וקטורים

כדי להבין את חשיבות הווקטורים נפתח בשאלה :

שתי מכוניות נוסעות. האחת במהירות 90 קמ״ש, והאחרת במהירות 70 קמ״ש.

מה תהיה מהירות ההתנגשות ביניהן ?

א. 160 קמ״ש

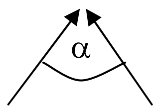
ב. 20 קמ״ש

ג. לא תהיה התנגשות.

ד. אין מספיק נתונים.

רוב התלמידים מזהים את א׳ כתשובה הנכונה. חלקם מבינים שהשאלה מתחכמת יותר, ועונים ב׳.
האמת היא שתשובה ד׳ היא הנכונה.
נבין זאת אם נזכור שעלינו לדעת את אופן הנסיעה של המכוניות.

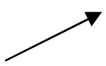
אם המכוניות מתנגשות חזיתית (כלומר זו מול זו בכיוון נגדי), אז התשובה היא 160 קמ״ש (א׳).
אם המכונית האחת (90 קמ״ש) נוסעת אחרי האחרת (70 קמ״ש), התשובה תהיה 20 קמ״ש (ב׳).
אולם אם מכונית אחת נוסעת מצפון לדרום, והאחרת ממזרח למערב, נקבל מהירות התנגשות שונה.
למעשה יש אינסוף מהירויות שניתן לקבל, שכולן תלויות בזווית ההתנגשות.



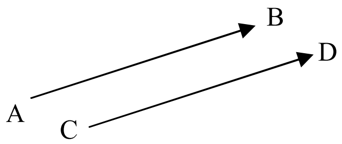
וכפי שאנו רואים, כולן תלויות <u>בכיוון</u> נסיעת המכוניות.
לגדלים כמו מהירות נסיעה אנו קוראים גדלים וקטורים.

<u>הגדרה : **וקטור הוא גודל +כיוון !**</u>

עד היום למדנו כיצד לחשב גדלים חסרי כיוון ולפעול עמם. אלה נקראים סקלרים. ראינו שלעולם מתקיימת השקילות : $70 + 90 = 160$.
וזה נכון כאשר עוסקים ב<u>סקלר</u>. כיצד ניתן לחשב גדלים בעלי כיוון, כלומר וקטורים ?
תחילה עלינו למצוא ייצוג הולם לגודל וקטורי. הייצוג המתאים ביותר, הוא תיאור הגודל על ידי חץ.

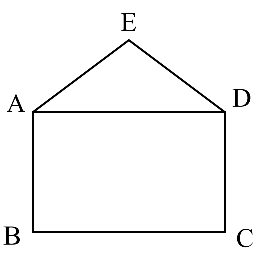


חץ מכיל בתוכו שני נתונים :
הוא מורה על <u>כיוון</u>, ויש לו אורך.
האורך יכול להצביע (לפי קנ״מ מוסכם) על <u>גודלו</u> של הווקטור.



לפי הגדרה זו, שני וקטורים
שגודלם וכיוונם זהה, יהיו וקטורים שווים,
בלי קשר לנקודת היציאה שלהם. ולכן : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

לדוגמה : במחומש ABCDE שבציור נתון :



$\angle B = \angle C = 90^\circ$

$AB = CD$

$AE = ED$

ומתקיים : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

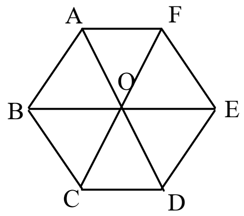
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

אבל : $\overrightarrow{AE} \neq \overrightarrow{ED}$

על אף שהם שווים בגודלם, הם אינם שווים בכיוונם, ולכן אינם שווים !

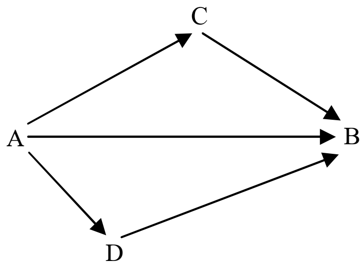
<u>**בדיקת הבנה**</u>

1. נתון משושה משוכלל ABCDEF .
מִצאו את כל הווקטורים השווים ביניהם.



<u>עכשיו נעבור לשקילות וקטורים.</u>

כאשר רוצים להגיע מנקודה A לנקודה B ,
יש אמנם רק קו ישר אחד, אך לעומת זאת
ישנם אינסוף מסלולים שבורים, כמו בציור.



אנו רואים מיד שהווקטור $\overrightarrow{AB}$ שקול (שווה ערך)

לחיבור שני הווקטורים : $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$

או שני הווקטורים : $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}$

כלומר מתקיים : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}$

כך אנו מגדירים חיבור וקטורים. כאשר מחברים וקטורים, כלומר : מצמידים את הזנב של השני לראש של הראשון, וקטור החיבור הוא חץ היוצא <u>**מהזנב של הראשון לראש של האחרון**</u>.

כדי שנוכל להטיב ולקרוא את השפה המתמטית, נדגיש כמה סימונים :

1. הסימן $\rightarrow$ מעל האותיות נועד להבהיר שאנו עוסקים <u>בווקטור</u>. זאת בשונה מהכיתוב AB סתם, או $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ שמצביע על <u>גודל סקלרי</u>, כלומר רק על <u>האורך</u> של החץ ללא כיוונו.

2. הווקטור $\overrightarrow{AB}$ הוא תמיד וקטור שזנבו נמצא ב- A , וקדקודו ב- B .

מכאן נובע ש : $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

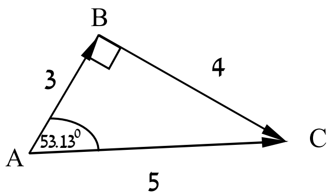
דוגמה :

א. בשרטוט אנו רואים שאם מחברים שני וקטורים :

$\overrightarrow{AB}$ שגודלו 3 ,

$\overrightarrow{BC}$ שגודלו 4 ,

והזווית ביניהם היא של 90° .



מתקבל הווקטור $\overrightarrow{AC}$ שגודלו 5 , לפי משפט פיתגורס, והזווית בינו לבין הווקטור $\overrightarrow{AB}$ היא 53.13°
(מתוך הטריגונומטריה).

דוגמה זו מחדדת את ההבדל בין חיבור וקטורי לבין חיבור סקלרי.

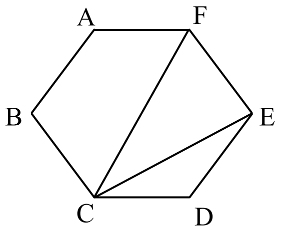
חיבור סקלרי : $3+4=7$

בחיבור הווקטורי הבאנו בחשבון גם את <u>הכיוונים</u> !

מדוגמה זו ניתן ללמוד עוד 2 דברים על התנהגות הווקטורים :

1. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\neq|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|$ <u>חיבור וקטורי איננו שווה לחיבור סקלרי</u> !

2. חיבור וקטורי נותן <u>וקטור</u> .
 חיבור סקלרי נותן <u>סקלר</u> .



דוגמאות :

ב. נתון משושה ABCDEF (ראו ציור) .

1. כיצד ניתן למצוא את הווקטור $\overrightarrow{CF}$?

2. כיצד ניתן למצוא את הווקטור $\overrightarrow{EC}$?

פתרון :

1. את הווקטור $\overrightarrow{CF}$ ניתן למצוא במספר אופנים :

I $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}$

II $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}$

III $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EF}$

2. את הווקטור $\overrightarrow{EC}$ ניתן לייצג לפי :

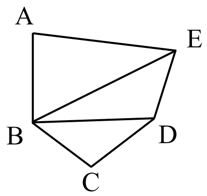
I $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}$

II $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

III $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FC}$

טיפ :
התבוננות בפתרון תַּראה לנו שכל האותיות מופיעות בזוגות, למעט הראשונה והאחרונה ; אלו האותיות של הווקטור אותו אנו מבקשים.

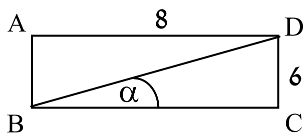
<u>בדיקת הבנה</u>



2. נתון מחומש ABCDE .

א. כיצד ניתן לייצג את הווקטור $\overrightarrow{BE}$?

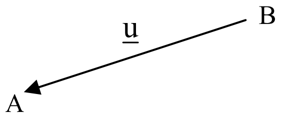
ב. כיצד ניתן לייצג את הווקטור $\overrightarrow{CD}$?



3. נתון מלבן ABCD שאורך צלעותיו 6,8 .

מְצאו את וקטור האלכסון $\overrightarrow{BD}$ (גודל וכיוון) .

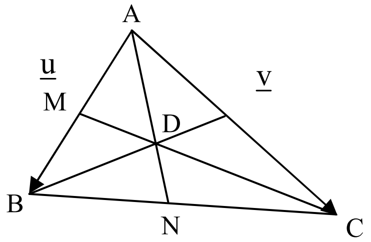
<u>מציאת וקטור באמצעות וקטור נתון</u>



לשם נוחות ניתן לייצג וקטורים גם על ידי אותיות קטנות, לדוגמה:

בציור אנו רואים: $\overrightarrow{BA}=\underline{u}$. כיוונו הוא בכיוון החץ! וגודלו הוא $|\overrightarrow{BA}|$.

ולכן: $\overrightarrow{AB}=-\underline{u}$.



ג. נתון משולש ABC .

D היא נקודת מפגש התיכונים.

M היא אמצע הצלע AB .

נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$

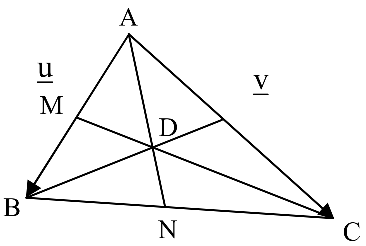
$\overrightarrow{AC}=\underline{v}$

בַּטאו באמצעות $\underline{u},\underline{v}$ את:

1. $\overrightarrow{MC}$
2. $\overrightarrow{MD}$
3. $\overrightarrow{BC}$
4. את $\overrightarrow{AN}$ אם N היא אמצע BC.

פתרון:

כדי לבטא וקטורים באמצעות וקטורים ידועים תחילה יש לבחור "מסלול". כבר ראינו שישנם מספר אפשרויות לייצוג ישר. גם כאן יש מספר אפשרויות לייצג את $\overrightarrow{MC}$. לכל אפשרות כזו אנו קוראים מסלול.



1. בתרגיל שלנו $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}$

או $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}$

או $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NC}$

ויש עוד.

אנו בוחרים במסלול שיהיה הקצר ביותר, ושעליו יש את מקסימום הנתונים.

לכן המסלול שנבחר: $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}$

בדיקה מהירה תַּראה שהמסלול תקף כי A מופיע פעמיים,

והאות הראשונה היא M והאחרונה C.

עתה נבדוק מהו $\overrightarrow{MA}$. לפי הנתון ש- M היא אמצע הצלע AB , אנו יודעים:

$$|\overrightarrow{MA}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BA}|$$

כלומר <u>גודל</u> הווקטור $\overrightarrow{MA}$ הוא חצי מגודל הווקטור $\overrightarrow{BA}$.

הכיוון של שני הווקטורים זהה, ולכן: $\overrightarrow{MA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

<u>שימו לב !</u> הכיוון <u>חייב</u> להישמר !

ואם: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$

אז : $\overrightarrow{BA} = -\underline{u}$

ומכאן : $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = -\frac{1}{2}\underline{u}$

כלומר : $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}\underline{u}$

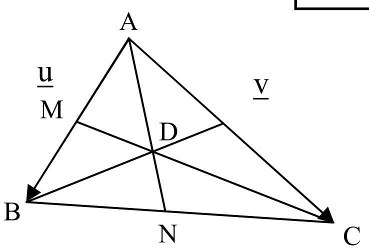
ונתון : $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$

ולאחר הצבה : $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\underline{u} + \underline{v}$

בדוגמה זו עשינו שימוש בכלל שאומר :

<u>כאשר מכפילים וקטור בסקלר – גודלו משתנה, וכיוונו נשאר.</u>

ובהכללה : אם נתון וקטור $\underline{w} = \underline{u} + \underline{v}$
אז : $t\underline{w} = t(\underline{u} + \underline{v}) = t\underline{u} + t\underline{v}$



2. נעתיק שוב את השרטוט :

מציאת $\overrightarrow{MD}$:

לפי הידוע לנו מגיאומטריה : $\overrightarrow{MD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MC}$

(לפי המשפט בדבר נקודת מפגש התיכונים)

ולכן : $\overrightarrow{MD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MC}$

לפי סעיף א' : $\overrightarrow{MC} = -\frac{1}{2}\underline{u} + \underline{v}$

ולכן : $\overrightarrow{MD} = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\underline{u} + \underline{v}\right) = -\frac{1}{6}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v}$

3. מציאת $\overrightarrow{BC}$: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\underline{u} + \underline{v}$

4. מציאת $\overrightarrow{AN}$: $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$

$\overrightarrow{AB} = \underline{u}$

$\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(-\underline{u} + \underline{v})$

$\overrightarrow{AN} = \underline{u} + \frac{1}{2}(-\underline{u} + \underline{v}) = \underline{u} - \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} = \underline{\frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}}$

בדוגמה זו עשינו שימוש במספר כללים אינטואיטיביים. עתה נעמוד עליהם באופן פורמלי.

1. כאשר מכפילים סקלר בווקטור, מקבלים <u>וקטור</u>.

כפי שראינו בסעיף (1) : $\overrightarrow{MA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

הערה : **כפל סקלר בווקטור מוגדר רק כאשר הסקלר משמאל לווקטור.**

כלומר : אם t **סקלר ו-** $\underline{u}$ **וקטור, ניתן לכתוב** $t\underline{u}$ **! אך לא ניתן לכתוב** $\underline{u}t$ **!**

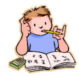
2. כאשר מכפילים סקלר - t בסכום הווקטורים $\left(\underline{u}+\underline{v}\right)$, מקבלים : $t\left(\underline{u}+\underline{v}\right)=t\underline{u}+t\underline{v}$

כפי שראינו בסעיף (4) : $\frac{1}{2}\left(-\underline{u}+\underline{v}\right)=-\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}$

3. באופן דומה אם נתונים שני סקלרים - t,s וקטור $\underline{u}$ מתקיים : $\left(t+s\right)\cdot\underline{u}=t\underline{u}+s\underline{u}$

4. כאשר יש שני סקלרים - t,s ווקטור $\underline{u}$ מתקיים : $t\cdot\left(s\underline{u}\right)=\left(ts\right)\cdot\underline{u}$

כפי שראינו בסעיף (3) : $\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\underline{u}\right)=-\frac{1}{6}\underline{u}$



<u>**בדיקת הבנה**</u>

4. במרובע $ABCD$ נתון : $\overrightarrow{BC}=\underline{w}$ $\quad\overrightarrow{AD}=\underline{v}$ $\quad\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.

E אמצע הווקטור $\overrightarrow{AD}$.

F אמצע הווקטור $\overrightarrow{AB}$.

בַּטאו באמצעות $\underline{u},\underline{v},\underline{w}$ את :

א. $\overrightarrow{DC}$ ב. $\overrightarrow{FC}$ ג. $\overrightarrow{BE}$ ד. $\overrightarrow{EF}$

5. במשולש ABC נתון : $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$ $\quad\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.

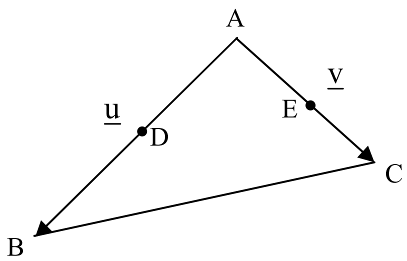
D אמצע הווקטור $\overrightarrow{AB}$.

E אמצע הווקטור $\overrightarrow{AC}$.

א. בַּטאו את $\overrightarrow{BC}$ באמצעות $\underline{u},\underline{v}$.

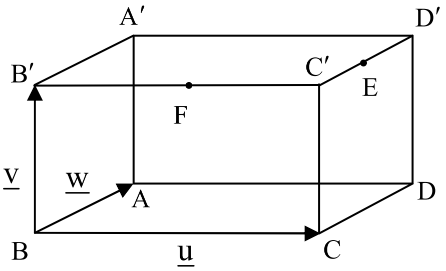
ב. בַּטאו את $\overrightarrow{DE}$ באמצעות $\underline{u},\underline{v}$.

ג. איזה משפט גיאומטרי מוכח באמצעות תרגיל זה ?



באותו אופן ניתן גם לבטא וקטורים במרחב (אל חשש זה די פשוט):

ד. נתונה התיבה שבציור:



E אמצע צלע $C'D'$.

F אמצע צלע $B'C'$.

$\overrightarrow{BC} = \underline{u}$ $\quad \overrightarrow{BB'} = \underline{v}$ $\quad \overrightarrow{BA} = \underline{w}$

בַּטאו באמצעות $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ את:

1. האלכסונים הראשיים $\overrightarrow{BD'}$ ו - $\overrightarrow{A'C}$.
2. $\overrightarrow{AF}$
3. $\overrightarrow{AE}$
4. הוכיחו כי הווקטור $\overrightarrow{FE}$ מקביל לבסיס.

פתרון:

1. כדי למצוא את האלכסון $\overrightarrow{BD'}$ נבחר מסלול:

$$\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'D'}$$

ידוע לנו ש: $\overrightarrow{BC} = \underline{u}$

כמו כן: $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BB'} = \underline{v}$ (זו תיבה)

$\overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{BA} = \underline{w}$

ואחרי הצבה: $\overrightarrow{BD'} = \underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$

ובאותו אופן: $\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{A'C} = -\underline{w} - \underline{v} + \underline{u}$$

$$\overrightarrow{A'C} = \underline{u} - \underline{v} - \underline{w}$$

2. תחילה נמצא מסלול (שימו לב, המסלול יהיה לאורך הצלעות!).

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'F}$$

$\overrightarrow{AB} = -\underline{w}$

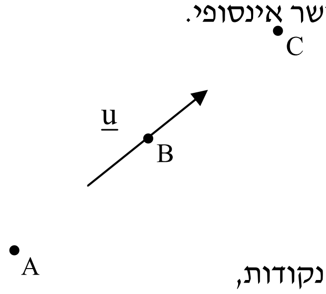
$\overrightarrow{BB'} = \underline{v}$

כבר ראינו ש: $\overrightarrow{B'F} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B'C'} = \frac{1}{2}\underline{u}$

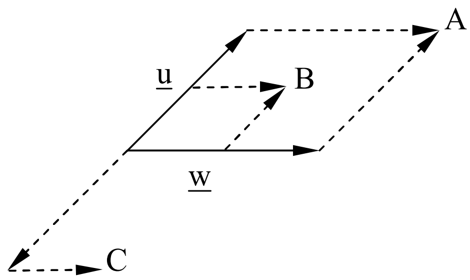
ולכן: $\overrightarrow{AF} = -\underline{w} + \underline{v} + \frac{1}{2}\underline{u}$

3. כך גם: $\overrightarrow{AE} = \underline{u} + \underline{v} - \frac{1}{2}\underline{w}$

די לענות על סעיף 4 יש להקדים ולהסביר את המושג: <u>הגדרת מישור על ידי 2 וקטורים</u>.
כבר ראינו שהכפלה של סקלר בווקטור משנה את גודלו של הווקטור אך שומרת על כיוונו,
ומכאן שאם נתון וקטור $\underline{u}$ כלשהו, אז $t\underline{u}$ עבור t כלשהו מייצג ישר אינסופי.



כי כאשר $t=\frac{1}{2}$, נקבל את הנקודה B.
כאשר $t=-1$, נקבל את הנקודה A.
כאשר $t=2$, נקבל את הנקודה C וכן הלאה.
ומכיוון ש- t יכול לקבל אינסוף ערכים, כך אנו מקבלים אינסוף נקודות,
וכולן נמצאות על הישר <u>שבכיוון</u> $\underline{u}$.
בהגדרת מישור אנו עוברים מתיאור חד-מְמַדי לתיאור דו-מְמַדי:



ניקח לדוגמה 2 וקטורים $\underline{u},\underline{w}$.
הטענה היא: כל נקודה על המישור
ניתנת לייצוג על ידי $t\underline{u}+s\underline{w}$
כאשר t,s הם סקלרים כלשהם.
עבור $t=s=1$ נקבל את הנקודה A.
עבור $t=s=\frac{1}{2}$ נקבל את הנקודה B.
עבו ר $t=-1\ s=\frac{1}{2}$ נקבל את הנקודה C.
וכן הלאה. ולכן המישור האינסופי π ניתן לתיאור $\pi=t\underline{u}+s\underline{w}$ כאשר t,s הם סקלרים כלשהם.

ישר המקביל למישור זה, חייב להיות כזה שלא יחתוך את המישור, כלומר גם הוא חייב להיות מורכב אך ורק משני וקטורים <u>אלה</u>!
אם יש לו רכיב חיבור של וקטור נוסף הניצב אליהם, הוא יהיה חייב לחתוך את המישור בנקודה כלשהי, כי מוסיפים לו רכיב ניצב.
בדוגמת התיבה – הווקטור $\underline{v}$ ניצב לשני הווקטורים $\underline{u},\underline{w}$, ולכן כל ישר שיהיה בעל רכיב $\underline{v}$, חייב לחתוך את מישור הבסיס.
ארחיב נקודה זו.
נניח שהתיבה ממוקמת כך שבסיסה אופקי. וקטור שֶׁיִכלול רכיב $\underline{v}$, יהיה לו גם רכיב אנכי,
ולכן תהיה לו <u>זווית</u> מסוימת עם האופק! כלומר בשלב כלשהו הוא יחתוך את מישור הבסיס.
אם הבנתם נקודה זו, הפתרון לסעיף 4 הוא פשוט. כי כל שעלינו להוכיח הוא שהווקטור $\overrightarrow{FE}$ מורכב מהווקטורים $\underline{u},\underline{w}$ <u>בלבד</u>! וממילא הכיוון $\overrightarrow{FE}$ יהיה מקביל לכיוון של מישור הבסיס.

נבחן את המקרה $\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AE}$

הצבה מסעיפים 2,3 :

$$\overrightarrow{FA}=-\overrightarrow{AF}=\underline{w}-\underline{v}-\frac{1}{2}\underline{u}$$

$$\overrightarrow{AE}=\underline{u}+\underline{v}-\frac{1}{2}\underline{w}$$

ולכן: $\overrightarrow{FE}=\left(\underline{w}-\underline{v}-\frac{1}{2}\underline{u}\right)+\left(\underline{u}+\underline{v}-\frac{1}{2}\underline{w}\right)$

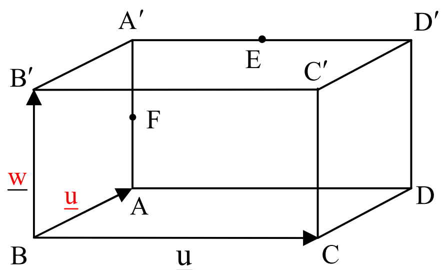
(לסוגרים אין משמעות מתמטית אלא הסברית בלבד.)

אחרי חיבור: $\overrightarrow{FE}=\frac{1}{2}\underline{w}+\frac{1}{2}\underline{u}$

כלומר אנו רואים שכיוון הישר $\overrightarrow{FE}$ <u>מקביל למישור</u> !

שניהם מורכבים מהווקטורים $\underline{u},\underline{w}$ בלבד !

<u>בדיקת הבנה</u>



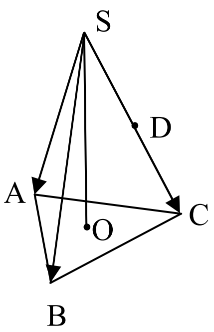
6. נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$.

$\overrightarrow{BA}=\underline{u}$ $\quad\overrightarrow{BC}=\underline{v}$ $\quad\overrightarrow{BB'}=\underline{w}$

F,E נקודות באמצע הצלעות $\overrightarrow{A'D'}$ ו $\overrightarrow{AA'}$ בהתאמה.

א. בַּטאו את הווקטורים: $\overrightarrow{BD'}$, $\overrightarrow{A'C}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{CF}$ באמצעות $\underline{u},\underline{v},\underline{w}$.

ב. הוכיחו כי הישר $\overrightarrow{FE}$ מקביל למישור $BCB'C'$.



7. נתונה פירמידה משולשת ישרה שבסיסה שווה צלעות $ABCS$.

$\overrightarrow{SA}=\underline{u}$ $\quad\overrightarrow{SB}=\underline{v}$ $\quad\overrightarrow{SC}=\underline{w}$

D אמצע צלע SC .

א. מְצאו את הווקטור $\overrightarrow{CO}$. (O נקודת מפגש התיכונים של הבסיס.)

ב. מְצאו את וקטור הגובה $\overrightarrow{SO}$ של המנסרה.

ג. מְצאו את הווקטורים $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BD}$.

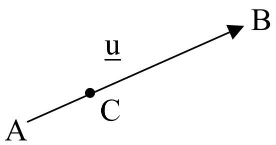
ד. מְצאו את וקטור הגובה של המשולש ABD היורד לצלע AB .

לקראת סיום הנושא של מציאת וקטורים על ידי וקטור נתון, נוסיף חלוקת וקטור ביחס נתון.

עד כה השתמשנו בנקודות אמצע או בנקודות המחלקות ל- $\frac{1}{3}$ ול- $\frac{2}{3}$.

מה עושים כאשר החלוקה היא ביחס של $2:5$ או $K:M$ כלשהו (K,M מספרים סקלריים) ?

כדי לענות על שאלה זו נביא דוגמה:

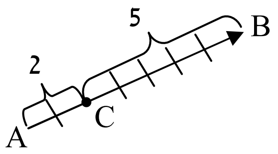


נתון הווקטור $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$ ונקודה C

המחלקת אותו ביחס של $2:5$.

מְצאו את הווקטורים $\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AC}$.

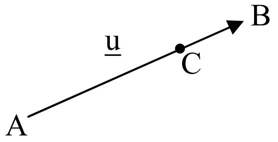
מתוך הנתונים אנו יודעים כי : $\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{2}{5}$.



באופן מעשי אנו יכולים לחלק את הווקטור <u>ל- 7 חלקים שווים</u> !

ולכן : $\overrightarrow{AC}=\frac{2}{7}\underline{u}$ ו- $\overrightarrow{BC}=-\frac{5}{7}\underline{u}$.

אם נחליף את המספרים ואת האותיות נקבל :

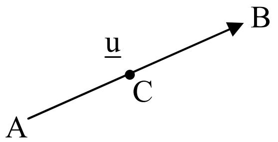


על הווקטור $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$ הקצו נקודה C

כך שהיחס $AC:CB$ הוא $K:M$ בהתאמה.

ומכאן נקבל : $\overrightarrow{CB}=\dfrac{M}{K+M}\underline{u}$ $\overrightarrow{AC}=\dfrac{K}{K+M}\underline{u}$.

<u>בדיקת הבנה</u>

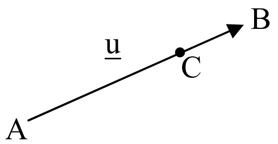


8. נתון הווקטור $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$. על וקטור זה הקצו

נקודה C כך שהיחס $\overrightarrow{AC}:\overrightarrow{CB}$ הוא $7:9$ בהתאמה.

בַּטאו את הווקטורים $\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC}$ בעזרת $\underline{u}$.

לעִתים נמצא שהיחס לא ניתן באופן מפורש אלא רק חלקי, כמו בדוגמה :



על הווקטור $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$ הקצו נקודה C כך ש- $\overrightarrow{AC}=\alpha\underline{u}$.

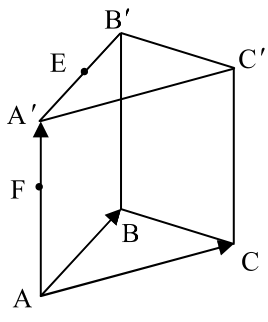
כאן α היא היחס $\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|}=\alpha$

כדי למצוא את הווקטור $\overrightarrow{CB}$ עלינו לבצע חישוב פשוט :

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$$
$$\alpha\underline{u}+\overrightarrow{CB}=\underline{u}$$
$$\overrightarrow{CB}=\underline{u}-\alpha\underline{u}=(1-\alpha)\underline{u}$$

ולכן הווקטור $\overrightarrow{CB}$ הוא : $\overrightarrow{CB}=(1-\alpha)\underline{u}$

דוגמה :



ה. נתונה מנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$

$\overrightarrow{FA'}=\alpha\underline{w}$ $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$ $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$ $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$

כמו כן נתון כי היחס $A'E:EB'$ הוא $3:7$ בהתאמה.

בַּטאו את הווקטורים $\overrightarrow{FE},\overrightarrow{CF},\overrightarrow{CE}$ בעזרת $\underline{u},\underline{v},\underline{w},\alpha$.

פתרון :

מציאת הווקטור $\overrightarrow{CE}$:

מציאת מסלול: $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'E}$

$\overrightarrow{CA} = -\underline{v}$

$\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$

ולפי מה שכבר למדנו : $\overrightarrow{A'E} = \frac{3}{10}\overrightarrow{A'B'} = 0.3\underline{u}$

ולכן: $\overrightarrow{CE} = -\underline{v} + \underline{w} + 0.3\underline{u}$

מציאת הווקטור $\overrightarrow{CF}$:

מציאת מסלול: $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF}$

$\overrightarrow{CA} = -\underline{v}$

$\overrightarrow{AF}$ לא נתון ישירות ולכן נבצע עבורו חישוב:

לפי הנתון: $\overrightarrow{FA'} = \alpha\overrightarrow{AA'}$

אבל: $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FA'} = \overrightarrow{AA'}$

כלומר: $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{FA'} = (1-\alpha)\underline{w}$

ולכן : $\overrightarrow{AF} = (1-\alpha)\underline{w}$

ואחרי הצבה: $\overrightarrow{CF} = -\underline{v} + (1-\alpha)\underline{w}$

מציאת הווקטור $\overrightarrow{FE}$:

$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{CE}$

ואחרי הצבה (לפי מה שכבר מצאנו) :

$\overrightarrow{FE} = (-\underline{v} + \underline{w} + 0.3\underline{u}) + (-\underline{v} + (1-\alpha)\underline{w})$

$\overrightarrow{FE} = -2\underline{v} + (2-\alpha)\underline{w} + 0.3\underline{u}$

בדיקת הבנה

9. נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$.

נתון:

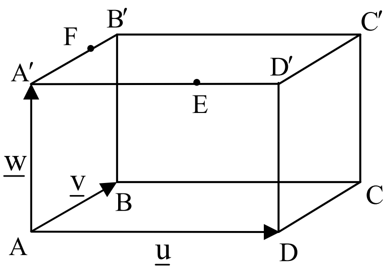
$\overrightarrow{AD} = \underline{u} \quad \overrightarrow{AB} = \underline{v} \quad \overrightarrow{AA'} = \underline{w}$

$\overrightarrow{A'F} = 4\overrightarrow{FB} \quad \overrightarrow{ED'} = \alpha\overrightarrow{A'D'}$

בַּטאו את הווקטורים הבאים באמצעות $\underline{u},\underline{v},\underline{w},\alpha$:

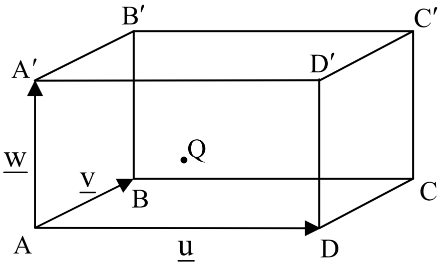
א. $\overrightarrow{AF}$ ב. $\overrightarrow{AE}$ ג. $\overrightarrow{EF}$

ד. האם $\overrightarrow{EF}$ מקביל לבסיס ?



תרגול עצמי

10. בתיבה $ABCDA'B'C'D'$



נתון :

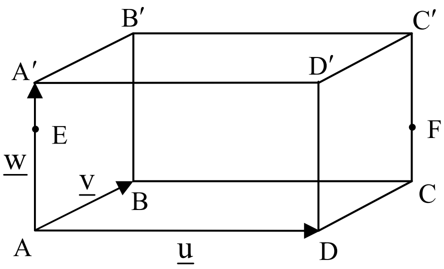
$\overrightarrow{AD}=\underline{u} \quad \overrightarrow{AB}=\underline{v} \quad \overrightarrow{AA'}=\underline{w}$

Q נקודת מפגש אלכסוני הפֵּאה $ADD'A'$.

א. מִצאו את הווקטורים $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{B'D}$.

ב. מִצאו את הווקטורים $\overrightarrow{CQ}$, $\overrightarrow{BQ}$.

11. בתיבה $ABCDA'B'C'D'$



נתון :

$\overrightarrow{AD}=\underline{u} \quad \overrightarrow{AB}=\underline{v} \quad \overrightarrow{AA'}=\underline{w}$

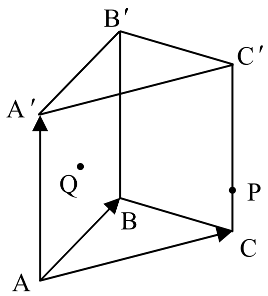
$\overrightarrow{EA'}=\alpha\underline{w} \quad \overrightarrow{CF}=\beta\overrightarrow{CC'}$

א. מִצאו את הווקטורים $\overrightarrow{EB}$ ו- $\overrightarrow{FB'}$.

ב. מִצאו את הווקטור $\overrightarrow{EF}$.

ג. הוכיחו כי כאשר $\alpha=\beta$, הווקטור $\overrightarrow{EF}$ מקביל לבסיס.

12. במנסרה משולשת $ABCA'B'C'$



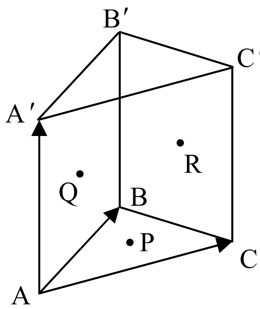
$\overrightarrow{AC}=\underline{u} \quad \overrightarrow{AB}=\underline{v} \quad \overrightarrow{AA'}=\underline{w}$

הנקודה P מחלקת את הצלע CC' ביחס של $2:5$.

הנקודה Q היא נקודת מפגש האלכסונים של הפֵּאה $ABB'A'$.

מִצאו את הווקטורים $\overrightarrow{CQ}$ ו- $\overrightarrow{PQ}$.

13. במנסרה משולשת $ABCA'B'C'$



נתון :

$\overrightarrow{AC}=\underline{u} \quad \overrightarrow{AB}=\underline{v} \quad \overrightarrow{AA'}=\underline{w}$

R,Q הן נקודות מפגש האלכסונים של הפֵּאות

$ABB'A'$ ו- $CBB'C'$ בהתאמה.

הנקודה P היא נקודת מפגש התיכונים של הבסיס.

א. מִצאו את הווקטורים $\overrightarrow{PQ}$ ו- $\overrightarrow{PR}$.

ב. מִצאו את הווקטור $\overrightarrow{QR}$ והניחו כי הווקטור מקביל לבסיס.

14. בפירמידה משולשת $ABCS$

נתון :

$\overrightarrow{AB}=\underline{u} \quad \overrightarrow{AC}=\underline{v} \quad \overrightarrow{AS}=\underline{w}$

P נקודת מפגש התיכונים של הפֵּאה ACS , $\overrightarrow{BQ}=\alpha\overrightarrow{BS}$.

מִצאו את הווקטור $\overrightarrow{QP}$ והוכיחו כי כאשר $\alpha=\frac{1}{3}$, הווקטור מקביל לבסיס.