בעיות מינימום ומקסימום

שימוש נוסף בנגזרת של פונקציה אנו עושים בבעיות שבהן אנו מחפשים אחר ערכי מקסימום או ערכי מינימום. אלו הן בעיות מילוליות שיש להן אילוץ אחד או יותר, אך עדיין יש לפתרונן מספר אפשרויות.

לדוגמה:

חנות מוכרת חולצות בית ספר. מחיר החולצה תלוי בגודל ההזמנה לפי הפירוט הבא:

עד 100 יחידות - 50 ₪ לחולצה,

מעל 100 יחידות - כל חולצה נוספת מזכה את כל ההזמנה ב- 0.25 ₪ לחולצה.

מה גודל ההזמנה האופטימלי עבור החנות?

חשבון פשוט יראה שעבור 100 יחידות החנות מקבלת 5000 ₪.

עבור 120 יחידות החנות מקבלת $120\cdot 45=5400$ ₪ (ההנחה: $20\cdot 0.25=5$),

ועבור 200 יחידות - $200\cdot 25=5000$ ₪.

כלומר יש כמות שתניב לחנות את מקסימום הרווח.

כדי לחשב כמות זו אנו מתחילים בפונקציה שמעניינת את המוכר, והיא פונקציית הרווח.

נסמן:

n - מספר היחידות בהזמנה

p - מחיר כל יחידה. אזי פונקציית הרווח היא: $f=n\cdot p$

נחשב את p בהנחה ש: $n>100$: $p=[50-(n-100)\cdot 0.25]$

הסבר: n-100 הוא מס' היחידות הנוספות על 100 לפיהן המחיר יורד ב- 0.25 ₪.

המחיר התחילי הוא 50 ₪ ליחידה, ולכן:

$p=$ מחיר תחילי - הנחת גודל

$p=(50)-(n-100)\cdot 0.25$

ומכאן שפונקציית הרווח היא: $f=n\cdot p=n\cdot[50-(n-100)\cdot 0.25]$

$$f=50n-0.25n^2+25n$$

$$f=75n-0.25n^2$$

כמו שאנו רואים, זוהי פונקציה של פרבולת מקסימום $(a<0)$, ולכן אם מחפשים עליה נקודת מקסימום, נוכל למצוא זאת באמצעות הנגזרת:

$$f'=75-0.5n$$

$$0=75-0.5n$$

$$\boxed{n=150}$$

כלומר הזמנה בגודל 150 יח' תניב לחנות את הרווח המקסימלי.

<u>בנושא זה כדאי מאוד ליישם את מה שכבר למדנו, ולהוכיח כי התוצאה המתקבלת היא מקסימום או מינימום בעזרת הנגזרת השנייה.</u>

תזכורת למי ששכח: כאשר $f'(x_0)=0$, כלומר x_0 היא נקודת קיצון,

בודקים את הנגזרת השנייה:

אם $f''(x_0)>0$ זוהי נקודת מינימום.

אם $f''(x_0)<0$ זוהי נקודת מקסימום.

ניתן למצוא סוגים שונים של בעיות מקסימום ומינימום. <u>המשותף לכולם</u> הוא :

א. קיימת פונקציית מטרה שעליה אנו רוצים למצוא ערך מקסימום או מינימום.

ב. פרמטרים שונים בפונקציה יתקשרו ביניהם בעזרת מערכת אילוצים.

ג. הפתרון תמיד נמצא <u>לאחר</u> גזירה של הפונקציה והשוואה ל- 0 .

אלה יהיו גם השלבים שינחו אותנו כאסטרטגיית פתרון :
1. תחילה נציב את פונקציית המטרה – אותה אנו מחפשים כמקסימום או מינימום.
2. אם הפונקציה מורכבת ממספר נעלמים, נמצא פונקציית קשר ביניהם ונציב בפונקציית המטרה.
3. נגזור את הפונקציה שקיבלנו בסעיף 2, ונשווה ל- 0 .

<u>זכרו</u> : איננו מחפשים פתרון לפונקציה אלא רק מציאת <u>נקודות קיצון</u> עליה!

דוגמאות :

לח. מבין כל זוגות המספרים החיוביים שסכומם 8, מצאו את הזוג שמכפלת האחד בחזקה שלישית של השני היא המקסימלית.

פתרון :

משתנים : x - מספר אחד

y - מספר שני

פונקציית המטרה : $f(x,y) = x \cdot y^3$

פונקציית הקשר : $x + y = 8$

$x = 8 - y$

ועל ידי הצבה : $f(y) = (8-y) \cdot y^3 = 8y^3 - y^4$

$f'(y) = 24y^2 - 4y^3$

ובנקודת הקיצון (מחפשים מקסימום) : $24y^2 - 4y^3 = 0$

$4y^2(6-y) = 0$

הפתרון $y=0$ ייתן לנו תוצאת מינימום ולא מקסימום, לכן אינו מתאים לתרגיל זה.

$\underline{y = 6}$

ועל ידי הצבה : $x + 6 = 8$

$\underline{x = 2}$

על ידי נגזרת שנייה נוכיח כי אכן זוהי נקודת מקסימום :

$f''(y) = 48y - 12y^2$

$f''(6) = 48 \cdot 6 - 12 \cdot 36 < 0$

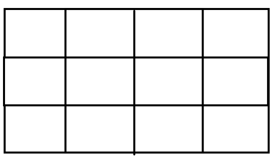
ולכן זוהי אכן נקודת מקסימום.

לט. רוצים לחסום מעבר באמצעות סבכה מתַיִל שאורכו 13 מטר. מה צריכים להיות מְמַדֵי הסבכה כדי שתכסה שטח מקסימלי אם נתון שהיא בנויה מ- 4 מוטות רוחב ו- 5 מוטות גובה ?

פתרון :

משתנים : x - רוחב הסבכה

y - גובה הסבכה


y

x

פונקציית המטרה : $f(x,y)=x\cdot y$

פונקציית הקשר : $4x+5y=13$

$$y=\frac{13-4x}{5}$$

הצבה בפונקציית המטרה : $f(x)=\frac{x(13-4x)}{5}$

$$f(x)=\frac{13x-4x^2}{5}$$

$$f'(x)=\frac{13-8x}{5}$$

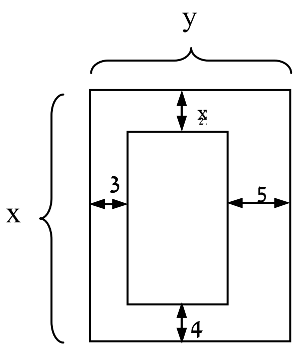
ובנקודת הקיצון : $13-8x=0$

$x=1.625$ [מטר]

מקסימום $\rightarrow$ $f''=-8<0$

ועל ידי הצבה : $y=\frac{13-4\cdot 1.625}{5}=1.3$ [מטר]

<u>תשובה</u> : רוחב הסבכה צריך להיות 1.625 מטרים, וגובהה - 1.3 מטרים.



מ. שטח עמוד מודפס הוא 324 סמ"ר. שולי העמוד מחולקים כפי הנראה בציור :
מה צריכים להיות מְמַדי הדף כדי ששטח העמוד כולו יהיה מינימלי ?

פתרון :

משתנים : x - אורך העמוד

y - רוחב העמוד

פונקציית המטרה : $f(x,y)=x\cdot y$

פונקציית הקשר (השטח המודפס) : $324=(x-8)(y-8)$

$$\frac{324}{x-8}=y-8$$

$$\frac{324}{x-8}+8=y=\frac{324+8x-64}{x-8}$$

$$y=\frac{260+8x}{x-8}$$

ועל ידי הצבה : $f(x)=\frac{x(260+8x)}{x-8}$

$$f(x)=\frac{260x+8x^2}{x-8}$$

$$f'(x)=\frac{(260+16x)(x-8)-(260x+8x^2)}{(x-8)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\cancel{260x}-2080+16x^2-128x-\cancel{260x}-8x^2}{(x-8)^2}$$

$$f'(x)=\frac{8x^2-128x-2080}{(x-8)^2}$$

ובנקודת הקיצון: $8x^2-128x-2080=0$

$$x^2-16x-260=0$$

$x_1=26 \quad x_2=-10$ לא מתאים

ועל ידי הצבה: $y=\frac{260+8\cdot 26}{26-8}=26$

ולפי נגזרת שנייה: $f''=16x-128=16\cdot 26-128>0$

כלומר זוהי נקודת מינימום.

<u>הסבר:</u> בנגזרת שנייה של פונקציית מנה – <u>אם רוצים רק לוודא מינ. או מקס.</u> - אין צורך לבצע את הנגזרת המלאה, אלא מספיקה נגזרת שנייה של מונה הנגזרת הראשונה!

הוכחה:

$$f=\frac{u}{v}$$

$$f'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

$$f''=\frac{(u'v-v'u)'\cdot v^2-2vv'\overset{=0}{(u'v-v'u)}}{v^2}$$

כמו שאנו רואים בנקודת הקיצון: $u'v-v'u=0$ (אחרת הנגזרת הראשונה לא מתאפסת). מכיוון שגם $v^2>0$ תמיד, סימן הנגזרת השנייה תלוי רק בנגזרת המונה של הנגזרת הראשונה!

<u>תשובה</u>: אורך העמוד = רוחבו = 26 ס"מ.

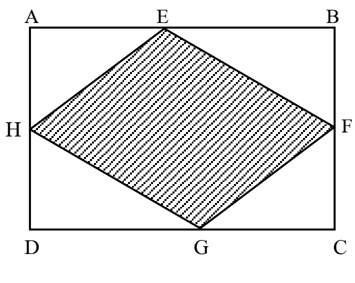
כאשר מחפשים שטחים של צורות שאינן מלבן או משולש, נוח לעתים דווקא לחסר את השטחים <u>שאינם</u> מבוקשים.

לדוגמה:

מא. חוסמים מקבילית בתוך מלבן ששטחו 400 סמ"ר. נתון:

$EB=FC=DG=AH=$ 5 ס"מ

מה צריכים להיות מְמַדי המלבן כדי ששטח המקבילית יהיה מינימלי?



פתרון:

כאן כדאי דווקא לחשב את שטחי המשולשים ישרי הזווית ולחסרם משטח המלבן.

כפי שאנו רואים, פונקציית המטרה היא: $f=s_{EFGH}$

כלומר: $f = s_{ABCD} - s_{EBF} - s_{FCG} - s_{HDG} - s_{AHE}$

קל לראות שמתקיים: $s_{EBF} = s_{HDG}$

$s_{FCG} = s_{AHE}$

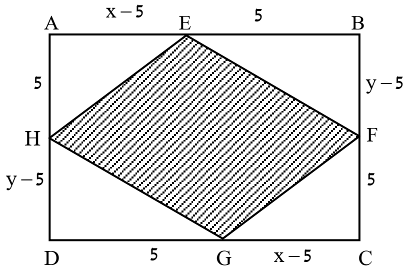
נגדיר: אורך המלבן - $AB = CD = x$

רוחב המלבן - $AD = BC = y$

ומכאן נקבל: $AE = GC = x - 5$

$HD = BF = y - 5$

עתה נעלה את כל הנתונים לשׂרטוט ונקבל:



$$s_{EBF} = s_{HDG} = \frac{5(x-5)}{2}$$

$$s_{FCG} = s_{AHE} = \frac{5(y-5)}{2}$$

ומהנתון: $s_{ABCD} = 400$ מקבלים את פונקציית המטרה:

$$f = 400 - 2 \cdot \frac{5(x-5)}{2} - 2 \cdot \frac{5(y-5)}{2}$$

$$f = 400 - 5x + 25 - 5y + 25$$

$$f = 450 - 5x - 5y$$

ופונקציית הקשר: $xy = 400$

$$y = \frac{400}{x}$$

ואחרי הצבה בפונקציית המטרה: $f = 450 - 5x - \frac{5 \cdot 400}{x}$

$$f' = -5 + \frac{2000}{x^2} = 0$$

$$\frac{2000}{x^2} = 5$$

$$x = \sqrt{400}$$

$\underline{20 = x}$ ס"מ

הצבה חוזרת בפונקציית הקשר: $20y = 400$

$\underline{20 = y}$ ס"מ

כדי להיווכח שאכן זהו מינימום: (לכל $x > 0$) $f'' = -\frac{2000}{x^4} \cdot 2x < 0$

ושטח המקבילית:

ראינו כי: $f = 450 - 5x - 5y$

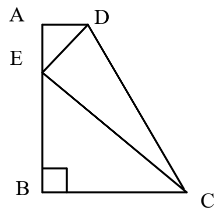
ולכן: $f = s_{EFGH} = 450 - 5 \cdot 20 - 5 \cdot 20 =$ <u>250</u> סמ"ר

בבעיות מקסימום ומינימום:
א. מציבים פונקציית מטרה.
ב. מציבים פונקציית קשר בין המשתנים.
ג. מבודדים משתנה ומציבים בפונקציית המטרה.
ד. גוזרים ומשווים ל- 0 .

בדיקת הבנה

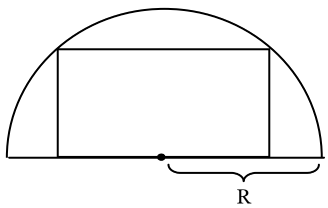
83. מצאו שני מספרים חיוביים שסכומם 5 ומכפלת ריבועו של אחד בחזקה השלישית של השני היא מקסימלית.

84. בטרפז ישר זווית ABCD נתון:
AB=8 ס"מ EB=EC ו- EA=AD (ראו ציור).
מה צריך להיות אורך הקטע EB כדי שהמשולש DEC יהיה:
א. בעל היקף מינימלי ?
ב. בעל שטח מקסימלי ?

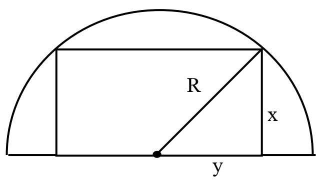


באופן דומה אנו עובדים עם פרמטרים כמו בדוגמה הבאה:

מב. על קוטרו של מעגל בעל רדיוס R
מונחת צלע אחת של מלבן. שני
הקדקודים האחרים נמצאים על המעגל.
מה צריכים להיות מְמַדי המלבן כדי ש:
א. ששטחו יהיה מקסימלי ?
ב. שהיקפו יהיה מקסימלי ?
ג. מהו השטח המקסימלי ומהו ההיקף המקסימלי ?



פתרון:
לפתרון בעיות במעגל כדאי לשרטט את הרדיוס
מהמרכז לקדקוד המצולע:
כמו שרואים בשרטוט, מתקבל משולש ישר זווית.
המשתנים: x - רוחב המלבן
2y - אורך המלבן



א. פונקציית המטרה היא: $s = x \cdot 2y$

נבנה נוסחת קשר: $x^2 + y^2 = R^2$ (לפי פיתגורס)

מפונקציית הקשר נקבל: $y^2 = R^2 - x^2$

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

ואחרי הצבה: $s = x \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2}$

הנגזרת היא רק לפי x . R הוא פרמטר ואיננו משתנה ולכן איננו נגזר. אליו יש להתייחס כמו אל מספר. כלומר: $s' = \frac{\Delta s}{\Delta x}$, והכוונה היא שהפונקציה נגזרת רק לפי x .

לכן לפי נגזרת מכפלה:
$$s' = 1 \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2} + 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{R^2 - x^2}} \cdot (-2x) = 0$$

$$4(R^2 - x^2) - 4x^2 = 0$$

$$4R^2 - 8x^2 = 0$$ (פונקציית מקסימום!)

$$2x^2 = R^2$$

$$x = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

$$y = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}} = \sqrt{\frac{R^2}{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

וּמְמַדי המלבן: $\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{2R}{\sqrt{2}}$

ב. פונקציית המטרה בסעיף זה היא: $H = 2(x + 2y)$

ומפונקציית הקשר שראינו: $y = \sqrt{R^2 - x^2}$

אחרי הצבה: $H = 2x + 4\sqrt{R^2 - x^2}$

$$H' = \frac{\Delta H}{\Delta x} = 2 + \frac{4}{2\sqrt{R^2 - x^2}} \cdot (-2x) = 0$$

$$4\sqrt{R^2 - x^2} - 8x = 0$$

$$\sqrt{R^2 - x^2} = 2x$$

$$R^2 - x^2 = 4x^2$$

$$R^2 = 5x^2$$

$$x = \frac{R}{\sqrt{5}}$$

$$y = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{5}} = \sqrt{\frac{4R^2}{5}} = \frac{2R}{\sqrt{5}}$$

הצבה של x ב- H''
תראה פונקציית מקסימום.
נסו זאת.

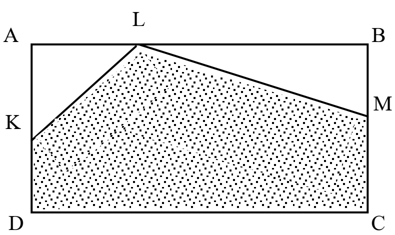
וּמְמַדי המלבן: $\frac{R}{\sqrt{5}}, \frac{4R}{\sqrt{5}}$

ג. השטח המקסימלי: $s = \frac{R}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2R}{\sqrt{2}} = R^2$

ההיקף המקסימלי: $H = 2(\frac{R}{\sqrt{5}} + \frac{4R}{\sqrt{5}}) = \frac{10R}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}R$

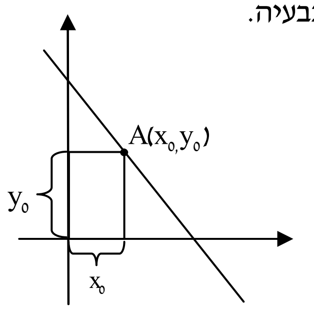
בדיקת הבנה

85. נתון מלבן ABCD שאורכו a ס"מ, ורוחבו 49 ס"מ.
מקצים את הקטעים: AK = CM = AL= x
מה צריך להיות ערכו של x כדי ששטח המחומש שיתקבל
יהיה מקסימלי? (ראו ציור).



לעתים ניתנת לנו פונקציית הקשר בעזרת פונקציה המוזכרת בבעיה.

מג. נתונה הפונקציה: $y=-3x+9$



דרך נקודה A שעל הפונקציה, העבירו מקבילים לצירים.

מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המלבן שנוצר יהיה מקסימלי?

פתרון:

מהכרת הפונקציות אנו מזהים שרוחב המלבן הוא שיעור x של הנקודה A, ואורכו הוא שיעור y.

לכן פונקציית המטרה היא: $s=x_0\cdot y_0$

פונקציית הקשר ניתנת בעזרת הפונקציה של <u>הישר עצמו</u>:

$y_0=-3x_0+9$

ולאחר הצבה: $s=x_0(-3x_0+9)$

ומכאן: $s=-3x_0^{\,2}+9x_0$ (פונקציית מקסימום)

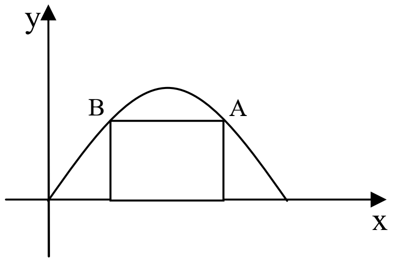
$s'=-6x_0+9=0$

$x_0=1.5$

מציאת y_0: $y_0=-3\cdot1.5+9=4.5$

והנקודה A: $(1.5,4.5)$

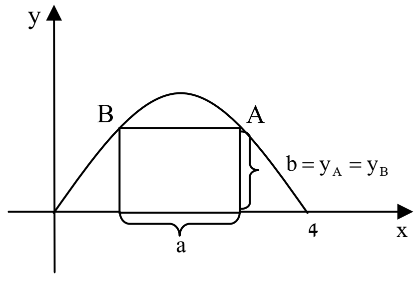
מד. חוסמים מלבן בין הפונקציה: $y=-x^2+4x$



לבין ציר ה- x כפי שנראה בציור.

מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?

פתרון:



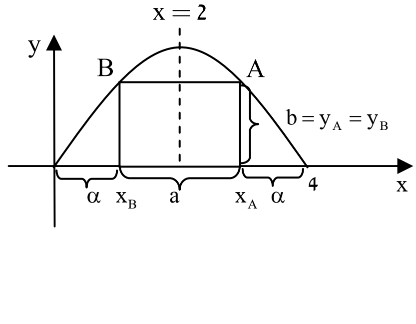
נגדיר משתנים: a - אורך המלבן

b - רוחב המלבן

קל לראות כי $b\ =\ y_A\ =\ y_B$, כלומר

שיעור y של הנקודות A,B הוא רוחב המלבן.

קשה יותר למצוא את a. הסיבה היא שהפונקציה איננה סימטרית סביב ציר y, ולכן שיעור x של הנקודה A איננו אורך המלבן. לעזרתנו עומדת העובדה שציר הסימטריה הוא ב- $x=2$. זה מבטיח שהמרחק מ- x_A לנקודת החיתוך הימנית של הפונקציה עם ציר x (α) שווה באורכו למרחק של x_B מנקודת החיתוך השמאלית של הפונקציה עם ציר x (α).



את נקודות החיתוך קל למצוא : $y=0=-x^2+4x$

$x_1=0 \quad x_2=4$

מכיון ש- $\alpha = x_B$, מתקבל : $a=4-x_B-x_B$

$a=4-2x_B$

ופונקציית המטרה : $s=a\cdot b$

$s=(4-2x_B)\cdot(-x_B{}^2+4x_B)$

פתיחת סוגריים וסידור : $s=-4x_B{}^2+16x_B+2x_B{}^3-8x_B{}^2$

$s=2x_B{}^3-12x_B{}^2+16x_B$

וכמו תמיד : $s'=6x_B{}^2-24x_B+16=0$

והפתרון : $x_1=0.85 \quad x_2=3.15$

$s''=12x-24$

$s''(3.15)>0$ לא מתאים - מינימום

$s''(0.85)<0$ נקודת מקסימום

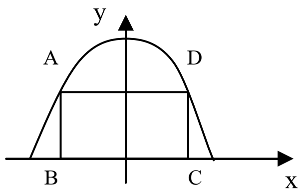
$x_B=0.85$

שיעור y : $y=2.68$

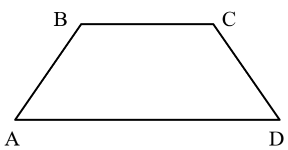
שיעורי נקודה A : $(3.15,2.68)$

<u>בדיקת הבנה</u>

86. נתונה הפרבולה : $y=2x^2$. מצאו את הנקודות על הפרבולה שמרחקן מהנקודה $(0,2)$ הוא מינימלי.

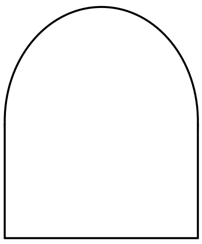


87. המלבן $ABCD$ חסום בתוך הפרבולה : $y=-x^2+48$
הצלע BC מונחת על ציר ה- x (ראו ציור).
א. מהן שיעורי קדקודי המלבן בעל השטח המקסימלי ?
ב. מה השטח המקסימלי ?

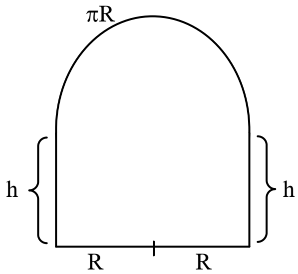


88. בטרפז שווה שוקיים הבסיס הקטן שווה באורכו לשוק, ושניהם שווים 10 ס"מ.
א. מה צריך להיות אורך הבסיס הגדול כדי ששטח הטרפז יהיה מקסימלי ?
ב. מהו השטח המקסימלי ?

ניתן, כמובן, לשלב בין בעיות מקסימום ומינימום לבעיות מילוליות אחרות, כמו קנייה ומכירה או תנועה. במקרים אלו אנו בונים את פונקציית המטרה בדיוק לפי הדרך שלמדנו בפתרון בעיות מילוליות, אלא שלאחר בניית הפונקציה איננו מחפשים פתרון אלא נקודות מקסימום או מינימום.
למעשה, פתחתי את הנושא בבעיית קנייה ומכירה ובניתוח שלה בשל היותה מעשית יותר.
נבחן עוד דוגמה לבעיית קנייה ומכירה.



מה. רוצים לגדר שטח של 400 מ"ר כך שקצהו
האחד יהיה מלבני, והאחר מעוגל (כמתואר בציור).
מחיר גידור צלע ישרה הוא 100 ₪ למטר ,
ומחיר גידור צלע מעוגלת הוא 150 ₪ למטר.
א. מה אורך הגדר החסכונית ביותר לבנייה ?
ב. מה מחירה ?



פתרון :
נשרטט משתנים על גבי הציור :
כדי למצוא את פונקציית המטרה
נבנה את משוואת הקנייה :

	גדר ישרה	גדר מעוגלת
מחיר יחידה	100	150
כמות	$2R+2h$	πR
סה"כ	$100(2R+2h)$	$150\cdot\pi R$

פונקציית המטרה : $M = 150\cdot\pi R + 100(2R+2h)$

פונקציית הקשר נלמדת מנתוני השאלה : $s = 400$

כלומר : $\frac{\pi R^2}{2} + h\cdot 2R = 400$

$$h = \frac{800-\pi R^2}{4R}$$

אחרי הצבה : $M = 150\pi R + 100\left(2R + \frac{800-\pi R^2}{2R}\right)$

$$M = 150\pi R + 200R + \frac{40000}{R} - 50\pi R$$

$$M = 514.16R + \frac{40000}{R}$$

$$M' = 514.16 - \frac{40000}{R^2} = 0$$

$$R^2 = \frac{40000}{514.16} = 77.8$$

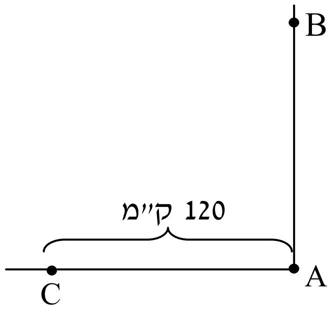
$R = 8.82$ מטר

$h = \frac{800-\pi\cdot 77.8}{4\cdot 8.82} = 15.75$ מטר

כדי לוודא שזהו מחיר מינימום : לכל $R>0$! $M'' = \frac{40000}{R^4}\cdot 2R > 0$

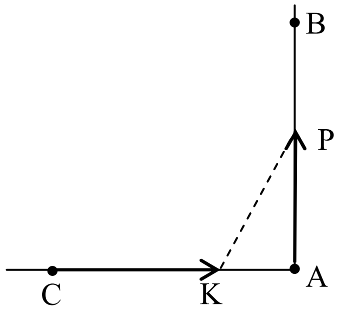
לסיום פרק זה נביא דוגמה לבעיית תנועה בשילוב עם בעיית מינימום מקסימום.

מו. סירה שטה באגם מנקודה A לנקודה B
במהירות קבועה של 20 קמ"ש.
באותו זמן יוצאת סירה אחרת מהנקודה C
הנמצאת במרחק 120 ק"מ מ- A, לכיוון A ,
ושטה במהירות של 30 קמ"ש.



א. מה יהיה המרחק המינימלי בין הסירות ?
ב. כמה זמן לאחר צאתן לדרך יהיה המרחק
ביניהן מינימלי ?

פתרון :



כדי לפתור תרגילים מסוג זה כדאי קודם
כול לתאר את המצב המבוקש.
לשם כך נניח נקודות K,P שאליהן
הגיעו הסירות מ- A ומ- C , בהתאמה.
פונקציית המטרה היא, אם כן, המרחק KP ,
ולפי משפט פיתגורס : $d^2 = (KA)^2 + (AP)^2$
מתוך הידוע לנו על בעיות תנועה :

	סירה מ-A	סירה מ-C
מהירות	20	30
זמן	t	t
דרך	20t	30t

ולכן : $CK = 30t \quad , \quad AP = 20t$

אולם אנו מחפשים את KA ולכן : $KA = 120 - CK = 120 - 30t$

אחרי הצבה בפונקציית המטרה : $d^2 = (120 - 30t)^2 + (20t)^2$

ניתן, כמובן, להתייחס לפונקציה זו כפונקציית שורש או להשתמש בכלל האומר :

במקום שבו d מקבלת מינימום, חייבת גם d^2 לקבל מינימום.
(הערה : אם משתמשים בכלל זה במהלך פתרון, חובה להביא את הנימוק הנ"ל.)

לכן אין חובה להוציא שורש, וניתן להמשיך עם הפונקציה d^2 .

(פונקציית מינימום) $d^2 = 14400 - 7200t + 900t^2 + 400t^2$

$(d^2)' = 2600t - 7200 = 0$

$2.77 = t$ שעות

התשובה לסעיף ב' : אחרי 2.77 שעות, כלומר לאחר שעתיים וארבעים ושש דקות יהיה המרחק ביניהן מינימלי.

והתשובה ל-א' : $d^2 = 14400 - 7200 \cdot 2.76 + 900 \cdot 2.76^2 + 400 \cdot 2.76^2$

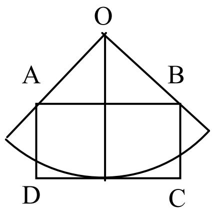
$d^2 \approx 4430.8$

$d \approx 66.6$

המרחק המינימלי ביניהן הוא 66.6 ק"מ.

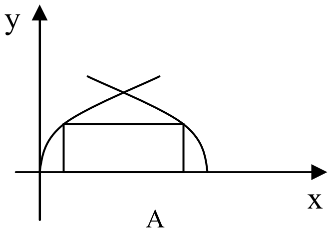
תרגול עצמי

89. נתונה גזרה של רבע עיגול שמרכזו O , ורדיוסו 10 ס"מ.
בונים מלבן $ABCD$ כך שצלע CD משיקה לרבע המעגל,
והקדקודים A ו- B נמצאים על הרדיוסים התוחמים את הגזרה.
מבין כל האלכסונים של המלבנים הנוצרים באופן זה,
מהו אורך האלכסון הקצר ביותר ?

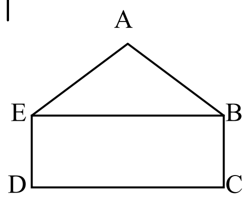


90. נתונה הפונקציה: $y = \frac{4}{x}$. A היא נקודה על גרף הפונקציה ברביע הראשון. דרך נקודה A מעבירים משיק לגרף הפונקציה החותך את הצירים. מה צריכים להיות שיעורי נקודה A כדי שאורך היתר של המשולש שיוצר המשיק עם הצירים יהיה מינימלי ?

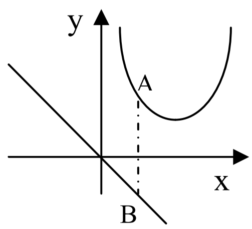
91. בציור שלפניכם מתוארים הגרפים של הפונקציות:
$f(x) = \sqrt{2x}$ ו- $g(x) = \sqrt{36 - 4x}$
מלבן חסום בין הגרפים של הפונקציות לבין ציר ה- x.
מהו השטח הגדול ביותר האפשרי למלבן החסום באופן זה ?



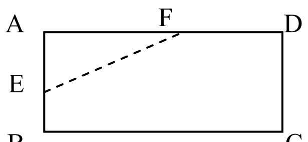
92. $ABCDE$ הוא מחומש המורכב ממשולש ABE
וממלבן $EBCD$. נתון:
$CB = 1$ס"מ ו- $AB = AE = 2$ס"מ
מצאו את שטח המחומש המקסימלי.



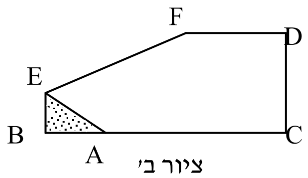
93. נתונה ה פונקציה: $f(x) = x + \frac{8}{x}$ בתחום: $x>0$,
ונתון הישר: $y = -x$. נקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$,
ונקודה B נמצאת על הישר הנתון כך שהקטע AB
מקביל לציר ה- y. מה צריך להיות שיעור ה- x של נקודה A
כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי ? (ראו ציור).



94. נתון דף ניר בצורת מלבן $ABCD$. אורך הצלע AB הוא
30 ס"מ. אורך הצלע AD הוא 40 ס"מ. בוחרים נקודות E ו- F
על הצלעות AB ו- AD בהתאמה כך שכאשר מקפלים את
הנייר לאורך הקו המקווקו EF (ראו ציור א'), הקדקוד A
יהיה מונח על הצלע BC (ראו ציור ב').
מבין כל המשולשים ABC הנוצרים באופן זה, מצאו
את השטח המקסימלי שיכול להתקבל למשולש ABE.

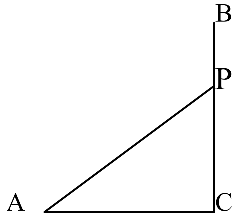


ציור א'



ציור ב'

95. ג'יפ יוצא מנקודה A בחולות וצריך להגיע לנקודה B
הנמצאת על הכביש הישר BC. מרחק הנקודה A מהכביש
הוא 6 ק"מ = AC , ומרחק הנקודה C מהנקודה B
הוא 10 ק"מ = BC (ראו ציור). מהירות הג'יפ בחולות היא
v קמ"ש, ומהירותו על הכביש היא 2.6 v קמ"ש.
נקודה P נמצאת על הכביש BC.
באיזה מרחק מנקודה C צריכה להימצא נקודה P כדי שזמן הנסיעה של הג'יפ במסלול APB יהיה הקצר ביותר ?



נגזרת של פונקציה סתומה

פונקציה סתומה היא פונקציה שבה אין אפשרות לבודד את המשתנה התלוי.

לדוגמה: $y^2 + xy - 3x^3 = 5$

כדי להבין איך ניתן בכל זאת לגזור פונקציות שאי אפשר לבודד בהן את y , עלינו לחזור ולנתח את הגזירה של פונקציות רגילות (שאינן סתומות).

כבר ראינו שעבור: $y = 5x + 1$

$y' = 5$

ועבור: $y = 2x^3 - 5x$

$y' = 6x^2 - 5$

נבחר פונקציה: $y = x^3 - 3x^2 + 5$ וננסה את הגזירות הבאות:

א. מהי הנגזרת: $(3y)'$?

כדי לקבל את הנגזרת של $(3y)$ עלינו לבצע שני מהלכים:

I לגזור לפי y: $\frac{d(3y)}{dy} = 3$

II לגזור את y לפי x: $\frac{dy}{dx} = y'$

אבל אנו מעוניינים בנגזרת של $(3y)$ לפי x, כלומר: $\frac{d(3y)}{dx}$

ולכן: $\frac{d(3y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d(3y)}{dx}$

אנו רואים שיש צורך להכפיל את הנגזרות,

ומכאן: $\frac{d(3y)}{dx} = (3y)' = 3 \cdot y'$

בדיקה:

נציב את $y = x^3 - 3x^2 + 5$ לפני הגזירה נקבל: $3y = 3x^3 - 9x^2 + 15$

$(3y)' = (3x^3 - 9x^2 + 15)' = \underline{9x^2 - 18x}$

נציב את $y = x^3 - 3x^2 + 5$ אחרי הגזירה נקבל:

$(3y)' = 3 \cdot y' = 3 \cdot (3x^2 - 6x) = \underline{9x^2 - 18x}$

אנו רואים שמתקבל אותו ביטוי.

ב. מהי הנגזרת $(xy)'$?

באותו אופן ולפי נגזרת מכפלה: $\frac{d(xy)}{dx} = 1 \cdot y + x \cdot y'$

בדיקה:

הצבה לפני גזירה: $x \cdot y = x \cdot (x^3 - 3x^2 + 5)$

$$xy = x^4 - 3x^3 + 5x$$

$$(xy)' = (x^4 - 3x^3 + 5x)' = \underline{4x^3 - 9x^2 + 5}$$

גזירה ואח"כ הצבה:

$$\frac{d(xy)}{dx} = y + x \cdot y' = (x^3 - 3x^2 + 5) + x(3x^2 - 6x) =$$

$$= x^3 - 3x^2 + 5 + 3x^3 - 6x^2 = \underline{4x^3 - 9x^2 + 5}$$

שוב אנו רואים שקיבלנו את אותה נגזרת.

ג. ואם נרצה למצוא את $(y^2)'$?

$$\frac{dy^2}{dx} = 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 2yy'$$

אתם מוזמנים לבדוק ולקבל.

עתה נחזור לפונקציה שבה פתחתי נושא זה.

מז. מה הנגזרת של: $y^2 + xy - 3x^3 = 5$?

פתרון:

$$2yy' + 1 \cdot y + x \cdot y' - 9x^2 = 0$$

נבודד את y': $2yy' + xy' = 9x^2 - y$

$$y'(2y + x) = 9x^2 - y$$

$$y' = \frac{9x^2 - y}{2y + x}$$

דוגמה נוספת:

מח. מה הנגזרת של: $y^2 + \frac{1}{2xy} = x^2 + 5$?

פתרון:

נגזרת פנימית

נגזרת הפונקציה: $2yy' - \frac{1}{(2xy)^2} \cdot (2y + 2xy') = 2x$

נכפול ב- $(2xy)^2$: $4x^2y^2 \cdot 2yy' - 2y - 2xy' = 2x \cdot 4x^2y^2$

$$8x^2y^3y' - 2y - 2xy' = 8x^3y^2$$

$$y'(8x^2y^3 - 2x) = 8x^3y^2 + 2y$$

$$y' = \frac{8x^3y^2 + 2y}{8x^2y^3 - 2x}$$

כך גם לגבי שורשים.

מט. מהי הנגזרת של: $x^2+3xy-y^2=\sqrt{2xy+4x}$?

פתרון:

$$2x+3y+3xy'-2yy'=\frac{1}{2\sqrt{2xy+4x}}\cdot(2y+2xy'+4)$$

$$(2x+3y)\cdot 2\sqrt{2xy+4x}+(3xy'-2yy')\cdot 2\sqrt{2xy+4x}=2y+2xy'+4$$

$$(3xy'-2yy')\cdot 2\sqrt{2xy+4x}-2xy'=2y+4-(2x+3y)\cdot 2\sqrt{2xy+4x}$$

$$y'\left[2(3x-2y)\sqrt{2xy+4x}-2x\right]=2y+4-2(2x+3y)\sqrt{2xy+4x}$$

$$y'=\frac{2y+4-2(2x+3y)\sqrt{2xy+4x}}{2(3x-2y)\sqrt{2xy+4x}-2x}$$

הדוגמה האחרונה באה להראות שגם בפונקציות מורכבות ניתן למצוא נגזרת.

<u>בדיקת הבנה</u>

96. גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $2xy+y^3=x^2-\frac{1}{y}$

ב. $4x^2y^3-3xy^3=\sqrt{y^2-xy}$

מכאן והלאה ניתן לעשות שימוש בנגזרת פונקציה סתומה כמו בכל נגזרת אחרת.

דוגמאות:

נ. מה משוואת המשיק לפונקציה: $x^2+3xy-y^2=-9$ בנקודה $(1,5)$?

פתרון:

תחילה נמצא את הנגזרת:

$$2x+3y+3xy'-2yy'=0$$

$$3xy'-2yy'=-2x-3y$$

$$y'(3x-2y)=-2x-3y$$

$$y'=\frac{-2x-3y}{3x-2y}$$

ובהצבת הנקודה: $$y'=\frac{-2-15}{3-10}=\frac{17}{7}$$

והמשוואה: $$y-5=\frac{17}{7}(x-1)$$

$$\underline{y=\frac{17}{7}x+\frac{18}{7}}$$

נא. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה : $2\sqrt{x}-5\sqrt{y}=-23$ בנקודה $(1,25)$.

פתרון :

גזירה : $\frac{2}{2\sqrt{x}}-\frac{5y'}{2\sqrt{y}}=0$

$4\sqrt{y}-10\sqrt{x}y'=0$

$y'=\frac{4\sqrt{y}}{10\sqrt{x}}$

ובהצבת $(1,25)$: $y'=\frac{4\cdot 5}{10\cdot 1}=2$

והמשוואה : $y-25=2(x-1)$

$\underline{y=2x+23}$

כך גם כאשר נתון השיפוע.

נב. מה משוואת המשיק לפונקציה : $3x^2-4xy+3y^2=7$ ברביע הראשון אם נתון ששיפועו $\frac{1}{4}$?

פתרון :

גזירה : $6x-4y-4xy'+6yy'=0$

$y'(6y-4x)=4y-6x$

$y'=\frac{4y-6x}{6y-4x}=\frac{1}{4}$

$16y-24x=6y-4x$

$10y=20x$

$y=2x$

הצבה בפונקציה : $3x^2-4x\cdot 2x+3\cdot(2x)^2=7$

$3x^2-8x^2+12x^2=7$

$7x^2=7$

$x=\pm 1$

אבל אנו מחפשים את נקודת ההשקה ברביע הראשון, לכן :

$x=1$

$y=2$

ומשוואת המשיק : $y-2=\frac{1}{4}(x-1)$

$\underline{y=\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}}$

תרגול עצמי

97. מצאו את משוואות המשיקים לפונקציות הבאות העוברים דרך הנקודה הנתונה משמאל לפונקציה.

א. $x^2+3xy-y^2=-9$ (1,2)

ב. $2x^3-3x^2y^2+y=3$ (2,-1)

ג. $2\sqrt{x}-3\sqrt{y}=-5$ (4,9)

98. מצאו את משוואות המשיקים לפונקציות הבאות לפי שיפועיהם הנתונים משמאל לפונקציה.

א. $x^2-5xy+y^2=105$ $m=2$

ב. $2x^2-4xy+8y^2=42$ $m=-1$

ג. $-x^2+6xy+4y^2=-624$ $m=\frac{1}{2}$

חשבון אינטגרלי

מציאת פונקציה קדימה

כבר ראינו שכאשר אנו מקבלים פונקציה כלשהי, קל למצוא את פונקציית השיפועים שלה בעזרת הנגזרת.

נשאלת השאלה: האם גם בעזרת פונקציית שיפועים נתונה נוכל למצוא את פונקציית המקור שאותה גזרו?

או בכתיבה מתמטית: האם בעזרת $f'(x)$ ניתן למצוא את הפונקציה הקדומה $F(x)$?

על מנת לענות על שאלה זו עלינו ללמוד תחילה כיצד לבצע פעולה הפוכה לנגזרת.

פעולה זו נקראת אינטגרל, וסימונו: $\int$ (s ארוכה)

נתחיל בפונקציות פשוטות.

איזו פונקציה היה עלינו לגזור כדי לקבל $y' = 2x$? התשובה היא כמובן פונקציה שמורכבת מ- x^2.

בכתיבה פורמלית יותר: אם $y' = 2x$, הפעולה ההפוכה היא: $y = \int 2x = x^2 + c$.

(את המשמעות של c כקבוע נבין בהמשך. כרגע פשוט נוסיף אותו.)

אם יש לנו ספק, פשוט נגזור את y. קל לראות שאכן $y' = (x^2 + c)' = 2x$ ואכן חזרנו לנתון.

ומה במקרה של $y' = 3x^2$? $y = \int 3x^2 = x^3 + c$

בשני המקרים אנו רואים שהמקדמים בנגזרת (3 ו-2) "נעלמו" באינטגרל כי בעת הגזירה החזקה עוברת להיות מקדם!

ואינטגרל של קבוע k ? $\int k = kx + c$

ומה אם נמצא $y' = x$?

כאן יהיה עלינו לחלק במקדם המתאים: $y = \int x = \frac{x^2}{2} + c$

וכאשר נגזור את y, נקבל: $y' = \frac{2x}{2} = x$

וזה למעשה הביטוי שפתחנו בו.

ומה באשר ל- $y' = x^2$?

גם כאן יש לחלק במקדם המתאים: $y = \int x^2 = \frac{x^3}{3} + c$

עתה אנו יכולים ליצור את נוסחת האינטגרל המִיָּדִי:

$$\boxed{\int (x^n)dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c}$$

כלומר:

$$\int (x^3)dx = \frac{x^4}{4} + c$$

$$\int (x^7)dx = \frac{x^8}{8} + c$$

וכן הלאה.

באותו אופן : $\int\left(\frac{1}{x^2}\right)dx=\int(x^{-2})dx=\frac{x^{-1}}{-1}+c=-\frac{1}{x}+c$

כלומר : $\int\left(\frac{1}{x^2}\right)dx=-\frac{1}{x}+c$

כך גם : $\int\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx=\int(\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2})dx=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{2\cdot\frac{1}{2}}+c=\sqrt{x}+c$

כלומר : $\int\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx=\sqrt{x}+c$

כפי שאנו רואים, זוהי בדיוק פעולה הפוכה לנגזרת!

"חדי העין" כבר שמו לב, בוודאי, שבדוגמאות האחרונות הוספנו את הביטוי dx בכיתוב האינטגרל.

את המשמעות המדויקת יותר נראה בהמשך. כרגע די לנו אם נזכור שכמו שהסימון : $y'=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}$

מבהיר שהגזירה היא לפי המשתנה x, כך גם הביטוי : $\int f(x)dx$ מבהיר שהאינטגרציה היא לפי

המשתנה x, ומעתה בכל פעולת אינטגרל נוסיף את משתנה האינטגרציה.

נוסיף עוד שני כללים לפעולה זו :

1. אינטגרל של סכום = סכום האינטגרלים.

2. אינטגרל של מספר · פונקציה = מספר · אינטגרל הפונקציה, כלומר :

$$\int c\cdot f(x)dx=c\cdot\int f(x)dx$$

כללים אלה מאוד אינטואיטיביים מאחר שהם זהים לכללי הנגזרת.

(שאר הכללים שלמדנו בנגזרת, כמו : פונקציות מכפלה, מנה ומורכבות, לא נלמד באינטגרל מכיוון שפעולות אלה מורכבות מאוד, ואינן נכללות בחומר הלימוד. במקרה ש"ניתקל" באחת מהן, נלמד איך להתמודד אִתה באופן ספציפי.)

דוגמאות : $\int(3x^2+4x-5)dx=3\cdot\frac{x^3}{3}+4\cdot\frac{x^2}{2}-5x+c=\underline{x^3+2x^2-5x+c}$

$$\int(\frac{3}{x^2}+\frac{2}{2\sqrt{x}}-4x+1)dx=-\frac{3}{x}+2\sqrt{x}-\frac{4x^2}{2}+x+c=\underline{-\frac{3}{x}+2\sqrt{x}-2x^2+x+c}$$

3. כלל נוסף חשוב הוא שאינטגרל של פונקציה שבה ל- x יש מקדם הוא : $\frac{\text{האינטגרל של הפונקציה}}{\text{המקדם של } x}$

או בכתיב מתמטי : $\int f(ax+b)dx=\frac{F(ax+b)}{a}+c$ (כאשר $F'=f$)

דוגמה : $\int(6x+1)^2dx=\frac{(6x+1)^3}{3\cdot6}+c$

ה- 6 במכנה הוא המקדם של x, ולכן על האינטגרל שקיבלנו להיות מחולק בו. אם נבצע גזירה של התוצאה, נקבל :

$$\left[\frac{(6x+1)^3}{3\cdot6}+c\right]'=\frac{3\cdot(6x+1)^2\cdot\overbrace{6}^{\boxed{\text{נגזרת פנימית}}}}{3\cdot6}=(6x+1)^2$$

וזהו אכן האינטגרל שפתחנו בו.

בפונקציות סבוכות עם שורשים ושברים כדאי לעבור לכתיב חזקות ולהשתמש בכלל הרגיל, למשל :

$$\int\left(\sqrt{2x+5}-\frac{1}{(2x+1)^3}\right)dx=\int\left[(2x+5)^{\frac{1}{2}}-(2x+1)^{-3}\right]dx=\frac{(2x+5)^{1\frac{1}{2}}}{1\frac{1}{2}\cdot 2}-\frac{(2x+1)^{-2}}{-2\cdot 2}+c=$$

$$=\frac{\sqrt{(2x+5)^3}}{3}+\frac{1}{4(2x+1)^2}+c$$

<u>שימו לב :</u>

1. כל עוד אין מבצעים אינטגרציה, סימן ה : $\int$ נשאר!
2. המעבר לכתיב חזקות הוא לפי חוקי החזקות, והאינטגרל הוא לפי הכלל : $\int x^n=\frac{x^{n+1}}{n+1}$
3. גם כאן השתמשנו בכלל מס׳ 3 של חילוק במקדם של x !

<u>בדיקת הבנה</u>

99. חשבו את האינטגרלים הבאים :

א. $\int(3x^5+2x^2-1)dx$

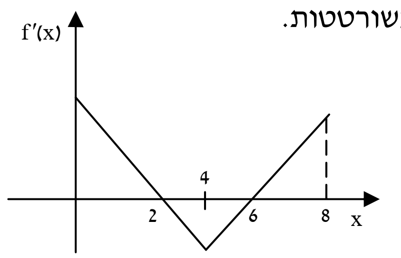
ב. $\int[2x^4(2-x)^2]dx$

ג. $\int\sqrt{x^2-6x+9}dx$

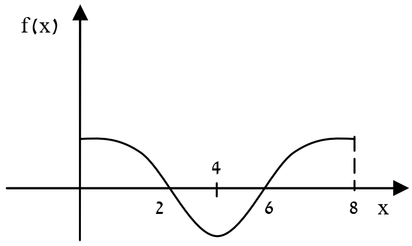
עתה נמשיך לשאלה שבה פתחנו : האם בעזרת פונקציית הנגזרת נוכל למצוא את הפונקציה הקדומה ?
(קדומה מלשון קדם, כלומר הפונקציה שהייתה לפני הגזירה, פונקציית המקור).

הבה נבחן מספר דוגמאות. נתחיל בדוגמאות של פונקציות משורטטות.

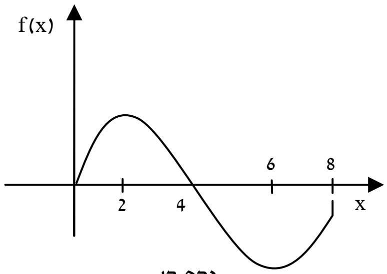
נג. נתון גרף נגזרת הפונקציה הבאה :



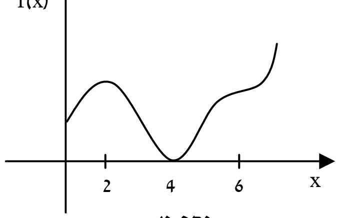
מי מבין הגרפים הבאים יכול להיות הגרף של $f(x)$?



<u>גרף א׳</u>



<u>גרף ב׳</u>



<u>גרף ג׳</u>

פתרון :

כדי לענות על שאלה זו יש לנתח את הגרף הנתון : $f'(x)$

מתוך הנתון אנו למדים :

עבור $0<x<2$: $f'(x)>0$

עבור $2<x<6$: $f'(x)<0$

עבור $6<x<8$: $f'(x)>0$

ונתון : $f'(2)=f'(6)=0$

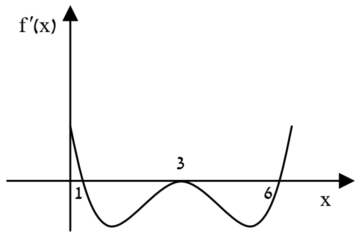
עתה נבחן מי אינו מתאים.

בגרף א' אנו מוצאים ש- $f'(2)\neq 0$, וזה מספיק כדי לשלול אותו.

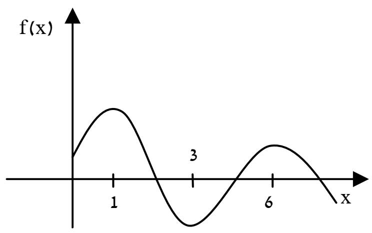
בגרף ג' אנו מוצאים שעבור $4<x<6$: $f'(x)>0$, ושוב זה מספיק כדי לשלול גרף זה.

נותר לבחון את גרף ב' ולראות שהוא אכן מקיים את כל הנתונים, ולכן גרף זה הוא המתאים מבין השלושה.

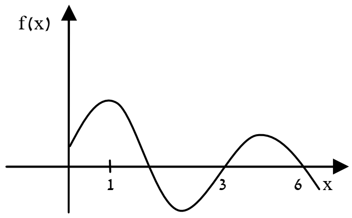
נד. נתון הגרף של $f'(x)$ הבא :



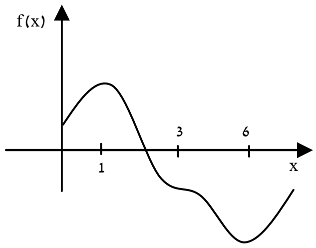
מי מבין הגרפים הבאים יכול להיות הגרף של $f(x)$?



גרף א'



גרף ב'



גרף ג'

פתרון :

גם כאן כדאי לכתוב את הנתונים באופן מפורש :

עבור $0<x<1$: $f'(x)>0$

עבור $1<x<3$: $f'(x)<0$

עבור $3<x<6$: $f'(x)<0$

עבור $x>6$: $f'(x)>0$

נתון : $f'(1)=f'(3)=f'(6)=0$

בגרף א' : עבור $3<x<6$: $f'(x)>0$, ולכן גרף זה אינו מתאים.

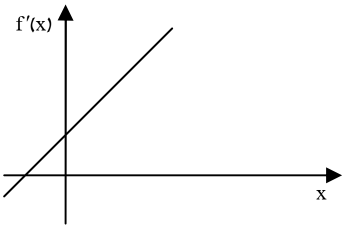
בגרף ב' : עבור $x=3$: $f'(x)>0$, לכן גם אינו מתאים.

גרף ג' מקיים את כל הנתונים (בדקו), ולכן הוא יכול להיות הפונקציה $f(x)$.

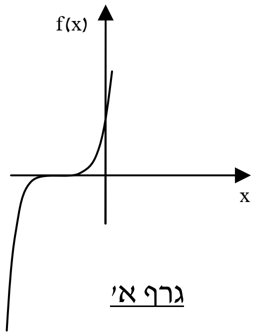
<u>הערה</u> : כבר ראינו (כשחקרנו פונקציות) שניתן לבנות גרף מתוך נתונים.

בדיקת הבנה

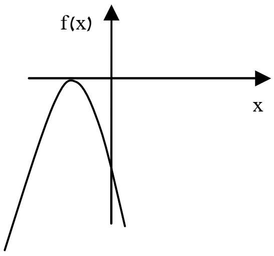
100. נתון גרף הפונקציה : $f'(x)$



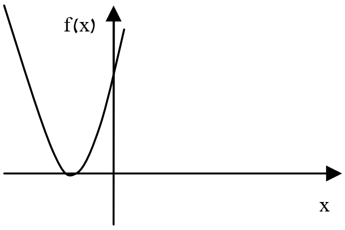
אילו מהגרפים הבאים מייצג את $f(x)$?



גרף א'



גרף ב'



גרף ג'

101. שרטטו את הסקיצה (תיאור גרפי) של $f(x)$ בהתבסס על הנתונים הבאים :

$f'(x) > 0 \qquad x < -3$

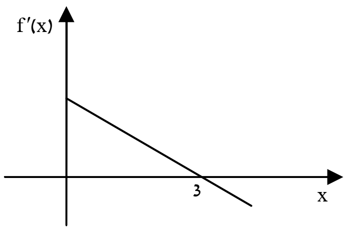
$f'(x) < 0 \qquad -3 < x < 2$

$f'(x) > 0 \qquad x > 2$

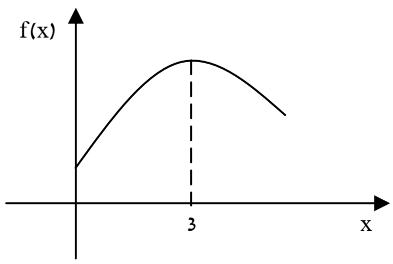
$f'(-3) = f'(2) = 0$

נבחן עוד דוגמה אחת :

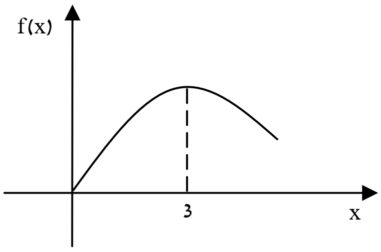
נתון הגרף :



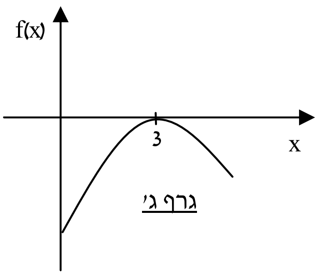
מי מבין הגרפים הבאים יכול להיות הגרף של $f(x)$?



גרף א'



גרף ב'



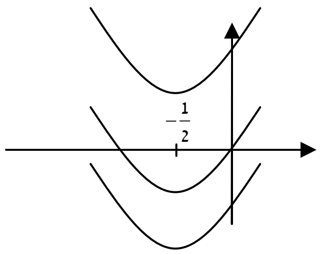
גרף ג'

בחינה של גרפים אלה מראה שכָל אחד מהם יכול להיות גרף הפונקציה $f(x)$. כלומר אנו מוצאים שבעזרת הנגזרת מתקבלת משפחה של פונקציות שיכולה להתאים לפונקציה הקדומה, ואין לנו כלי לבחון מי מהן היא הנכונה.

באותו אופן בדיוק אם נתונה לנו פונקציית הנגזרת: $y' = 2x + 1$

אנו יודעים ש: $y = \int (2x+1)dx = x^2 + x + c$

וזוהי כמובן משפחה של פונקציות. חלקן מתוארות בשִׂרטוט:



כל הפונקציות במשפחה זו יקבילו ביניהן, וההבדל ביניהן יהיה רק בנקודת החיתוך עם ציר y.

זו בדיוק המשמעות של c בפונקציה. את מיקומה המוחלט של הפונקציה לא נוכל לדעת רק בעזרת הנגזרת כי הנגזרת של כל משפחת פונקציות זו זהה:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 + x + 1 \\ y = x^2 + x - 5 \\ y = x^2 + x \end{array}\right\} \Rightarrow y' = 2x + 1$$

לכן כאשר פונקציה עוברת אינטגרציה, היא מקבלת תוספת של c - מספר קבוע.
כדי לקבל פונקציה קדומה מדויקת עלינו לקבל מידע על אחת הנקודות דרכה היא עוברת. זה כבר יספיק לנו על מנת לזהות את הפונקציה הקדומה המדויקת.
לעִתים נקבל מידע מפורש על נקודה, ולעִתים רק רמז.
דוגמאות:

נה. מהי הפונקציה: $f(x)$ אם נתון שהיא מקיימת: $f'(x) = 2x + 1$, והיא עוברת דרך הנקודה $(3,7)$?

פתרון:

תחילה נמצא את הפונקציה: $f(x) = \int (2x+1)dx = x^2 + x + c$

אם היא עוברת בנקודה $(3,7)$, אז היא מקיימת: $7 = 3^2 + 3 + c$

$c = -5$

ולכן: $\underline{f(x) = x^2 + x - 5}$

נו. מצאו את $f(4)$ אם נתון: $f'(x) = 3x^2 + 5$ ו- $f(0) = 2$

פתרון:

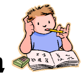
תחילה נמצא את הפונקציה: $f(x) = \int (3x^2+5)dx = x^3 + 5x + c$

הצבה של $f(0) = 2$: $2 = 0^3 + 5 \cdot 0 + c$

$c = 2$

והפונקציה: $f(x)=x^3+5x+2$

ולכן: $f(4)=4^3+5\cdot 4+2=\underline{86}$



<u>בדיקת הבנה</u>

102. מצאו את $f(x)$ על פי הנתונים הבאים:

א. $f'(x)=x^2+1$ והפונקציה עוברת דרך הנקודה $(3,10)$.

ב. $f'(x)=(6x+1)^2$ והפונקציה מקיימת $f(-1)=1$.

ג. $f'(x)=\sqrt{2x+5}$ והפונקציה חותכת את ציר ה- x כאשר x=2.

נז. ערכה המינימלי של $f(x)$ הוא -2 ונגזרתה: $f'(x)=8x-\frac{1}{x^2}$. מצאו את הפונקציה.

פתרון:

כאן מופיעה הנקודה ברמז.

אנו יודעים שבנקודת המינימום $y=-2$, אולם עלינו למצוא את x. לשם כך נשווה $f'(x)=0$.

נקבל: $8x-\frac{1}{x^2}=0$

$8x^3=1$

$x^3=\frac{1}{8}$

$x=\frac{1}{2}$

כלומר: $f\left(\frac{1}{2}\right)=-2$

וכדי למצוא את הפונקציה: $\int(8x-\frac{1}{x^2})dx=4x^2+\frac{1}{x}+c$

ועל ידי הצבת הנקודה: $-2=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{\frac{1}{2}}+c$

$-2=1+2+c$

$c=-5$

והפונקציה: $f(x)=4x^2+\frac{1}{x}-5$

נח. מצאו את y אם נתון שנגזרתה השנייה היא $y''=2x-1$ ויש לה נקודת קיצון $(-1,1)$.

פתרון:

כאן עלינו למצוא שתי פונקציות קדומות: האחת למציאת y' והשנייה למציאת y. נראה, לכאורה, שאין לנו מספיק נתונים כי נתונה לנו נקודה <u>אחת</u>! אולם, למעשה, נקודה זו טומנת בחובה שני נתונים:

1. מכיוון שהנקודה הנתונה היא נקודה על הפונקציה: $y(-1)=1$

2. מכיוון שזוהי נקודת קיצון: $y'(-1)=0$

<u>שלב א'</u> - מציאת y' :

$$y'=\int(2x-1)dx=x^2-x+c$$

ומהנתון $y'(-1)=0$:

$$0=(-1)^2-(-1)+c$$

$$c=-2$$

והנגזרת :

$$y'=x^2-x-2$$

<u>שלב ב'</u> – מציאת y :

$$y=\int(x^2-x-2)dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+c$$

ומהנתון $y(-1)=1$:

$$1=\frac{(-1)^3}{3}-\frac{(-1)^2}{2}-2\cdot(-1)+c$$

$$c=-\frac{1}{6}$$

והפונקציה :

$$y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x-\frac{1}{6}$$

<u>תרגול עצמי</u>

103. נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא : $f'(x)=4x-6$. הערך המינימלי של הפונקציה הוא -4.5.
הוכיחו כי : $f(0) = f(3)$

104. נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא : $f'(x)=3x^2+6x-9$. הערך המקסימלי של הפונקציה $f(x)$ הוא 7.
א. מצאו את $f(x)$.
ב. מצאו את הערך המינימלי של $f(x)$.

105. נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא : $f'(x)=2x\sqrt{x}+3$. נתון כי ערך הפונקציה : $f(1)=\frac{4}{5}$
מצאו את הפונקציה $f(x)$.

106. נתונה הנגזרת : $f'(x)=4x+a$. נקודת המקסימום של הפונקציה : $f(2) = 6$
א. מצאו את a.
ב. מצאו את $f(x)$.

107. הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$ היא : $f''(x)=12x^2-4$. משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-1$ היא : $y=2x+6$.
מצאו את הפונקציה $f(x)$.

108. הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$ היא : $f''(x)=6x+8$. ויש לה נקודת קיצון : (-3,3).
א. מצאו את שיעור ה- x של נקודת הקיצון השנייה וקבעו את סוגה.
ב. מצאו את הפונקציה $f(x)$.

עד כה תרגלנו אינטגרלים של פונקציות פשוטות. בפונקציות מורכבות יותר גם הפתרון מורכב יותר. אנו נתמקד בשלושה אופני פתרון כאלה.

<u>הראשון</u> - כאשר אנו מוצאים נגזרת של פונקציה ואחר כך צריכים לפתור אינטגרל.

לדוגמה :

א. מצאו את הנגזרת לפונקציה : $y=\frac{\sqrt{x}}{2x+5}$

ב. מצאו את הפונקציה המקיימת : $y'=\frac{5-2x}{2\sqrt{x}(2x+5)^2}$ וחותכת את ציר ה- x בנקודה x = 1.

פתרון :

א. $$y'=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(2x+5)-2\sqrt{x}}{(2x+5)^2}=\frac{2x+5-4x}{2\sqrt{x}(2x+5)^2}=\frac{5-2x}{2\sqrt{x}(2x+5)^2}$$

ב. עתה אנו מוצאים שהנגזרת שמצאנו, היא הנגזרת המופיעה בסעיף זה. מכיוון שאינטגרל הוא פעולה הפוכה לנגזרת, נראה שהפונקציה הקדומה היא הפונקציה שניתנה לנו בסעיף א׳,

כלומר : $$F(x)=\int\frac{5-2x}{2\sqrt{x}(2x+5)^2}dx=\frac{\sqrt{x}}{2x+5}+c$$

ומכאן הדרך פשוטה לפתרון :

מהנתון $F(1)=0$: $$F(1)=\frac{\sqrt{1}}{2+5}+c=0$$

$$\frac{1}{7}+c=0$$

$$c=-\frac{1}{7}$$

והפונקציה : $$F(x)=\frac{\sqrt{x}}{2x+5}-\frac{1}{7}$$

דוגמה נוספת :

נט. א. מצאו את נגזרת הפונקציה : $y=\sqrt{x^3-3x}$

ב. מצאו את הפונקציה המקיימת : $y'=\frac{x^2-1}{\sqrt{x^3-3x}}$ ועוברת דרך הנקודה $(2,\sqrt{2})$.

פתרון :

א. $$y'=\frac{1}{2\sqrt{x^3-3x}}\cdot(3x^2-3)=\frac{3(x^2-1)}{2\sqrt{x^3-3x}}$$

ב. $$F(x)=\int\frac{x^2-1}{\sqrt{x^3-3x}}dx$$

אנו כבר רואים את הדמיון בין תוצאת סעיף א׳ לאינטגרנד (האינטגרנד הוא הפונקציה שעליה אנו מבצעים אינטגרל) של סעיף ב׳, אלא שכדי להשוות ביניהם עלינו להכפיל את תוצאת סעיף א׳ ב- $\frac{2}{3}$.

כלומר : $$F(x)=\int\frac{x^2-1}{\sqrt{x^3-3x}}dx=\int\frac{2}{3}\cdot\frac{3(x^2-1)}{2\sqrt{x^3-3x}}dx=\frac{2}{3}\int\frac{3(x^2-1)}{2\sqrt{x^3-3x}}dx$$

את האינטגרל הזה אנו כבר יודעים : $$\int\frac{3(x^2-1)}{2\sqrt{x^3-3x}}dx=\sqrt{x^3-3x}+c$$

ולכן : $$F(x)=\int\frac{x^2-1}{\sqrt{x^3-3x}}dx=\frac{2}{3}\int\frac{3(x^2-1)}{2\sqrt{x^3-3x}}dx=\frac{2}{3}\sqrt{x^3-3x}+c$$

ובהצבת הנקודה $(2,\sqrt{2})$:

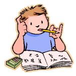
$$\sqrt{2}=\frac{2}{3}\sqrt{8-6}+c$$

$$\sqrt{2}=\frac{2}{3}\sqrt{2}+c$$

$$c=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

והפונקציה :

$$F(x)=\frac{2}{3}\sqrt{x^3-3x}+\frac{\sqrt{2}}{3}$$



<u>בדיקת הבנה</u>

109. א. גזרו את הפונקציה : $y=2x\sqrt{x^2-9}$

ב. מצאו את הפונקציה שנגזרתה : $y'=\frac{4x^2-18}{\sqrt{x^2-9}}$ ועוברת דרך הנקודה $(5,45)$.

110. א. גזרו את הפונקציה : $y=\frac{x+1}{x^2}$

ב. נתונה פונקציה המקיימת : $f'(x)=\frac{x+2}{x^3}$ וחותכת את ציר x בנקודה $x=2$. מצאו את הפונקציה.

<u>האופן השני</u> - כאשר נתונה לנו פונקצית מנה.

ס. מצאו את האינטגרל של הפונקציה : $y=\frac{x^4+3x^3-2x^2-x+14}{x+2}$

פתרון :

בפונקציית מנה אנו מחלקים את הפונקציה לפי חילוק של רב איבר ברב איבר. לטובת מי שכבר שכח איך זה נעשה (כנראה, הרוב המוחלט של התלמידים), אני מביא דוגמה זו באופן מפורט מאוד :

$$\begin{array}{l|l} \multicolumn{1}{l}{x^3+x^2-4x+7} & \\ \hline x^4+3x^3-2x^2-x+14 & x+2 \end{array}$$

$\frac{x^4}{x}=x^3$ ולכן האיבר הראשון הוא x^3 $\qquad -$

עכשיו מכפילים $x^3(x+2)=$ $\qquad \underline{x^4+2x^3}$

ואחרי חיסור והורדת האיבר הבא : $\qquad x^3-2x^2$

$\frac{x^3}{x}=x^2$ ולכן האיבר השני הוא x^2 $\qquad -$

ומכפילים ב- $x^2(x+2)=$ $\qquad \underline{x^3+2x^2}$

ואחרי חיסור והורדת האיבר הבא : $\qquad -4x^2-x$

$\frac{-4x^2}{x}=-4x$ ולכן האיבר השלישי הוא $-4x$ $\qquad -$

ומכפילים ב- $-4x(x+2)=$ $\qquad \underline{-4x^2-8x}$

ואחרי חיסור והורדת האיבר הבא : $\qquad 7x+14$

$\frac{7x}{x}=7$ ולכן האיבר הרביעי הוא 7 $\qquad -$

ומכפילים ב- $7(x+2)=$ $\qquad \underline{7x+14}$

ואחרי חיסור מקבלים 0 .

הפונקציה שאנו נמצא לה אינטגרל, היא: $y=x^3+x^2-4x+7$

$$\int(x^3+x^2-4x+7)dx=(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-4\cdot\frac{x^2}{2}+7x)+c$$

<u>בדיקת הבנה</u>

111. מצאו את הפונקציה המקיימת: $y'=\frac{x^3+7x^2-24x-36}{x+3}$ ועוברת דרך הנקודה $(3,-9)$.

112. מצאו את הפונקציה $f(x)$ אם נתון:

א. $f'(x)=\frac{2x^4+13x^3+13x^2-26x+7}{2x+7}$

ב. $f(-1)=1$

<u>האופן השלישי</u> - אינטגרלים המביאים לפונקציות מורכבות.

בפונקציה מורכבת כבר ראינו שיש למעשה שתי נגזרות: פנימית וחיצונית. כאשר אנו מקבלים לבצע אינטגרל על הנגזרות, אנו צריכים לזהות את הנגזרת הפנימית ולהבין שהיא "נבלעת" בפונקציה המקורית.

לדוגמה:

סא. מה פתרון האינטגרל: $\int -\frac{8x-2}{(4x^2-2x+1)^2}$?

לכאורה, זהו אינטגרל של מנה שלא למדנו כיצד לפתור.

בהתבוננות במונה ובמכנה נגלה כי: $8x-2=(4x^2-2x+1)'$

וזה כבר מרמז שהפונקציה המקורית היא מורכבת.

מכיוון שהנגזרת הפנימית כבר "נבלעת" בפונקציה המקורית, אין סיבה לבצע עליה אינטגרל,

ונתייחס אל האינטגרל כאילו הוא: $\int -\frac{1}{y^2}$

כאשר למעשה: $y=4x^2-2x+1$

אינטגרל כזה הוא פשוט ומִיָּדִי: $\int -\frac{1}{y^2}=\frac{1}{y}+c$

נחזור ונציב את y: $F(x)=\frac{1}{4x^2-2x+1}$

גזירה של $F(x)$ תַּראה: $F'(x)=-\frac{1}{(4x^2-2x+1)^2}\cdot(8x-2)$

וזה בדיוק האינטגרנד שקיבלנו במקור.

לכן התשובה היא: $\int -\frac{8x-2}{(4x^2-2x+1)^2}=\frac{1}{4x^2-2x+1}+c$

סב. פתרו את האינטגרל: $F(x)=\int\frac{3x^2-5}{2\sqrt{x^3-5x+7}}\,dx$

פתרון:

גם כאן אנו מוצאים: $(x^3-5x+7)'=3x^2-5$

נתעלם מהמונה ונבחן מה יהיה האינטגרל: $\int \frac{1}{2\sqrt{y}} = \sqrt{y} + c$

ומעתה: $F(x) = \int \frac{3x^2 - 5}{2\sqrt{x^3 - 5x + 7}} = \sqrt{x^3 - 5x + 7} + c$

בדיקה: $F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3 - 5x + 7}} \cdot (3x^2 - 5)$

וזה מקיים את האינטגרנד המקורי.

לפעמים נמצא פתרונות הדורשים תיקון קל.

סג. מהו האינטגרל: $\int \frac{4x - 10}{\sqrt{x^2 - 5x}}$?

פתרון:

בדיקת נגזרת פנימית: $(x^2 - 5x)' = 2x - 5$

אנו כבר רואים שהמונה הוא כפולה של הנגזרת הפנימית:

$4x - 10 = 2(2x - 5)$

זה סימן שאנו בדרך הנכונה.

נבצע אינטגרל של המכנה: $\int \frac{1}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{y} + c$

נציב את הפונקציה: $y = x^2 - 5x$

ונבדוק את הנגזרת: $(2\sqrt{x^2 - 5x})' = \frac{2 \cdot (2x - 5)}{2\sqrt{x^2 - 5x}}$

עתה נשווה בין הנגזרות שקיבלנו, לבין האינטגרנד שניתן לנו בתרגיל:

$$\frac{4x - 10}{2\sqrt{x^2 - 5x}} \neq \frac{4x - 10}{\sqrt{x^2 - 5x}}$$

כלומר עלינו להכפיל שוב ב- 2.

לכן האינטגרל הוא: $\int \frac{4x - 10}{\sqrt{x^2 - 5x}} = 4\sqrt{x^2 - 5x} + c$

בדיקה חוזרת: $(4\sqrt{x^2 - 5x})' = \frac{4 \cdot (2x - 5)}{2\sqrt{x^2 - 5x}} = \frac{4x - 10}{\sqrt{x^2 - 5x}}$

וזו התשובה הסופית!

סד. מהו הפתרון של: $\int \frac{9x^2 - 18x + 12}{(x^3 - 3x^2 + 4x)^2}\, dx$?

פתרון:

בדיקת נגזרת פנימית: $(x^3 - 3x^2 + 4x)' = 3x^2 - 6x + 4$

השוואה עם המונה: $9x^2 - 18x + 12 = 3(3x^2 - 6x + 4)$

אינטגרל של המכנה: $\int \frac{1}{y^2}dy = -\frac{1}{y}$

הצבה: $y = x^3 - 3x^2 + 4x$ וגזירה:

$$\left(-\frac{1}{x^3 - 3x^2 + 4x}\right)' = \frac{3x^2 - 6x + 4}{(x^3 - 3x^2 + 4x)^2}$$

כלומר יש להכפיל ב- 3.

ומכאן שהפתרון: $\int \frac{9x^2 - 18x + 12}{(x^3 - 3x^2 + 4x)^2}\, dx = -\frac{3}{x^3 - 3x^2 + 4x} + c$

בדיקה חוזרת: $\left(-\frac{3}{x^3 - 3x^2 + 4x}\right)' = \frac{3(3x^2 - 6x + 4)}{(x^3 - 3x^2 + 4x)^2}$

וזה בדיוק האינטגרנד שקיבלנו בתרגיל.

עד כאן ראינו כיצד אינטואיציה טובה יכולה לפתור הרבה בעיות במתמטיקה.
לטובת ה"טכנאים" שבינינו, נביא עתה דרך שיטתית למציאת פתרונות אלה.

נתחיל בדוגמה סא: $\int -\frac{8x - 2}{(4x^2 - 2x + 1)^2}\, dx$

למכנה שבתוך הסוגריים, נקרא u, כלומר: $u = 4x^2 - 2x + 1$

נגזור אותו: $u' = \frac{du}{dx} = 8x - 2$

על ידי העברת אגפים: $du = (8x - 2)dx$

הצבה של הביטוי האחרון באינטגרל:

$$\int -\frac{8x - 2}{(4x^2 - 2x + 1)^2}\, dx = \int -\frac{1}{(4x^2 - 2x + 1)^2}\, du =$$

$$= \int -\frac{1}{u^2} du$$

כבר קבענו ש: $u = 4x^2 - 2x + 1$

$$= \frac{1}{u} + c$$

אינטגרל זה הוא מִיָּדִי

ולכן: $\int -\frac{8x - 2}{(4x^2 - 2x + 1)^2} dx = \frac{1}{4x^2 - 2x + 1} + c$

כך גם בדוגמה סב: $F(x) = \int \frac{3x^2 - 5}{2\sqrt{x^3 - 5x + 7}}\, dx$

גם כאן: $u = x^3 - 5x + 7$

ואחרי גזירה: $u' = \frac{du}{dx} = 3x^2 - 5$

$$du = (3x^2 - 5)dx$$

ומקבלים: $F(x) = \int \frac{1}{2\sqrt{x^3 - 5x + 7}}\, du = \int \frac{1}{2\sqrt{u}}\, du = \sqrt{u} + c = \sqrt{x^3 - 5x + 7} + c$

ובדוגמה סג:
$$F(x)=\int\frac{4x-10}{\sqrt{x^2-5x}}\,dx$$

$$u=x^2-5x$$

$$u'=2x-5$$

$$u'=\frac{du}{dx}=2x-5$$

$$du=(2x-5)dx$$

אלא שבתרגיל זה המונה הנתון לנו: $4x-10\neq 2x-5$

לכן נמצא את המכפיל המשווה: $4x-10=2(2x-5)$

כלומר המונה: $(4x-10)dx=2(2x-5)dx=2du$

ולכן:
$$F(x)=\int\frac{4x-10}{\sqrt{x^2-5x}}\,dx=\int\frac{1}{\sqrt{x^2-5x}}\cdot 2du=\int\frac{1}{\sqrt{u}}\cdot 2du$$

כבר למדנו שהאינטגרל המִיָּדִי הוא:
$$\int\frac{1}{2\sqrt{x}}=\sqrt{x}+c$$

ולכן:
$$\int\frac{1}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+c$$

ובתרגיל שלנו:
$$F(x)=\int\frac{1}{\sqrt{u}}\cdot 2du=2\sqrt{u}\cdot 2+c=4\sqrt{x^2-5x}+c$$

ובדוגמה סד:
$$F(x)=\int\frac{9x^2-18x+12}{(x^3-3x^2+4x)^2}\,dx$$

$$u=x^3-3x^2+4x$$

$$u'=3x^2-6x+4$$

$$u'=\frac{du}{dx}=3x^2-6x+4$$

$$du=(3x^2-6x+4)dx$$

ובהשוואה למונה שלנו בתרגיל:

$$(9x^2-18x+12)dx=3(3x^2-6x+4)dx=3du$$

ולכן:
$$F(x)=\int\frac{1}{u^2}\cdot 3du=-\frac{1}{u}\cdot 3+c=-\frac{3}{x^3-3x^2+4x}+c$$

לומדים שואלים בדרך כלל כיצד ניתן להבחין אם בתרגיל מסוים יש צורך בחילוק רב איבר, או שזוהי נגזרת של פונקציה מורכבת. הסימן לכך הוא פשוט:

כאשר חזקת המונה גדולה מחזקת המכנה – יש צורך בחלוקה.

כאשר חזקת המונה קטנה מחזקת המכנה – זוהי נגזרת של פונקציה מורכבת.

כדי לבצע אינטגרל על נגזרת של פונקציה מורכבת:

א. מציבים פונקציית $u(x)$, בדרך כלל זהו הביטוי בתוך השורש או הסוגריים במכנה.

ב. גוזרים את הפונקציה u ומשווים למונה. מבצעים את התיקון אם יש צורך.

ג. מציבים את האינטגרל לפי du. ברמת הלימוד שלנו יתקבל אינטגרל מִיָּדִי.

ד. מוצאים את האינטגרל וחוזרים ומציבים את u באופן מפורש לפי x .

בדיקת הבנה

113. מצאו את הפונקציה המקיימת : $y'=-\frac{6x-7}{(3x^2-7x+3)^2}$ ועוברת דרך הנקודה $(2,2)$.

114. מצאו את הפונקציה המקיימת : $y'=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+9}}$ ועוברת דרך הראשית.

תרגול עצמי

115. א. גזרו את הפונקציה : $y=4x\sqrt{x+3}$

ב. בעזרת סעיף א' מצאו את הפונקציה המקיימת : $y'=\frac{x+2}{\sqrt{x+3}}$ ועוברת דרך הנקודה $(6,10)$.

116. נתונה פונקציה המקיימת : $y'=\frac{3x}{\sqrt{25-3x^2}}$ וחותכת את ציר x בנקודה $x=\sqrt{3}$. מצאו את הפונקציה.

117. נתונה הנגזרת : $f'(x)=\frac{x^4+4x^3-x^2+4x+8}{x+1}$. מצאו את הפונקציה אם נתון : $f(2)=12$.

118. הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$ היא : $f''(x)=\frac{x^3+6x^2+3x-10}{x+2}$, ונתון שלפונקציה נקודת קיצון ב- $(0,0)$.

א. מה סוג נקודת הקיצון ?

ב. מצאו את הפונקציה $f(x)$.

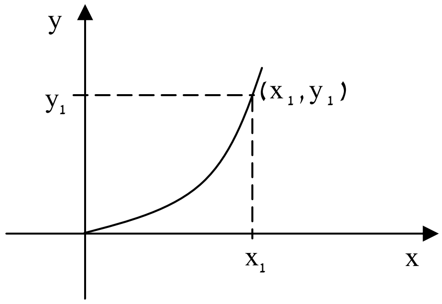
119. א. גזרו את הפונקציה : $y=\sqrt{\frac{1}{2x-1}}$ והראו כי היא מקיימת : $y'=-\frac{1}{\left(\sqrt{2x-1}\right)^3}$.

ב. בעזרת סעיף א' מצאו את הפונקציה y שנגזרתה : $y'=\frac{3}{\left(\sqrt{2x-1}\right)^3}$ ועוברת דרך הנקודה $(5,3)$.

120. נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא : $f'(x)=-\frac{16-12x}{(3x^2-8x+6)^2}$. מצאו את הפונקציה אם נתון כי היא עוברת בנקודה $(1,4)$.

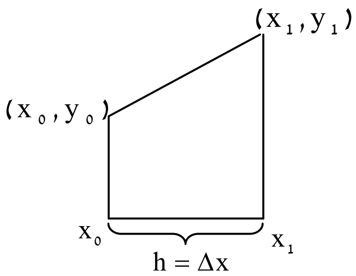
שימוש באינטגרל למציאת שטחים

כדי להבין את הקשר בין שטח מתחת לגרף של פונקציה לבין האינטגרל, ננתח תחילה גרף של פונקציה פשוטה יחסית: $y = x^2$



אנו נתמקד רק בענף הימני. כבר ראינו (כאשר הגדרנו את מושג הנגזרת), שאם מגדילים פונקציה, ניתן לקבל תמיד מצב של קו ישר בין שתי נקודות קרובות מאוד.

גם כאן נְדַמֶּה לעצמנו את השטח שמשמאל לנקודה x_1, ובהגדלה נמצא שהוא טרפז:



כמובן: $x_1 - x_0 = \Delta x = h \to 0$

כלומר הנקודות: x_0, x_1 סמוכות מאוד זו לזו.

עתה נוכל למצוא את תוספת השטח (Δs) בהתקדמות מ- x_0 ל- x_1 לפי שטח הטרפז:

<u>תזכורת:</u> נוסחת שטח טרפז: $s = \frac{\text{בסיס גדול + בסיס קטן}}{2} \cdot \text{גובה}$

$$\Delta s = \frac{y_1 + y_0}{2} \cdot h$$

ערכי y_0, y_1 הם לפי:

$$y_1 = x_1^2$$

$$\begin{cases} y_0 = x_0^2 \\ x_0^2 = (x_1 - h)^2 \end{cases} \Rightarrow y_0 = x_1^2 - 2x_1 h + h^2$$

ועל ידי הצבה בנוסחה:

$$\Delta s = \frac{x_1^2 + x_1^2 - 2x_1 h + h^2}{2} \cdot h = \frac{2x_1^2 - 2x_1 h + h^2}{2} \cdot \Delta x$$

על ידי חלוקה ב- Δx:

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = x_1^2 - x_1 h + \frac{h^2}{2}$$

ומכיוון ש: $h \to 0$:

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = x_1^2$$

אבל אנחנו כבר יודעים ש:

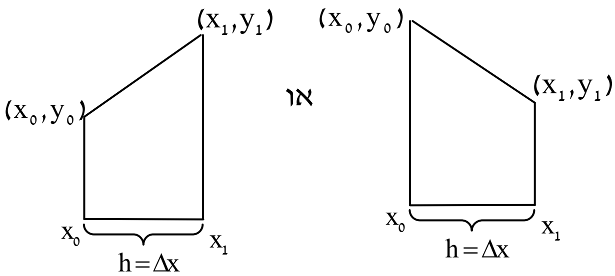
$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = s'$$

כלומר: $s' = x^2$ בכל נקודה $x = x_1$ שנבחר.

כלומר הפונקציה היא למעשה נגזרת השטח!

ניתן דוגמה לפונקציה יותר מורכבת: $y = x^3 - x^2 + 3$

אין זה משנה איזה מקום נבחר על הגרף, תמיד נוכל למצוא טרפז שיַראה:



ותמיד יהיה גידול שטח הטרפז:

$$\Delta s = \frac{y_1 + y_0}{2} \cdot h = \frac{\left[(x_1^3 - x_1^2 + 3) + (x_1 - h)^3 - (x_1 - h)^2 + 3\right]}{2} \cdot h$$

ולאחר פתיחת סוגריים:

$$\Delta s = \frac{\left[(x_1^3 - x_1^2 + 3) + (x_1^3 - 3x_1^2 h + 3x_1 h^2 - h^3) - (x_1^2 - 2x_1 h + h^2) + 3\right]}{2} \cdot h$$

ולבסוף:

$$\Delta s = \frac{2x_1^3 - 3x_1^2 h + 3x_1 h^2 - h^3 - 2x_1^2 + 2x_1 h - h^2 + 6}{2} \cdot \Delta x$$

ואחרי חלוקה ב - Δx:

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = x_1^3 + \frac{-3x_1^2 h + 3x_1 h^2 - h^3}{2} - x_1^2 + \frac{2x_1 h - h^2}{2} + 3$$

הצבה של $h \to 0$ תותיר אותנו עם: $$\frac{\Delta s}{\Delta x} = x_1^3 - x_1^2 + 3$$

שוב קיבלנו ש: $s' = x^3 - x^2 + 3$ בכל נקודה $x = x_1$

כלומר הפונקציה היא נגזרת השטח לכל x.

אם אנחנו רוצים למצוא את השטח הכולל של s, עלינו לבצע אינטגרציה: $s = \int s' dx$ עבור: $x = x_1$

ונקבל את כל השטח שמשמאל ל- x_1.

אם נחזור לפונקציה: $y = x^2$, הרי שהשטח המוגבל בין ציר ה- x לבין הפונקציה עד ל- $x = 5$, הוא:

$$s = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$$

ובהצבת $x = 5$: $$s = \frac{5^3}{3} + c = 41.666 + c$$

למעשה, באופן זה אנו מקבלים את השטח משמאל שערכו 41.666 ועוד קבוע c.

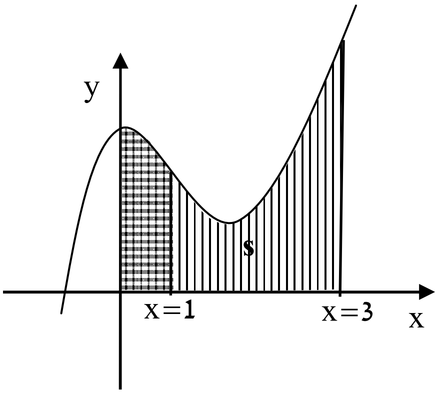
(אנו לא נתעכב על משמעות c עבור תחום סגור מאחר שאין הוא בא לידי ביטוי שימושי כפי שנראה בהמשך.)

מעצם הגדרתו שטח דורש תחום סגור, ולכן בכל פעם שנרצה למצוא שטח, ניאלץ להגדיר את קצותיו.

לדוגמה בפונקציה: $y = x^3 - x^2 + 3$

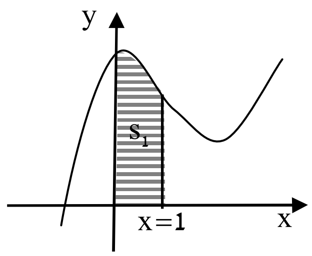
כדי למצוא את s עלינו להגדיר את קצותיו,

ולכן תחמנו אותו בישרים: $x = 1$ ו- $x = 3$



עתה אנו יכולים למצוא את השטח שביניהם.

<u>שלב א'</u> - מציאת השטח <u>משמאל</u> ל- $x = 1$ (מקווקו אופקית):



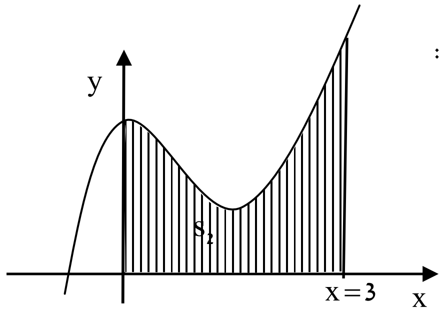
$$s_1 = \int (x^3 - x^2 + 3)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 3x + c$$

ובהצבה של $x = 1$ נקבל: $s_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 3 + c = 2.917 + c$

<u>שלב ב'</u> - מציאת השטח ש<u>משמאל</u> ל- $x = 3$ (מקווקו אנכית):

לצורך כך נציב $x = 3$ באינטגרל שמצאנו:

$$s_2 + s_1 = \frac{3^4}{4} - \frac{3^3}{3} + 3 \cdot 3 + c = 20.25 + c$$



<u>שלב ג'</u> - מציאת השטח המבוקש

השטח המבוקש הוא s, כלומר: $s = s_2 - s_1 = (20.25 + c) - (2.917 + c)$

$s = 17.33$

וכמו שאנו רואים, הקבוע c מתאפס במצב זה.

כדי ליצור טכניקת עבודה פשוטה יותר אנו מגדירים את אופן החישוב הזה כאינטגרל מסוים.

אינטגרל מסוים הוא אינטגרל שיש לו גבולות, והוא נמצא בין שני ערכים ידועים.

מכיוון שראינו שהקבוע c מתאפס, משמיטים אותו באינטגרציה זו.

וההגדרה:

$$\underbrace{\int_{x_1}^{x_2} f'(x)dx}_{\text{האינטגרל של פונקציה בין הגבולות } x_1,x_2} = \underbrace{f(x)\Big|_{x_1}^{x_2}}_{\text{הפונקציה הקדומה ללא } c \text{ בין הגבולות } x_1,x_2} = \underbrace{f(x_2) - f(x_1)}_{\text{הצבה של } x_2 \text{ בפונקציה הצבה של } x_1 \text{ בפונקציה וחיסור!}}$$

הצבה של x_2 בפונקציה
הצבה של x_1 בפונקציה
<u>וחיסור!</u>

הפונקציה הקדומה
ללא c
בין הגבולות x_1, x_2

האינטגרל של פונקציה
בין הגבולות x_1, x_2

אם נבחן זאת, נמצא שזהו בדיוק התהליך שביצענו בחישוב השטח.

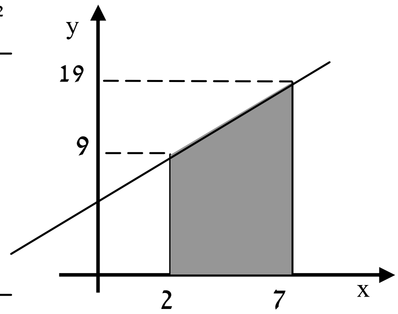
יש לזכור ש<u>תמיד</u> $x_2 > x_1$!

דוגמאות :

סה. מצאו את האינטגרל המסוים : $\int_2^7 (2x+5)dx$

פתרון :

$$\int_2^7 (2x+5)dx = (x^2+5x)\Big|_2^7 = (7^2+5\cdot 7)-(2^2+5\cdot 2) = 84-14 = 70$$



שִׂרטוט יֵראה שזהו שטח טרפז :

ולפי שטח טרפז : $\frac{19+9}{2}\cdot 5 = 70$

סו. חשבו את האינטגרל המסוים : $\int_1^2 \left(\frac{x^5+x^3+3}{x^2}\right)dx$

פתרון :

כפי שאמרנו, אינטגרל של פונקציית מנה איננו נכלל בחומר הלימוד, ולכן עלינו לחלק את הביטוי :

$$\int_1^2 \left(\frac{x^5+x^3+3}{x^2}\right)dx = \int_1^2 \left(x^3+x+\frac{3}{x^2}\right)dx = \left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}-\frac{3}{x}\right)\Bigg|_1^2 = \left(\frac{2^4}{4}+\frac{2^2}{2}-\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-3\right)=$$
$$= 4.5-(-2.25) = 6.75$$

<u>שימו לב :</u> כל עוד לא מבצעים אינטגרציה, לא משנים את הסימן $\int$ ולא מוותרים על dx .

<u>הארות ותובנות :</u>

1. אני מקווה שעכשיו ברור יותר למה נבחרה האות s לציון האינטגרל שהרי היא סכום (את סימנו זה נתן לו לייבניץ שכבר הוזכר בספר), והוא מציין את תחילת המילה summa שתרגומה – סכום.
2. במקרים בהם ערכי y שליליים, כלומר השטח בין הגרף לבין ציר ה- x הוא מתחת לציר ה- x , נקבל, כמובן, ערך שלילי לאינטגרל. אולם מאחר שאין בעולם המוכר לנו, שטחים שליליים, אנו נתייחס לערך המוחלט של האינטגרל וניקח אותו בחשבון כחיובי!

דוגמה : מהו השטח בין הפונקציה : $y = x^2-7x+10$ לציר ה- x בתחום : $3<x<4$?

$$\int_3^4 (x^2-7x+10)dx = \left(\frac{x^3}{3}-7\cdot\frac{x^2}{2}+10x\right)\Bigg|_3^4 = \left(\frac{4^3}{3}-7\cdot\frac{4^2}{2}+10\cdot 4\right)-\left(\frac{3^3}{3}-7\cdot\frac{3^2}{2}+10\cdot 3\right)=$$
$$= 5.333-7.5 = -2.167$$

והשטח : $s = |-2.167| = 2.167$

מעתה יש בידינו כלי למציאת שטחים גם של צורות עקומות. כל עוד נדע את הפונקציה של העקומה, נוכל לחשב את השטח בינה לבין ציר ה- x .

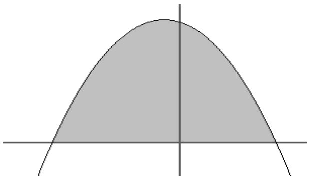
באופן כללי ניתן לסווג את השטחים הנוצרים לשלושה מצבים בסיסיים.
בכל מצב אנו מוצאים תחילה את גבולות האינטגרל, ולאחר מכן בודקים אילו פונקציות יש להציב באינטגרל כדי לקבל את השטח המבוקש.

<u>מצב ראשון</u> - שטח בין עקום לציר ה- x
כפי שכבר ראינו, זהו המצב הבסיסי של אינטגרל מסוים, ולכן הוא יחסית פשוט לפתרון.

דוגמאות:

סז. מצאו את השטח הכלוא בין הפונקציה: $y=-x^2-x+12$ לבין ציר ה- x.

פתרון:



תחילה נמצא גבולות:
הגבולות של השטח המבוקש הן נקודות
חיתוך הפונקציה עם ציר ה- x, כלומר: $y=0$

ומציאתם: $0=-x^2-x+12$

$x_1=-4 \quad x_2=3$

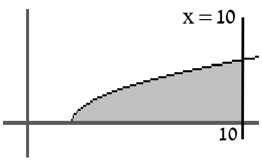
העובדה שציר ה- y עובר בתוך השטח המבוקש, אינה חשובה. בניתוח האינטגרל ראינו שהוא לא תלוי אם $x>0$ או $x<0$, ולכן אין חשיבות לעובדה שהשטח כולל את הישר $x=0$.
לכן:

$$s=\int_{-4}^{3}(-x^2-x+12)dx=\left(-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+12x\right)\Bigg|_{-4}^{3}=$$
$$=\left(-\frac{3^3}{3}-\frac{3^2}{2}+12\cdot 3\right)-\left(-\frac{(-4)^3}{3}-\frac{(-4)^2}{2}+12\cdot(-4)\right)=22.5-(-34.66)$$
$$s=57.16$$

גם אם הפונקציה נראית מסובכת יותר, דרך הפתרון נשארת.

לדוגמה: מצאו את השטח הכלוא בין הגרף של: $y=\sqrt{3x-6}$ לבין ציר ה- x והישר: $x=10$.

פתרון:



תחילה נמצא גבולות:

$y=0$

$3x-6=0$

$3x=6$

$x=2$

והאינטגרל:

$$s=\int_{2}^{10}\sqrt{3x-6}dx=\int_{2}^{10}(3x-6)^{\frac{1}{2}}dx=\left(\frac{(3x-6)^{1.5}}{1.5\cdot 3}\right)\Bigg|_{2}^{10}=\left(\frac{(30-6)^{1.5}}{4.5}\right)-\left(\frac{(6-6)^{1.5}}{4.5}\right)=$$
$$=26.13-0=\underline{26.13}$$

סח. מצאו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה: $y=\frac{x^4+8x^3+22x^2+36x+5}{x+5}$ לבין ציר ה- x

והישרים: $x=1$, $x=-1$.

פתרון:

הגבולות כבר נתונים, ולכן נותר רק למצוא את הפונקציה על ידי חילוק:

$$\begin{array}{l} \quad x^3+3x^2+7x+1 \\ \overline{x^4+8x^3+22x^2+36x+5} \,\big|\, x+5 \\ -\underline{x^4+5x^3} \\ \qquad 3x^3-22x^2 \\ \quad -\underline{3x^3+15x^2} \\ \qquad\qquad 7x^2+36x \\ \qquad\quad -\underline{7x^2+35x} \\ \qquad\qquad\qquad x+5 \\ \qquad\qquad\quad -\underline{x+5} \end{array}$$

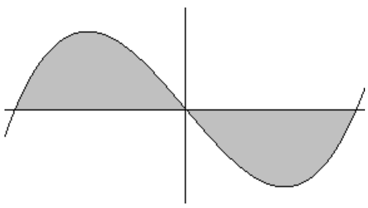
הפונקציה שאנו נמצא לה אינטגרל, היא: $y=\ x^3+3x^2+7x+1$

$$s=\int_{-1}^{1}(\ x^3+3x^2+7x+1)dx=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{3x^3}{3}+\frac{7x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{-1}^{1}=$$

$$=\left(\frac{1}{4}+1+\frac{7}{2}+1\right)-\left(\frac{1}{4}-1+\frac{7}{2}-1\right)=5.75-(1.75)$$

$$s=4$$

סט. מצאו את השטח הכלוא בין הפונקציה:



$y=x^3-4x$ לבין ציר ה- x (השטח האפור בציור).

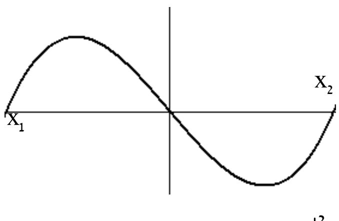
פתרון:

תחילה נמצא גבולות:

אנו יודעים שבגבולות $y=0$, ולכן:

$$0=x^3-4x$$

$$0=x(x^2-4)=x(x-2)(x+2)$$



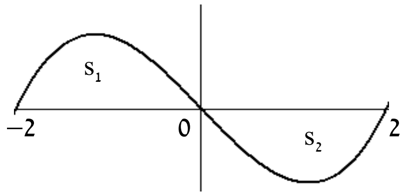
הפתרון: $x=0,-2,2$

והגבולות: $x_2=2\quad ,x_1=-2$

כפי שראינו, תחילה נפתור את האינטגרל המסוים:

$$\int_{-2}^{2}(x^3-4x)dx=\left(\frac{x^4}{4}-4\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{2}=\left(\frac{2^4}{4}-4\cdot\frac{2^2}{2}\right)-\left(\frac{(-2)^4}{4}-4\cdot\frac{(-2)^2}{2}\right)=(-4)-(-4)=\underline{\underline{0}}!$$

כמובן, תוצאה זו שגויה. אנו רואים שיש שטח. כדי להסביר זאת ניזכר בעבודה שכל שטח מתחת לציר ה- x מקבל ערך שלילי, ולכן כאשר מבצעים את האינטגרציה על הגבולות $[-2,2]$, סכום השטח השמאלי מתקזז עם סכום השטח הימני, והתוצאה 0.



הדרך הראויה לפתרון היא:

למצוא תחילה את s_1:

$$\int_{-2}^{0}(x^3-4x)dx=\left(\frac{x^4}{4}-4\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{0}=0-\left(\frac{(-2)^4}{4}-4\cdot\frac{(-2)^2}{2}\right)=0-(-4)=4$$

לאחר מכן למצוא את s_2:

$$\int_{0}^{2}(x^3-4x)dx=\left(\frac{x^4}{4}-4\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{2}=\left(\frac{2^4}{4}-4\cdot\frac{2^2}{2}\right)-0=-4$$

והשטח הכולל: $s=|s_1|+|s_2|=4+4=\underline{\underline{8}}$

<u>בדיקת הבנה</u>

121. מצאו את השטחים המוגבלים על ידי:

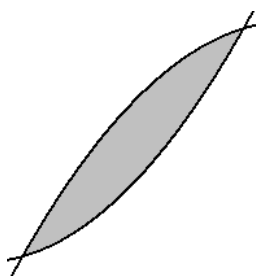
א. גרף הפונקציה: $y=x^5-9x^3$ וציר ה- x.

ב. גרף הפונקציה: $y=2x^2+4x-6$ וציר ה- x.

ג. גרף הפונקציה: $y=\sqrt{x-6}$, ציר ה- x והישר: $x=10$.

ד. גרף הפונקציה: $y=\dfrac{x^4+5x^3+3x^2-5x+12}{x+3}$, ציר ה- x והישרים: $x=2$ ו- $x=-2$.

עד כה ראינו פתרון מצב ראשון לפונקציות שונות. הרחבנו בניתוח הפונקציות השונות כדי שיהיו בידינו כלים לפתרון הפונקציות השונות. בהמשך ניישם שיטות פתרון אלו גם אם לא נרחיב עליהן בכל פעם.



<u>מצב שני</u> - אינטגרל בין שתי פונקציות (פונקציה מעל פונקציה)

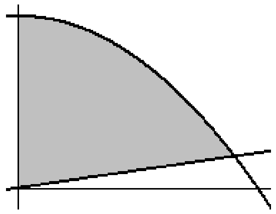
במצב זה אנו תמיד מחפשים שטח הנמצא בין שתי פונקציות:

האחת תוחמת את השטח מלמעלה, והאחרת תוחמת אותו מלמטה.

במתכוון לא הראיתי בשִׂרטוט היכן עוברים הצירים, כי אין מיקומם משנה את דרך הפעולה. אנו פשוט מתעלמים מהם במצב זה!

<u>הסימן המובהק למצב זה הוא שגבולות האינטגרל הם נקודות חיתוך הפונקציות ולא נקודות חיתוך עם הצירים.</u>

<u>שימו לב</u>: משפט זה נכון, אולם המשפט ההפוך אינו נכון. יש מצבים בהם השטח נמצא בין שתי פונקציות על אף שהגבולות אינם חיתוך של פונקציות, כמו למשל:



כאן הגבול השמאלי הוא: $x = 0$,
ועדיין השטח הוא בין שתי פונקציות.

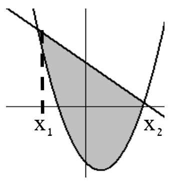
במצב זה אנו מוצאים תחילה גבולות ומבצעים אינטגרל של: f (עליונה) – f (תחתונה).

כלומר:
$$s = \int_{x_1}^{x_2} (f - \text{פונקציה עליונה}) - (f - \text{פונקציה תחתונה})\,dx$$

דוגמאות:

ע. מצאו את השטח הכלוא בין הפונקציות:

$$y = x^2 - 3x - 17 \quad , y = -2x + 13$$



פתרון:

כמו תמיד נמצא תחילה גבולות. הפעם הגבולות הם בין נקודות החיתוך של הפונקציות.

מציאת נקודות חיתוך:
$$x^2 - 3x - 17 = -2x + 13$$
$$x^2 - x - 30 = 0$$
$$x_1 = 6 \qquad x_2 = -5$$

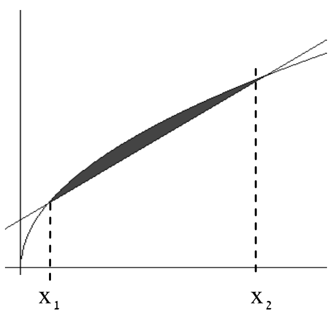
מתוך התבוננות בשִׂרטוט אנו רואים כי הישר הוא התוחם העליון, והפרבולה היא התוחם התחתון.
לכן:

$$s = \int_{-5}^{6}\left[(-2x+13)-(x^2-3x-17)\right]dx = \int_{-5}^{6}(-2x+13-x^2+3x+17)dx =$$
$$\int_{-5}^{6}(-x^2+x+30)dx = \left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+30x\right)\Bigg|_{-5}^{6} =$$
$$= \left(-\frac{6^3}{3}+\frac{6^2}{2}+30\cdot 6\right)-\left(-\frac{(-5)^3}{3}+\frac{(-5)^2}{2}+30\cdot(-5)\right) = 126-(-95.83) = \underline{221.83}$$

<u>שימו לב</u>: אין משמעות לעובדה שחלק מהשטח נמצא מתחת לציר ה- x בשל פעולת החיסור בין הפונקציות.
לכן <u>במצב זה</u> אנו מתעלמים כליל מצירֵי השיעורים.

עא. מצאו את השטח הכלוא בין הפונקציות:

$$y = 2\sqrt{x} \quad , y = 0.5x + 1.5$$



פתרון :

מציאת גבולות :
$$2\sqrt{x}=0.5x+1.5 \;/\cdot 2$$
$$4\sqrt{x}=x+3$$
$$0=x-4\sqrt{x}+3$$
נציב $t=\sqrt{x}$:
$$0=t^2-4t+3$$
$$t_1=1 \qquad t_2=3$$
כלומר :
$$\sqrt{x}=1 \quad \text{או} \quad \sqrt{x}=3$$
$$x_1=1 \qquad x_2=9$$

קו עליון - $y=2\sqrt{x}$

קו תחתון - $y=0.5x+1.5$

והשטח :
$$s=\int_1^9\left[2\sqrt{x}-(0.5x+1.5)\right]dx=\int_1^9\left(2x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)dx=\left(\frac{2x^{1.5}}{1.5}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}x\right)\Bigg|_1^9=$$
$$=\left(\frac{2\cdot 9^{1.5}}{1.5}-\frac{9^2}{4}-\frac{3\cdot 9}{2}\right)-\left(\frac{2\cdot 1}{1.5}-\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\right)=2.25-(-0.42)$$
$$s=2.66$$

עב. מצאו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה : $y=-x^2+7x+11$ לישר : $y=2x-3$.

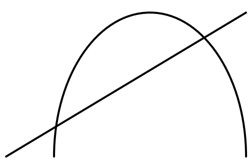
פתרון :

בתרגיל זה לא מצורף ציור של הפונקציות, לכן עלינו למצוא מי מהפונקציות עליונה, ומי תחתונה, כדי שנוכל לחשב את השטח.

במצבים כאלה אנו מתחילים עם מציאת נקודות חיתוך. אלה יסייעו בידינו למצוא את הסכֵמה של הגרפים.

מציאת גבולות :
$$-x^2+7x+11=2x-3$$
$$-x^2+5x+14=0$$
$$x_1=7 \qquad x_2=-2$$
ומעתה ישנן שתי דרכים לבירור מָנָח הפונקציות :

<u>האחת</u> היא על ידי חקירה או ידע כללי של צורות הפונקציות ושִׂרטוט סכֵמה שלהן.



בדוגמה שלנו אנו יודעים שפונקציה ראשונה היא של פרבולה הפוכה, והשנייה היא של ישר עם שיפוע חיובי. על פי נקודות החיתוך שמצאנו, תיאור הפונקציות יהיה כַּמוראה בציור.

<u>השנייה</u> נשענת על חישוב אלגברי בלבד. כאשר אנו מוצאים את הגבולות, אנו בוחרים x שנמצא בין נקודות החיתוך, כלומר : $-2<x<7$, ומוצאים את ערך ה- y של כל אחת מהפונקציות. ערך y גבוה יותר יצביע על הפונקציה העליונה, והנמוך יותר יצביע על התחתונה.

בדוגמה שלנו נבחר את x=5 ונקבל:

עבור $y=-x^2+7x+11$ $\leftarrow$ $y=-25+7\cdot5+11=21$

עבור $y=2x-3$ $\leftarrow$ $y=2\cdot5-3=7$

מכיון ש: $7<21$, אנו למדים שהפרבולה נמצאת מעל הישר.

מכאן והלאה ממשיכים רגיל:

$$s=\int_{-2}^{7}[-x^2+7x+11-(2x-3)]dx=\int_{-2}^{7}(-x^2+5x+14)dx=$$

$$-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}+14x\Big|_{-2}^{7}=106.16-(-15.33)=121.49$$

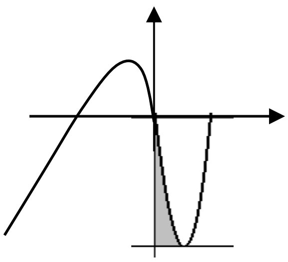
עג. מנקודת המינימום של הפונקציה:

$y=x^3+6x^2-15x$ העבירו ישר

מקביל לציר ה- x.

מצאו את השטח המוגבל

בין ישר זה, גרף הפונקציה לציר ה- y.



פתרון:

תחילה נמצא את נקודת המינימום (כפי שלמדנו כבר): $y=x^3+6x^2-15x$

$$y'=3x^2+12x-15$$

בנקודת המינימום מתקיים: $3x^2+12x-15=0\ \ /:3$

$$x^2+4x-5=0$$

$$x_1=-5 \qquad x_2=1$$

ולפי נגזרת שנייה: $y''=6x+12$

$y''(-5)=6\cdot(-5)+12<0$ נקודת מקסימום

$y''(1)=6\cdot1+12>0$ נקודת מינימום

ישר המקביל לציר ה- x הוא מהצורה: $y=k$, ולכן עלינו למצוא את y.

הצבה בפונקציה נותנת: $y(1)=1^3+6\cdot1^2-15\cdot1$

$$y(1)=-8$$

ולכן הגבולות הם: $x_1=0$ (ציר ה- y)

$x_2=1$ (נק' מינימום)

מציאת השטח:

$$s=\int_0^1\left[(x^3+6x^2-15x)-(-8)\right]dx=\int_0^1(x^3+6x^2-15x+8)dx=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{6x^3}{3}-\frac{15x^2}{2}+8x\right)\Big|_0^1=$$

$$=(\frac{1}{4}+\frac{6}{3}-\frac{15}{2}+8)-0=\underline{2.75}$$

<u>בדיקת הבנה</u>

122. מצאו את השטח הכלוא בין הפונקציות: $y=x^2+2x-3$ ו- $y=-x-5$

123. מצאו את השטח הכלוא בין הפונקציות: $y=\sqrt{x}-x$ ו- $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

124. מנקודת המקסימום של הפונקציה: $y=\frac{2}{3}x^3+3x^2-8x$ העבירו ישר מקביל לציר ה- x.

מצאו את השטח המוגבל בין ישר זה, גרף הפונקציה לציר ה- y.

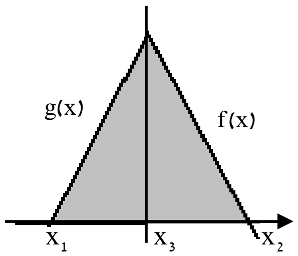
<u>מצב שלישי</u> - פונקציה ליד פונקציה

<u>סימן טוב למצב זה הוא שנתונות שתי פונקציות, אולם השטח גובל עם ציר ה- x</u>.

במצב זה יש שתי סכֵמות.

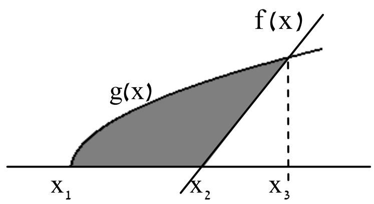
<u>סכֵמה ראשונה:</u>

נקודות חיתוך הפונקציות עם ציר ה- x נמצאות משני צדיה של נקודת החיתוך בין הפונקציות, כלומר: $x_1<x_3<x_2$



<u>סכֵמה שנייה:</u>

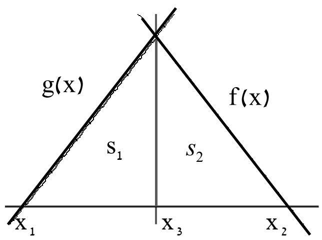
נקודות חיתוך הפונקציות עם ציר ה- x נמצאות מצד אחד של נקודת החיתוך ביניהן (ימין או שמאל זה לא משנה), כלומר: $x_1,x_2<x_3$ או $x_1,x_2>x_3$



כל סכֵמה פותרים באופן שונה.

<u>סכֵמה ראשונה:</u>

בסכֵמה זו פשוט מחלקים את השטח המבוקש לשני חלקים כך שלכל חלק יש גבול אחד, שהוא חיתוך הפונקציה עם ציר x, וגבול שני, שהוא נקודת החיתוך של שתי הפונקציות.



מחשבים את שני השטחים בנפרד:

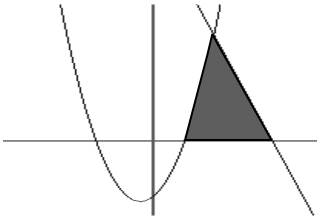
$$s_1=\int_{x_1}^{x_3} g(x)dx$$

$$s_2=\int_{x_3}^{x_2} f(x)dx$$

ואחר כך מחברים כדי לקבל את השטח הכולל: $s=s_1+s_2$

דוגמאות:

עד. מצאו את השטח הכלוא על ידי הגרפים

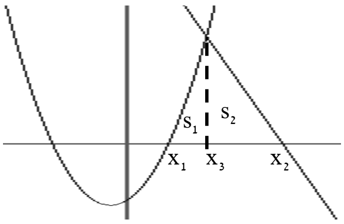


של הפונקציות: $y = x^2 + x - 2 \quad , y = -2x + 8$

וציר ה- x.

פתרון:

נמצא תחילה גבולות:



x_1 היא נקודת החיתוך של הפרבולה עם ציר ה- x, ולכן:

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x_1 = -2 \qquad x_2 = 1$$

התוצאה המתאימה לנו היא: $x_1 = 1$

x_2 היא נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- x, ולכן: $0 = -2x + 8$

$$x_2 = 4$$

x_3 היא נקודת חיתוך הפונקציות, ולכן: $x^2 + x - 2 = -2x + 8$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$x_1 = -5 \qquad x_2 = 2$$

התוצאה המתאימה לנו היא: $x_3 = 2$

חישוב השטחים:

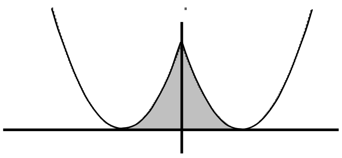
$$s_1 = \int_1^2 (x^2 + x - 2)dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} - 2 \cdot 2\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) =$$

$$= 0.66 - (-1.16) = 1.83$$

$$s_2 = \int_2^4 (-2x + 8)dx = \left(-\frac{2x^2}{2} + 8x\right)\Bigg|_2^4 = \left(-\frac{2 \cdot 4^2}{2} + 8 \cdot 4\right) - \left(-\frac{2 \cdot 2^2}{2} + 8 \cdot 2\right) = 16 - 12 = 4$$

והשטח הכולל: $s = s_1 + s_2 = 1.83 + 4 = \underline{5.83}$

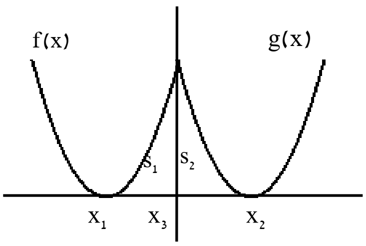
עה. מצאו את השטח הכלוא על ידי הגרפים



של הפונקציות: $y = (x + 2)^2 \quad , y = (x - 2)^2$

וציר ה- x.

פתרון:



גם כאן נחלק את השטח, אולם כאן

עלינו לברר מי מהגרפים הוא: $f(x) = (x + 2)^2$

ומי מהם הוא: $g(x) = (x - 2)^2$

מכיוון שממילא אנו זקוקים לגבולות: x_1, x_2,

נמצא בעזרתם את הגרפים המתאימים.

גם x_1 וגם x_2 הן נקודות חיתוך של הגרפים עם ציר x,

ולכן עבור $f(x)$ נמצא:

$$0=(x+2)^2$$
$$0=x+2$$
$$x=-2$$

וזה מתאים ל- x_1, כלומר הגרף השמאלי הוא $f(x)$.

באותו אופן עבור $g(x)$ נמצא:

$$0=(x-2)^2$$
$$x=2$$

כלומר: $g(x)$ הוא הגרף הימני.

מצאנו ש: $x_2=2$, $x_1=-2$, וקל לראות ש: $x_3=0$.

חישוב השטחים:

$$s_1=\int_{-2}^{0}(x+2)^2dx=\left.\frac{(x+2)^3}{3\cdot 1}\right|_{-2}^{0}=\frac{2^3}{3}-\frac{0^3}{3}=2.66$$

$$s_2=\int_{0}^{2}(x-2)^2dx=\left.\frac{(x-2)^3}{3\cdot 1}\right|_{0}^{2}=\frac{0^3}{3}-\frac{(-2)^3}{3}=0-\frac{-8}{3}=0-(-2.66)=2.66$$

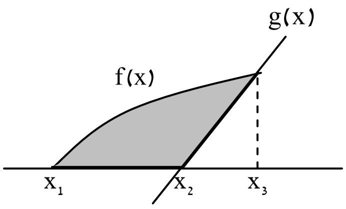
והשטח הכולל:

$$s=s_1+s_2=2.66+2.66=\underline{5.33}$$

<u>בדיקת הבנה</u>

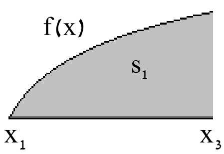
125. מצאו את השטח הכלוא על ידי הגרפים של הפונקציות: $y=x^2$, $y=-x+2$ וציר ה- x.
126. מצאו את השטח הכלוא על ידי הגרפים של הפונקציות: $y=(2x-3)^2$, $y=(2x+3)^2$ וציר ה- x.
127. מצאו את השטח הכלוא על ידי הגרפים של הפונקציות: $y=(x+2)^2$, $y=(x-1)^2$ וציר ה- x.

<u>סכֵמה שנייה:</u>



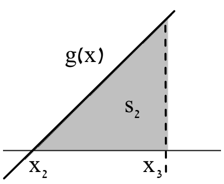
במקרים כאלה נוח מאוד לעבוד בדיוק ההֶפך מהסכֵמה הראשונה. כאן כדאי דווקא לחַסֵר את השטחים.

<u>נבהיר:</u>



תחילה אנו מחשבים את השטח תחת $f(x)$ בתחום:

$x_1<x<x_3$, ומקבלים את השטח <u>הכולל.</u>



אחר כך מחשבים את השטח תחת $g(x)$ בתחום:

$x_2<x<x_3$.

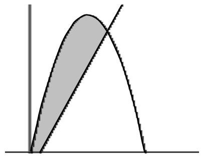
באמצעות חיסור השטחים מקבלים את השטח המבוקש: $s=s_1-s_2$

דוגמאות:

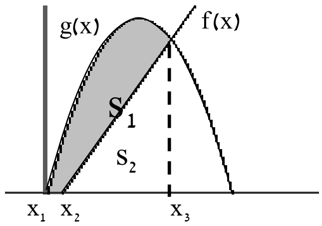
עו. חשבו את השטח הכלוא על ידי הגרפים של

הפונקציות: $y = 4x - x^2$, $y = 3x - 2$

וציר ה- x (השטח הצבוע).



פתרון:



1. נשרטט ונגדיר פונקציות:

2. נמצא גבולות:

מציאת x_1: $0 = 4x - x^2$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 4$

המתאים לנו הוא: $x_1 = 0$

מציאת x_2: $0 = 3x - 2$

$x_2 = \frac{2}{3}$

מציאת x_3: $3x - 2 = 4x - x^2$

$-x^2 + x + 2 = 0$

$x_1 = 2 \quad x_2 = -1$

המתאים לנו הוא: $x_3 = 2$

כמו שאנו רואים, $x_1 < x_2 < x_3$, לכן נמצא תחילה את השטח הכולל:

$$s_1 = \int_0^2 (4x - x^2)dx = \left(\frac{4x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \left(\frac{4 \cdot 2^2}{2} - \frac{2^3}{3}\right) - 0 = 5.33$$

עכשיו נמצא את השטח שיש לחסר מהשטח הכולל:

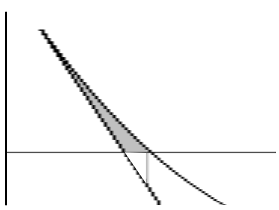
$$s_2 = \int_{\frac{2}{3}}^2 (3x - 2)dx = \left(\frac{3x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_{\frac{2}{3}}^2 = \left(\frac{3 \cdot 2^2}{2} - 2 \cdot 2\right) - \left(\frac{3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2}{2} - 2 \cdot \frac{2}{3}\right) = 2 - (-0.66) = 2.66$$

(ניתן, כמובן, לחשב את s_2 גם באופן גיאומטרי כמשולש שבסיסו $1\frac{1}{3}$, וגובהו $y = 3 \cdot 2 - 2 = 4$,

ולכן השטח הוא $s_2 = \frac{1\frac{1}{3} \cdot 4}{2} = 2.66$)

והשטח המבוקש הוא: $s = s_1 - s_2 = 5.33 - 2.66 = \underline{2.66}$

עז. לפונקציה: $y = x^2 - 7x + 10$ העבירו משיק בנקודה $x = 1$.



מהו השטח המוגבל בין המשיק,

הפונקציה לציר ה- x?

פתרון:

תחילה נמצא את המשיק.

מציאת שיפוע: $y' = 2x - 7$

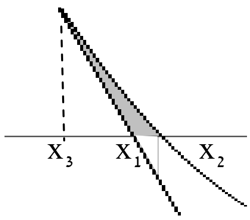
$y'(1) = -5$

והנקודה: $(1,4)$ $y(1) = 1^2 - 7\cdot 1 + 10 = 4$

משוואת המשיק: $y - 4 = -5(x-1)$

$y = -5x + 9$

עתה נשרטט ונמצא גבולות:



$x_3 = 1$ (נקודת ההשקה)

מציאת x_1: $0 = -5x + 9$

$x_1 = \frac{9}{5} = 1.8$

מציאת x_2: $0 = x^2 - 7x + 10$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = 5$

המתאים לנו: $x_2 = 2$

כדי למצוא את השטח המבוקש תחילה נמצא את השטח הכולל:

$$s_1 = \int_1^2 (x^2 - 7x + 10)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 10x\right)\Bigg|_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} - \frac{7\cdot 2^2}{2} + 10\cdot 2\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{7}{2} + 10\right) =$$

$$= 8.66 - 6.83 = 1.83$$

חישוב השטח שיש לחסר:

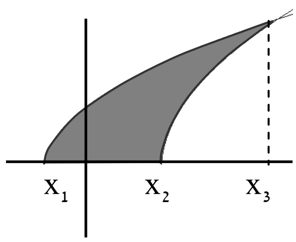
$$s_2 = \int_1^{1.8} (-5x + 9)dx = \left(\frac{-5x^2}{2} + 9x\right)\Bigg|_1^{1.8} = \left(\frac{-5(1.8)^2}{2} + 9\cdot(1.8)\right) - \left(-\frac{5}{2} + 9\right) = 8.1 - 6.5 = 1.6$$

$s = s_1 - s_2 = 1.83 - 1.6 = \underline{0.23}$

עח. חשבו את השטח המוגבל על ידי הגרפים

של הפונקציות: $y = \sqrt{2x+2}$, $y = \sqrt{4x-8}$

וציר ה-x.



פתרון:

מציאת גבולות:

מציאת x_1: $0 = 2x + 2$

$x_1 = -1$

מציאת x_2: $0 = 4x - 8$

$x_2 = 2$

מציאת x_3: $\sqrt{2x+2} = \sqrt{4x-8}$

$2x + 2 = 4x - 8$

$2x = 10$

$x_3 = 5$

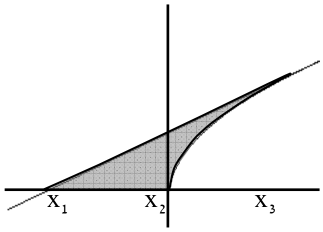
חישוב שטח כולל:

$$s_1=\int_{-1}^{5}\sqrt{2x+2}\,dx=\int_{-1}^{5}(2x+2)^{\frac{1}{2}}dx=\left.\frac{(2x+2)^{1.5}}{1.5\cdot 2}\right|_{-1}^{5}=\left(\frac{(2\cdot 5+2)^{1.5}}{3}\right)-\left(\frac{(-2+2)^{1.5}}{3}\right)=$$
$$=13.85-0=13.85$$

$$s_2=\int_{2}^{5}\sqrt{4x-8}\,dx=\int_{2}^{5}(4x-8)^{\frac{1}{2}}dx=\left.\frac{(4x-8)^{1.5}}{1.5\cdot 4}\right|_{2}^{5}=\left(\frac{(4\cdot 5-8)^{1.5}}{6}\right)-\left(\frac{(4\cdot 2-8)^{1.5}}{6}\right)=$$
$$=6.92-0=6.92$$

והשטח הכולל: $s=s_1-s_2=13.85-6.92=\underline{6.92}$

עט. לפונקציה: $y=\sqrt{x}$ העבירו משיק בנקודה $x=4$. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק לציר ה- x.



פתרון:

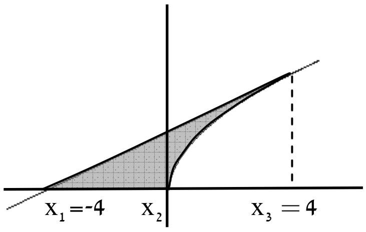
מציאת המשיק: $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$y'(4)=\frac{1}{4}$

$y(4)=\sqrt{4}=2 \qquad (4,2)$

והמשיק: $y-2=\frac{1}{4}(x-4)$

$y=\frac{1}{4}x+1$



מציאת גבולות:

$x_3=4$ נקודת השקה !

$x_2=0 \leftarrow 0=\sqrt{x}$

מציאת x_1: $0=\frac{1}{4}x+1$

$x_1=-4$

ולמציאת השטח:

$$s_1=\int_{-4}^{4}(\frac{1}{4}x+1)dx=\left.\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{x^2}{2}+x\right)\right|_{-4}^{4}=\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{4^2}{2}+4\right)-\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{(-4)^2}{2}-4\right)=$$
$$=6-(-2)=8$$

$$s_2=\int_{0}^{4}\sqrt{x}\,dx=\int_{0}^{4}x^{\frac{1}{2}}dx=\left.\frac{x^{1.5}}{1.5}\right|_{0}^{4}=\frac{4^{1.5}}{1.5}-0=5.33$$

והשטח הכולל: $s=s_1-s_2=8-5.33=\underline{2.66}$

<u>בדיקת הבנה</u>

128. חשבו את השטח הכלוא על ידי הגרפים של הפונקציות: $y=-x^2+3x$, $y=-x^2+2x$ וציר ה- x.

129. חשבו את השטח הכלוא ע"י הגרפים של הפונקציות: $y=5x-x^2$ ו- $y=2x-1$.

130. לפונקציה: $y=-x^2-x+6$ העבירו משיק בנקודה $x=0$. מהו השטח המוגבל בין המשיק, הפונקציה לציר ה- x ?

131. חשבו את השטח המוגבל ע"י הגרפים של הפונקציות: $y=\sqrt{3x+3}$ ו- $y=\sqrt{5x-3}$

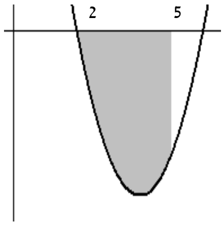
132. חשבו את השטח המוגבל ע"י הגרפים של הפונקציות: $y=\sqrt{2x}$ ו- $y=\sqrt{x+1}$

פרמטרים

כבר ראינו בעבר שעבודה עם פרמטרים אינה שונה במהותה בתהליך הפתרון של הבעיה כל עוד מתייחסים אל הפרמטר כאל מספר קבוע.

גם בנושא זה אם נתקלים בפרמטר, תהליך הפתרון אינו שונה.

דוגמאות:



פ. נתונה הפונקציה: $y = x^2 - ax + 7$

מצאו את הפרמטר a אם נתון שהשטח המוגבל בין גרף הפונקציה לבין ציר ה- x לבין הישרים: $x = 5$, $x = 2$, הוא: 24.

פתרון:

אנו רואים מהציור שהשטח הוא מתחת לציר ה- x, לכן עלינו לקחת בחשבון שלמעשה, תוצאת האינטגרל המסוים היא -24!

מכאן והלאה נפתור בדרך המקובלת:

$$s = \int_2^5 (x^2 - ax + 7)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} + 7x\right)\Big|_2^5 = \left(\frac{5^3}{3} - \frac{a \cdot 5^2}{2} + 7 \cdot 5\right) - \left(\frac{2^3}{3} - \frac{a \cdot 2^2}{2} + 7 \cdot 2\right) =$$

$$= (76.666 - 12.5a) - (16.666 - 2a) = 60 - 10.5a$$

הצבת השטח הנתון:

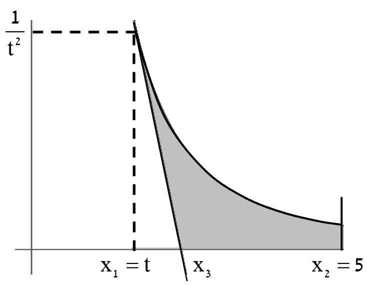
$$60 - 10.5a = -24$$

$$10.5a = 84$$

$$\underline{a = 8}$$

נעבור לדוגמה מורכבת יותר:

פא. נתונה הפונקציה: $y = \frac{1}{x^2}$



בנקודה $(t, \frac{1}{t^2})$ העבירו משיק לפונקציה.

מצאו את t אם נתון שהשטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה- x והישר $x = 5$, הוא: 1.3.

פתרון:

תחילה עלינו למצוא את משוואת המשיק.

שיפוע:

$$y = \frac{1}{x^2}$$

$$y' = -\frac{1}{x^4} \cdot 2x = -\frac{2}{x^3}$$

$$y'(t) = -\frac{2}{t^3}$$

משוואת המשיק:
$$y-\frac{1}{t^2}=-\frac{2}{t^3}(x-t)$$
$$y=-\frac{2}{t^3}x+\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t^2}$$
$$y=-\frac{2}{t^3}x+\frac{3}{t^2}$$

מציאת גבולות: $x_2=5 \qquad x_1=t$

נמצא את x_3:
$$0=-\frac{2}{t^3}x+\frac{3}{t^2}$$
$$x_3=1.5t \leftarrow \frac{2}{t^3}x=\frac{3}{t^2}$$

מציאת השטח הכולל:
$$s_1=\int_t^5\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\Big|_t^5=-\frac{1}{5}-\left(-\frac{1}{t}\right)=-\frac{1}{5}+\frac{1}{t}$$

מציאת השטח שיש להחסיר מהשטח הכולל:
$$s_2=\int_t^{1.5t}\left(-\frac{2}{t^3}x+\frac{3}{t^2}\right)dx=\left(-\frac{2}{t^3}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{3}{t^2}x\right)\Big|_t^{1.5t}=\left(-\frac{2}{t^3}\cdot\frac{(1.5t)^2}{2}+\frac{3}{t^2}\cdot 1.5t\right)-\left(-\frac{2}{t^3}\cdot\frac{t^2}{2}+\frac{3}{t^2}\cdot t\right)=$$
$$=(-\frac{2.25}{t}+\frac{4.5}{t})-(-\frac{1}{t}+\frac{3}{t})=\frac{2.25}{t}-\frac{2}{t}=\frac{0.25}{t}$$

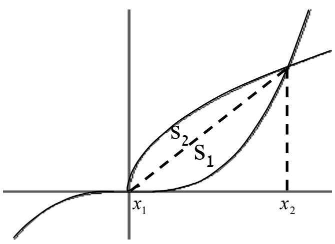
והשטח:
$$s=s_1-s_2=-\frac{1}{5}+\frac{1}{t}-\frac{0.25}{t}=-\frac{1}{5}+\frac{0.75}{t}$$

נציב את הנתון:
$$-\frac{1}{5}+\frac{0.75}{t}=1.3$$

הכפלה במכנה המשותף:
$$-t+3.75=6.5t$$
$$3.75=7.5t$$
$$\underline{t=0.5}$$

נוסיף דוגמת הוכחה:

פב. נתונות הפונקציות: $y=x^3 \quad , y=\sqrt{ax}$
בין נקודות החיתוך של שתי הפונקציות
מעבירים ישר. הוכיחו כי הישר מחלק את
השטחים $s_1:s_2$ ביחס של $3:2$ בהתאמה.



פתרון:

כדי למצוא את השטחים יש למצוא תחילה את משוואת הישר. לצורך כך עלינו למצוא את נקודת החיתוך של הפונקציות:
$$x^3=\sqrt{ax}$$

על ידי העלאה בריבוע:
$$x^6=ax$$
$$x^6-ax=0$$

מציאת נקודות חיתוך: $x_1=0 \qquad x_2=a^{\frac{1}{5}}$

מציאת הישר:

נמצא את נקודות ה- y : $y_1=0 \qquad y_2=\left(a^{\frac{1}{5}}\right)^3=a^{\frac{3}{5}}$

והשיפוע: $m=\dfrac{a^{\frac{3}{5}}-0}{a^{\frac{1}{5}}-0}=a^{\frac{2}{5}}$

משוואת המיתר: $y-0=a^{\frac{2}{5}}(x-0)$

$y=a^{\frac{2}{5}}x$

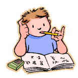
עתה נעבור למציאת השטחים:

$$s_1=\int_0^{a^{\frac{1}{5}}}(a^{\frac{2}{5}}x-x^3)dx=a^{\frac{2}{5}}\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\Big|_0^{a^{\frac{1}{5}}}=\left(\frac{a^{\frac{2}{5}}\cdot a^{\frac{2}{5}}}{2}-\frac{a^{\frac{4}{5}}}{4}\right)-0=\frac{a^{\frac{4}{5}}}{4}$$

$$s_2=\int_0^{a^{\frac{1}{5}}}(\sqrt{ax}-a^{\frac{2}{5}}x)dx=\int_0^{a^{\frac{1}{5}}}(a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{2}{5}}x)dx=a^{\frac{1}{2}}\frac{x^{1.5}}{1.5}-a^{\frac{2}{5}}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{a^{\frac{1}{5}}}=\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1.5}{5}}}{1.5}-\frac{a^{\frac{2}{5}}\cdot a^{\frac{2}{5}}}{2}\right)-0=$$

$$=\frac{a^{\frac{4}{5}}}{1.5}-\frac{a^{\frac{4}{5}}}{2}=\frac{a^{\frac{4}{5}}}{6}$$

מכאן על ידי חילוק: $\dfrac{s_1}{s_2}=\dfrac{\frac{a^{\frac{4}{5}}}{4}}{\frac{a^{\frac{4}{5}}}{6}}=\dfrac{3}{2}$



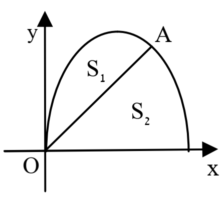
בדיקת הבנה

133. נתונה הפונקציה: $y=-x^2+ax+24$. מצאו את הפרמטר a אם נתון שהשטח המוגבל בין גרף הפונקציה לציר ה- x והישרים: $x=3$, $x=1$, הוא: $59\frac{1}{3}$.

134. נתונה הפונקציה: $y=2x^2+ax-2$. מצאו את הפרמטר a אם נתון שהשטח המוגבל בין גרף הפונקציה לציר ה- x, ציר ה- y והישר: $x=2$, הוא: $4\frac{2}{3}$.

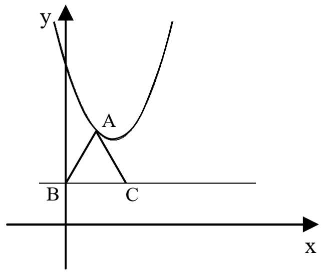
תרגול עצמי

135. הגרף שבציור מייצג את הפרבולה: $y=6x-x^2$ בתחום: $0\le x\le 6$.
הישר OA מחלק את השטח שבין הפרבולה לציר ה- x
לשני חלקים: s_1 ו- s_2.



א. הביעו את השטח s_1 אם נתון כי שיעור ה- x של הנקודה A הוא a.
ב. הראו כי אם $a=4$, אזי מתקיים: $s_1<s_2$.

136. נתונה הפונקציה: $y=\frac{4x^3+4x^2-15x-18}{2x+3}$ ($x\neq-\frac{3}{2}$). העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $y=4$. למשיק יש שיפוע שלילי.
מצאו את השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה, המשיק וציר ה- x.

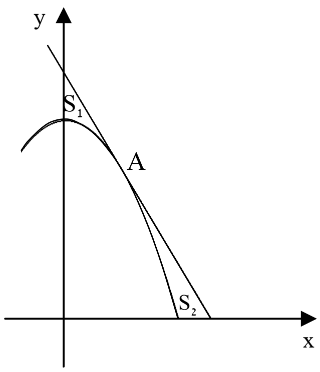


137. נתונים הפרבולה: $y=x^2-7x+17$ והישר: $y=2$.
הישר חותך את ציר ה- y בנקודה B.
A נקודה על הפרבולה בין ציר ה- y לבין קדקוד הפרבולה,
ו- C נקודה על הישר הנתון, כך שהמשולש ABC
הנו שווה שוקיים ($AB=AC$) (ראו ציור).
א. מה צריך להיות שיעור ה- x של הנקודה A כדי ששטח המשולש ABC יהיה מקסימלי?
ב. מצאו את השטח המקסימלי של המשולש ABC.

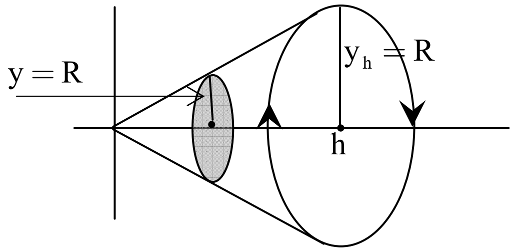
138. מהנקודה $A(2,-2\frac{1}{4})$ הנמצאות מחוץ לפרבולה: $f(x)=x^2-x-2$ העבירו שני משיקים לפרבולה.
א. מצאו את משוואות שני המשיקים לפרבולה.
ב. חשבו את השטח המוגבל על ידי הפרבולה ושני המשיקים.

139. נתונות שתי הפונקציות: $f(x)=\frac{-3x^2+35x-50}{3x-5}$ $x\neq1\frac{2}{3}$ וְ- $g(x)=3x-2$
מנקודה שעל גרף הפונקציה $g(x)$ שבה $x=a$, מורידים אנך לציר ה- x, ומנקודה של גרף הפונקציה $f(x)$ שבה $y=a+2$, מורידים אנך נוסף לציר ה- x ($0<a<3$). מצאו את הערך של a שעבורו השטח המוגבל על ידי הגרף של $f(x)$, הגרף של $g(x)$, האנכים וציר ה- x, הוא: 17.5 יחידות שטח.

140. נתונה הפונקציה: $f(x)=-x^2+4$
בנקודה A עובר משיק לגרף הפונקציה (ראו ציור).
א. s_1 הנו השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, המשיק וציר ה- y ברביע הראשון.
נתון: $s_1=\frac{1}{3}$. מצאו את שיעורי הנקודה A.
ב. s_2 הנו השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, המשיק וציר ה- x ברביע הראשון.
חשבו את גודל השטח s_2.



<u>נפח גוף סיבוב</u>



השימוש באינטגרלים נותן לנו אפשרות
לחשב נפחים של גופים סימטריים
סביב ציר מרכזי אם ידועה לנו פונקציית המתאר שלהם.
ניקח לדוגמה פונקציה פשוטה: $y = x$
אם נסובב אותה סביב ציר x , נקבל צורה של חרוט.

כבר ראינו שהאינטגרל "אוסף" את כל המחוברים בגבולות מוגדרים. כאן אנו מחברים את הדִסקות (משטחי המעגלים) הנוצרים על ידי הרדיוסים ($= y$) המתאימים לכל ערכי x לפי הפונקציה הנתונה.

מכיוון ששטח המעגל הוא: πR^2 ו- $R = y_0$, עלינו לחבר את כל המשטחים πy_0^2

ואם אנו רוצים לחבר את השטחים בגבולות $(0,h)$, ניתן לבצע את האינטגרל: $\int_0^h \pi y^2$

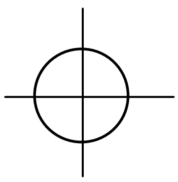
כלומר, כדי לחשב נפח גוף סיבוב יש לבצע אינטגרל מסוים לפי:
$$\boxed{v = \pi\int_{x_1}^{x_2} \left(f(x)\right)^2}$$

ובפונקציה שלנו ($y = x$):
$$v = \pi\int_0^h x^2 = \pi\frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \pi\frac{h^3}{3}$$

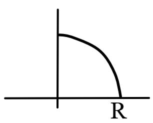
אם נשווה את התוצאה לנוסחת החרוט המוכרת מהגיאומטריה:
$$v = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

הרי שכאשר $R = h$, נקבל:
$$v = \frac{\pi R^3}{3}$$

דוגמה נוספת: <u>נפח כדור</u>



כפי שנלמד בעתיד, נוסחת מעגל היא: $x^2 + y^2 = R$
כאשר מרכז המעגל הוא בראשית הצירים.



מנוסחה זו ניתן ליצור פונקציה של
רבע מעגל: $y = \sqrt{R^2 - x^2}$

כאשר מסובבים פונקציה זו סביב ציר x , מקבלים נפח של חצי כדור, ולכן:
$$v = \int_0^R (\pi y^2)dx$$

לפי הכלל השני שלמדנו באינטגרלים:
$$\int \pi y^2 dx = \pi\int y^2 dx$$

ובתרגיל שלנו:
$$v = \pi\int_0^R (R^2 - x^2)dx = \pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^R = \pi\left[\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) - 0\right] = \frac{2}{3}\pi R^3$$

וכך חישבנו חצי כדור. על מנת למצוא נפח של כדור שלם:
$$2\cdot\frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

וזו אכן הנוסחה למציאת נפח של כדור.

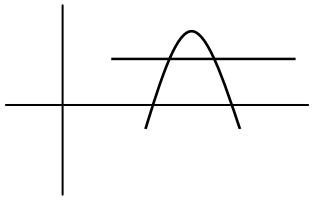
בעזרת חיבור וחיסור נפחים ניתן למצוא נפחים של צורות שונות.

דוגמאות:

פג. נתונות הפונקציות: $y=-x^2+9x-16$ ו- $y=2$

את השטח הנוצר ביניהן, מסובבים סביב ציר x.

מהו נפח הטבעת הנוצרת?



פתרון:

תחילה נמצאו את גבולות השטח: $-x^2+9x-16=2$

$$0=x^2-9x+18$$

$$x_1=3 \qquad x_2=6$$

הנפח הנוצר על ידי סיבוב הפרבולה בגבולות אלו:

$$v_1=\pi\int_3^6 y^2dx=\pi\int_3^6(-x^2+9x-16)^2dx=$$

$$=\pi\int_3^6(x^4-9x^3+16x^2+81x^2-9x^3-144x+256+16x^2-144x)dx=$$

$$=\pi\int_3^6(x^4-18x^3+113x^2-288x+256)dx=$$

$$=\pi\left(\frac{x^5}{5}-\frac{18x^4}{4}+\frac{113x^3}{3}-\frac{288x^2}{2}+256x\right)\Bigg|_3^6=$$

$$=\pi(211.2-173.1)=38.1\pi$$

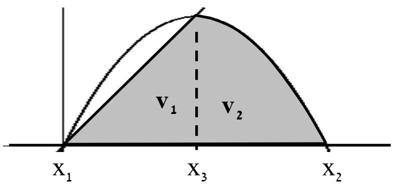
$$v_2=\int_3^6(\pi\cdot 2^2)dx=\pi\int_3^6 4dx=\pi\cdot 4x\Big|_3^6=\pi(24-12)=12\pi$$

ונפח הטבעת הוא: $v=v_1-v_2=38.1\pi-12\pi=\underline{26.1\pi}$

פד. את השטח המוגבל על ידי הפונקציות:

$y=4x-x^2$ ו- $y=2x$ סובבו סביב ציר x.

מהו נפח הגוף שנוצר?



פתרון:

גם כאן נתחיל במציאת גבולות: $x_1=0$

מציאת x_2: $4x-x^2=0$

$$x=0,4$$

אנו נבחר את התוצאה: $x_2=4$

מציאת x_3: $4x-x^2=2x$

$$2x-x^2=0$$

$$x=0,2$$

אנו נבחר את התוצאה: $x_3=2$

כדי לחשב את הנפח נמצא תחילה את v_1:

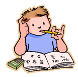
$$v_1=\pi\int_0^2(2x)^2=\pi\int_0^2(4x^2)dx=\pi\frac{4x^3}{3}\Big|_0^2=\pi\frac{4\cdot 8}{3}=10.66\pi$$

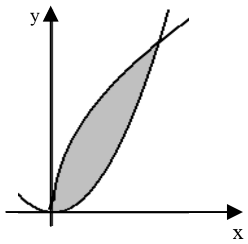
ונחשב את v_2:

$$v_2=\pi\int_2^4(4x-x^2)^2dx=\pi\int_2^4(16x^2-8x^3+x^4)dx=$$

$$=\pi\left(16\frac{x^3}{3}-8\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\right)\Big|_2^4=\pi(34.13-17.06)=17.06\pi$$

וחישוב הנפח הכולל: $v=v_1+v_2=10.66\pi+17.06\pi=27.72\pi$





תרגול עצמי

141. א. מצאו את השטח המוגבל בגרפים של

הפונקציות: $y=x^2$ ו- $y=\sqrt{8x}$ (ראו ציור).

ב. מצאו את נפח גוף הסיבוב הנוצר על ידי סיבוב

השטח הצבוע הנ"ל סביב ציר ה- x.

142. א. חשבו את השטח המוגבל בעקומה: $y^2=x^3$ בציר ה- x ובישר: $x=4$.

ב. מצאו את נפח גוף הסיבוב הנוצר על ידי סיבוב השטח שמצאתם בסעיף א', סביב ציר ה- x.

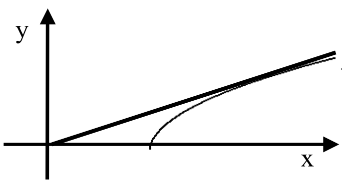
143. א. מצאו את השטח המוגבל בעקומה: $x-9y^2=0$ ובישר: $x-y=0$.

ב. מצאו את נפח גוף הסיבוב הנוצר על ידי סיבוב השטח שמצאתם בסעיף א', סביב ציר ה- x.

144. א. מצאו את השטח המוגבל בישר: $y=2-x$ ובפרבולה: $y=(x-2)^2$.

ב. מצאו את נפח גוף הסיבוב הנוצר על ידי סיבוב השטח שמצאתם בסעיף א', סביב ציר ה- x.

145. נתונה הפונקציה: $y=\sqrt{ax-16}$ (a פרמטר חיובי).



דרך ראשית הצירים מעבירים משיק לגרף הפונקציה (ראו שְׂרטוט).

א. בטאו בעזרת a את נקודת ההשקה.

ב. בטאו בעזרת a את משוואת המשיק.

ג. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק וציר ה- x, הוא: $2\frac{2}{3}$. מצאו את ערך הפרמטר a.

ד. השטח המתואר בסעיף ג' מסתובב סביב ציר ה- x. חשבו את נפח גוף הסיבוב המתקבל באופן זה.

תרגול כללי:

146. נתונה הפונקציה: $f(x)=3+\frac{bx^2+9}{x^2-a^2}$ (a ו- b פרמטרים חיוביים)

א. הביעו באמצעות a ו- b את האסימפטוטות לפונקציה המקבילות לצירים.

ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה, אם נתון כי בנקודה שבה $x=0$ ערך הפונקציה הנו שלילי.

147. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2+ax}{x^2+8}$, a הוא פרמטר. גרף הפונקציה חותך את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה בנקודה שבה $x=1$.

א. מצאו את הערך של a.

ב. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבעו את סוגן.

ג. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. הפונקציה הנתונה היא נגזרת של הפונקציה $g(x)$, כלומר: $g'(x)=f(x)$. מצאו את תחומי העלייה והירידה של $g(x)$. נמקו.

148. נתונה הפונקציה: $y=\frac{a^2x^2}{a^2x-1}$ ($|a|>1$ פרמטר). חקרו את הפונקציה ושרטטו סקיצה. הביעו באמצעות a (במידת הצורך) את תשובותיכם.

149. נתונה הפונקציה: $x^2+y^2=t-xy$, t פרמטר אי זוגי. ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה $(2,t-10)$.

א. מהו ערך הפרמטר t ?

ב. מצאו עוד נקודה על הפונקציה ששיעורה הראשון הוא $x=2$.

ג. מה יחס השיפועים של שני המשיקים העוברים בנקודות אלה ?

150. בחצי עיגול שרדיוסו R, חסמו טרפז שווה שוקיים באופן שקוטר חצי העיגול משמש בסיס גדול, ובסיסו הקטן של הטרפז הוא מיתר מקביל לקוטר זה. מה צריך להיות אורך הבסיס הקטן של הטרפז כדי <u>שהיקפו</u> של הטרפז יהיה מקסימלי ?

151. נתון כי השטח המוגבל ע"י הפונקציה: $y=ax^2+2x-\frac{1}{2}$ והישרים: $x=0$ ו- $x=1$, מסתובב סביב ציר ה- x. עבור איזה ערך של a הגרף המתקבל הוא בעל הנפח המינימלי ?

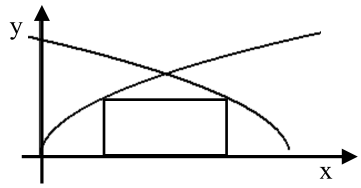
152. מהנקודה $(3.5,0)$ יוצאים שני משיקים לפונקציה: $y=x^2-2x-3$.

א. מצאו את משוואות המשיקים.

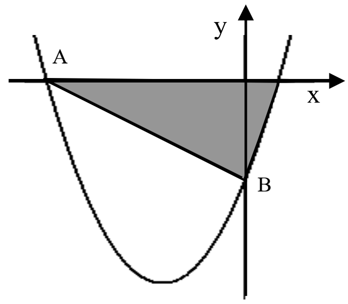
ב. מצאו את השטח המוגבל על ידי הפונקציה והמשיקים.

153. הוכיחו כי מבין כל המשולשים ישרי הזווית שאורך היתר שלהם הוא c, המשולש בעל השטח הגדול ביותר הוא שווה שוקיים.

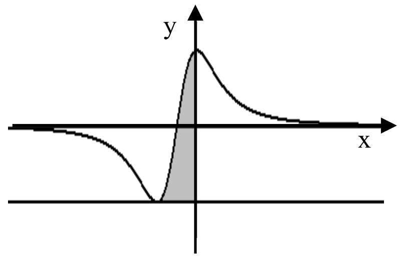
154. בין הפונקציות: $y=\sqrt{5x}$ ו- $y=\sqrt{55-5x}$
לציר ה- x חסמו מלבן (ראו ציור).
מה צריכים להיות שיעורי ה- x של המלבן כדי
ששטחו יהיה מקסימלי?



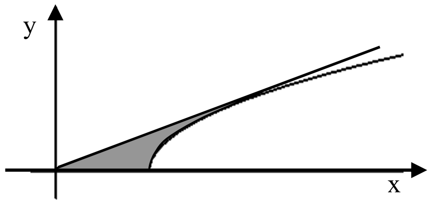
155. לפונקציה: $y=\frac{x^3+7x^2+4x-12}{x+2}$ העבירו
מיתר AB בנקודות החיתוך עם הצירים (ראו ציור).
מצאו את השטח בין המיתר, הפונקציה וציר ה- x.



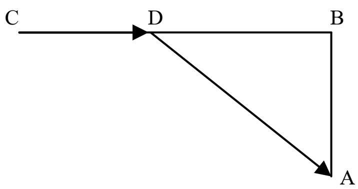
156. לפונקציה: $y=\frac{8x+8}{(x^2+2x+4)^2}$ העבירו
משיק בנקודת המינימום.
מצאו את השטח המוגבל בין המשיק לפונקציה
בנקודת המינימום, הפונקציה עצמה וציר ה- y.



157. לפונקציה: $y=\sqrt{4x-36}$ העבירו משיק
דרך ראשית הצירים (ראו ציור).
מה השטח הכלוא על ידי המשיק, הפונקציה
וציר ה- x?



158. בנקודה A הנמצאת במרחק 15 ק״מ
מהכביש BC, עומד רכב הזקוק לחילוץ.
מחלצים המתכננים מסלול, נמצאים בנקודה C
המרוחקת 60 ק״מ מנקודה B.



את הקטע CD הם נוסעים על כביש במהירות של 90 קמ״ש. את הקטע DA הם נוסעים על
כורכר במהירות של 40 קמ״ש.
מה המרחק CD שיביא את המחלצים בזמן הקצר ביותר לנקודה A?

159. א. מצאו שיפוע של הפונקציה: $7x^2+10xy+5y^2=22$ בנקודה $(1,1)$.
ב. מצאו נקודה נוספת על הפונקציה עם אותו שיפוע.

160. חקרו את הפונקציה: $y=\frac{(x-a)^2}{x^2+5}$ ושרטטו סקיצה שלה.

161. לפונקציה: $y=\frac{6x+a}{2x-bx^2}$ יש אסימפטוטה: $x=1$ ונקודת קיצון שבה $x=-1$.
א. מצאו את הפרמטרים a, b.
ב. חקרו את הפונקציה ושרטטו סקיצה שלה.

<u>פתרונים</u>

1. א. $m=-4.5$

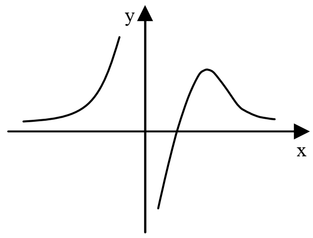
ב. $y=-4.5x+8.5$

ג. מתחת לישר

2. $y=3x-5$

3. גרף ב' מתאר פונקציה זוגית. גרף ו' מתאר פונקציה אי זוגית.

4. א. שִׂרטוט:



5. א. לא

ב. לא

ג. כן

ד. לא

ה. לא

6. א. אי זוגית

ב. זוגית

ג. לא זוגית ולא אי זוגית

ד. זוגית

7. א. לא זוגית ולא אי זוגית

ב. לא זוגית ולא אי זוגית

ג. אי זוגית

ד. אי זוגית

8. א. $9x^8$

ב. $11x^{10}$

ג. $-3x^{-4}$

ד. $\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

9. א. $y'=6x^5-\frac{1}{2}$

ב. $y'=1+10x^4$

ג. $y'=-\frac{2}{x^2}+2x$

ד. $y'=x^4+\frac{5}{x^2}$

10. א. $y'=-12x^3+9$

ב. $y' = \frac{3x^4 + 4}{x^2}$

ג. $y' = 3\sqrt{x}$

ד. $y' = -\frac{1}{x\sqrt{2x}}$

ה. $y' = 126x^2 + 72x + 9$

11. א. $y' = \frac{x^4 - 6x^2 - 24x + 9}{(x^2 - 3)^2}$

ב. $y' = \frac{3x^2 - 2}{4x\sqrt{x}}$

ג. $y' = \frac{6x^4 + 6x^2 + 70x + 84}{(3x^2 + 7)^2}$

12. א. $j(x) = \sqrt{\frac{1}{2x^2} + 2}$

ב. $f(x) = 3x^3 - 1$

$g(x) = (f(x))^2$

$h(x) = \frac{2}{g(x)}$

$j(x) = \sqrt{h(x)}$

13. א. $y' = -\frac{27}{(3x - 3)^4}$

ב. $y' = \frac{5}{2\sqrt{5x - 2}}$

14. א. $m = 1$

ב. $y = x + 5$

ג. מתחת לישר

15. $y = -x + 2$

16. א. $y' = 8x^7$

ב. $y' = -2x^{-3}$

ג. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

ד. $y' = 5x^4 - \frac{1}{5}$

ה. $y' = 2x + 10x^4$

ו. $y' = 2x + 2x^{-3}$

ז. $y' = -20x^4 + 16$

ח. $y' = \frac{3x^4 + 1}{x^2}$

ט. $y' = \frac{5}{2\sqrt{x}}$

י. $y' = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

יא. $y' = \frac{2x^5 + 4x^4 - 16x^3 - 44x^2 - 8x + 16}{(x^2 - 4)^2}$

יב. $y' = \frac{15x^3 - 9}{18x\sqrt{x}}$

17. $j(x) = \sqrt{\frac{-x^2 - 1}{x^2 + 2}}$

18. $f(x) = 4x^4 - 1$

$g(x) = (f(x))^2$

$h(x) = \frac{4}{g(x)}$

$j(x) = \sqrt{h(x)}$

19. א. $21(3x - 5)^6$

ב. $\frac{(7x^2 - 14x + 5)\sqrt{1 - x}}{2(x - 1)^2\sqrt{5x - 7x^2}}$

ג. $\frac{5(1 - x^3)^4(9x^2 - 2x^3 - 1)}{(x - 3)^6}$

ד. $\frac{3 - 24x}{(x - 4x^2 + 5)^4}$

ה. $\frac{7(x^3 - 4x^2 - 9x)^6(3x^2 - 8x - 9)}{2\sqrt{(x^3 - 4x^2 - 9x)^7 + 1}}$

ו. $\frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$

ז. $\frac{60x^4 - 44x^5 + 7x^3 - 9x^2}{\sqrt{2x - 3}}$

ח. $\frac{-4}{(x + 7)^5}$

ט. $\frac{3x^5 - 1}{\left(\sqrt{2x - x^6}\right)^3}$

20. הפונקציה יורדת: $-4.15<x<2.81$

הפונקציה עולה: $x>2.81$, $x<-4.15$

21. $(0,-1)$ מינימום

$(-0.8,-0.92)$ מקסימום

22. אין נקודות קיצון.

23. הפונקציה עולה: $0<x<\frac{2}{3}$

הפונקציה יורדת: $x>\frac{2}{3}$

24. הפונקציה יורדת: $0<x<2.5$, $x<-2.5$

הפונקציה עולה: $x>2.5$, $-2.5<x<0$

25. א $(1,10)$ מקס. מקומי ומוחלט, $(-3,-22)$ מינ. מקומי ומוחלט, $(-4,-71)$ מינ. מקומי, $(2,3)$ מקס. מוחלט

ב. $(3,87)$ מקס. מוחלט, $(2,-4)$ מינ. מקומי, $(0,60)$ מקס. מקומי,

$(-3,-129)$ מינ. מקומי ומוחלט, $(-4,-4)$ מינ. מקומי

ג. $(2,10)$ מקס. מקומי ומוחלט $(1,6)$ מינ. מקומי ומוחלט, $(0.5,8.5)$ מקס. מקומי

ד. $(1,-7)$ מקס. מקומי ומוחלט $(9,-645)$ מינ. מקומי ומוחלט

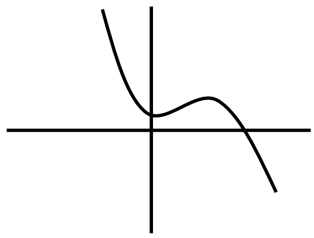
26. א. נקודות קיצון: $(1,5)$ מקסימום, $(0.333,4.85)$ מינימום

ב. הפונקציה יורדת: $x>1$, $x<0.333$

הפונקציה עולה: $0.333<x<1$

ג. חיתוך צירים: $(2.43,0)$, $(0,5)$

ד. שִׂרטוט:



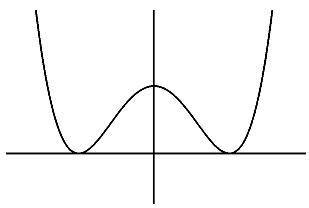
27. א. נקודות קיצון: $(0,16)$ מקסימום, $(2,0)$ מינימום, $(-2,0)$ מינימום

ב. הפונקציה יורדת: $0<x<2$, $x<-2$

הפונקציה עולה: $x>2$, $-2<x<0$

ג. חיתוך צירים: $(-2,0)$, $(2,0)$, $(0,16)$

ד. שִׂרטוט:



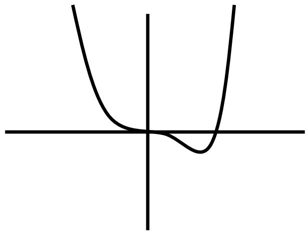
28. א. נקודות קיצון: $(0,0)$ פיתול, $(0.75,-0.11)$ מינימום

ב. הפונקציה עולה: $x>0.75$

הפונקציה יורדת: $x<0.75$

ג. חיתוך צירים : $(1,0)$, $(0,0)$

ד. שִׂרטוט :



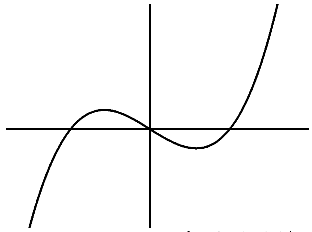
29. א. נקודות קיצון : $(2,-16)$ מינימום, $(-2,16)$ מקסימום

ב. הפונקציה עולה : $x>2$, $x<-2$

הפונקציה יורדת : $-2<x<2$

ג. חיתוך צירים : $(-3.46,0)$, $(3.46,0)$, $(0,0)$

ד. שִׂרטוט :



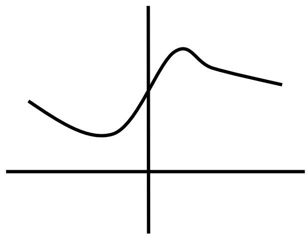
30. א. נקודות קיצון : $(1,2)$ מקסימום, $(-5,0.91)$ מינימום

ב. הפונקציה עולה : $-5<x<1$

הפונקציה יורדת : $x>1$, $x<-5$

ג. חיתוך צירים : $(0,1.66)$

ד. שִׂרטוט :



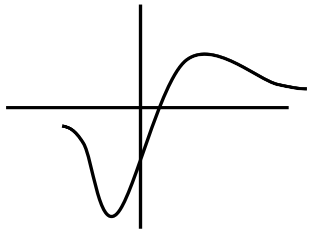
31. א. נקודות קיצון : $(-0.35,-1.51)$ מינימום, $(14.35,0.03)$ מקסימום

ב. הפונקציה עולה : $-0.35<x<14.35$

הפונקציה יורדת : $x>14.35$, $x<-0.35$

ג. חיתוך צירים : $(0,-1.4)$, $(7,0)$

ד. שִׂרטוט :



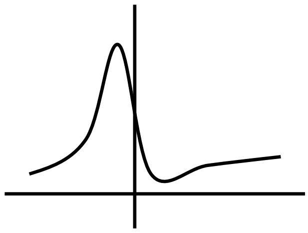
32. א. נקודות קיצון : $(1.52,0.11)$ מינימום, $(-0.35,5.89)$ מקסימום

ב. הפונקציה עולה : $x>1.52$, $x<-0.35$

הפונקציה יורדת : $-0.35<x<1.52$

ג. חיתוך צירים : $(0,4)$

ד. שִׂרטוט:



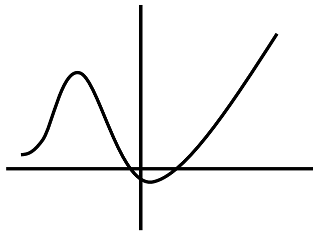
33. א. נקודות קיצון: $(0.04,-3.5)$ מינימום, $(-162.04,10)$ מקסימום

ב. הפונקציה עולה: $x > 0.04$, $x < -162.04$

הפונקציה יורדת: $-162.04 < x < 0.04$

ג. חיתוך צירים: $(-1.4,0)$, $(1.5,0)$, $(0,-3.5)$

ד. שִׂרטוט:



34. הפונקציה יורדת: $x < 1$

הפונקציה עולה: $x > 1$

הפונקציה קעורה כלפי מעלה: $x > \frac{2}{3}$, $x < 0$

הפונקציה קעורה כלפי מטה: $0 < x < \frac{2}{3}$

35. הפונקציה עולה לכל x .

הפונקציה קעורה כלפי מעלה: $x > 0$

הפונקציה קעורה כלפי מטה: $x < 0$

36. נקודה סליקה: $(-3,2)$

אסימפטוטה אנכית: $x = -5$

37. נקודה סליקה: $(-2,-0.222)$

אסימפטוטה אנכית: $x = 7$

38. א. תחום הגדרה: $x \neq 0$

ב. אסימפטוטות: $x = 0$

ג. נקודות קיצון: אין

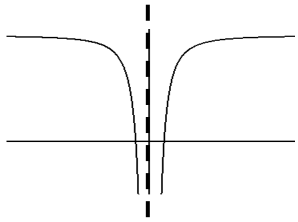
ד. הפונקציה עולה: $x > 0$

הפונקציה יורדת: $x < 0$

ה. חיתוך צירים: $(\sqrt{0.75},0)$ $(-\sqrt{0.75},0)$

ו. הפונקציה קעורה כלפי מטה בכל תחום הגדרתה.

ז. שִׂרטוט:



39. א. תחום הגדרה: $x \neq \pm 2$

ב. אסימפטוטות אנכיות: $x = \pm 2$

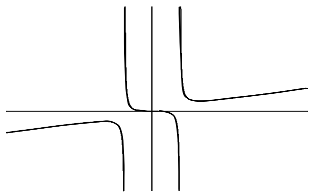
ג. נקודות קיצון: $(\sqrt{12}, 3\sqrt{3})$ מינימום, $(-\sqrt{12}, -3\sqrt{3})$ מקסימום, $(0,0)$ פיתול

ד. הפונקציה עולה: $x > \sqrt{12}$, $x < -\sqrt{12}$

הפונקציה יורדת: $2 < x < \sqrt{12}$, $0 < x < 2$, $-2 < x < 0$, $-\sqrt{12} < x < -2$

ה. חיתוך צירים: $(0,0)$

ו. שִׂרטוט:



40. א. תחום הגדרה: $x \neq \frac{2}{3}, -2.5$

ב. אסימפטוטות: אנכית: $x = -2.5$

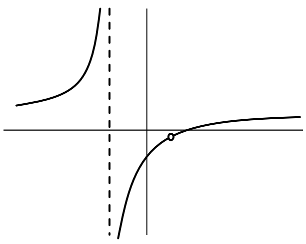
נקודה סליקה: $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{19})$

ג. נקודות קיצון: אין

ד. הפונקציה עולה לכל x בתחום הגדרתה.

ה. חיתוך צירים: $(0, -\frac{1}{5})$, $(1,0)$

ו. שִׂרטוט:



41. א. תחום הגדרה: $x \neq \pm \frac{1}{2}$

ב. אסימפטוטות: אנכית: $x = \frac{1}{2}$

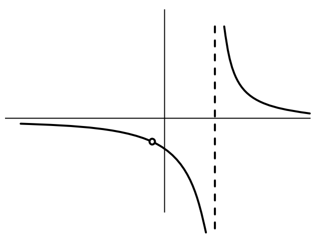
נקודה סליקה: $(-\frac{1}{2}, -1)$

ג. נקודות קיצון: אין

ד. הפונקציה יורדת לכל x בתחום הגדרתה.

ה. חיתוך צירים: $(0, -2)$

ו. שִׂרטוט:



42. א. תחום הגדרה : $x \neq 0$

ב. אסימפטוטות : אנכית : $x = 0$

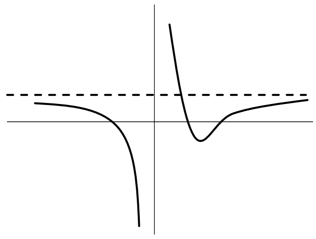
אופקית : $y = 1$

ג. נקודות קיצון : $(0.75,-0.18)$ מינימום

ד. הפונקציה עולה : $x > 0.75$

הפונקציה יורדת : $0 < x < 0.75$, $x < 0$

ה. שְׂרטוט :



43. א. תחום הגדרה : $x \neq \pm 5$

ב. אסימפטוטות : אנכיות : $x = \pm 5$

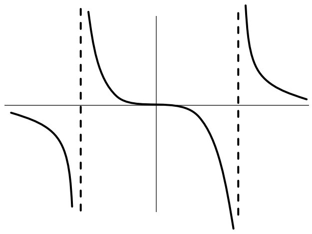
אופקית : $y = 0$

ג. נקודות קיצון : אין

ד. הפונקציה יורדת לכל x בתחום הגדרתה.

ה. חיתוך צירים : $(0,0)$

ו. שְׂרטוט :



44. א. תחום הגדרה : $x \geq 3$, $x \leq -5$

ב. אסימפטוטות : אין

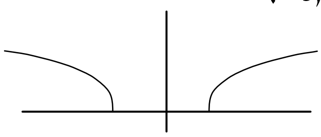
ג. נקודות קיצון : אין

ד. הפונקציה יורדת : $x \leq -5$

הפונקציה עולה : $x \geq 3$

ה. חיתוך צירים : $(3,0)$, $(-5,0)$

ו. שְׂרטוט :



45. א. תחום הגדרה : $x \geq 1.5$, $-1 \leq x \leq 0$

ב. אסימפטוטות : אין

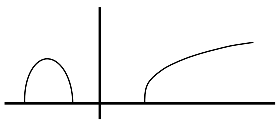
ג. נקודות קיצון : $(-0.55,1.007)$ מקסימום

ד. הפונקציה יורדת : $-0.55 < x \leq 0$

הפונקציה עולה : $x \geq 1.5$, $-1 \leq x < -0.55$

ה. חיתוך צירים : $(0,0)$, $(1.5,0)$, $(-1,0)$

ו. שְׂרטוט :



46. א. תחום הגדרה: $x > 2$, $x < -2$

ב. אסימפטוטות: $x = 2$

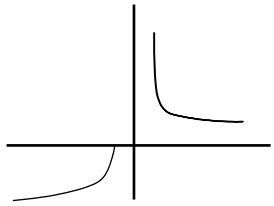
ג. נקודות קיצון: אין

ד. הפונקציה עולה: $x<2$

הפונקציה יורדת: $x>2$

ה. חיתוך צירים: אין

ו. שִׂרטוט:



47. א. תחום הגדרה:

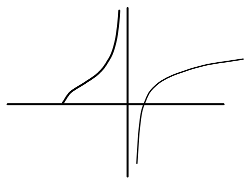
ב. אסימפטוטה אנכית: $x = 0$

ג. נקודות קיצון: אין

ד. הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

ה. חיתוך צירים: $(1,0)$, $(-4,0)$

ו. שִׂרטוט:



48. א. תחום הגדרה: $0 \le x \le \sqrt{12}$, $x \le -\sqrt{12}$

ב. אסימפטוטות: אין

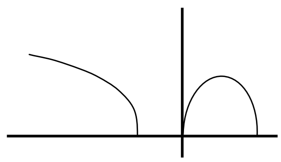
ג. נקודות קיצון: $(2,4)$ מקסימום

ד. הפונקציה עולה: $0 < x < 2$

הפונקציה יורדת: $2 < x \le \sqrt{12}$, $x \le -\sqrt{12}$

ה. חיתוך צירים: $(0,0)$, $(\sqrt{12},0)$, $(-\sqrt{12},0)$

ו. שִׂרטוט:



49. א. תחום הגדרה: $x \neq 3$

ב. אסימפטוטות: $x = 3$, $y = 2$

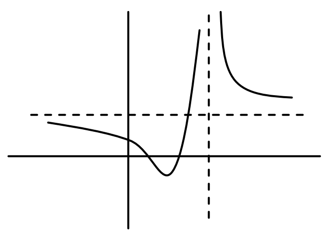
ג. נקודות קיצון: $(2.5,-2)$ מקסימום

ד. הפונקציה עולה: $2.5 < x < 3$

הפונקציה יורדת: $x > 3$, $x < 2.5$

ה. חיתוך צירים: $(0,0.77)$, $(2.71,0)$, $(1.29,0)$

ו. שִׂרטוט:



50. א. תחום הגדרה: $x \neq 1$

ב. אסימפטוטות: $x = 1$, $y = 3$

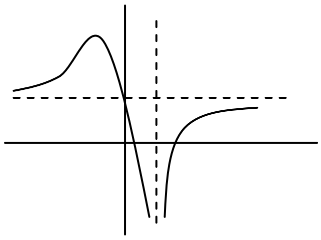
ג. נקודות קיצון: $(-1,3.25)$ מקסימום

ד. הפונקציה עולה: $x > 1$, $x < -1$

הפונקציה יורדת: $-1 < x < 1$

ה. חיתוך צירים: $(0,3)$, $(1.76,0)$, $(0.56,0)$

ו. שִׂרטוט:



51. א. תחום הגדרה: $x \neq 4$, $x \neq 2$

ב. אסימפטוטות: $x = 2$, $x = 4$, $y = 0$

ג. נקודות קיצון: $(2.83,-2.9)$ מקסימום

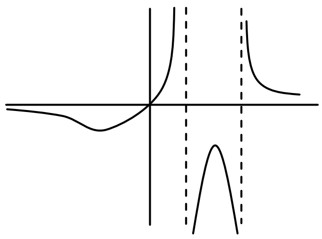
$(-2.83,-0.086)$ מינימום

ד. הפונקציה עולה: $2 < x < 2.83$, $-2.83 < x < 2$

הפונקציה יורדת: $x > 4$, $2.83 < x < 4$, $x < -2.83$

ה. חיתוך צירים: $(0,0)$

ו. שִׂרטוט:



52. א. תחום הגדרה: $x \neq 4$, $x > 0$

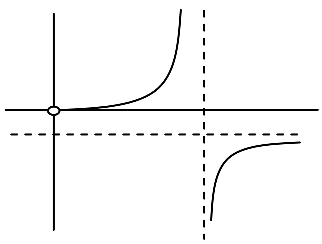
ב. אסימפטוטות: $x = 4$, $y = -1$

ג. נקודות קיצון: אין

ד. הפונקציה עולה: $0 < x < 4$, $x > 4$

ה. חיתוך צירים: אין

ו. שִׂרטוט:



53. א. תחום הגדרה: $x \geq 6$

ב. אסימפטוטות: $y = 0$

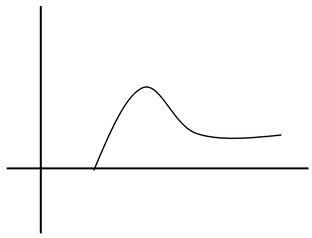
ג. נקודות קיצון: $(8,0.177)$ מקסימום

ד. הפונקציה עולה: $6 \leq x < 8$

הפונקציה יורדת: $x > 6$

ה. חיתוך צירים: (6,0)

ו. שִׂרטוט:



54. $c=5$

55. $a=10$

56. $m=2$, $p=-2$

57. $a=7$, $b=-8$

58. א. $a=18$

ב. (1) תחום הגדרה: $x\neq\pm2$

(2) אסימפטוטות: $x=\pm2$, $y=0$

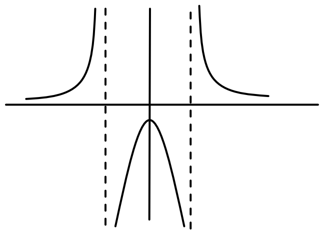
(3) נקודות קיצון: $(0,-4.5)$ מקסימום

(4) הפונקציה עולה: $-2<x<0$, $x<-2$

הפונקציה יורדת: $0<x<2$, $x>2$

(5) חיתוך צירים: $(0,-4.5)$

(6) שִׂרטוט:



59. א. $a=6$

ב. (1) תחום הגדרה: $x\neq2$, $x\neq3$

(2) אסימפטוטות: $x=2$, $x=3$, $y=0$

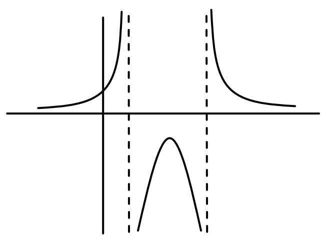
(3) נקודות קיצון: $(2.5,-4)$ מקסימום

(4) הפונקציה עולה: $2<x<2.5$, $x<2$

הפונקציה יורדת: $2.5<x<3$, $x>3$

(5) חיתוך צירים: $(0,\frac{1}{6})$

(6) שִׂרטוט:



60. א. $a=1.6$

ב. (1) תחום הגדרה: $x\neq\pm1$

(2) אסימפטוטות: $x=\pm1$

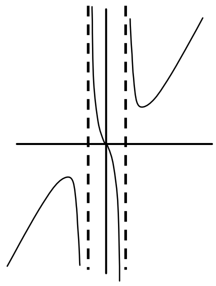
(3) נקודות קיצון: $(-2,-6.4)$ מקסימום, $(2,6.4)$ מינימום

(4) הפונקציה עולה: $2<x$, $x<-2$

הפונקציה יורדת: $-2<x<-1$, $-1<x<1$, $1<x<2$

(5) חיתוך צירים: $(0,0)$

(6) שִׂרטוט:



61. א. $c>4$

ב. $a=2$

ג. (1) תחום הגדרה: $x\neq 1$, $x\neq 3$

(2) אסימפטוטות: $x=1$, $x=3$, $y=0$

(3) נקודות קיצון: $(1.73,-3.73)$ מקסימום

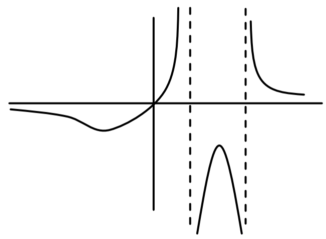
$(-1.73,-0.27)$ מינימום

(4) הפונקציה עולה: $-1.73<x<1.73$

הפונקציה יורדת: $x>3$, $1.73<x<3$, $x<-1.73$

(5) חיתוך צירים: $(0,0)$

(6) שִׂרטוט:



62. א. $c=-6$, $b=-1$, $a=1$

ב. $(0,0)$ מקסימום

63. א. $c=3$, $b=-4$, $a=1$

ב. (1) תחום הגדרה: $x\neq 1$, $x\neq 3$

(2) אסימפטוטות: $x=1$, $x=3$, $y=1$

(3) נקודות קיצון: $(1.5,-3)$ מקסימום

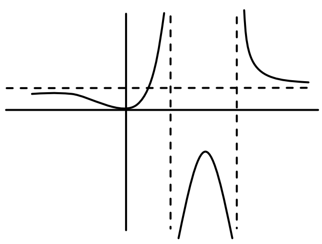
$(0,0)$ מינימום

(4) הפונקציה עולה: $0<x<1$, $1<x<1.5$

הפונקציה יורדת: $x<0$, $1.5<x<3$, $3<x$

(5) חיתוך צירים: $(0,0)$

(6) שִׂרטוט:



.64 $a=2$, $b=0$, $c=1$

.65 א. $a=1$, $b=22$, $c=6$

ב. (1) תחום הגדרה: $x\neq 2,3$

(2) אסימפטוטות: $x=3$, $x=2$, $y=1$

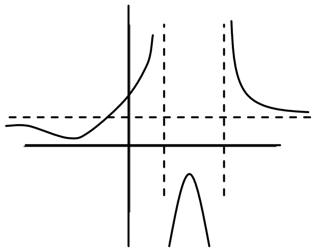
(3) נקודות קיצון: $(2.46,-194)$ מקסימום , $(-4.46,-0.03)$ מינימום

(4) הפונקציה עולה: $2<x<2.46$, $-4.46<x<2$

הפונקציה יורדת: $x>3$, $2.46<x<3$, $x<-4.46$

(5) חיתוך צירים: $(0,3\frac{1}{3})$

(6) שִׂרטוט:



.66 א. $a=3$, $b=-7$

ג. (1) תחום הגדרה: $x\neq 1$

(2) אסימפטוטות: $x=1$, $y=3$

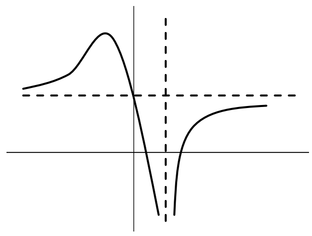
(3) נקודות קיצון: $(-1,3.25)$ מקסימום

(4) הפונקציה עולה: $x<-1$, $1<x$

הפונקציה יורדת: $-1<x<1$

(5) חיתוך צירים: $(0,3)$, $(1.77,0)$, $(0.57,0)$

(6) שִׂרטוט:



.67 $C(1,3)$, $y=-2x+5$

.68 $y=0.5x+1.5$

.70 $y=6x-1$

.71 א. $a=6$

ב. $y=2x+3$

.72 א. $(8,7)$

ב. $y=\frac{1}{4}x+5$

.73 א. $a=2$

ב. $y=x+4$

.74 א. $y=\frac{1}{3}x+3$

ב. $y=-3x+33$

.75 א. $y=\frac{1}{2}x-1$

ב. $y=-\frac{1}{128}x+45\frac{1}{64}$

ג. $y=-4x+18$

ד. $y=-\frac{1}{4}x+3.5$

.76 א. $y=-\frac{1}{14}x+\frac{101}{14}$

ב. $y=49x-342\frac{6}{7}$ או $y=49x+342\frac{6}{7}$

.77 א. $y=\frac{1}{6}x+1.5$

ב. $c=57$

.78 א. $y=9x-5$ $\quad$ $y=9x+27$

ב. לא

.79 א. $(3,23),(5,63)$

ב. $y=24x-57$ $\quad$ $y=16x-25$

.80 א. $(1,5)$ $\quad$ $y=2x+3$

$(3,13)$ $\quad$ $y=6x-5$

ב. $y=-\frac{1}{6}x+13.5$ $\quad$ $y=-\frac{1}{2}x+5.5$

.81 $y=0.5x$

.82 $y=-\frac{1}{16}x+0.5$

.83 2,3

.84 א. $EB=$ 4 ס"מ

ב. $EB=$ 4 ס"מ

.85 $x=\frac{49+a}{4}$

.86 $(-0.94,1.75)$, $(0.94,1.75)$

.87 א. $B(-4,0)$, $C(4,0)$, $D(4,32)$, $A(-4,32)$

ב. 256 יח"ר

.88 א. 20 ס"מ

ב. 129.90 סמ״ר

89. $\sqrt{80} \approx 8.94$ ס״מ

90. $A(2,2)$

91. 12 יח״ר

92. $2\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot 1 \approx 5.2$ סמ״ר

93. $x=2$

94. 86.602 סמ״ר

95. 2.5 ק״מ

96. א. $y'=\dfrac{2x-2y}{2x+3y^2+\dfrac{1}{y^2}}$ ב. $y'=\dfrac{-y+2(3y^3-8xy^3)\sqrt{y^2+xy}}{2\sqrt{y^2+xy}\cdot(12x^2y^2-9y^2)-2y+x}$

97. א. $y=8x-6$ ב. $y=-0.48x-0.04$ ג. $y=x+5$

98. א. $y=2x+10$ $\quad y=2x-10$

ב. $y=-x-7$ $\quad y=-x+7$

ג. $y=0.5x-12$ $\quad y=0.5x+12$

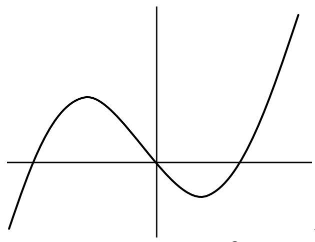
99. א. $\dfrac{x^6}{2}+\dfrac{2x^3}{3}-x+c$

ב. $\dfrac{2x^7}{7}-\dfrac{4x^6}{3}+\dfrac{8x^5}{5}+c$

ג. $\dfrac{x^2}{2}-3x+c$

100. גרף ג׳

101.



102. א. $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+x-2$

ב. $f(x)=12x^3+6x^2+x+8$

ג. $f(x)=\dfrac{1}{3}(2x+5)\sqrt{2x+5}-9$

104. א. $f(x)=x^3+3x^2-9x-20$

ב. $(1,-25)$ מינימום

105. $f(x)=\dfrac{4x^2\sqrt{x}}{5}+3x-3$

106. א. $a=-8$

ב. $f(x)=2x^2-8x+14$

107. $f(x)=x^4-2x^2+2x+7$

108. א. $x = \frac{1}{3}$ נק. מינימום ב. $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 15$

109. א. $y' = \frac{4x^2 - 18}{\sqrt{x^2 - 9}}$ ב. $2x\sqrt{x^2 - 9} + 5$

110. א. $y' = \frac{-x-2}{x^3}$ ב. $y = \frac{-x-1}{x^2} + \frac{3}{4}$

111. $y = \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 12x$

112. $y = \frac{x^4}{4} + x^3 - 2x^2 + x - 3\frac{1}{4}$

113. $y = \frac{1}{3x^2 - 7x + 3} + 1$

114. $y = \sqrt{x^2 - 4x + 9} - 3$

115. $y = \frac{4x\sqrt{x+3}}{6} - 2$

116. $y = 4 - \sqrt{25 - 3x^2}$

117. $f(x) = \frac{x^4}{4} + x^3 - 2x^2 + 8x - 8$

118. א. מקסימום ב. $f(x) = \frac{x^4}{12} + \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2}$

119. ב. $y = -3\sqrt{\frac{1}{2x-1}} + 4$

120. $f(x) = -\frac{2}{3x^2 - 8x + 6} + 6$

121. א. 121.5 יח״ר ב. $21\frac{1}{3}$ יח״ר ג. $5\frac{1}{3}$ יח״ר ד. $26\frac{2}{3}$ יח״ר

122. $\frac{1}{6}$ יח״ר

123. 0.35 יח״ר

124. 64 יח״ר

125. $\frac{5}{6}$ יח״ר

126. 9 יח״ר

127. 2.25 יח״ר

128. $3\frac{1}{6}$ יח״ר

129. 7.81 יח״ר

130. 10.66 יח"ר

131. 3.69 יח"ר

132. 0.94 יח"ר

133. $a = 5$

134. $a = 1\frac{2}{3}$

135. $s_1 = \frac{a^3}{6}$

136. 0.06 יח"ר

137. א. $x = 1\frac{2}{3}$ ב. 10.19 יח"ר

138. א. $y = -2.25$ $\quad y = 6x - 14.25$ ב. 2.25 יח"ר

139. $a = 2.5$

140. א. $A = (1,3)$ ב. $s_2 = 0.58$ יח"ר

141. א. $s = 40$ יח"ר ב. $v = 9.6\pi$ יח"נ

142. א. $s = 128$ יח"ר ב. $v = 64\pi$ יח"נ

143. א. $s = 2.06 \cdot 10^{-3}$ יח"ר ב. $v = 2.28 \cdot 10^{-4}\pi$ יח"נ

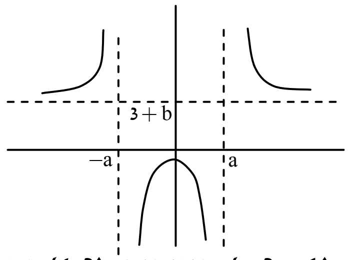
144. א. $s = \frac{1}{6}$ יח"ר ב. $v = 0.13\pi$ יח"נ

145. א. $\left(\frac{32}{a}, 4\right)$ ב. $y = \frac{ax}{8}$ ג. $a = 8$ ד. $v = 5\frac{1}{3}\pi$ יח"נ

146. א. אופקית: $y = 3 + b$ אנכית: $x = a, -a$

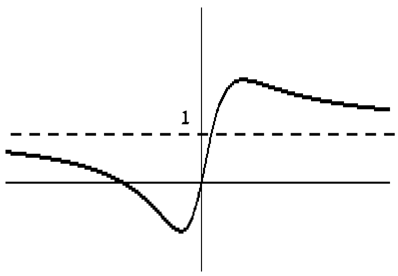
ב. עלייה: $-a < x < 0$, $x < -a$ ירידה: $x > a$, $0 < x < a$

ג.



147. א. $a = 8$ ב. $(-2,-1)$ מינימום $(4,2)$ מקסימום ג. $(-8,0)$, $(0,0)$

ד.



ה. עלייה: $x > 0$, $x < -8$ ירידה: $-8 < x < 0$

148. (1) תחום הגדרה: $x \neq \frac{1}{a^2}$

(2) אסימפטוטות: $x = \frac{1}{a^2}$

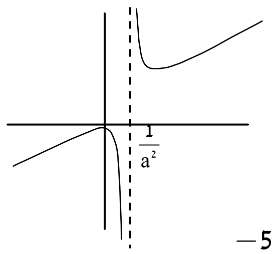
(3) נקודות קיצון: $(0,0)$ מקסימום $\left(2, \frac{4a^2}{2a^2-1}\right)$ מינימום

(4) הפונקציה עולה: $x > 2$, $x < 0$

הפונקציה יורדת: $0 < x < \frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^2} < x < 2$

(5) חיתוך צירים: $(0,0)$

(6) שִׂרטוט:



149. א. $t = 7$ ב. $(2,1)$ ג. -5

150. R

151. $a = -\frac{5}{3}$

152. א. $y = 2x - 7$, $y = 8x - 28$

ב. $s = 2.25$

154. $x_2 = \frac{55}{6}$, $x_1 = \frac{11}{6}$

155. $s = 39.17$

156. $s = 1$

157. $s = 18$

158. $CD = 7.4$ ק"מ

159. א. $y' = -1.2$ ב. $(-1,-1)$

160. (1) תחום הגדרה: כל x

(2) אסימפטוטות: $y = 1$

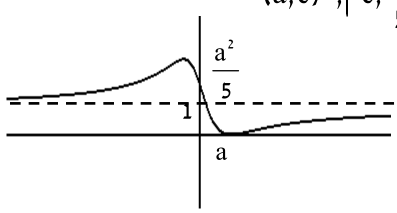
(3) נקודות קיצון: $\left(-\frac{5}{a}, \frac{5+a^2}{5}\right)$ מקסימום $(a,0)$ מינימום

(4) הפונקציה עולה: $x > a$, $x < -\frac{5}{a}$

הפונקציה יורדת: $\frac{-5}{a} < x < a$

(5) חיתוך צירים: $\left(0, \frac{a^2}{5}\right)$, $(a,0)$

(6) שִׂרטוט:



161. א. $a = b = 2$

ב. (1) תחום הגדרה: $x \neq 0,1$

(2) אסימפטוטות: $x = 1$, $x = 0$, $y = 0$

(3) נקודות קיצון: $(-1,1)$ מקסימום $\left(\frac{1}{3},9\right)$ מינימום

(4) הפונקציה עולה: $x > 1$ $\frac{1}{3} < x < 1$ $x < -1$

הפונקציה יורדת: $-1 < x < 0$ $0 < x < \frac{1}{3}$

(5) חיתוך צירים: $\left(-\frac{1}{3},0\right)$

(6) שִׂרטוט: