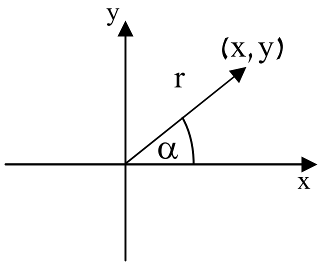
<u>מישור גאוס</u>

כבר ראינו שהמספרים המרוכבים הם, למעשה, נקודות במישור שבו ציר ה- x הוא ציר המספרים הממשיים, וציר ה- y הוא ציר המספרים המדומים.

כמו כן ראינו שניתן להסביר את הפעולות המתמטיות של חיבור, חיסור, כפל וחילוק על ידי הסתכלות של כל נקודה כאילו היא וקטור במישור.

עתה נראה כיצד ניתן לעבור מכיתוב של וקטורים בקואורדינטות קרטזיות (על ידי שערי x , y) לקואורדינטות קוטביות.



(הזכרנו קואורדינטות אלה בנושא הטריגונומטריה).

לפי המעבר הפשוט,

כל וקטור (x , y) ניתן לתיאור על ידי שני פרמטרים : α, r .

כאשר r הוא גודל הווקטור, ו- α היא הזווית הנוצרת בינו לבין ציר x .

והקשר ביניהן :

לפי פיתגורס : $|r| = \sqrt{x^2 + y^2}$

ומטריגונומטריה : $\tan\alpha = \frac{y}{x}$

כך, למשל, המספר :

$$z = 3 - 2i$$

ניתן לתיאור על ידי : $|r| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

והזווית α : $\tan\alpha = \frac{-2}{3}$

$\alpha = -33.69^0$

כלומר אותה נקודה (אותו מספר) ניתנת לתיאור על ידי : $z = \sqrt{13}\left(\cos(-33.69^0) + i\sin(-33.69^0)\right)$

באותו אופן :

המספר : $z = -3 + 2i$

ניתן לתיאור על ידי : $|r| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$

$\tan\alpha = \frac{2}{-3}$

$\alpha = -33.69^0$

אולם הפעם אנו רואים שהמספר נמצא ברביע <u>השני</u> $(x < 0, y > 0)$, כלומר : $\alpha = -33.69 + 180$

(מחזוריות ה- $\tan$ היא 180^0) ולכן : $\alpha = 146.31^0$

ולכן תיאורו : $z = \sqrt{13}\left(\cos 146.31^0 + i\sin 146.31^0\right)$

שתי דוגמאות אלה מדגישות את העובדה שעלינו לא רק למצוא גודל וזווית מהמחשב אלא גם לבדוק באיזה רביע נמצאת הנקודה.

קל למצוא את הרביע המתאים לפי x, y של המספר המרוכב : $x + yi$

$y < 0 \quad x > 0 \quad \Leftarrow$ רביע I

$y > 0 \quad x < 0 \quad \Leftarrow$ רביע II

$y<0 \quad x<0 \quad \Leftarrow$ רביע III

$y<0 \quad x>0 \quad \Leftarrow$ רביע IV

עוד נוסיף שהכתיבה המקובלת למספר מרוכב בהצגה קוטבית היא: $r=(\cos\alpha+i\sin\alpha)=r cis\alpha$

כאשר הקיצור: $cis\alpha$ (נשמע כמו ציס α) מתאר את הכיתוב: $r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

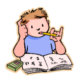
ולכן: $4+2i=\sqrt{20}\ cis\ 26.56^0$

וכן: $-4-3i=5\ cis\ 216.87^0$

כמובן, ניתן לעבור מכיתוב טריגונומטרי לכיתוב קרטזי על פי: $x=r\cos\alpha$

$y=r\sin\alpha$

ולכן: $3\ cis\ 30^0=2.6+1.5i$



<u>בדיקת הבנה</u>

39. כתבו את המספרים הבאים בצורתם הקוטבית $(r\ cis\alpha)$:

א. $3-i$ ב. $-4+5i$ ג. $2+12i$ ד. 5 ה. i

ו. $2i$ ז. 1

40. כתבו את המספרים הבאים בצורתם הקוטבית $(x+yi)$:

א. $2\ cis\ 130^0$ ב. $3\ cis\ 60^0$ ג. $1\ cis\ 200^0$

ד. $\sqrt{2}\ cis\ \text{-}50^0$

התלמיד הנבון ישאל את עצמו לשם מה כל התחכום הנ"ל.

ובכן, בכתיבה קוטבית של המספרים קל יותר לבצע הכפלות והעלאות בחזקה כלשהי.

הבה נכפיל שני מספרים: $r_1\ cis\ \alpha\cdot r_2\ cis\ \beta$

בכתיבה מפורשת: $r_1(\cos\ \alpha\ +\ i\sin\ n)\cdot(r_2(\cos\beta+i\sin\beta)=$

$r_1\cdot r_2\cdot(\cos\alpha+i\sin\alpha)\cdot(\cos\beta+i\sin\beta)=$

אחרי פתיחת סוגריים:

$r_1r_2(\cos\alpha\cos\beta+i\cos\alpha\sin\beta+i\sin\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=$

ולפי זהויות טריגונומטריות: $r_1r_2\cdot\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)=r_1r_2cis(\alpha+\beta)$

כלומר:

$$\boxed{r_1\ cis\alpha\ \cdot\ r_2\ cis\beta\ =r_1r_2\ cis(\alpha+\beta)}$$

ובאותו אופן:

$$\boxed{\frac{r_1\ cis\alpha}{r_2\ cis\beta}=\frac{r_1}{r_2}\ cis(\alpha-\beta)}$$

(נסו בעצמכם. יש להכפיל בצמוד.)

דוגמאות:

י"ט. בצעו את פעולת הכפל או החילוק:

1. $2cis35^0 \cdot 5cis25^0$

2. $\frac{4cis15^0}{2cis35^0}$

פתרון:

1. $2cis35^0 \cdot 5cis25^0 = 10cis60^0$

2. $\frac{4cis15^0}{2cis35^0} = 2cis(-20^0)$

כ. בצעו את המכפלות

1. $3cis70^0 \cdot 2cis100^0 \cdot 6cis15^0$

2. $\frac{4cis10^0 \cdot 8cis210^0}{2cis15^0 \cdot 4cis30^0}$

פתרון:

1. כאשר יש הכפלה של יותר משני גורמים, אנו יכולים לבצע כל פעם הכפלה של שניים מהגורמים.

$$3cis70 \cdot 2cis100 \cdot 6cis15 = 6cis170 \cdot 6cis15 = 36cis185^0$$

2. כך גם לגבי חילוק:

$$\frac{4cis10 \cdot 8cis210}{2cis15 \cdot 4cis30} = \frac{32cis220}{8cis45} = 4cis175^0$$

עתה כבר נראה ברור שלעתים כדאי יותר לעבור מכתיבה קרטזית לכתיבה פולרית וחזרה, גם אם כל הנדרש הוא להכפיל או לחלק מספר גורמים.

כ"א. בצעו את המכפלות והחילוקים הבאים:

1. $(1-3i)(2+4i)(-7+2i) \cdot i$

2. $\frac{(2-5i) \cdot (4-i)}{(1-3i) \cdot (-6+7i)}$

פתרון:

1. תחילה נעבור לכתיבה קוטבית:

$$1-3i = \sqrt{10}cis-71.56^0$$

$$2+4i = \sqrt{20}cis63.43^0$$

$$-7+2i = \sqrt{53}cis164.05^0$$

$$i = cis90^0$$

וההכפלה: $\sqrt{10} \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{53}\ cis(-71.58+63.43+164.05+90) = 102.98\ cis245.92^0$

וחזרה להצגה קרטנית: $102.96(\cos 245.92 + i\sin 245.92) = -42+2.24i$

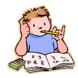
ולכן: $(1-3i)(2+4i)(-7+2i)i = -42+2.24i$

2. באותו אופן:

$$2-5i=\sqrt{29}cis-68.2^0$$
$$4-i=\sqrt{17}cis-14.04^0$$
$$1-3i=\sqrt{10}cis-71.56^0$$
$$-6+7i=\sqrt{85}cis130^0$$

ולכן:
$$\frac{\sqrt{29}\cdot\sqrt{17}cis(-68.2-71.56)}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{85}cis(-71.56+130.6)}=\frac{\sqrt{493}cis-139.76}{\sqrt{850}cis59.04}=0.76cis-198.8^0$$

ובכתיבה קרטזית:
$$\frac{(2-5i)(4-i)}{(1-3i)(-6+71)}=-0.72+0.24i$$



<u>בדיקת הבנה</u>

41. בצעו את פעולות הכפל הבאות:

א. $2cis10^0\cdot4cis200^0$ ב. $\frac{1}{2}cis70^0\cdot\frac{1}{3}cis(-23^0)$ ג. $cis(-150^0)\cdot2cis75^0$

ד. $cis90^0\cdot cis180^0$

42. בצעו את פעולות החילוק הבאות:

א. $\frac{4cis120^0}{2cis60^0}$ ב. $\frac{3cis80^0}{2cis(-40^0)}$ ג. $\frac{2cis100^0\cdot3cis80^0}{4cis75^0}$

ד. $\frac{5cis(-20^0)\cdot6cis120^0}{2cis30^0\cdot3cis150^0}$

כך ניתן גם בקלות להוכיח את נוסחת "דה מואבר" להעלאה בחזקה:

$$\boxed{(r\ cis\ \alpha)^n=r^n cis\ n\cdot\alpha}$$

כ"ב. חשבו את החזקות הבאות, ואת התוצאה רשמו בצורה קרטזית $(x+yi)$:

1. $(2cis25^0)^4$ 2. $(cis(-10^0))^{15}$ 3. $\left(\frac{1}{2cis30^0}\right)^3$ 4. $\left(2+\frac{1}{2}i\right)^5$ 5. $(1-5i)^8$

פתרון:

1. $(2cis25)^4=16cis100=2.78+17.56i$

2. $(cis(-10))^{15}=cis(-150)=-0.866-0.5i$

3. תרגיל זה ניתן לפתור בשני אופנים:

I:

$$\left(\frac{1}{2cis30}\right)^3=\left(\frac{cis0}{2cis30}\right)^3=\left(\frac{1}{2}cis(-30)\right)^3=\frac{1}{8}cis(-90)=\frac{1}{8}i$$

$$\left(\frac{1}{2cis30}\right)^3=\left(\frac{1}{1.73+i}\right)^3=\left(\frac{1.73-i}{4}\right)^3=$$:II

$$\left(\frac{2cis-30}{4}\right)^3=\frac{8}{64}cis-90=-\frac{1}{8}i$$

.4 $$\left(2+\frac{1}{2}i\right)^5=\left(\sqrt{4.25}cis14.04\right)^5=37.24cis70.2=12.61+35.4i$$

.5 $$(1-5i)^8=\left(\sqrt{26}cis(-78.7)\right)^8=456976cis(-629.6^0)$$

על ידי הוספה של 360^0 : $456976cis(-269.6)=-3190.27+456964.86i$

שימו לב, אנו תמיד מחפשים את הזווית במעגל הראשון, כלומר עבור : $-360^0 < \alpha < 360^0$, ומבליעים את העובדה שיש עוד אינסוף פתרונים כאלה עבור כל $360k$ כאשר k מספר שלם.

באותו אופן נוכל לחשב גם שורשים.

כדי למצוא את נוסחת השורשים : $\sqrt[n]{r_1\ cis\ \alpha}$

אנו יודעים שאנו מחפשים אחרי המספר : $r_2\ cin\ \beta$

כך שמתקיים : $r_1\ cin\alpha=(r_2\ cis\beta)^n$

וכבר למדנו : $r_1\ cis\alpha=r_2{}^n\ cis(n\beta)$

עד כה התעלמנו מן העובדה ש- : $cis\alpha=cis(n\beta+360k)$

כי תמיד קיבלנו זוויות במעגל הראשון,

אולם כאשר $n>1$, אנו מקבלים יותר מתוצאה אחת למעגל זה.

לכן : $r_1\ cis\alpha=r_2{}^n\ cis(n\beta+360k)$

ומכאן : $\sqrt[n]{r_1}=r_2$

$$cis\alpha=cis(n\beta+360k)$$

$$\alpha=n\beta+360k$$

כלומר : $\frac{\alpha+360k}{n}=\beta$ (k מספר שלם גם שלילי!)

ואחרי הצבה : $r_2\ cin\ \beta=\sqrt[n]{r_1}\ cis\frac{\alpha+360k}{n}$

ולכן הנוסחה היא :

$$\boxed{\sqrt[n]{r\ cis\alpha}=\sqrt[n]{r}\ cis\frac{\alpha+360k}{n} \quad \text{עבור :}\ k=0,1,2,.....}$$

לדוגמה :

$$\sqrt[5]{3\ \text{cis}\alpha} = \sqrt[5]{3}\cdot \text{cis}\frac{120=360k}{5}$$

והתוצאות :

עבור	$k=0$	$1.245\ \text{cis}24^0$
עבור	$k=1$	$1.245\ \text{cis}96^0$
עבור	$k=2$	$1.245\ \text{cis}168^0$
עבור	$k=3$	$1.245\ \text{cis}240^0$
עבור	$k=4$	$1.245\ \text{cis}312^0$

כך אנו מוצאים שמספר השורשים שנקבל במספרים מרוכבים, שווה לסדר השורש, כלומר למכנה של המעריך $x^{\frac{1}{n}}$.

דוגמה נוספת :

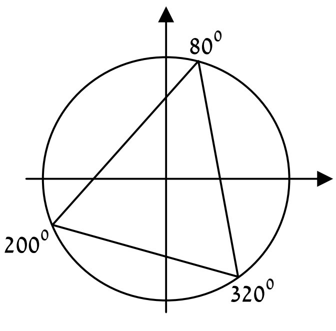
$$\sqrt[3]{8\text{cis}24} = 2\text{cis}\frac{240+360k}{n}$$

$$= 2\text{cis}80^0$$

$$= 2\text{cis}200^0$$

$$= 2\text{cis}320^0$$

אם נעלה את התוצאות על המעגל הטריגונומטרי,
נראה כי תוצאות השורש נותנות תמיד
קדקודי מצולע משוכלל החסום במעגל.
במקרה שלנו : $R=2$
נוצר משולש שווה צלעות.



כ״ג. חשבו את השורש מסדר 3 של 125.

פתרון :

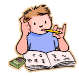
$$\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{125\text{cis}90^0} = 5\text{cis}\frac{0+360k}{3}$$

$$= 5\text{cis}0 = 5$$

$$= 5\text{cis}120 = 2.5+4.33i$$

$$= 5\text{cis}240 = 2.5-4.33i$$

ושוב אנו מוצאים שלכל מספר (גם ממשי) יש מספר שורשים מרוכבים המתאים לסדר של השורש, וגם הפעם המשולש הנחסם על ידי מעגל שרדיוסו 5 , הוא משולש שווה צלעות.



בדיקת הבנה

43. חשבו את החזקות הבאות, ואת התוצאה רשמו באופן קרטזי $(x + yi)$:

א. $(3cis70^0)^5$ ב. $(cis(-20^0))^4$ ג. $\left(\frac{2}{cis18^0}\right)^3$ ד. $(1-2i)^7$

ה. $(-2+3i)^3$ ו. $\left(\frac{4}{2+3i}\right)^4$

44. חשבו את השורשים הבאים :

א. $\sqrt[3]{3cis70^0}$ ב. $\sqrt[4]{cis20^0}$ ג. $\sqrt[3]{8cis90^0}$ ד. $\sqrt[4]{16}$

45. פתרו את המשוואות הבאות (העבירו תחילה לכתיבה קוטבית) :

א. $z^5 = 1+2i$ ב. $z^3 = -1$ ג. $z^5 = i$ ד. $z^3 = -4+2i$

ה. $z^3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

עכשיו יש בידינו הכלים להתמודד גם עם סדרות הנסיות של מספרים מרוכבים.

תזכורת :	בסדרה הנדסית	$a_n = a_1 q^{n-1}$ $s_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$

כ״ד. בסדרה הנדסית נתון : $a_1 = 24i$ $q = 1-i$

מצאו את האיבר החמישי ואת סכום חמשת האיברים בסדרה.

פתרון :

$$a_5 = a_1 q^4 = (2+1)\cdot(1-i)^4 =$$

$$= \sqrt{5}\, cis26.56 \cdot \left(\sqrt{2}\ cis-45\right)^4 =$$

$$= \sqrt{5}\ cis26.56 \cdot 4\ cis180 = 4\sqrt{5}\ cis206.56$$

$$a_5 = -8-4i$$

$$s_5 = \frac{q_1(q^n - 1)}{q-1} = \frac{(2+i)\left[(1-i)^5 - 1\right]}{1-i-1} =$$

$$\frac{(2+i)\left[(1-i)^5 - 1\right]}{-1} \cdot \frac{i}{i} = \frac{(2i-1)\left[(1-i)^5 - 1\right]}{1}$$

נמצא תחילה את $(1-i)^5$.

(רק אחר כך נוכל לחסר מהערך 1.)

$$(1-i)^5 = \left(\sqrt{2}\ cis-45\right)^5 = 2\sqrt{2}\ cis-225 = 2\sqrt{2}\ cis135$$

$$(1-i)^5 = -2+2i$$

ואחרי הצבה : $s_5 = (2i-1)[-2+2i-1] = (2i-1)(-3+2i) = -4+3-6i-2i$

$$s_5 = -1-8i$$

כ"ה. האיבר הראשון בסדרה הנדסית הוא: $3+i$, והאיבר השני הוא: 10 .

מצאו את האיבר השביעי ואת סכום עשרת האיברים הראשונים.

פתרון:

תחילה נמצא את q.

$$q=\frac{a_2}{q_1}=\frac{10}{3+i}\cdot\frac{3-i}{3-i}$$

$$q=\frac{30-10i}{10}=\underline{3-i}$$

וכמו בתרגיל הקודם:

$$a_7=(3+i)\cdot(3-i)^6$$

$$a_7=(3+i)\left(\sqrt{10}\ \text{cis}-30\right)^6=(3+i)(1000\ \text{cis}180)=(3+i)(-1000)$$

$$a_7=3000-1000i$$

$$s_{10}=\frac{(3+i)\left[(3-i)^{10}-1\right]}{3-i-1}=\frac{(3+i)\left[(3-i)^{10}-1\right]}{2-i}\cdot\frac{2+i}{2+i}=$$

$$\frac{(3+i)(2+i)\left[(3-i)^{10}-1\right]}{5}=\frac{(6-1+5i)\left[(3-i)^{10}-1\right]}{5}=(1+i)\left[(3\text{-}i)^{10}-1\right]$$

ושוב נמצא את q^{10} :

$$(3-i)^{10}=\left(\sqrt{10}\ \text{cis}(-18.435)\right)^{10}=$$

$$10^5\ \text{cis}(-184.35)=10^5\ \text{cis}175.65^0$$

$$(3-i)^{10}=-44712+7584i$$

ואחרי הצבה:

$$s_{10}=(3+i)[-99712+7584i-1]=$$

$$(1+i)[-99713+7584i]=-99713-7584-9729i$$

$$s_{10}=107297-9729i$$

כ"ו. האיבר השלישי בסדרה הנדסית הוא: $-4i$, והאיבר השמיני הוא: $16+16i$.

1. מצאו את המנה המתאימה לנקודה ברביע הרביעי.
2. מצאו את האיבר הראשון.

פתרון:

כפי שלמדנו בסדרות:

$$\text{I}\quad a_3=a_1q^2=-4i$$

$$\text{II}\quad a_8=a_1q^7=16+16i$$

ועל ידי חלוקה של $\frac{\text{II}}{\text{I}}$:

$$q^5=\frac{16+16i}{-4I}\cdot\frac{4i}{4i}$$

$$q^5=\frac{64i-64}{16}=4i=4$$

ולמציאת q : (שימו לב, הזווית ברביע השני.)

$$q=\sqrt[5]{4i-4}=\sqrt[5]{\sqrt{32}\ \text{cis}135}$$

$$q=\sqrt[10]{32}\ \text{cis}\frac{135+360k}{5}$$

מקבלים 5 תשובות:

$$q_1 = \sqrt[10]{32}\ \text{cis}27$$
$$q_2 = \sqrt[10]{32}\ \text{cis}99$$
$$q_3 = \sqrt[10]{32}\ \text{cis}171$$
$$q_4 = \sqrt[10]{32}\ \text{cis}243$$
$$q_5 = \sqrt[10]{32}\ \text{cis}315$$

רק q_5 ברביע הרביעי, ולכן: $q = \sqrt[10]{32}\ \text{cis}315 = 1 - i$

הצבה ב- I למציאת a_1:

$$a_1 q^2 = -4i$$
$$a_1 \cdot (1-i)^2 = -4i$$
$$a_1 \cdot (1-2i-1) = -4i$$
$$a_1 = \frac{-4i}{-2i} \cdot \frac{2i}{2i} = \frac{-8i}{4} = -2i$$

כ״ז. נתונה המשוואה: $z^4 = 2 + 2\sqrt{3}i$

1. מצאו את שורשי המשוואה.
2. הוכיחו כי סכום שורשי המשוואה שווה אפס.
3. הוכיחו כי אם z הוא פתרון המשוואה, אז z^6 תמיד מספר ממשי.

פתרון:

.1

$$z^4 = 16\ \text{cis}120$$
$$z = 2\ \text{cis}\frac{120+360k}{4} \qquad k=0,1,2....$$
$$z_1 = 2\ \text{cis}30=1.73+i$$
$$z_2 = 2\ \text{cis}120=1+1.73i$$
$$z_3 = 2\ \text{cis}210=1.73\text{-}i$$
$$z_4 = 2\ \text{cis}300=1\text{-}1.73i$$

2. על ידי חיבור:

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 1.73 + i - 1 + 1.73i - 1.73 - i + 1 - 1.73i = 0$$

3. כבר ראינו בסעיף 1.: $z = 2\ \text{cis}\frac{120+360k}{4}$

למעשה, להוכחת מספר ממשי אין כל חשיבות למקדם אלא לזוויות.

אם הזווית של z^6 ״נופלת״ ל- 0 או 180 , הרי שהתוצאה היא מספר ממשי.

ולכן: $z^6 = 64\ \text{cis}\left[6 \cdot \frac{120+360k}{4}\right]$

נתמקד בזווית: $6 \cdot \left[\frac{120+360k}{4}\right] = 6 \cdot (30+90k) = 180 + 6 \cdot 90k =$

$$180 + 3(180k) = 180(1+3k)$$

ברור לנו ש-: $1+3k$ הוא מספר שלם, ולכן הזווית תהיה תמיד כפולה של 180 , כלומר לכל k הזווית ״תיפול״ על 0^0 או על 180^0 , ולכן זהו תמיד מספר ממשי!

כ"ח. פתרו את המשוואה: $\left(\frac{z}{z+1^4}\right)=1$ (z מספר מרוכב)

פתרון:

נמצא תחילה את השורש: $\left(\frac{z}{z+1}\right)=\sqrt[4]{1}=\text{cis}\ \ 30^0,90^0,180^0,270^0$

ולכן: $\left(\frac{z}{z+1}\right)=\ 1,\ i,\ -1,\ -i$

עבור הפתרון 1:

$$\frac{z}{z+1}=1$$
$$z=z+1$$

אין פתרון.

עבור הפתרון i:

$$\frac{z}{z+1}=i$$

$$z=zi+i$$

נעבור לכתיבה מפורשת: $x+yi=xi-y+i$

ומכאן 2 משאוות: $\text{I}\quad x=-y$

$\text{II}\quad \underline{y=x+1}$

הצבה של II בתוך I: $\text{I}\quad x=-x-1$

$$2x=-1$$

$$x=-\frac{1}{2}$$

הצבה חוזרת: $y=\frac{1}{2}$

והפתרון: $z_1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

כך עבור הפתרון -1:

$$\frac{z}{z+1}=-1$$
$$z=z-1$$

$$2z=-1$$

והפתרון: $z_2=-\frac{1}{2}$

ועבור הפתרון $-i$:

$$\frac{z}{z+1}=-i$$

$$z=-zi-i$$

$$x+yi=-xi+y-i$$

$\text{I}\quad x=y$

$\text{II}\quad y=-x-1$

$$x=-x-1$$

$$2x=-1$$

$$x=-\frac{1}{2}$$

$$y=-\frac{1}{2}$$

והפתרון: $z_3=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

כ"ט. א. פתרו את המשוואה: $z^5 - 1 = 0$

ב. הוכיחו שסכום שורשי המשוואה הוא 0.

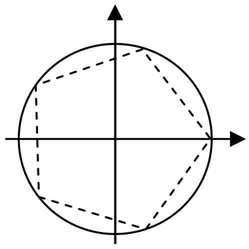
ג. חשבו את סכום ריבועי השורשים.

ד. חשבו את סכום החזקה החמישית של השורשים.

פתרון:

א. תחילה נעביר אגפים: $z^5 = 1$

סוג זה של משוואות שבהן $R = 1$, נקרא שורשי היחידה. ולפי מינוח זה, אנו מתבקשים למצוא את שורשי היחידה מסדר 5 .



הפעולה היא כפי שלמדנו, אלא כאן: $\underline{\underline{R = 1}}$

ולכן: $\sqrt[5]{1} = 1 \cdot \text{cis}\dfrac{0 + 360k}{5}$

והשורשים: $\text{cis}0^\circ,\ \text{cis}72^\circ, \text{cis}144^\circ, \text{cis}216^\circ, \text{cis}288^\circ$

כמו שאנו רואים, הזוויות במקרה זה הם פשוט חלוקה של זוויות המעגל ל- 5.

וכמובן, שרטוט יראה שזהו מחומש משוכלל החסום במעגל שקדקוד אחד שלו על ציר x החיובי.

ב. סכום השורשים:

$$\left.\begin{array}{l} \text{cis}0 = 1 \\ \text{cis}72 = 0.3090 + 0.9510i \\ \text{cis}144 = 0.8090 + 0.5877i \\ \text{cis}216 = 0.8090 - 0.5877i \\ \underline{\text{cis}288 = 0.3090 - 0.9510i} \end{array}\right\} +$$

והסכום: $0 + 0i$

כלומר סכומם 0 .

ג. כדי לחשב את סכום הריבועים נעלה תחילה כל פתרון בריבוע:

$$(\text{cis}0)^2 = \text{cis}2 \cdot 0 = \text{cis}0$$
$$(\text{cis}72)^2 = \text{cis}2 \cdot 72 = \text{cis}144$$
$$(\text{cis}144)^2 = \text{cis}2 \cdot 144 = \text{cis}288$$
$$(\text{cis}216)^2 = \text{cis}2 \cdot 216 = \text{cis}72$$
$$(\text{cis}288)^2 = \text{cis}2 \cdot 288 = \text{cis}216$$

וכפי שראינו בסעיף ב, הסכום הוא 0 .

ד. סכומי החזקות בחמישית:

$$(\text{cis}0)^5 = \text{cis}0 = 1$$
$$(\text{cis}72)^5 = \text{cis}0 = \text{cis}1$$
$$(\text{cis}144)^5 = \text{cis}0 = \text{cis}1$$
$$(\text{cis}216)^5 = \text{cis}0 = \text{cis}1$$
$$(\text{cis}288)^5 = \text{cis}0 = \text{cis}1$$

ולכן סכומם 5 .

בכלל יש לתת את הדעת שכאשר עובדים עם שורשי היחידה, מקבלים תמיד סדרה הנדסית.

לכל השורשים מסדרה n כלשהי מתקיים:

כך ש-:

$$a_1 = \text{cis}0 = \underline{\underline{1}}$$

$$a_2 = \text{cis}\frac{360}{n}$$

ולכן תמיד:

$$q = \frac{a_2}{a_1}\text{cis}\frac{360}{n}$$

ממילא האיבר ה- m הוא:

$$a_m = a_1 \cdot q^{m-1} = 1 \cdot \text{cis}\left((m-1)\frac{360}{n}\right)$$

וסכום הסדרה:

$$s_m = \frac{1\cdot(q^m - 1)}{q-1} = \frac{1\cdot\left(\text{cis}(m\cdot\frac{360}{n}) - 1\right)}{\text{cis}\frac{360}{n} - 1}$$

זו הסיבה שכאשר מבקשים את s_n - סכום השורשים – מתקבל:

$$s_n = \frac{\text{cis}(n\cdot\frac{360}{n}) - 1}{\text{cis}(\frac{360}{n} - 1)} = \frac{\cos(360) - 1}{\cos(\frac{360}{n} - 1)} = 0$$

<u>תרגול עצמי</u>

46. בסדרה הנדסית נתון: $a_1 = 1 \quad q = 2 - 1$
   א. מצאו את האיבר העשירי בסדרה זו.
   ב. מצאו את סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה.
   ג. כמה איברים יש לחבר את לקבל את הסכום: $-432 - 96i$?
   הערה: כדאי לקחת עד מקום רביעי אחרי הנקודה.
47. נתונה סדרה הנדסית: $i, \; -2+i, \; -4-3i.....$
   א. מצאו את סכום 7 האיברים הראשונים בסדרה.
   ב. מצאו את סכום 7 האיברים הבאים אחריהם.
48. האיבר החמישי בסדרה הנדסית הוא: $-136 - 248i$,
   והאיבר השמיני הוא: $-928 + 8896i$. מצאו:
   א. את מנת הסדרה ואת האיבר הראשון.
   ב. את סכום 10 האיברים הראשונים.
49. נתונה סדרה הנדסית: $a-i, \; 1-3i, \; -2+bi.....$
   א. מצאו את הפרמטרים: b, a.
   ב. מצאו את מנת הסדרה.

50. בסדרה הנדסית נתון: סכום עשרת האיברים הראשונים הוא: $31+33i$,
וסכום עשרים האיברים הראשונים הוא: $-1025+1025i$.
א. מצאו את מנת הסדרה.
ב. הוכיחו כי כל התוצאות האפשריות שקיבלתם בסעיף א, הן איברים בסדרה הנדסית.
ג. מצאו את מכפלת התוצאות האפשריות שקיבלתם בסעיף א.

51. א. מצאו את שורשי היחידה מסדר 5 .
ב. הוכיחו כי מכפלת שורש היחידה הוא 1 .

52. הוכיחו כי מכפלת שורש היחידה מסדר n אי זוגי הוא 1 .

53. נתון: $z = r\,\text{cis}\alpha$
מצאו את המספרים הבאים ובטאו בעזרת $r,\ \alpha$:

א. $\bar{z}$ ב. $z-\bar{z}$ ג. $z\cdot\bar{z}$ ד. $(z\cdot\bar{z})^n$

ה. $\dfrac{\bar{z}}{z}$ ו. $\left(\dfrac{\bar{z}}{z}\right)^n$

54. הוכיחו כי: $z\bar{z}-|z|^2=0$

55. פתרו את המשוואות הבאות:

א. $z^4=\bar{z}$ ב. $z^5=\bar{z}^{-3}$ ג. $z^4=16\bar{z}^{-2}$

56. אחד השורשים של המשוואה: $z^4=m$ נמצא על מעגל שרדיוסו 3 ובזווית 35^0 .
א. מצאו את השורשים האחרים.
ב. מצאו את הפרמטר המרוכב m .