית נעשה ע״י סכום קואורדינאטות.

ולכן: אם $\underline{u} = u_1, u_2$

ו- $\underline{v} = v_1, v_2$

סכומם: $\underline{u} + \underline{v} = (u_1 + v_1), (u_2 + v_2)$

בדיוק כך גם הווקטורים במרחב, אלא שאז יש לחבר גם את קואורדינאטות z , ומקבלים:

$$\underline{u}=(u_1,u_2,u_3) \quad \underline{v}=(v_1,v_2,v_3)$$

$$\underline{u}+\underline{v}=\left((u_1+v_1),(u_2+v_2),(u_3+v_3)\right)$$

נביא כמה דוגמאות לפעולות בווקטורים בשיטה האלגברית:

כב. מְצאו את גודל הווקטור $\underline{w}$ לפי הנתונים הבאים:

1. $\underline{u}=(2,3)$ $\underline{v}=(5,7)$ ו- $\underline{w}=(\underline{u}+\underline{v})$
2. $\underline{u}=(1,5,12)$ $\underline{v}=(3,8,10)$ ו- $\underline{w}=(\underline{u}-\underline{v})$
3. $\underline{u}=(2,7,3)$ $\underline{v}=(2,-5,4)$ ו- $\underline{w}=\left(\frac{1}{2}\underline{u}+2\underline{v}\right)$

פתרון:

1. תחילה נמצא את הווקטור $\underline{w}$:

$$\underline{w}=\underline{u}+\underline{v}=(5,7)+(2,3)=\left[(5+2),(7+3)\right]=(7,10)$$

כדי למצוא את $|\underline{w}|$: $\quad |\underline{w}|=\sqrt{\underline{w}^2}$

$$|\underline{w}|=\sqrt{(7,10)^2}=\sqrt{7^2+10^2}$$

זכרו, המכפלות המעורבות מתאפסות!

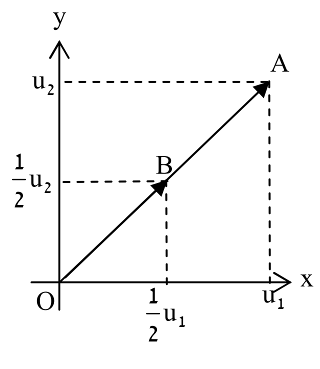
$$|\underline{w}|=\sqrt{149}=12.2$$

2. בדיוק לפי מתכונת סעיף 1:

$$\underline{w}=(1,5,2)-(3,8,10)=(-2,-3,-2)$$

$$|\underline{w}|=\sqrt{(-2,-3,-2)^2}=\sqrt{4+9+4}=4.42$$

3. כאן עלינו לראות שמתקיים: $t\underline{u}=tu_1,tu_2,tu_3$



כדי לראות זאת נסתפק בשִׂרטוט של וקטור דו-מְמַדי:

נגדיר: $A=(u_1,u_2)$

ולכן למעשה נקודה זו מגדירה את הווקטור $\underline{u}=\overrightarrow{OA}$

נקודה $B=\left(\frac{1}{2}u_1,\frac{1}{2}u_2\right)$

אם B הוא אמצע $\overrightarrow{OA}$, אז $\overrightarrow{OB}$ מוגדר לפי: $\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$.

על כן מתקיים בווקטורים אלגבריים שמכפלת סקלר t בווקטור

$\underline{u}$ נותנת: $\quad t\underline{u}=(tu_1,tu_2,tu_3)$

ומכאן נעבור לפתרון הסעיף:

נתון: $\underline{u}=(2,7,3)$ $\underline{v}=(2,-5,4)$

$$\underline{w}=\frac{1}{2}(2,7,3)+2(2,-5,4)=$$
$$=(1,3.5,1.5)+(4,-10,8)=(5,-6.5,9.5)$$

וגודלו: $\quad \underline{w}=\sqrt{25+42.25+90.25}=12.55$

כג. מְצאו את ערכו של k ואת הווקטורים בכל אחד מהסעיפים הבאים לפי הנתונים.

1. $\underline{u}=(1,2,k)$ $\quad \underline{v}=(k,1,4)$ $\quad \underline{w}=\underline{u}+\underline{v}=(4,k,7)$

2. $\underline{u}=(2,-k,1)$ $\quad \underline{v}=(-4,k+1,2k)$ $\quad \underline{w}=2\underline{u}-\frac{1}{2}\underline{v}=(6,-13,-3)$

3. $\underline{u}=\left(-\frac{1}{4}k,-\frac{1}{2}k,-\frac{k-2}{2}\right)$ $\quad \underline{v}=(k,1-k,k-2)$ $\quad \underline{w}=3\underline{u}-4\underline{v}=(19,-14,1-8k)$

פתרון:

1. מתוך פעולות חיבור הווקטורים אנו יכולים לקבל 3 משוואות.

$$\text{I} \quad w_1=u_1+v_1$$
$$\text{II} \quad w_2=u_2+v_2$$
$$\text{III} \quad w_3=u_3+v_3$$

ע"י הצבת הנתונים מקבלים:

$$\text{I} \quad 4=k+1$$
$$3=k$$

אמנם מצאנו את ערכו של k, אבל <u>צריך לבדוק!</u> את נכונותו גם <u>בשתי</u> המשוואות האחרות כדי להוכיח שזהו אכן הערך. אחרת מקבלים מצב של אין פתרון.

ולכן:

$$\text{II} \quad k=2+1=3 \ \checkmark$$
$$\text{III} \quad 7=4+k=4+3 \ \checkmark$$

והתשובה: $\underline{k=3}$

והווקטורים: $\underline{u}=(1,2,3)$ $\quad \underline{v}=(3,1,4)$ $\quad \underline{w}=(4,3,7)$

2. נציג שוב את הנתונים: $\underline{u}=(2,-k,1)$ $\quad \underline{v}=(-4,k+1,2k)$

$$\underline{w}=2\underline{u}-\frac{1}{2}\underline{v}=(6,-13,-3)$$

גם כאן נציב את שלוש המשוואות:

$$\text{I} \quad 6=2\cdot 2-\frac{1}{2}\cdot(-4)$$
$$6=6 \ \checkmark$$

$$\text{II} \quad -13=-2k-\frac{1}{2}(k+1)$$
$$-13=-2k-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}$$
$$-12.5=-2.5k$$
$$k=5$$

הצבת $k=5$:

$$\text{III} \quad -3=2\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot 2k$$
$$-3=2-5=-3 \ \checkmark$$

והתשובה: $k=5$

והווקטורים: $\underline{u}=(2,-5,1)$ $\quad \underline{v}=(-4,6,10)$ $\quad \underline{w}=(6,-13,-3)$

3. הנתונים: $\underline{u}=\left(-\frac{1}{4}k,-\frac{1}{2}k,-\frac{k-2}{2}\right)$ $\underline{v}=(k,1-k,k-2)$

$$\underline{w}=3\underline{u}-4\underline{v}=(19,-14,1-8k)$$

והמשוואות:

$$\text{I}\quad 19=-\frac{3}{4}k-4k$$

$$76=-3k-16k$$

$$76=-19k$$

$$-4=k$$

$$\text{II}\quad -14=-\frac{3}{2}k-4(1-k)$$

הצבה של $k=-4$:

$$-14=6-20=-14 \quad \checkmark$$

$$\text{III}\quad 1-8k=-3\frac{k-2}{2}-4(k-2)$$

בהצבת $k=-4$:

$$1+32=-3\cdot\frac{-6}{2}-4\cdot(-6)$$

$$33=9+24 \quad \checkmark$$

התשובה: $k=-4$

והווקטורים: $\underline{u}=(1,2,3)$ $\underline{v}=(-4,5,-6)$ $\underline{w}=(19,-14,33)$

<u>בדיקת הבנה</u>

42. מְצאו את הווקטור $\underline{w}$ ואת גודלו לפי הנתונים הבאים:

$\underline{u}=(1,-2,5)$ $\underline{v}=(6,7,-8)$

א. $\underline{w}=\underline{u}+\underline{v}$

ב. $\underline{w}=-2\underline{u}+3\underline{v}$

ג. $\underline{w}=\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{2}{3}\underline{v}$

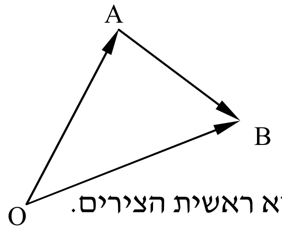
43. מְצאו את ערכו של k ואת הווקטורים לפי הנתונים הבאים:

א. $\underline{u}=(k,7,3k)$ $\underline{v}=(6,4,3k+1)$ $\underline{w}=2\underline{u}+\underline{v}=(0,2k^2,-26)$

ב. $\underline{u}=(k+1,1-k,k)$ $\underline{v}=\left(-8,-6,\frac{k}{5}\right)$ $\underline{w}=3\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}=(3k-1,-3k,3k+1)$

(הערה: מְצאו את k לפי הרכיב השלישי תחילה.)

עד כה עסקנו בווקטורים שמתחילים בראשית, כלומר ש״זנבם״ מונח בראשית. ראינו שכל נקודה במרחב ניתנת לתיאור על ידי וקטור כזה. עתה נבחן כיצד ניתן למצוא וקטור המתחיל בנקודה במרחב.



לדוגמה: מהו הווקטור $\overrightarrow{AB}$ אם $A=(3,2,-4)$ ו- $B=(1,-9,5)$?

נציג את שתי הנקודות במרחב.

(ההצגה <u>אינה</u> לפי קנה מידה ואינה מדויקת. היא רק סְכֵמָה.)

כפי שכבר ראינו, נקודה A ניתנת לייצוג ע״י הווקטור $\overrightarrow{OA}$ אם O היא ראשית הצירים.

והנקודה B היא $\overrightarrow{OB}$.

באופן זה מקבלים: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$

אבל אנחנו כבר יודעים: $\overrightarrow{AO}=-\overrightarrow{OA}$

ולכן: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

ע״י הצבת הנקודות: $\overrightarrow{AB}=(1,-9,5)-(3,2,-4)$

$$\overrightarrow{AB}=(-2,-11,9)$$

ובהכללה - מציאת וקטור המתחיל בנקודה (שלא מתחיל בראשית)

אם $A=(A_1,A_2,A_3)$ ו- $B=(B_1,B_2,B_3)$
אז $\overrightarrow{AB}=(B_1-A_1,B_2-A_2,B_3-A_3)$

<u>שימו לב</u>!

הכיוון חשוב! $\overrightarrow{AB}$ הוא וקטור שמתחיל בנקודה A, וראשו בנקודה B.

לכן מחסרים B_i-A_i כאשר $i=1,2,3$. $B_i-A_i=(B_1-A_1,B_2-A_2,B_3-A_3)$

ותמיד מתקיים: $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$.

(הערה למתעניינים: זהו, למעשה, הווקטור אם מעתיקים אותו לראשית...)

כד. מְצאו את הווקטור $\overrightarrow{AB}$ ואת גודלו אם נתון: $A=(1,-7,6)$ $B=(4,3,-8)$

פתרון:

$$\overrightarrow{AB}=(4,3,-8)-(1,-7,6)$$

ולכן: $\overrightarrow{AB}=(3,10,-14)$

וגודלו: $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{3^2+10^2+14^2}=17.46$

כה. נתון הווקטור $\overrightarrow{AB}=(-3,2,5)$ והנקודה $A=(7,9,-11)$. מְצאו את הנקודה B.

פתרון:

מתוך הנלמד גילינו כי: $\overrightarrow{AB}=B_i-A_i$

ע״י העברת אגפים: $\overrightarrow{AB}+A_i=B_i$

ולכן: $(-3,2,5)+(7,9,-11)=B=(4,11,-6)$

<u>הקבלה בין וקטורים</u>

כבר ראינו בניתוח הווקטורים בשיטה גיאומטרית ששני וקטורים יהיו מקבילים אם הם באותו כיוון ונקודת יציאה שונה.

למשל, בטרפז ראינו שמתקיים הקשר שהבסיס הגדול הוא $\underline{u}$, והבסיס הקטן הוא $t\underline{u}$.

כך גם לגבי וקטורים בשיטה האלגברית, אלא שמכיוון שאנו עוסקים במספרים, יש לוודא ולראות שאכן לשני הווקטורים יש קשר של מכפלה בסקלר.

לדוגמה: ברור לנו ש: $(1,2,3)=2\cdot\left(\frac{1}{2},1,1.5\right)$

ולכן שני וקטורים אלה הם בעלי אותו כיוון. אם גם אינם יוצאים מנקודה אחת, זה יבטיח שהם מקבילים. על כך עוד נרחיב בהמשך.

אבל כאשר נתונים שני וקטורים $\underline{v},\underline{u}$, ומתקיים הקשר $\underline{u}=1\cdot\underline{v}$, כלומר כאשר $t=1$, אנו מסכימים שאלו וקטורים <u>שווים</u>, על אף שהם יכולים להיות מקבילים. לדוגמה:

נניח ש- $\underline{u}=(1,2,3)$ $B=(5,6,7)$ $A=(4,4,4)$

קל לראות ש- $\overrightarrow{AB}=(5,6,7)-(4,4,4)=(1,2,3)$

ומכאן ש- $\underline{u}=\overrightarrow{AB}$

מאידך אנו מוצאים שווקטור $\overrightarrow{AB}$ הוא מקביל ל- $\underline{u}$,

כי $\underline{u}$ מתחיל בראשית, ואילו $\overrightarrow{AB}$ מתחיל בנקודה $(4,4,4)$.

<u>זכרו</u>: שוויון בין וקטורים אומר שיש להם אותו גודל ואותו כיוון, אולם הוא אינו מלמד על נקודת היציאה של הווקטורים. היא אינה צריכה להיות אותה נקודה.

כו. נתונות 3 נקודות במרחב: $C=(-3,2,0)$ $B=(4,6,-9)$ $A=(7,-1,5)$

מְצאו את הנקודה D כך שיתקיים:

1. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$
2. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$
3. $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$

פתרון:

בכל הסעיפים נשתמש באותו עקרון שכבר למדנו.

1. עבור $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ $\overrightarrow{AB}=(4,6,-9)-(7,-1,5)=(-3,7,-14)$

ולכן: $\overrightarrow{CD}=(D_1,D_2,D_3)-(-3,2,0)$

ולאחר שוויון: $(-3,7,-14)+(-3,2,0)=(D_1,D_2,D_3)$

$D=(-6,9,-14)$

2. עבור $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ $\overrightarrow{AC}=(-3,2,0)-(7,-1,5)=(-10,3,-5)$

$(-10,3,-5)=(D_1,D_2,D_3)-(4,6,-9)$

$(-10,3,-5)+(4,6,-9)=(-6,9,-14)=D$

(העובדה שנקודה D "יוצאת" שווה בשני הסעיפים, לא מפתיעה כי 4 נקודות אלו מתארות מקבילית, ולכן הנקודה הרביעית שווה.)

3. עבור $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$

$$\overrightarrow{CB}=(4,6,-9)-(-3,2,0)=(7,4,-9)$$
$$(7,4,-9)=(7,-1,5)-(D_1,D_2,D_3)$$
$$(7,4,-9)+(7,-1,5)=(0,5,-14)=D$$

עוד מושג אחד נחדש (לא נורא, נדמה לי שזה האחרון.) הקיים בווקטורים, והוא וקטור יחידה.
למרות שמו הייחודי הוא, למעשה, מבטא וקטור שגודלו $=\underline{1}$.
כלומר:

אם נתון וקטור $\underline{u}=(u_1,u_2,u_3)$

ומבקשים את וקטור היחידה, אנו מחפשים וקטור כזה שכיוונו עדיין בכיוון $\underline{u}$, אך גודלו $\underline{1}$.

בשפת המתמטיקה צריך להתקיים: $\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}=1$

איך עושים זאת? למעשה, זה די פשוט. וכרגיל נתחיל בדוגמה:

אם $\underline{u}=(2,3,4)$

כדי למצוא את וקטור היחידה $\underline{v}$ שיהיה בכיוון $\underline{u}$, צריך תחילה למצוא את גודלו של $\underline{u}$.

$$|\underline{u}|=\sqrt{2^2+3^2+4^2}=5.38$$

עתה כל שנותר הוא לחלק כל רכיב של $\underline{u}$ בגודלו שהוא: 5.38.

ולכן: $\underline{v}=\left(\frac{2}{5.38},\frac{3}{5.38},\frac{4}{5.38}\right)$

ברור לנו שהכיוון נשמר כי: $\underline{v}=\frac{1}{5.38}\underline{u}$

ובדיקה תַּראה: $|\underline{v}|=\sqrt{\left(\frac{2}{5.38}\right)^2+\left(\frac{3}{5.38}\right)^2+\left(\frac{4}{5.38}\right)^2}=1$

כז. נתונות הנקודות: $A(-1,2,7)$ $B(3,-5,4)$. מִצאו את וקטור היחידה $\underline{u}$ שכיוונו $\overrightarrow{AB}$.

פתרון:

תחילה נמצא את הווקטור $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB}=(3,-5,4)-(-1,2,7)=(4,-7,-3)$$

גודלו של $\overrightarrow{AB}$: $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{4^2+7^2+3^2}=8.6$

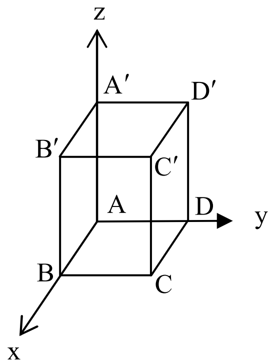
ולכן: $\underline{u}=\left(\frac{4}{8.6},\frac{-7}{8.6},\frac{-3}{8.6}\right)$

$$\underline{u}=(0.47,-0.81,-0.35)$$

כח. נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ שבסיסה רבוע. אורך צלע הבסיס 3 , וגובהה 5 , כנראה בציור:

א. מִצאו את ערכי x,y,z של קדקודי התיבה.

ב. מִצאו את שיעורי קדקודי התיבה אם נתונה הנקודה $A=(5,-4,9)$



פתרון :

א. מהתבוננות ומהבנת צירי השיעורים, אנו יכולים לראות ש-

$A=(0,0,0)$

קדקוד B נמצא על ציר x ,לכן : $x=3, y=0, z=0$: $B=(3,0,0)$

באותו אופן $D=(0,3,0)$

נקודה C מרוחקת 3 מ- x ו- 3 מ- y , ולכן : $C=(3,3,0)$

כך : $A'=(0,0,5)$ $B'=(3,0,5)$ $C'=(3,3,5)$ $D'=(0,3,5)$

ב. כאשר מעתיקים את התיבה ואת הווקטורים שלה לנקודה $A=(5,-4,9)$, מבצעים חיבור וקטורי פשוט :

תזכורת : הנקודה A היא הווקטור $\overrightarrow{OA}$ שיוצא מהראשית.

$B=(5,-4,9)+(3,0,0)=(8,-4,9)$

כך גם : $C=(5,-4,9)+(3,3,0)=(8,-1,9)$

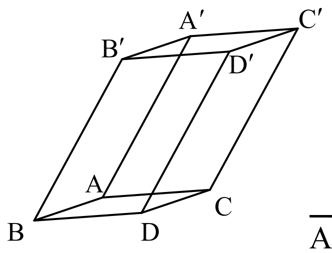
וכן הלאה ומקבלים : $D=(5,-1,9)$

$A'=(5,-4,14)$ $B'=(8,-4,14)$

$C'=(8,-1,14)$ $D'=(5,-1,14)$

כט. במקבילון (תיבה שפֵּאותיה ובסיסה אינם מלבנים אלא מקביליות) נתונים 4 קדקודים :

$A=(3,-5,10)$ $B=(7,3,-4)$ $C=(-1,9,6)$ $A'=(4,2,-1)$



מִצאו את הקדקודים האחרים.

פתרון :

נמצא תחילה את נקודה D .

מהגדרת המקבילון ידוע לנו : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BC}=(-1,9,6)-(7,3,-4)=(-8,6,10)$

ולכן : $D=(3,-5,10)+(-8,6,10)=(-5,1,20)$

באותו אופן : $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{AA'}$

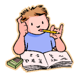
$\overrightarrow{AA'}=(4,2,-2)-(3,-5,10)$

ולכן : $B'=(7,3,-4)+(1,7,-11)=(8,10,-15)$

גם : $\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AA'}$

ולכן : $C'=(-1,9,6)+(1,7,-11)=(0,16,-5)$

וכך גם : $D'=(-5,1,20)+(1,7,-11)=(-4,8,9)$



בדיקת הבנה

44. נתון: $A=(3,2,-5)$ $B=(1,7,4)$ $C=(-3,6,-8)$

מִצאו את:

א. גודל הווקטור $\overrightarrow{AB}$.

ב. גודל הווקטור $\overrightarrow{AC}$.

ג. נתון הווקטור $\overrightarrow{AD}=(5,-4,1)$. מִצאו את D.

ד. נתון הווקטור $\overrightarrow{CE}=(0,7,2)$. מִצאו את E.

ה. מהו הווקטור $\overrightarrow{DE}$?

45. נתונה מקבילית $ABCD$.

ונתון: $A=(3,1,5)$ $B=(-3,1,7)$ $C=(7,2,-1)$

א. מִצאו את נקודה D.

ב. $\overrightarrow{AE}$ הוא וקטור יחידה שכיוונו $\overrightarrow{AC}$. מִצאו את E.

46. נתונה קובייה שאורך צלעה 3. $A=(0,0,0)$

מִצאו את הקדקודים האחרים.

47. במקבילון נתונים הקדקודים:

$A=(3,-5,2)$ $B=(0,7,6)$ $C=(-4,3,9)$ $A'=(5,9,12)$

מִצאו את שאר קדקודי המקבילון.

עתה יש בידינו כלי למציאת נקודות במצולעים ובגופים מרחביים:

<u>דוגמאות</u>:

ל. נתונה מקבילית $A=(1,0,1)$ $B=(2,-1,5)$ $C=(3,-9,7)$

מִצאו:

א. את הנקודה D.

ב. את נקודת פגישת האלכסונים O.

פתרון:

א. נשרטט את המקבילית.

מהשִׂרטוט אנו רואים: $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$

ולכן: $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}=(2,-1,5)-(1,0,1)$

$\overrightarrow{CD}=(1,-1,4)$

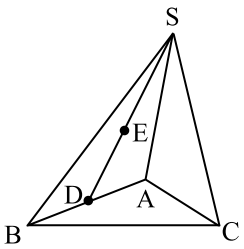
ונקודה D: $D=(3,-9,7)+(1,-1,7)=(4,-10,11)$

ב. הנקודה O מקיימת : $B+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

נמצא את וקטור $\overrightarrow{BD}$: $\overrightarrow{BD}=(4,-10,11)-(2,-1,5)=(2,-9,6)$

ולכן : $O=(2,-1,5)+\frac{1}{2}(2,-9,6)=(3,-5.5,8)$

לא. בטטראדר שבציור נתון :



$A=(1,2,3) \quad B=(-1,4,-7)$

$C=(-5,-6,8) \quad S=(7,-1,2)$

SD הוא תיכון לצלע AB ,

ו- E הוא אמצע התיכון.

מְצאו את שיעורי הנקודה E ואת המרחק של E מקדקוד S .

<u>פתרון</u> :

נתחיל במציאת התיכון SD . אולם כדי למצוא אותו יש תחילה למצוא את נקודה D .

$$D=B+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}=(-1,4,-7)+\frac{1}{2}\left[(1,2,3)-(-1,4,-7)\right]$$

$$D=(-1,4,-7)+\frac{1}{2}(2,-2,10)=(-1,4,-7)+(1,-1,5)$$

$$D=(0,3,-2)$$

כך נוכל גם למצוא את נקודה E :

$$E=S+\frac{1}{2}\overrightarrow{SD}=(7,-1,2)+\frac{1}{2}\left[(0,3,-2)-(7,-1,2)\right]$$

$$E=(7,-1,2)+\frac{1}{2}(-7,4,-4)=(7,-1,2)+(-3.5,2,-2)$$

$$E=(3.5,1,0)$$

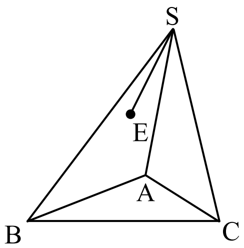
כדי לחשב את המרחק של E מקדקוד S יש למצוא את הגודל $\left|\overrightarrow{SE}\right|$.

נמצא תחילה את $\overrightarrow{SE}$: $\overrightarrow{SE}=(3.5,1,0)-(7,-1,2)=(-3.5,2,-2)$

ומכאן : $\left|\overrightarrow{SE}\right|=\sqrt{3.5^2+2^2+2^2}=4.5$

לעִתים נמצא שהנקודה המבוקשת אינה מוגדרת ע"י מקום ולא ע"י וקטור נתון, כמו בדוגמה הבאה :

לב. בטטראדר נתון :



$A=(3,4,5) \quad B=(-1,2,3)$

$C=(-2,7,1) \quad S=(3,8,12)$

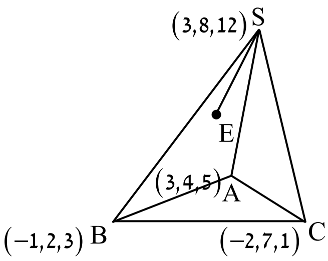
מְצאו את הווקטור $\overrightarrow{CE}$ כאשר נתון : $\overrightarrow{SE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{SB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{SA}$

פתרון :

תחילה נמצא את נקודה E .

כדי למצוא נקודה זו עלינו למצוא את SE .

אולם לשם כך עלינו לברר מהם $\overrightarrow{SB}$ ו- $\overrightarrow{SA}$.



לכן:
$$\overrightarrow{SB}=(-1,2,3)-(3,8,12)=(-4,-6,-9)$$
$$\overrightarrow{SA}=(3,4,5)-(3,8,12)=(0,-4,-7)$$

ומכאן:
$$\overrightarrow{SE}=\frac{1}{4}(-4,-6,-9)+\frac{1}{3}(0,-4,-7)$$
$$\overrightarrow{SE}=(-1,-1.5,-1.25)+(0,1.333,-2.333)$$
$$\overrightarrow{SE}=(-1,-2.83,-3.58)$$

והנקודה E:
$$E=S+\overrightarrow{SE}=(3,8,12)+(-1,-2.83,-3.58)$$
$$E=(2,5.17,8.42)$$

והווקטור $\overrightarrow{CE}$:
$$\overrightarrow{CE}=(-2,7,1)-(2,5.17,8.42)=(-4,1.83,-7.42)$$

בדיקת הבנה

48. נתון משולש ABC ונתון: $A=(-1,0,3)$ $B=(2,5,-3)$ $C=(1,8,-6)$

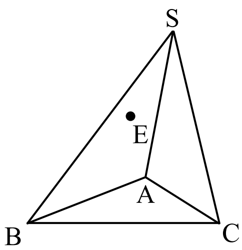
מְצאו את הווקטורים של שלושת התיכונים.

49. בטטראדר ABCS נתון:

$A=(3,2,-1)$ $B=(-5,2,9)$

$C=(7,-6,8)$ $S=(4,6,10)$

מְצאו את הווקטור $\overrightarrow{CE}$ אם נתון: $\overrightarrow{SE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{SA}$.



תרגול עצמי

50. נתונים הווקטורים: $\underline{u}=(1,-2,7)$ $\underline{v}=(6,8,-3)$

מְצאו את הווקטור $\underline{w}$ ואת גודלו לפי הנתונים הבאים:

א. $\underline{w}=2\underline{u}+3\underline{v}$

ב. $\underline{w}=\underline{u}-2\underline{v}$

ג. $\underline{w}=\frac{1}{2}\underline{u}-\frac{1}{4}\underline{v}$

51. נתונות הנקודות: $A=(1,-5,3)$ $B=(2,-7,-9)$ $C=(4,11,-6)$

א. מְצאו את הווקטור $\overrightarrow{AB}$ ואת גודלו.

ב. מְצאו את הווקטור $\overrightarrow{AC}$ ואת גודלו.

ג. מְצאו את נקודה D כך ש- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

ד. מְצאו את נקודה D כך ש- $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

52. מְצאו את ערכו של k אם נתון :

א. $\underline{u}=(1,-k,5)$ $\underline{v}=(2,4,3k)$ $\underline{w}=\underline{u}-\underline{v}=\left(\frac{k}{3},\frac{k}{3},k-2\right)$

ב. $\underline{u}=(k,k+3,k-2)$ $\underline{v}=(2k,k-3,k+1)$ $\underline{w}=2\underline{u}-\frac{1}{2}\underline{v}=(k,3k,k-2)$

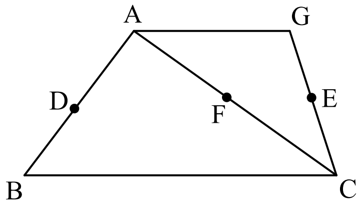
53. מְצאו את וקטור היחידה $\underline{w}$ בכל אחד מהמקרים הבאים :

א. $\underline{u}=(1,1,1)$ ו- $\underline{w}$ בכיוון $\underline{u}$.

ב. $\underline{u}=(-1,3,-5)$ $\underline{v}=(7,-9,8)$ ו- $\underline{w}$ מקביל לכיוון $\underline{v}-\underline{u}$.

ג. $\underline{u},\underline{v}$ כמו בסעיף הקודם, ו- $\underline{w}$ מקביל לכיוון $\underline{v}+2\underline{u}$.

54. נתון טרפז $ABCD$: $A=(7,-1,0)$ $B=(3,6,-1)$ $C=(5,-2,9)$



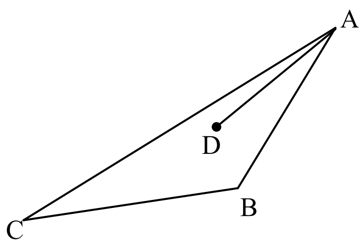
$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. נקודות D,E,F הן אמצעי הצלעות והאלכסון בהתאמה.

א. מְצאו את הנקודה D .

ב. מְצאו את הווקטור $\overrightarrow{DE}$ והראו כי גודלו שווה לממוצע הבסיסים.

ג. מְצאו את היחס $\frac{|\overrightarrow{DE}|}{|\overrightarrow{FE}|}$.

55. נתון משולש ABC



$A=(6,7,-2)$ $B=(3,5,1)$

$C=(-1,-2,3)$ $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

א. מְצאו את שיעורי נקודה D .

ב. מְצאו את היחס $\frac{|\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{BD}|}$