חשבון דיפרנציאלי

רקע

במתמטיקה אנו מוצאים שני תחומי מחקר עיקריים: הראשון הוא תחום המתמטיקה השימושית, והשני הוא תחום המתמטיקה התיאורטית. המתמטיקאים התיאורטיים הם אלה המקדימים את זמנם תמיד. הם יוצרים חשיבה ותפיסה מתמטית שאינה מוגבלת לעולם המוכר לנו, ומפתחים רעיונות ודרכי התמודדות עם תחומים שאולי רק בעוד מאות שנים (אם בכלל) יהיה להם שימוש. דוגמה נפלאה לפיתוח כזה היא שיטות הפתרון שהגה לגרנז' (1813 - 1736), למשוואות סבוכות במתמטיקה, שלא היה להם שימוש מעשי עד לעידן המחשב בשל מספר הפעולות הנדרש כדי להגיע לפתרון. רק מאז הפיתוח של המחשבים (כ- 250 שנה לאחר מכן) היה ניתן להשתמש ברעיונות אלו.

תחום המתמטיקה השימושית עוסק יותר בפיתוחים לבעיות עכשוויות. כך הגיע ניוטון לפתח את החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי. ניוטון היה זקוק לכלי מתמטי שיתאר תנועות שאינן במהירות קבועה. באופן מעשי אין מכונית הנוסעת במהירות קבועה. היא חייבת להאיץ ולהאט. כדי להתמודד עם משוואות אלה היה עליו לפתח שיטות חקירה מתמטיות נאותות לעקומות מסוגים שונים.

על אותם רעיונות עבד באותה תקופה מתמטיקאי ופילוסוף אחר – לייבניץ.

לאחר מריבה קשה שפרצה בין השניים על זכות הראשונים, אנו מייחסים כיום לשניהם זכות זו בפיתוח חקירת הפונקציה על אף שרוב הסימונים המתמטיים המקובלים לשימוש היום, הם אלה שטבע לייבניץ.

באותם ימים התעורר ויכוח מר ונוקב על ידי כמה פילוסופים שטענו כי הפיתוחים "החדשניים" האלה סותרים כל רעיון לוגי, מאחר שהם עוסקים במה שהם כינו "רוחות הרפאים של שברי מספרים". אולם בהמשך היו פילוסופים ומתמטיקאים אחרים שהצליחו לתת תוקף לוגי לתורה זו. ביחד עם העובדה שרעיונות אלה אכן "עבדו" והצליחו להשיג את מבוקשם, אומצו השיטות הנ"ל של חקירות הפונקציה וקיבלו מעמד רשמי במתמטיקה.

בספר לימוד זה לא אֶכָּנֵס להוכחות הפורמליות של תורת הגבולות הנדרשות כדי להבטיח את התוקף הלוגי של החקירה. במקום זאת אציג את הדברים באופן שיהיה משכנע מספיק, גם אם לא פורמלי.

מה דרוש לנו כדי לחקור פונקציה, או מה אנו מעוניינים לדעת כאשר אנו מקבלים פונקציה?

נניח (רק לשם המחשה) שאנו חוקרים פונקציית טיסה של מטוס לפי "הקופסה השחורה" הממוקמת בו, (כמובן, תחום זה כולל מקרים רבים ושונים אחרים) ונניח שרום הטיסה המתוכנן היה 3 ק"מ מעל פני הקרקע.

נרצה לדעת מספר דברים על מהלך הטיסה. ראשית כמה פעמים חצה המטוס את הרום הזה. אם נראה תנודות רבות מדי, נוכל להסיק שהטיסה לא הייתה יציבה; אולי בשל כשלים במטוס או בשל תנאי הבריאות של הטייס. אולי אפילו נלמד על יציבות הטייס (ייתכן שהיה טירון). יעניין אותנו מאוד מה היו הגבהים המקסימליים והמינימליים של הטיסה. נוכל ללמוד מכך על צריכת הדלק של המטוס ועל תנאי צפיפות האוויר שבהם הוא טס. כמו כן נשים לב ל<u>קצב</u> הנסיקות והצלילות. יש שהן מסוכנות מאוד בשל תלילותן. זה יכול ללמד אותנו אם היו תקלות פתע שבהן נאלץ הטיס לנסוק בחדות, או שהן היו מתוכננות.

באופן כללי אנו רואים שאם יהיה בידינו כלי משמעותי לחקירת פונקציה זו, נוכל ללמוד הרבה על תנאי הטיסה ולהבין את מהלכי המטוס והטייס. לימוד זה יעזור לנו גם במקרים של תאונות מטוסים שבהם איננו יכולים כבר לשוחח עם הטייס, גם במקרים שבהם אנו מכשירים טייס ומתדרכים אותו, וגם כאשר אנו מכניסים לשימוש מטוס חדש.

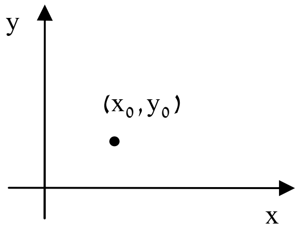
כבר למדנו כיצד למצוא נקודות 0 על פונקציה. כדי למצוא את השינויים האחרים שהעלינו, עלינו ללמוד נושא חדש נוסף והוא מציאת השיפועים של הפונקציה. שיפוע הוא בדיוק אותו קצב שינוי שאנו מחפשים. מה מידת השיפוע של המטוס כאשר נסק או צלל.

זה הנושא הראשון שנלמד לאחר תזכורת בפונקציית קו ישר.

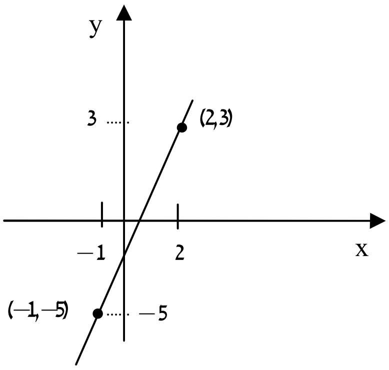
פונקציות – חזרה

נקודות על מערכת צירים :

לכל נקודה יש שני שיעורים (x_0,y_0) .



שימו לב: אנו מפרידים בין x,y ללא אינדקס המתארים <u>משתנים</u>, לבין x_0,y_0 עם ציון אינדקס המייצגים <u>נקודות</u>.



למדנו על פונקציות בכלל שלכל x יש ערך y אחד ואחד בלבד.

כמו כן למדנו את הסימונים :

$$f(2)=3\ \ ,\ \ f(-1)=-5$$

גם ניתחנו בעבר את פונקציית הקו הישר $y=mx+n$ כאשר m הוא פרמטר המייצג את השיפוע,

ו- n היא נקודת חיתוך הישר עם ציר ה- y (כאשר $x=0$).

את השיפוע הגדרנו על ידי : $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

לדוגמה בציור ששרטטנו : $m=\frac{3+5}{2+1}=\frac{8}{3}$

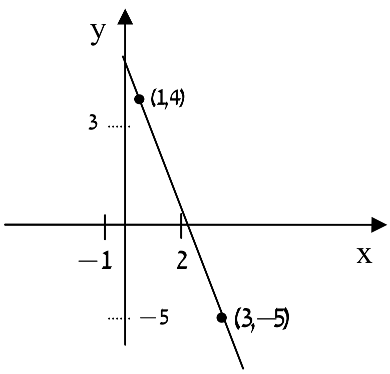
גם למדנו איך למצוא את משוואת הישר על ידי **שיפוע** ו**נקודה** לפי הנוסחה : $y-y_1=m(x-x_1)$

ובמקרה שלנו נבחר את השיפוע $\frac{8}{3}$ ואת הנקודה $(2,3)$:

$$y-3=\frac{8}{3}(x-2)$$

$$y-3=\frac{8}{3}x-\frac{16}{3}$$

$$\underline{y=\frac{8}{3}x-\frac{7}{3}}$$



<u>בדיקת הבנה</u>

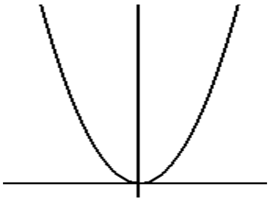
1. א. חשבו את שיפוע הישר המשורטט.
   ב. רשמו את משוואת הישר הנתון.
   ג. קבעו היכן נמצאת הנקודה $(2,1)$ – על הישר , מעל הישר או מתחת לישר.
2. רשמו את משוואת הישר העובר בנקודות : $f(2)=1$ $f(0)=-5$

על סימטריה ומתמטיקה:

אם נתבונן סביבנו, נוכל לראות שכל הטבע מכיל בתוכו מגוון רחב של סימטריות. כמעט כל בעלי החיים נבנים בסימטריה סביב קו האמצע של גופם. אלמוגים וקונכיות יוצרים סימטריות מורכבות יותר. גם בחינתנו את היפה ואת האיכותי מושפעת מסימטריות. אנו נהנים למראה ארכיטקטורה סימטרית ומעריכים מוזיקה וצלילים סימטריים.

חקר הסימטריות הוא ענף של המתמטיקה. אנו נתמקד רק בשתי הסימטריות הבאות:

1. <u>סימטריית הפונקציה הזוגית:</u>



אם נשרטט את הפונקציה: $y = x^n$ עבור n זוגי,

נגלה כי כולן סימטריות ביחס לציר y.

הסימן האלגברי לכך הוא: $y_{(x)} = y_{(-x)}$

כמו כן אנו יודעים שעבור $y = x^2$: $y_{(-2)} = y_{(2)} \Rightarrow (-2)^2 = 2^2$

כך גם בפונקציה $y = x^4$: $(-2)^4 = 2^4$

ולכן ההגדרה לפונקציה <u>זוגית</u>: $f(x) = f(-x)$

המשמעות היא שפונקציה זוגית היא סימטרית ביחס לציר y.

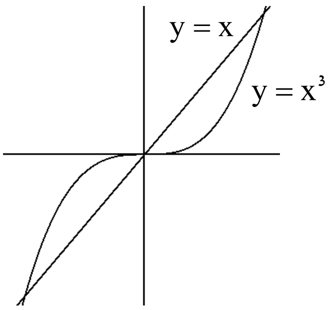
דוגמה: $y = x^4 - 3x^2 + 2$

עבור $x = n$ נקבל: $f(n) = n^4 - 3n^2 + 2$

עבור $x = -n$ נקבל: $f(-n) = (-n)^4 - 3(-n)^2 + 2 = n^4 - 3n^2 + 2$

כלומר: $f(n) = f(-n)$, ולכן הפונקציה זוגית.

2. <u>סימטריית הפונקציה האי-זוגית:</u>



אם נשרטט את הפונקציה: $y = x^n$

עבור n אי-זוגי, נראה שנקבל סימטריה קצת שונה. זו סימטריה של סיבוב הרביע הראשון ב- 180^0.

הסימן האלגברי לכך הוא: $y_{(x)} = -y_{(-x)}$

לדוגמה, בפונקציה $y = x$: $y_{(1)} = -y_{(-1)} \Rightarrow 1 = -(-1)$

או בפונקציה $y = x^3$: $y_{(2)} = -y_{(-2)} \Rightarrow 2^3 = -(-2)^3$

$8 = -8$

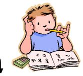
ולכן ההגדרה לפונקציה אי זוגית: $f(x) = -f(-x)$

דוגמה: $y = \frac{1}{x} + x$

עבור $x = n$ נקבל: $y_{(n)} = \frac{1}{n} + n$

עבור $x = -n$ נקבל: $y_{(-n)} = \frac{1}{-n} + (-n) = -\frac{1}{n} - n = -(\frac{1}{n} + n)$

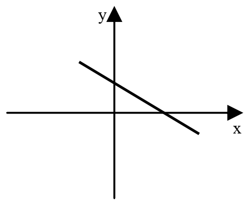
כלומר: $f(n) = -f(-n)$, ולכן הפונקציה אי זוגית.



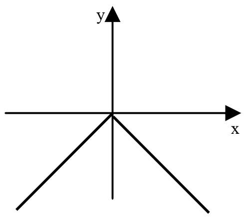
בדיקת הבנה

3. איזה מהשרטוטים הבאים מתאר גרף של פונקציה זוגית, ואיזה של פונקציה אי זוגית ?

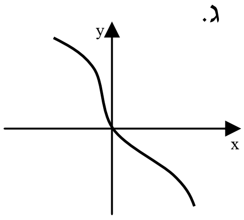
א.



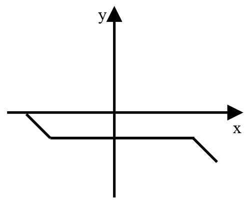
ב.



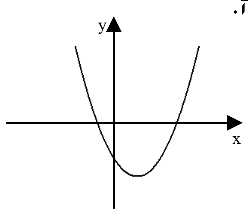
ג.



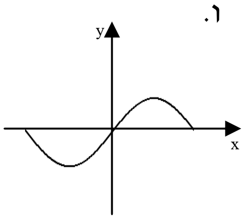
ד.



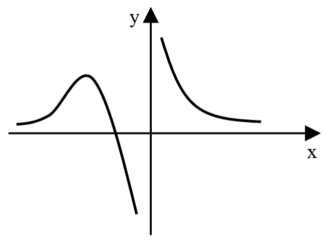
ה.



ו.



4. שרטטו את הגרף של הפונקציה ה"זוגית" לגרף שבשִׂרטוט.



5. קבעו האם הפונקציות הבאות זוגיות <u>לכל ערך</u> של n :

א. $f(x)=x^n$ (n שלם)

ב. $f(x)=\frac{x}{x^2+n}$ (n שלם)

ג. $f(x)=(x^2-3)^n$ (n שלם)

ד. $f(x)=x+n$ (n שלם)

ה. $f(x)=x^2+x-n$ (n שלם)

6. בדקו אילו מהפונקציות הבאות הן זוגיות, אילו אי זוגיות, ואילו לא זוגיות ולא אי זוגיות.

א. $f(x)=x^5+x^3$

ב. $g(x)=x^6-x^4$

ג. $h(x)=x^3+x^2$

ד. $k(x)=x^2+x^4$

7. נתונות הפונקציות $f(x)$ זוגית ו- $g(x)$ אי זוגית המוגדרות לכל x. בדקו את הפעולות הבאות והוכיחו זוגיות או אי זוגיות:

א. $y=f(x)+g(x)$

ב. $y=f(x)-g(x)$

ג. $y=f(x)\cdot g(x)$

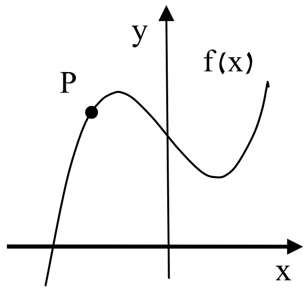
ד. $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

שיפוע של עקום

כאשר ניתחנו את פונקציית הקו הישר, היה ברור לנו כי השיפוע של הישר אחיד לכל אורכו. כלומר בכל ישר השיפוע הוא **קבוע**.

עתה אנו באים להרחיב את ניתוח השיפוע גם לפונקציות בהן השיפוע אינו קבוע.

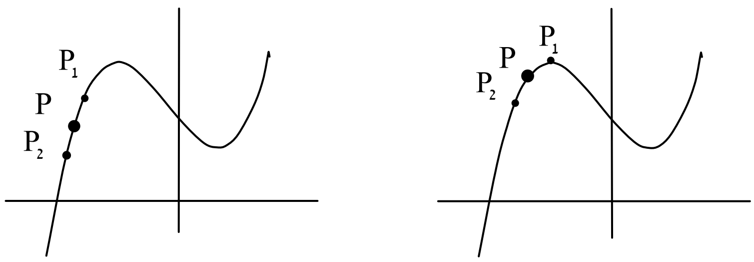
נבנה עקומה כלשהי, ונבחר עליה נקודה $P(x_0,y_0)$



אנו יודעים ששיפוע נמדד על ידי שתי נקודות: (x_1,y_1) , (x_2,y_2) כפי שהגדרנו את m. כיצד נוכל לקבוע את שיפוע הפונקציה בנקודה P ?

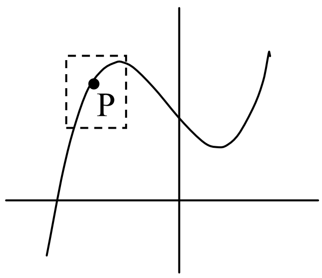
אחד הרעיונות הוא לקחת נקודה לפני P ונקודה אחרי P, ולקבל שיפוע ממוצע כלשהו. אולם ברור שלא יהיה זה שיפוע מדויק, ומידת הדיוק תשתנה בהתאם למיקום של P.

דוגמה:

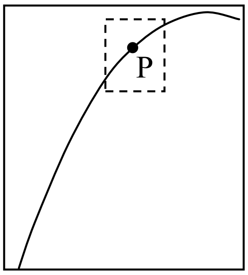


ברור שהדיוק בציור ב' (שבו הגרף הוא כמעט קו ישר) רב יותר מהדיוק בציור א' (שבו הגרף מתעקם), ובשניהם לא נקבל את השיפוע בנקודה P.

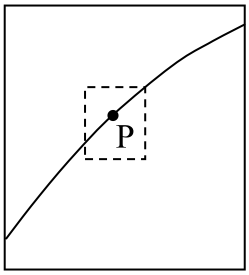
כדי למצוא שיפוע בנקודה נבצע הגדלה של האיור. נשרטט את האיור המקורי שוב:



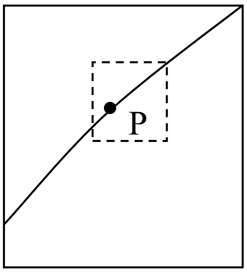
נגדיל את האיור סביב P :



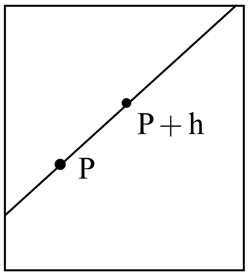
הגדלה א׳



הגדלה ב׳



הגדלה ג׳



הגדלה ד׳

אנו נסתפק בהגדלות אלה, אולם יש מי שירצה להמשיך ולהגדיל, וזה גם בסדר. הרעיון הכללי הוא שבסופן של ההגדלות יסכים המגדיל שניתן להתייחס אל הקו כאל קו <u>ישר</u>.

על הקו הישר הזה נקצה נקודה שנייה : $P+h$. אם נחזור ונבצע הקטנה של הקו לגודלו המקורי, נמצא ש- P למעשה, מתלכדת עם $P+h$, כלומר : $h \to 0$ (h שואף לאפס). זוהי נקודה חשובה להבנה. h הוא גודל קטן מאוד מאוד. הוא כל כך קטן, שנסכים כולנו שהוא איננו ה- 0 המתמטי, אך הוא זניח כאילו הוא 0.

לשם דוגמה עבורנו $h < 0.0000001$ יכול להיחשב 0 לצורך חישובים של הכפלה וחיבור.

אולם אם אנו זקוקים לדיוק רב יותר, זה יהיה טוב גם אם $h < 10^{-15}$.

נסו, למשל, לחבר במחשב $1+10^{-15}$; תקבלו 1. כלומר גם המחשב (או יצרניו) מתייחסים לגודל זה כאל 0.

זו המשמעות של $h \to 0$.

עתה יש בידינו שתי נקודות : $P,\ P+h$

הנקודה P על הגרף תוגדר : $(x_0, f(x_0))$, והנקודה $P+h$ על הגרף תוגדר : $(x_0+h, f(x_0+h))$. ועתה יש לנו שתי נקודות לביצוע חישוב השיפוע.

לפי ההגדרה : $m = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0}$

כלומר :

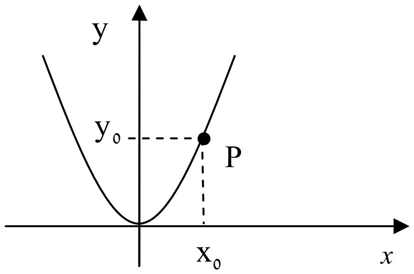
$$\boxed{m = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{כאשר} \quad h \to 0}$$

<u>חשוב לזכור ש- $h \neq 0$ ממש, ולכן עדיין החילוק כשר וחוקי!</u>

כך נוכל לחשב שיפועים של פונקציות שאינן קו ישר, ולזהות בכל נקודה מהו השיפוע שלה.

נתחיל עם פונקציה מוכרת ופשוטה : $y = x^2$

נבחר על גרף הפונקציה נקודה כלשהי P .



שיעורי הנקודה P הם : (x_0, y_0), ולפי ההגדרה שמצאנו : $m = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ כאשר $h \to 0$

נציב בפונקציה : $f(x_0) = x_0^2$

$f(x_0 + h) = (x_0 + h)^2$

נקבל : $m = \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h}$

ואחרי חיסור : $m = \frac{2x_0h + h^2}{h}$

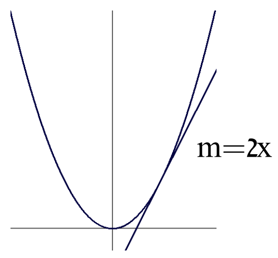
על ידי חילוק $h \neq 0$: $m = \frac{h(2x_0 + h)}{h}$

$m = 2x_0 + h$

אבל $h \to 0$, ולכן: $m = 2x_0$

מכיוון ש : x_0 היא נקודה כלשהי, אנו יכולים להתייחס אל x_0 כאל כל x על הפונקציה ולקבל :

$$\boxed{m = 2x}$$



מדוגמה זו ניתן ללמוד מספר דברים :

א. קיבלנו פונקציה (חדשה) של השיפועים.
ב. השיפוע תלוי ב-x . ואכן מתוך השרטוט אנו רואים שככל ש-x מתרחק מ-0 , ערכו המוחלט גבוה יותר! כלומר השיפוע תלול יותר.
עבור $x < 0$ השיפוע שלילי (הפונקציה יורדת), ועבור $x > 0$ השיפוע חיובי (הפונקציה עולה).
ג. משמעות השיפוע בנקודה P היא, למעשה, שיפוע הישר שישיק לפונקציה בנקודה זו.

נחזור לתובנה א. לפיה קיבלנו פונקציה (חדשה) של שיפועים. אנו מכנים פונקציה זו בשם נגזרת הפונקציה,

והסימון המקובל הוא: $y' = f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$

כל הסימונים האלה מייצגים את המשמעות שהפעולה שבוצעה על הפונקציה, היא פעולת גזירה. כלומר מציאת פונקציית השיפועים של הפונקציה המקורית כתלות במשתנה x.

דוגמה נוספת תהיה מציאת השיפוע לפונקציה $y = x^3$

גם כאן: $m = \frac{(x_0 + h)^3 - x_0^3}{h}$

פתיחת סוגריים: $m = \frac{x_0^3 + 3x_0^2 h + 3x_0 h^2 + h^3 - x_0^3}{h}$

ואחרי חיסור: $m = \frac{3x_0^2 h + 3x_0 h^2 + h^3}{h}$

אחרי חילוק $h \neq 0$: $m = 3x_0^2 + 3x_0 h + h^2$

אבל $h \to 0$, ולכן: $m = 3x_0^2$

ובהכללה עבור $y = x^3$: $\boxed{m = 3x^2}$

אם נמשיך בדרך זו, נקבל:

$(x^2)' = 2x$

$(x^3)' = 3x^2$

$(x^4)' = 4x^3$

$(x^5)' = 5x^4$

וזה כבר מרמז על הכלל: $\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}$ לכל n

ולכן:

$(x^7)' = 7x^6$

$(x^{-2})' = -2x^{-3}$

$(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

פועל יוצא של חוק כללי זה: $(x^1)' = 1 \cdot x^0 = 1$

ולכן נגזרת של x תמיד תהיה 1.

כמו כן אנו יכולים למצוא ש: $(x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2}$

נעבור לכתיבה מפורשת. מחוקי החזקות למדנו: $\frac{1}{x} = x^{-1}$

ומתוך הגזירה: $-x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

ולכן: $\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}}$

נפעיל את חוקי החזקות גם על השוויון : $(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

אנו יודעים כי $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$, ולכן : $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

ולכן : $\boxed{(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$

נסכם את הנגזרות המִיָדיות שקיבלנו :

$$\boxed{(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2} \qquad (x^n)' = nx^{n-1}}$$

<u>בדיקת הבנה</u>

8. גזרו את הפונקציות הבאות :

א. $\left(x^9\right)' =$

ב. $\left(x^{11}\right)' =$

ג. $\left(x^{-3}\right)' =$

ד. $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' =$

מֵעבר לנגזרות המִיָדיות אנו מוצאים 5 כללי גזירה :

<u>כלל 1 -</u> <u>נגזרת של קבוע · פונקציה = קבוע · נגזרת הפונקציה</u>.

כלומר : $\left[c\cdot x^n\right]' = c\cdot(x^n)' = c\cdot nx^{n-1}$ (c מספר קבוע)

לדוגמה : $(3x^4)' = 3\cdot 4x^3 = 12x^3$

דוגמה נוספת : $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3}\cdot(x^3)' = \frac{1}{3}\cdot 3x^2 = x^2$

מכלל זה אנו יכולים גם ללמוד מהי הנגזרת של מספר קבוע.

את המספר הקבוע c ניתן לכתוב בצורה : $c = c\cdot x^0$ (כי $x^0 = 1$ לכל x),

ולכן : $c' = (c\cdot x^0)' = c\cdot(x^0)' = c\cdot 0\cdot x^{-1} = \underline{\underline{0}}$

ולכן נגזרת של מספר קבוע היא תמיד 0. $\boxed{c'=0}$

כך גם ניתן ללמוד מהכלל על הנגזרת של $\frac{c}{x}$: $\left(\frac{c}{x}\right)' = \left(c\cdot\frac{1}{x}\right)' = c\cdot\left(\frac{1}{x}\right)' = c\cdot -\frac{1}{x^2} = -\frac{c}{x^2}$

למשל: אם $y = \frac{3}{x}$ אז $y' = -\frac{3}{x^2}$

כלל 2 - נגזרת של סכום = סכום הנגזרות.

כלומר : $(x^n + x^m)' = nx^{n-1} + mx^{m-1}$

לדוגמה : $(x^6 - x^3 + x)' = 6x^5 - 3x^2 + 1$

דוגמה לשימוש בשני הכללים הראשונים :

א. גזרו את הפונקציה : $y = 3x^3 - 4x^2 + 2x - 5$

פתרון : $y' = 9x^2 - 8x + 2$

ב. גזרו את הפונקציה : $y = \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} + 5$

פתרון : $y' = \frac{4x^3}{2} - \frac{3x^2}{3} = 2x^3 - x^2$

בדיקת הבנה

9. גזרו את הפונקציות הבאות :

א. $y = x^6 - \frac{x}{2}$

ב. $y = x + 2x^5$

ג. $y = \frac{2}{x} + x^2 - 1$

ד. $y = \frac{x^5}{5} - \frac{5}{x} + 5$

כלל 3 - נגזרת של פונקציית מכפלה :

$$\boxed{y' = \left[u(x) \cdot v(x)\right]' = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)}$$

ג. גזרו את הפונקציה : $y = 2x(x^2 - 3)$

פתרון :

א. כדי לחשב את נגזרת פונקציית המכפלה נכתוב תחילה את הגורמים :

$u(x) = 2x \qquad v(x) = x^2 - 3$

אחרי גזירה : $u'(x) = 2 \qquad v'(x) = 2x$

ב. הכפלה בהצלבה : $y' = 2(x^2 - 3) + 2x \cdot 2x$

כלומר : $y' = 2x^2 - 6 + 4x^2 = \underline{6x^2 - 6}$

בפונקציות פשוטות ניתן, כמובן, לפתוח סוגריים ולבצע גזירה :

אחרי פתיחת סוגריים : $y=2x^3-6x$

ואחרי גזירה : $y'=6x^2-6$

ד. גזרו את הפונקציה: $y = 3x^2\sqrt{x}$

פתרון:

הגורמים: $u = 3x^2 \qquad v = \sqrt{x}$

אחרי גזירה: $u' = 6x \qquad v' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

לכן: $y' = 6x\sqrt{x} + \frac{3x^2}{2\sqrt{x}}$

ה. גזרו את הפונקציה: $y = \frac{x^7 - 5x^2 + 3x + 1}{x}$

פתרון:

פונקציה זו ניתן לכתוב בצורה: $y = \frac{1}{x}(x^7 - 5x^2 + 3x + 1)$, וזוהי פונקציית מכפלה!

הגורמים: $u(x) = \frac{1}{x} \qquad v(x) = x^7 - 5x^2 + 3x + 1$

$u' = -\frac{1}{x^2} \qquad v' = 7x^6 - 10x + 3$

ולכן:

$$y' = -\frac{x^7 - 5x^2 + 3x + 1}{x^2} + \frac{7x^6 - 10x + 3}{x} = \frac{-x^7 + 5x^2 - 3x - 1 + 7x^7 - 10x^2 + 3x}{x^2}$$

$$y' = \frac{6x^7 - 5x^2 - 1}{x^2} = 6x^5 - 5 - \frac{1}{x^2}$$

דרך שנייה לפתרון:

אחרי חילוק: $y = \frac{x^7 - 5x^2 + 3x + 1}{x} = x^6 - 5x + 3 + \frac{1}{x}$

ואחרי גזירה: $y' = 6x^5 - 5 - \frac{1}{x^2}$

ו. גזרו את הפונקציה: $y = \frac{\sqrt{x}}{x}$

פתרון:

$u(x) = \sqrt{x} \qquad v(x) = \frac{1}{x}$

$u' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad v' = -\frac{1}{x^2}$

ולכן: $y' = \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{2(\sqrt{x})^3} - \frac{1}{x^{1.5}} = \frac{1-2}{2x^{1.5}} = -\frac{1}{2x^{1.5}}$

כידוע:	$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$
ולכן:	$x\sqrt{x} = \left(\sqrt{x}\right)^3$

בדיקת הבנה

10. גזרו את הפונקציות הבאות :

א. $y = -3x\left(x^3 - 3\right)$

ב. $y = \dfrac{4x + x^4 - 4}{x}$

ג. $y = -2x\sqrt{x}$

ד. $y = \dfrac{\sqrt{2x}}{x}$

ה. $y = (5x + 7) \cdot 6x^2 + 3x(4x^2 - 2x + 3)$

כלל 4 - נגזרת של פונקציית מנה :

$$\boxed{\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{\left[v(x)\right]^2}}$$

ז. גזרו את הפונקציה : $y = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 2x + 1}{x^2 - 5}$

פתרון :

$u(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1 \qquad v(x) = x^2 - 5$

$u' = 3x^2 + 6x - 2 \qquad v' = 2x$

ולכן :

$$y' = \frac{\left(3x^2 + 6x - 2\right)\left(x^2 - 5\right) - 2x\left(x^3 + 3x^2 - 2x + 1\right)}{\left(x^2 - 5\right)^2}$$

$$y' = \frac{3x^4 - 15x^2 + 6x^3 - 30x - 2x^2 + 10 - 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 2x}{\left(x^2 - 5\right)^2}$$

$$y' = \frac{x^4 - 13x^2 - 32x + 10}{\left(x^2 - 5\right)^2}$$

<u>טיפ</u> : ברוב המוחלט של המקרים אין סיבה טובה לפתוח את הסוגריים <u>במכנה</u>, להֶפך ; זה יכול לבלבל ולהזיק לנו בפתרונים שימושיים כפי שנראה בהמשך.

ח. גזרו את הפונקציה : $y = \dfrac{x^3 + 5}{2\sqrt{x}}$

פתרון :

$u(x) = x^3 + 5 \qquad v(x) = 2\sqrt{x}$

$u' = 3x^2 \qquad v' = \dfrac{2}{2\sqrt{x}}$

ולכן :

$$y' = \frac{3x^2 \cdot 2\sqrt{x} - \dfrac{\cancel{2}\left(x^3 + 5\right)}{\cancel{2}\sqrt{x}}}{\left(2\sqrt{x}\right)^2} = \frac{\dfrac{6x^2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} - x^3 - 5}{\sqrt{x}}}{4x}$$

$$y' = \frac{6x^3 - x^3 - 5}{4x\sqrt{x}} = \frac{5x^3 - 5}{4x\sqrt{x}}$$

ומה תהיה נגזרת הפונקציה : $y=\frac{1}{x}$?

פתרון : $v(x)=x$ $\quad u(x)=1$

$v'=1$ $\quad u'=0$

ולכן : $y'=\frac{0-1}{x^2}=-\frac{1}{x^2}$

וזה בדיוק מה שקיבלנו כנגזרת מִיָּדית : $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$

<u>בדיקת הבנה</u>

11. גזרו את הפונקציות הבאות :

א. $y=\frac{x^3+3x^2-3x+3}{x^2-3}$

ב. $y=\frac{x^2+2}{2\sqrt{x}}$

ג. $y=\frac{2x^3+5x^2+12x}{3x^2+7}$

<u>כלל 5</u> - עוסק בפונקציה המורכבת.

כדי להבין כלל זה עלינו ללמוד קודם מהי פונקציה מורכבת, וכיצד "מקלפים" אותה.

הבה נתבונן בפונקציה : $f(x)=2x+3$

ניתן להעלות את הפונקציה בחזקת 3 ולקבל : $g(x)=[f(x)]^3$

ומעתה : $g(x)=(2x+3)^3$

פונקציה זו כבר מורכבת משתי פונקציות : פונקציית הבסיס $f(x)$ והפונקציה $g(x)=[f(x)]^3$

עתה ניתן להרכיב גם את הפונקציה : $h(x)=\frac{1}{g(x)} \quad \leftarrow \quad h(x)=\frac{1}{(2x+3)^3}$

ובאותו אופן : $j(x)=\sqrt{h(x)} \quad \leftarrow \quad j(x)=\sqrt{\frac{1}{(2x+3)^3}}$

כך ניתן להרכיב פונקציות שונות זו על גבי זו.

הסימן המובהק לכך שהפונקציה היא מורכבת, הוא שבפונקציה כזו יופיע בדרך כלל רק x אחד, אולם נזהה בה מספר פעולות.

כדי "לקלף" פונקציה כזו אנו תמיד מתחילים מן החוץ פנימה.

נבחן את הפונקציה : $y=\frac{1}{(3x-5)^2}$, ונפרק אותה למרכיביה.

אנו רואים תחילה את התבנית : $y=\frac{1}{f(x)}$, ומכאן אנו למדים ש : $f(x)=(3x-5)^2$

אבל גם כאן יש תבנית: $f(x)=\left[g(x)\right]^2$, ומכאן: $g(x)=3x-5$. זו, כמובן, פונקציית הבסיס.

דוגמאות:

ט. הרכיבו את הפונקציה: $f(x)=x^2$ לפי הנתונים הבאים:

$$g(x)=\frac{1}{f(x)}$$
$$h(x)=g(x)+3$$
$$j(x)=\sqrt{h(x)}$$

פתרון:

$$f(x)=x^2$$
$$g(x)=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{x^2}$$
$$h(x)=g(x)+3=\frac{1}{x^2}+3$$
$$j(x)=\sqrt{h(x)}=\sqrt{\frac{1}{x^2}+3}$$

י. פרקו את הפונקציה: $y=\sqrt{\frac{1}{\left(4x^3-5\right)^2}}$ למרכיביה.

פתרון:

$$y=\sqrt{f(x)}$$
$$f(x)=\frac{1}{\left(4x^3-5\right)^2}=\frac{1}{g(x)}$$
$$g(x)=\left(4x^3-5\right)^2=\left[h(x)\right]^2$$
$$h(x)=\left(4x^3-5\right)$$

<u>בדיקת הבנה</u>

12. א. מצאו את הפונקציה $j(x)$ אם נתון: $f(x)=2x^2$

$$g(x)=\frac{1}{f(x)}$$
$$h(x)=g(x)+2$$
$$j(x)=\sqrt{h(x)}$$

ב. פרקו את הפונקציה $y=\sqrt{\frac{2}{\left(3x^3-1\right)^2}}$ למרכיביה.

עתה נוכל ללמוד את **כלל 5 -** נגזרת של פונקציה מורכבת :

גוזרים את הפונקציה החיצונית כאילו הפנימית היא משתנה יחיד, גוזרים את הפונקציה הפנימית כאילו אין פונקציה חיצונית, ומכפילים ביניהם.

דוגמה :

יא. גזרו את הפונקציה : $y=\frac{1}{(3x-1)^3}$

פתרון :

תחילה גוזרים לפי $y=\frac{1}{f(x)}$ כאשר $f(x)=(3x-1)^3$

מקבלים : $y'=-\frac{1}{[f(x)]^2}=-\frac{1}{(3x-1)^6}$ חיצונית

אחר כך גוזרים את $f(x)$ לפי $f(x)=[g(x)]^3$ כאשר $g(x)=3x-1$

ומקבלים : $f'(x)=3(g(x))^2=3(3x-1)^2$ חיצונית

ולבסוף גוזרים את $g(x)$: $g'(x)=(3x-1)'=3$

אחרי הכפלה : $y'=-\frac{1}{(3x-1)^6}\cdot 3(3x-1)^2\cdot 3$ שלמה

יב. גזרו את הפונקציה : $y=\sqrt{(2x-5)}$

פתרון : $y'=\frac{1}{2\sqrt{(2x-5)}}\cdot 2=\frac{1}{\sqrt{2x-5}}$

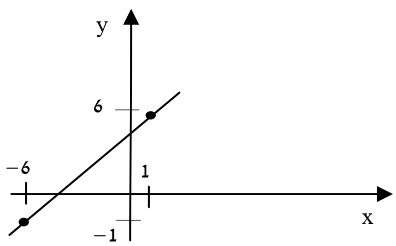
בדיקת הבנה

13. גזרו את הפונקציות הבאות :

א. $y=\frac{3}{(3x-3)^3}$

ב. $y=\sqrt{(5x-2)}$

תרגול עצמי:



14. א. חשבו את שיפוע הישר המשורטט.

ב. רשמו את משוואת הישר הנתון.

ג. קבעו היכן נמצאת הנקודה (2,1) – על הישר , מעל הישר או מתחת לישר .

15. רשמו את משוואת הישר העובר בנקודות : f(-1)=3 , f(0)=2.

16. גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $y = x^8$ ב. $y = x^{-2}$ ג. $y = x^{\frac{1}{2}}$

ד. $y = x^5 - \frac{x}{5}$ ה. $y = x^2 + 2x^5$ ו. $y = \frac{2x}{x} + x^2 - x^{-2}$

ז. $y = -4x\left(x^4 - 4\right)$ ח. $y = \frac{2x + 2x^4 - 2}{2x}$ ט. $y = 5\sqrt{x}$

י. $y = \frac{\sqrt{x}}{x}$ יא. $y = \frac{x^3 + 3}{3\sqrt{x}}$ יב. $y = \frac{x^4 + 4x^3 - 4x + 4}{x^2 - 4}$

17. הרכיבו את הפונקציה: $f(x) = x^2 + 2$ לפי הנתונים הבאים:

$$g(x) = \frac{1}{f(x)}$$

$$h(x) = g(x) - 1$$

$$j(x) = \sqrt{h(x)}$$

18. פרקו את הפונקציה: $y = \sqrt{\frac{4}{\left(4x^4 - 1\right)^2}}$ למרכיביה.

19. גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $y = (3x - 5)^7$

ב. $y = \sqrt{\frac{5x - 7x^2}{1 - x}}$

ג. $y = \left(\frac{1 - x^3}{x - 3}\right)^5$

ד. $y = \frac{1}{(x - 4x^2 + 5)^3}$

ה. $y = \sqrt{(x^3 - 4x^2 - 9x)^7 + 1}$

ו. $x\sqrt{1 - x^2}$

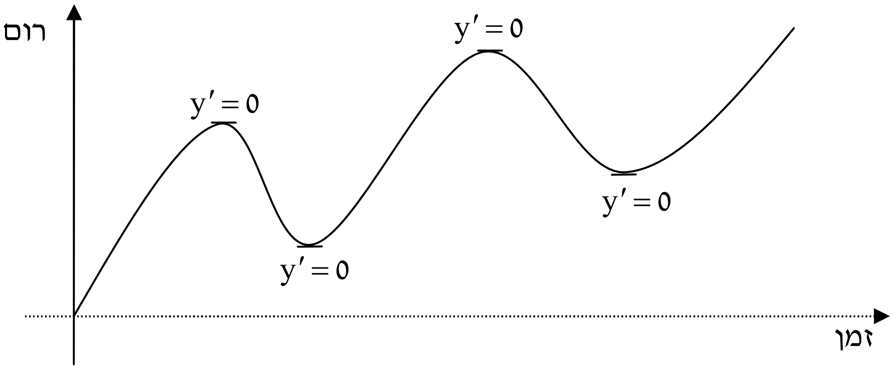
ז. $(x^3 - 4x^5)\sqrt{2x - 3}$

ח. $\frac{1}{(x + 7)^4}$

ט. $\frac{1}{\sqrt{2x - x^6}}$

אם נחזור לתנועת המטוס שפתחנו בה (עמ' 78), הרי ברור שנְסִיקָה תֵּירָאה על שיפועים חיוביים, וצלילה תֵּיראה על שיפועים שליליים. במעבר מנְסִיקָה לצלילה יהיה על המטוס לעבור דרך שיפוע 0. כלומר כדי לדעת כמה פעמים עבר המטוס ממצב נְסִיקָה למצב צלילה ולהפך, עלינו לדעת כמה פעמים הוא עבר שיפוע 0.

נתאר את הרעיון בציור:

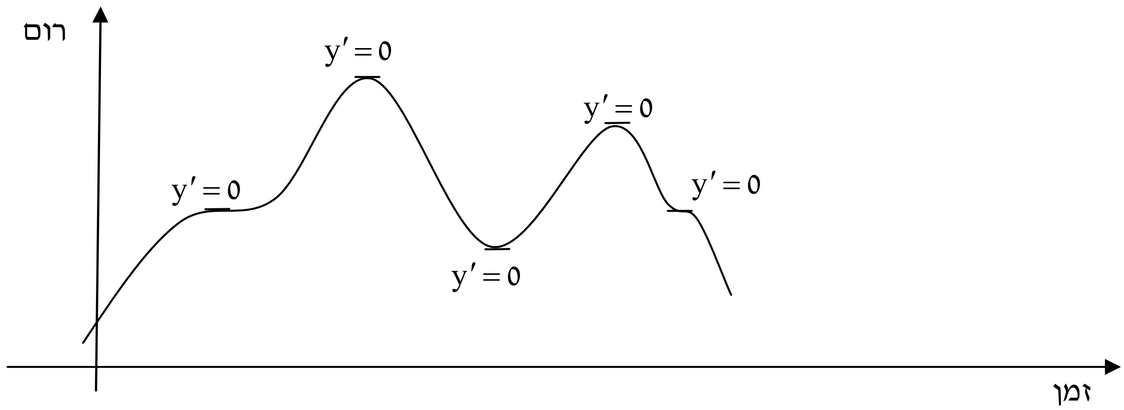


עתה ברורה לנו יותר נכונות המשפט: בכל מעבר מעלייה לירידה או מירידה לעלייה הפונקציה חייבת לעבור דרך שיפוע 0.

האם גם המשפט ההפוך מתקיים?

כלומר האם גם בכל פעם שהשיפוע הוא 0, נהיה עדים למעבר מעלייה לירידה או מירידה לעלייה?

התשובה היא שלילית. יש מצב שבו המטוס נוסק, מתיישר וממשיך בעלייה, וגם להֶפך; יכול להיות שהמטוס ינמיך, יתיישר וימשיך לרדת. למשל, בציור הבא:



אנו רואים שיש מצבים בהם נמצא $y'=0$ ללא שינוי במגמת העלייה או הירידה. לכן כדי לדעת בדיוק מתי פונקציה עולה ומתי היא יורדת (ובדוגמה שלנו: מתי המטוס נסק ומתי צלל), אין להסתפק רק במציאת שיפועי 0 אלא גם במגמת השיפועים סביב הנקודה בה השיפוע מתאפס.

דוגמה:

יג. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה: $y=x^3-4x^2+5x-3$?

פתרון:

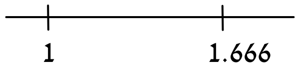
תחילה נמצא את הנקודות שבהן $y'=0$.

נגזור את הפונקציה: $y'=3x^2-8x+5$

פתרון המשוואה: $3x^2-8x+5=0$

נותן: $x_1=1$ $x_2=1.666$

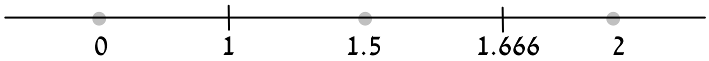
כדי לברר את המגמה סביב כל x שמצאנו, נוח לשרטט את הישר הממשי ולהקצות עליו את הנקודות שבהן $y'=0$:



חשוב מאוד לשים לב לשני דברים עיקריים :

1. השרטוט איננו לפי קנה-מידה מסוים אלא רק סכֵמה, ולכן נקצה את הנקודות במקומות הנוחים לנו.
2. שרטוט זה מראה לנו את התחומים השונים שלגביהם נרצה לבדוק את מגמת הפונקציה.

מניתוח הציור ברור שאם יש שינוי מגמה, הרי הוא בין התחום : $x<1$ לבין התחום : $1<x<1.666$; באותו אופן יכול להיות שינוי בין התחום : $1<x<1.666$ לבין התחום : $x>1.666$. כדי לבדוק את המגמה בכל תחום די לנו אם נבדוק את אחד הערכים בתחום. למשל :



הצבה של $x=0$ בנגזרת תגלה לנו : $y'(0)=3\cdot 0-8\cdot 0+5>0$

כלומר השיפוע חיובי, והפונקציה עולה.

כבר ראינו שאם הפונקציה עולה, היא עולה עד לקצה התחום, כלומר עד $x=1$.

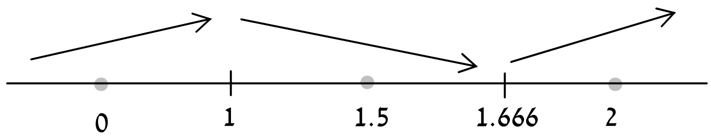
באותו אופן נבדוק את $x=1.5$: $y'(1.5)=3\cdot 1.5^2-8\cdot 1.5+5<0$

כלומר בכל התחום : $1<x<1.666$ הנגזרת שלילית, והפונקציה יורדת. (שימו לב : כבר למדנו שאם היה היפוך, הייתה חייבת להתקבל עוד נקודה בה $y'=0$!)

לבסוף נציב $x=2$: $y'(2)=3\cdot 2^2-8\cdot 2+5>0$

כלומר בתחום $x>2$ הפונקציה עולה.

נוח מאוד לשרטט את תחומי העלייה והירידה של הפונקציות כך :



חץ במגמת עלייה מסמן תחום בו הפונקציה עולה.
חץ במגמת ירידה מסמן תחום בו הפונקציה יורדת.

עתה אנו רואים :

בתחום : $x<1$ הפונקציה עולה.

בתחום : $1<x<1.666$ הפונקציה יורדת.

בתחום : $x>1.666$ הפונקציה עולה.

מתוך השִׂרטוט קל מאוד גם להבין מדוע הנקודות ששיעורי ה- x שלהן הם 1.666 , 1, נקראות נקודות <u>קיצון</u>.

הנקודה ששיעור ה- x שלה הוא 1.666 , היא נקודת <u>מינימום</u> **מקומי**, כלומר נקודה שבסביבתה הקרובה היא <u>הנמוכה</u> ביותר. או בניסוח אחר: ערך ה- y שלה יהיה מינימלי באזור בו היא נמצאת.

לעומתה הנקודה ששיעור ה- x שלה הוא 1, תהיה נקודת <u>מקסימום</u> **מקומי**, כלומר בסביבתה - ערך ה- y שלה הוא הגבוה ביותר (על נושא מקסימום **מוחלט** ומינימום **מוחלט** נרחיב בהמשך).

נמצא ערכים אלו:

כדי למצוא ערך של נקודה יש להציב את שיעור ה- x שלה, כמובן, בפונקציה כי היא מתארת את אוסף כל הנקודות השייכות לפונקציה. לכן:

$$y = x^3 - 4x^2 + 5x - 3$$

$$y(1) = 1^3 - 4\cdot 1^2 + 5\cdot 1 - 3 = -1$$

$$y(1.666) = 1.666^3 - 4\cdot 1.666^2 + 5\cdot 1.666 - 3 = -1.15$$

ומכאן שנקודות הקיצון הן:

נקודת מקסימום: $(1,-1)$

נקודת מינימום: $(1.666,-1.15)$

יד. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה: $y = x^4 + x^3 + 3$ וקבעו את סוגן.

פתרון:

על המושג נקודות קיצון כבר הרחבנו. כאשר מבקשים לקבוע את סוגן, עלינו לברר אילו סוגים קיימים. ראינו שניים מהם: נקודות <u>מקסימום</u> מקומי שבהן יש החלפת מגמה מעלייה לירידה, ונקודות <u>מינימום</u> מקומי שבהן יש החלפת מגמה מירידה לעלייה. יש עוד סוג אחד של נקודות, והוא נקודות <u>פיתול</u>. נקודות פיתול הן אלה שבהן הנגזרת מקיימת $y' = 0$, אולם אין שינוי במגמה במעבר על פני הנקודה.

פתרון דוגמה זו באופן מעשי זהה בדיוק לדרך הפתרון של הדוגמה הקודמת:

נתונה הפונקציה: $y = x^4 + x^3 + 3$

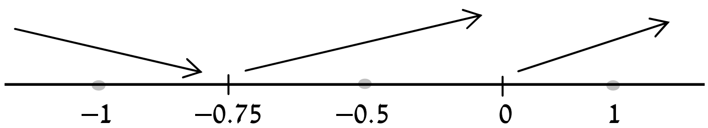
הנגזרת: $y' = 4x^3 + 3x^2$

נציב $y' = 0$ ונקבל: $4x^3 + 3x^2 = 0$

$$x^2(4x+3) = 0$$

פתרון: $x_1 = 0 \qquad x_2 = -\frac{3}{4} = -0.75$

שִׂרטוט ובחירת נקודות:



$$y'(-1) = 4\cdot(-1)^3 + 3\cdot(-1)^2 < 0$$

$$y'(-0.5) = 4\cdot(-0.5)^3 + 3\cdot(-0.5)^2 > 0$$

$$y'(1) = 4\cdot 1^3 + 3\cdot 1^2 > 0$$

כלומר הפונקציה יורדת בתחום: $x < -0.75$

והפונקציה עולה בתחום: $-0.75 < x < 0 \ , \ x > 0$

נמצא את נקודות הקיצון:

$$y(-0.75)=(-0.75)^4+(-0.75)^3+3=2.89$$
$$y(0)=0^4+0^3+3=3$$

הנקודה $(0,3)$ נקודת פיתול – איננה נקודת קיצון.

הנקודה $(-0.75,2.89)$ נקודת מינימום.

לעִתים אנו נדרשים לפתור פונקציות מורכבות יותר. באופן מעשי אין הבדל בין פתרון פונקציה פשוטה יחסית לבין פתרון פונקציה מורכבת יותר. כל עוד עובדים באופן שיטתי ומסודר, כל הפונקציות נעשות פשוטות לפתרון.

טו. מצאו נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה של הפונקציה: $y=\frac{x^5}{5}-\frac{1}{2}x^4-x^3$

פתרון:

תחילה נמצא את נגזרת הפונקציה: $y'=x^4-2x^3-3x^2$

$$y'=x^2(x^2-2x-3)$$

בנקודות הקיצון $y'=0$ ולכן: $x^2(x^2-2x-3)=0$

כלומר: $x^2-2x-3=0$ או $x^2=0$

$x=0$

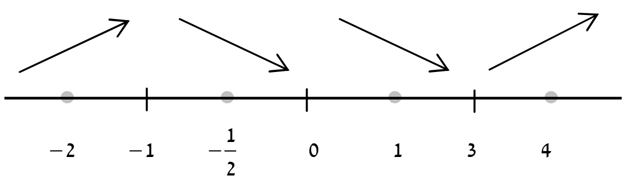
$$x^2-3x+x-3=0$$
$$x(x-3)+(x-3)=0$$ (לפי טרינום)
$$(x+1)(x-3)=0$$
$$x_1=-1 \quad x_2=3$$

נמצא את ערכי y של נקודות אלה על ידי הצבה בפונקציה:

$$y(0)=0$$
$$y(-1)=\frac{(-1)^5}{5}-\frac{1}{2}\cdot(-1)^4-(-1)^3=0.3$$
$$y(3)=\frac{3^5}{5}-\frac{1}{2}\cdot 3^4-3^3=-18.9$$

קיבלנו 3 נקודות החשודות כנקודות קיצון: $(3,-18.9)$ $(-1,1.3)$ $(0,0)$

עתה נמצא תחומי עלייה וירידה:



הצבה בנגזרת:

$$y'(-2)=(-2)^2((-2)^2-2(-2)-3)>0$$
$$y'(-\frac{1}{2})=(-\frac{1}{2})^2((-\frac{1}{2})^2-2(-\frac{1}{2})-3)<0$$
$$y'(1)=1^2(1^2-2\cdot 1-3)<0$$
$$y'(4)=4^2(4^2-2\cdot 4-3)>0$$

כלומר אנו מוצאים נקודת מינימום אחת $(3,-18.9)$, נקודת מקסימום אחת $(-1,0.3)$ ונקודת פיתול אחת $(0,0)$. תחומי העלייה והירידה:

$x<1$ תחום עלייה

$-1<x<0$ תחום ירידה

$0<x<3$ תחום ירידה

$x>3$ תחום עלייה

למציאת נקודות קיצון/פיתול:

1. איפוס הנגזרת למציאת xים של נקודות חשודות
2. הצבה בפונקציה המקורית ומציאת ערכי y ל-xים שנמצאו ב-(1)
3. בחירת xים בתחומים השונים
4. הצבה של (3) בנגזרת – $y'>0 \leftarrow$ עלייה

   $y'<0 \leftarrow$ ירידה
5. מציאת נקודות קיצון ופיתול לפי:

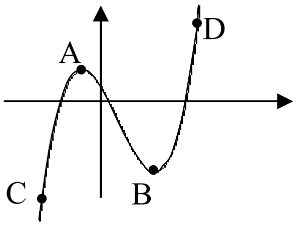
↗↘	↘↗	↗↗	↘↘
מקס.	מינ.	פיתול	פיתול

<u>בדיקת הבנה</u>

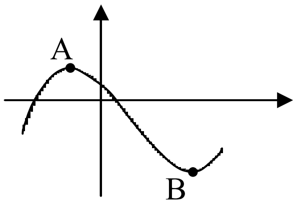
20. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה: $y=x^3+2x^2-35x+9$?
21. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה: $y=x^5+x^4-1$ וקבעו את סוגן.
22. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה: $y=3x+x^3$ וקבעו את סוגן.
23. מצאו תחומי עלייה וירידה בפונקציה: $y=(2-x)\sqrt{x}$
24. מהם תחומי העלייה והירידה בפונקציה: $y=0.4x^4-5x^2+2$?

<u>מקסימום ומינימום מקומי ומוחלט</u>

כבר רמזנו שכאשר מוצאים נקודות קיצון בפונקציה, קל לזהות אם היא מקסימום מקומי או מינימום מקומי. הדגשנו את העובדה שערך ה- y שלה הוא ביחס <u>לסביבה הקרובה</u>.



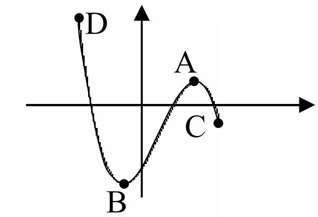
כדי להבין את משמעות הדברים נפנה לשִׂרטוט:
מתוך השִׂרטוט אנו רואים שנקודות A ו- B הן נקודות קיצון.
A היא נקודת מקסימום ו- B היא נקודת מינימום.
אבל y(A) < y(D) כלומר ביחס לפונקציה כולה הנקודה A איננה מקבלת את ערך ה- y המקסימלי כי y(D) גדול ממנה.
כך גם לגבי נקודה B. y(B) >y(C) גם כאן ערך ה- y של נקודה C קטן מערך ה- y של נקודה B
זו המשמעות שהנקודות B,A הן נקודות קיצון <u>מקומיות</u>.



לעומת זאת אם נתבונן בציור הבא:
בשִׂרטוט זה אנו מוצאים שנקודות B,A הן נקודות מקסימום ומינימום לא רק ביחס לסביבתם אלא ביחס לכל הפונקציה המשורטטת.
אמנם איננו יודעים כיצד מתנהגות הפונקציות בהמשך, אך <u>בתחום</u> המשורטט ברור כי A היא הנקודה הגבוהה ביותר, ו- B היא הנקודה הנמוכה ביותר.
כלומר נקודות קיצון אלה אינן רק מקומיות אלא גם מוחלטות לכל הפונקציה בתחום.

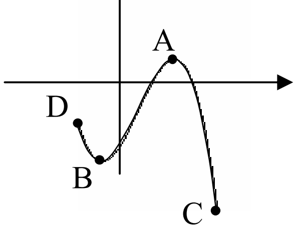
זה ההבדל בין נקודות קיצון מקומיות לנקודות קיצון מוחלטות.
אם הן נקודות קיצון רק ביחס לסביבתן הקרובה, הן תהינה מקס. מקומי; מינ. מקומי, ואם הן בעלות ערכי y קיצוניים ביחס לכל הפונקציה בתחום, הן תהינה מקס. מוחלט ומינ. מוחלט.

נבחן כמה דוגמאות:
בשִׂרטוט זה אנו מוצאים ש:

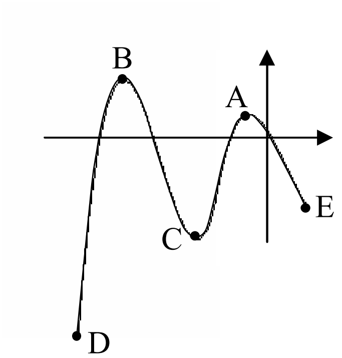


A – נקודת מקסימום מקומי
B – נקודת מינימום מקומי ומוחלט
D – נקודת מקסימום מקומי ומוחלט
C – מינימום מקומי (בסביבתה הקרובה היא המינימלית)

בשִׂרטוט זה אנו מוצאים ש:



A – מקסימום מקומי ומוחלט
B – מינימום מקומי
C – מינימום מקומי ומוחלט
D – מקסימום מקומי (בסביבתה הקרובה היא המקסימלית)



בשרטוט זה מתקיים:

A – מקסימום מקומי

B – מקסימום מקומי ומוחלט

C – מינימום מקומי

D – מינימום מקומי ומוחלט

E – מינימום מקומי

אני תקווה שכבר הבחנתם שנקודות מקסימום מוחלט או מינימום מוחלט יכולות להתקיים רק בשני מקומות:

1. בנקודות הקיצון (שבהם $y' = 0$)

2. בנקודות הקצה של תחום הפונקציה

בכל נקודה אחרת ברור לנו שלא נמצא מקסימום או מינימום מוחלטים.

למשל בשרטוט האחרון, כל נקודה בין D ל- B אינה יכולה להיות מקסימום או מינימום כלל כי תמיד תהיה נקודה סמוכה לה שערך ה- y שלה גבוה יותר מצדה האחד ונמוך יותר מצדה השני.

לכן כאשר אנחנו מקבלים פונקציה ומחפשים עליה נקודות מקסימום ומינימום מוחלטים, עלינו לבצע שלושה מהלכים:

1. למצוא את נקודות הקיצון

2. למצוא את נקודות הקצה

3. להשוות בין ערכי ה- y השונים. הנקודה שבה ערך ה- y הגבוה מביניהם, היא נקודת מקסימום מוחלט. והנקודה שבה ערך ה- y הוא הנמוך מביניהם, היא נקודת מינימום מוחלט.

דוגמאות:

טז. מצאו את נקודות המינימום והמקסימום המקומיים והמוחלטים בפונקציה:

$y = x^3 + 9x^2 + 24x + 18$ בתחום: $-6 \le x \le 0$

פתרון:

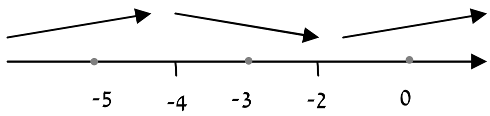
1. מציאת נקודות קיצון:

$$y' = 3x^2 + 18x + 24$$
$$0 = 3x^2 + 18x + 24$$
$$x_1 = -2 \qquad x_2 = -4$$

הצבה בפונקציה:

$$y_1 = (-2)^3 + 9(-2)^2 + 24(-2) + 18 = -2$$
$$y_2 = (-4)^3 + 9(-4)^2 + 24(-4) + 18 = 2$$

בדיקת תחומי עלייה וירידה:



$$y'(-5) = 3(-5)^2 + 18(-5) + 24 > 0$$

כך גם:

$$y'(-3) < 0$$
$$y'(0) > 0$$

כלומר הנקודה: (-2,-2) נקודת מינימום

והנקודה: (-4,2) נקודת מקסימום

2. הצבת קצות התחום בפונקציה: $y(-6) = (-6)^3 + 9(-6)^2 + 24(-6) + 18 = -18$

וכן: $y(0) = 18$

כלומר נקודות הקצה הן: (0,18) (-6,-18)

3. על ידי השוואת ערכי y אנו מוצאים :

(0,18) נקודת מקס. מקומי ומוחלט

(-6,-18) נקודת מינ. מקומי ומוחלט

(-2,-2) נקודת מינימום מקומי

(-4,2) נקודת מקסימום מקומי

יז. מצאו את נקודות המינימום והמקסימום המקומיים והמוחלטים בפונקציה :

$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 10$ בתחום : $-3 < x < 3$

פתרון :

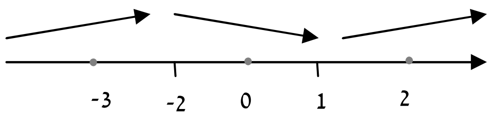
1. מציאת נקודות קיצון : $y' = 6x^2 + 6x - 12$

$0 = 6x^2 + 6x - 12$

$x_1 = 1 \quad x_2 = -2$

מציאת ערכי y : $y(1) = -17 \quad y(-2) = 10$

בדיקת תחומי עלייה וירידה :



$y'(-3) > 0$

$y'(0) < 0$

$y'(2) > 0$

כלומר הנקודה : (1,-17) נקודת מינימום

והנקודה : (-2,10) נקודת מקסימום

2. הצבת קצות התחום בפונקציה : $y(-3) = -1$

וכן : $y(3) = 35$

כלומר נקודות הקצה הן :   (3,35)   (-3,-1)

3. על ידי השוואת ערכי y אנו מוצאים :

(3,35) נקודת מקס. מקומי ומוחלט

(-3,-1) נקודת מינ. מקומי

(-2,10) נקודת מקס. מקומי

(1,-17) נקודת מינ. מקומי ומוחלט

<u>תרגול עצמי</u>

25. מצאו את נקודות המינימום והמקסימום המקומיים והמוחלטים בפונקציות הבאות :

א. $y = -x^3 - 3x^2 + 9x + 5$ בתחום : $-4 < x < 2$

ב. $y = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2 + 60$ בתחום : $-4 < x < 3$

ג. $y = \frac{4}{x} + 2x^2$ בתחום : $0.5 < x < 2$

ד. $y = \sqrt{x} - 8x^2$ בתחום : $1 < x < 9$

חקירת פונקציה ושִׂרטוט

עד עתה רכשנו מספיק כלים כדי לחקור, לשרטט וללמוד על פונקציות פולינום. כפי שכבר ראינו, חקירה זו דורשת את המיומנויות הבאות :

- מציאת נק' קיצון
- תחומי עלייה וירידה
- נקודות חיתוך עם הצירים (למיקום טוב יותר של הפונקציה)
- שרטוט

נתבונן בדוגמה הבאה :

יח. חקרו את הפונקציה : $y = x^3 - 7x^2 + 12x$

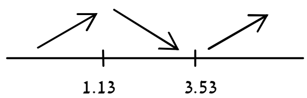
פתרון :

<u>כדי לתרגל עבודה שיטתית נוח מאוד להתחיל ברשימת הפעולות ולרכז במקום אחד את הנתונים :</u>

<u>ריכוז נתונים :</u>

נקודות קיצון : $(3.53,-0.88)$ $(1.13,6.06)$

תחומי עלייה וירידה :



חיתוך צירים : $(4,0)$, $(3,0)$, $(0,0)$

שִׂרטוט

<u>תהליך מציאת הנתונים :</u>

<u>מציאת נקודות החשודות כקיצון :</u> $y' = 3x^2 - 14x + 12$

$$3x^2 - 14x + 12 = 0$$

והפתרון : $x_1 = 3.53 \quad x_2 = 1.13$

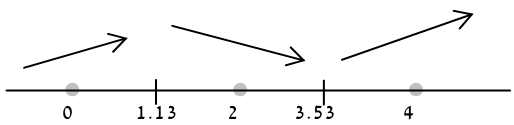
הצבה בפונקציה המקורית :

$$y(1.13) = (1.13)^3 - 7\cdot(1.13)^2 + 12\cdot 1.13 = 6.06$$

$$y(3.53) = (3.53)^3 - 7\cdot(3.53)^2 + 12\cdot 3.53 = -0.88$$

ומכאן הנקודות החשודות הן : $(3.53,-0.88)$ $(1.13,6.06)$

<u>תחומי עלייה וירידה :</u>



הצבה בנגזרת : $y' = 3x^2 - 14x + 12$

$$y'(0) = 12 > 0$$

$$y'(2) = 3\cdot 2^2 - 14\cdot 2 + 12 < 0$$

$$y'(4) = 3\cdot 4^2 - 14\cdot 4 + 12 > 0$$

(שימו לב: אין צורך למצוא את הערך המדויק של ההצבות בנגזרת, אלא רק אם הנגזרת בנקודה היא חיובית או שלילית!)

ומכאן: בתחומים: $x < 1.13$ הפונקציה עולה.

$1.31 < x < 3.53$ הפונקציה יורדת.

$x>3.53$ הפונקציה עולה.

ולכן: $(1.13,6.06)$ נקודת מקסימום

ו- $(3.53,-0.88)$ נקודת מינימום.

<u>חיתוך עם הצירים:</u> $y = x^3 - 7x^2 + 12x$

עבור: $x = 0$ $\leftarrow$ $y = 0^3 - 7\cdot 0^2 + 12\cdot 0 = 0$

עבור: $y = 0$ $\leftarrow$ $0 = x^3 - 7x^2 + 12x$

$0 = x(x^2 - 7x + 12)$

$x = 0$ או $x^2 - 7x + 12 = 0$

$(x-3)(x-4) = 0$

$x_1 = 3 \quad x_2 = 4$

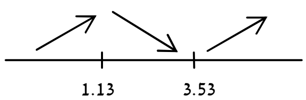
כלומר נקודות החיתוך עם הצירים הן: $(4,0)$ $(3,0)$ $(0,0)$

<u>שרטוט:</u> את הנתונים קל "לאסוף" מהמקום בו ריכזנו את כל התוצאות (כפי שהן מופיעות בעמוד הקודם).

<u>ריכוז נתונים:</u>

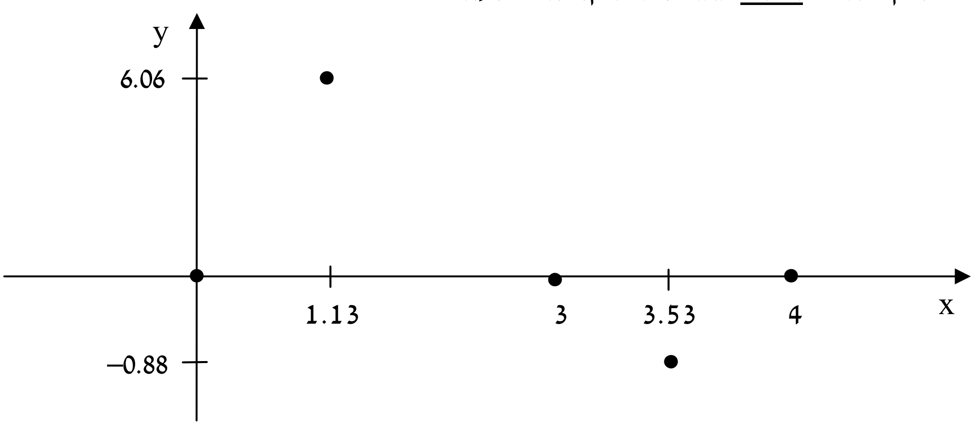
נקודות קיצון: $(3.53,-0.88)$ $(1.13,6.06)$

תחומי עלייה וירידה:

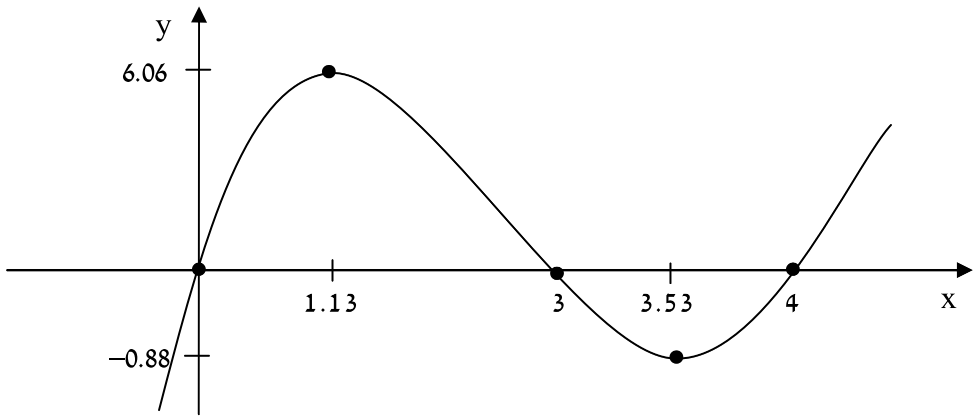


חיתוך צירים: $(4,0)$, $(3,0)$, $(0,0)$

כדי לשרטט פונקציה יש <u>תמיד</u> להתחיל מנקודות ידועות.



כפי שניתן לראות, השִׂרטוט הוא סקיצה; הוא איננו מדויק, ולכן אין הוא שומר על קנה מידה. יש חשיבות רבה לבהירות של תחומי העלייה והירידה ולהתנהגות הפונקציה ולא לצורתה המדויקת. לכן נקפיד על תיאור טוב של התנהגות הפונקציה בסביבות נקודות הקיצון גם אם הוא בא על חשבון ציורהּ המדויק!
עתה אנו משלימים את העקוּם של הפונקציה דרך הנקודות הידועות ועל פי תחומי העלייה והירידה שמצאנו:



בתרגיל זה ראינו כיצד מיישמים את המרכיבים השונים שלמדנו, וכיצד ניתן לחקור פונקציות.
לפני שנמשיך, נתבונן בדוגמה נוספת:

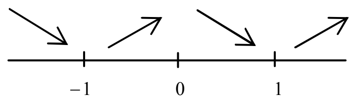
יט. חקרו את הפונקציה: $y=(x+1)^2\cdot(x-1)^2$

פתרון:

ריכוז נתונים:

נק' קיצון: $(1,0)$, $(0,0)$, $(-1,0)$

תחומי עלייה וירידה:



חיתוך עם הצירים: $(1,0)$, $(0,0)$, $(-1,0)$

שִׂרטוט

תהליך מציאת הנתונים:

מציאת נקודות החשודות כקיצון: $y=(x+1)^2\cdot(x-1)^2$

לפי נגזרת מכפלה: $y'=2(x+1)\cdot(x-1)^2+(x+1)^2\cdot 2(x-1)$

הוצאת גורמים משותפים: $y'=2(x+1)(x-1)(x-1+x+1)$

$y'=2(x^2-1)\cdot 2x$

$y'=4x(x^2-1)$

$4x(x^2-1)=0$

$x_1=0$ או $x^2-1=0$

$x_2=1 \quad x_3=-1$

מציאת ערכי y: $y=(x+1)^2\cdot(x-1)^2$

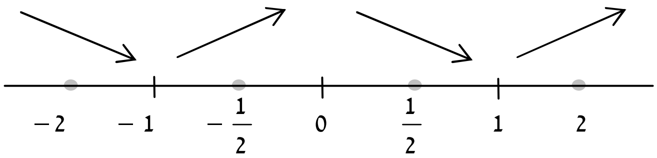
$y(0)=1\cdot 1=1$

$$y(-1)=0$$

$$y(1)=0$$

והנקודות: $(1,0)$, $(0,0)$, $(-1,0)$

<u>תחומי עלייה וירידה:</u>



הצבה בנגזרת: $y'=4x(x^2-1)$

$$y'(-2)=4\cdot(-2)((-2)^2-1)<0$$

$$y'(-\frac{1}{2})=4\cdot(-\frac{1}{2})((-\frac{1}{2})^2-1)>0$$

$$y'(\frac{1}{2})=4\cdot\frac{1}{2}((\frac{1}{2})^2-1)<0$$

$$y'(2)=4\cdot2\cdot(2^2-1)>0$$

ולכן בתחומים: $x<-1$, $0<x<1$ הפונקציה יורדת.

$-1<x<0$, $x>2$ הפונקציה עולה.

נקודות מינימום: $(1,0)$, $(-1,0)$

נקודת מקסימום: $(0,0)$

<u>חיתוך עם הצירים:</u> $y=(x+1)^2\cdot(x-1)^2$

עבור: $x=0$ $\leftarrow$ $y=1^2\cdot1^2=1$

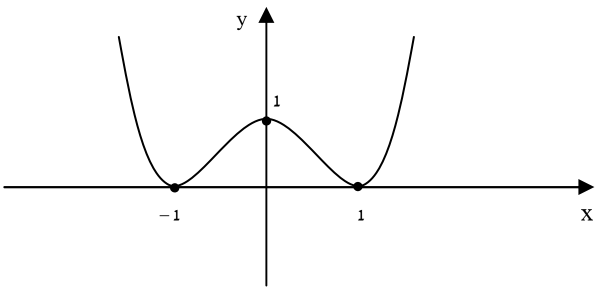
עבור: $y=0$ $\leftarrow$ $(x+1)^2\cdot(x-1)^2=0$

$(x-1)^2=0$ או $(x+1)^2=0$

$x=1$ $\quad$ $x=-1$

והנקודות: $(1,0)$, $(0,0)$, $(-1,0)$

<u>שׂרטוט:</u>



<u>הערה:</u>

גם בדוגמה זו ייחדנו מקום לרשימת הפעולות ולריכוז הנתונים. גם בהמשך נפתור בדרך זו, כלומר כל חקירה תפתח ברשימת הפעולות וריכוז הנתונים, ואחר כך יבוא הפירוט כיצד הם נמצאו.

<u>תרגול עצמי</u>

חקרו את הפונקציות הבאות לפי השלבים הבאים :

א. מציאת נקודות קיצון

ב. מציאת תחומי עלייה וירידה

ג. חיתוך צירים

ד. שִׂרטוט

26. $y=-x^3+2x^2-x+5$ (בלי למצוא חיתוך ציר x)

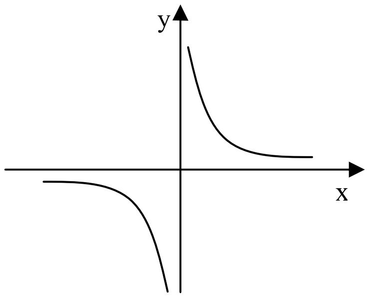
27. $f(x)=(x+2)^2\cdot(x-2)^2$

28. $f(x)=x^4-x^3$

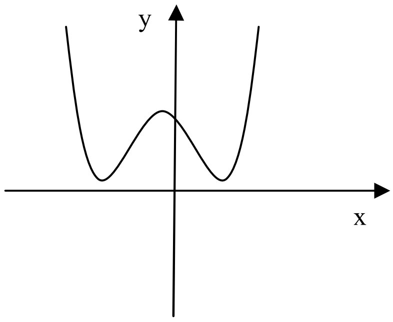
29. $y=\dfrac{3x^3-36x}{3}$

רציפות של פונקציה

בין כל ההבחנות שאנו עושים לגבי פונקציות, אחת מהן היא ההבחנה האם הפונקציה רציפה או לא.
פונקציה רציפה היא זו שניתן לשרטט אותה בקו אחד בלי הפסק, כלומר אין צורך להרים את היד מהדף.
פונקציה שאינה רציפה היא פונקציה שיש לה "ענפים", לדוגמה:



פונקציה לא רציפה



פונקציה רציפה

עד כה עסקנו בפונקציות שברור לנו כי הן רציפות. לעתים אנו נתקלים בפונקציות שיש ספק לגביהן אם הן רציפות. כידוע לנו מלימודים קודמים, פונקציות מנה אינן רציפות תמיד, כמו למשל, הפונקציה: $y=\frac{1}{x}$

שאינה מוגדרת בנקודה $x=0$, כלומר היא אינה רציפה.
לכן כדי לחקור פונקציות כאלה יש צורך להוסיף בדיקה של תחום ההגדרה.
דוגמה:

כ. חקרו את הפונקציה: $y=\frac{1}{x^2+3x+10}$

כאן עלינו להוסיף בריכוז הנתונים גם בדיקה של תחום ההגדרה.

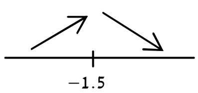
פתרון:

<u>ריכוז נתונים:</u>

תחום הגדרה: $x\in\mathbb{R}$ (כל x)

נקודת קיצון: $(-1.5,0.13)$

תחומי עלייה וירידה:



חיתוך צירים: $(0,0.1)$

שִׂרטוט

<u>מציאת תחום הגדרה:</u> $y=\frac{1}{x^2+3x+10}$

מְיֻדָּע קודם אנו מזהים שבפונקציה זו תחום ההגדרה הוא בכל מקום בו: $x^2+3x+10\neq 0$

נוח למצוא תחילה היכן התחום <u>אינו מתקיים</u>. לכן נמצא את x עבורו: $x^2+3x+10=0$

במהלך הפתרון נגלה כי: $x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-40}}{2}$

מכיוון שה- Δ (b^2-4ac) שלילית, אין פתרון למשוואה, כלומר אין x שעבורו המכנה מתאפס. המשמעות היא שהפונקציה מוגדרת לכל x .

<u>מציאת נקודות קיצון :</u>

$$y=\frac{1}{x^2+3x+10}$$

ולפי נגזרת מורכבת :

$$y'=-\frac{1}{(x^2+3x+10)^2}\cdot(2x+3)$$

$$y'=-\frac{2x+3}{(x^2+3x+10)^2}$$

$$-\frac{2x+3}{(x^2+3x+10)^2}=0$$

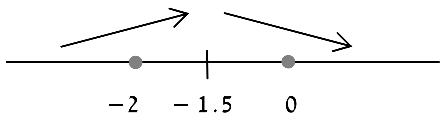
$$2x+3=0$$

$$x=-\frac{3}{2}$$

$$y(-1.5)=\frac{1}{(-1.5)^2+3\cdot(-1.5)+10}=0.13$$

והנקודה : $(-1.5,0.13)$

<u>תחומי עלייה וירידה :</u>



$$y'=-\frac{2x+3}{(x^2+3x+10)^2}$$

$$y'(-2)=-\frac{-4+3}{(x^2+3x+10)^2}>0$$

$$y'(0)=-\frac{3}{10^2}<0$$

לכן : בתחום : $x<-1.5$ הפונקציה עולה.

ובתחום : $x>-1.5$ הפונקציה יורדת.

כלומר : $(-1.5,0.13)$ היא נקודת מקסימום.

<u>מציאת חיתוך עם הצירים :</u> $y=\frac{1}{x^2+3x+10}$

עבור : $x=0$ $\leftarrow$ $y=\frac{1}{10}$

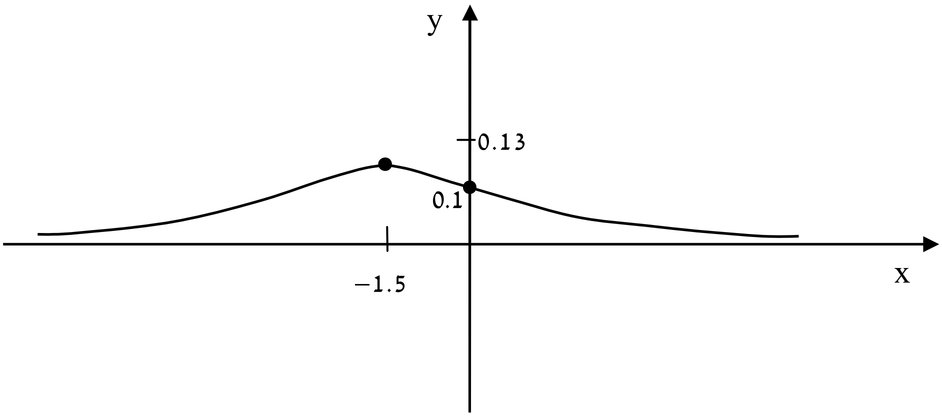
עבור : $y=0$ אין פתרון.

כלומר נקודת חיתוך צירים : $(0,0.1)$

בהמשך נלמד לנתח את התנהגות הפונקציה עבור x-ים גדולים מאוד או קטנים מאוד. כרגע די לנו בכך שאין נקודות חיתוך עם ציר ה- x כפי שראינו, כדי להבין שהפונקציה הולכת וקרבה אליו אולם אינה חוצה אותו.

במילים אחרות : מתוך הנתונים שאספנו, אנו מסיקים שערכי y קטנים ככל שערכי x מתרחקים מנקודת האפס, אולם אין נקודות חיתוך עם ציר ה- x , כלומר : $y\neq 0$ לכל x .

<u>שִׂרטוט:</u>



כא. חקרו את הפונקציה: $y=\frac{2x+4}{x^2-x+3}$

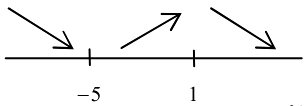
פתרון:

<u>ריכוז נתונים:</u>

תחום הגדרה: $x\in\mathbb{R}$ (כל x)

נקודות קיצון: $(1,2)$, $(-5,-0.18)$

תחומי עלייה וירידה:



חיתוך צירים: $(-2,0)$, $(0,1.333)$

שִׂרטוט

<u>מציאת תחום הגדרה:</u> $y=\frac{2x+4}{x^2-x+3}$

נמצא x עבור: $x^2-x+3=0$

$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-12}}{2}$ אין פתרון

כלומר: הפונקציה מוגדרת לכל x.

<u>מציאת נקודות קיצון:</u> $y=\frac{2x+4}{x^2-x+3}$

לפי נגזרת מנה: $y'=\frac{2(x^2-x+3)-(2x+4)(2x-1)}{(x^2-x+3)^2}$

$y'=\frac{2x^2-2x+6-4x^2-8x+2x+4}{(x^2-x+3)^2}$

$y'=\frac{-2x^2-8x+10}{(x^2-x+3)^2}$

$\frac{-2x^2-8x+10}{(x^2-x+3)^2}=0$

$-2x^2-8x+10=0\,/:-2$

$x^2+4x-5=0$

$(x+5)(x-1)=0$

$x_1=-5\quad x_2=1$

מציאת ערכי y :

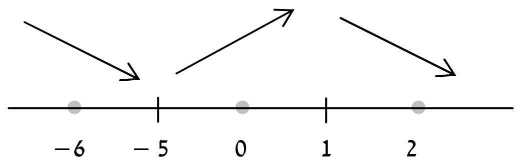
$$y=\frac{2x+4}{x^2-x+3}$$

$$y(-5)=\frac{2\cdot(-5)+4}{(-5)^2-(-5)+3}=-0.18$$

$$y(1)=\frac{2\cdot1+4}{1^2-1+3}=2$$

נקודות קיצון : $(1,2)$, $(-5,-0.18)$

<u>תחומי עלייה וירידה :</u>



$$y'=\frac{-2x^2-8x+10}{(x^2-x+3)^2}$$

$$y'(-6)=\frac{-2\cdot(-6)^2-8\cdot(-6)+10}{((-6)^2-(-6)+3)^2}<0$$

$$y'(0)=\frac{10}{9}>0$$

$$y'(2)=\frac{-2\cdot2^2-8\cdot2+10}{(2^2-2+3)^2}<0$$

לכן : בתחום : $x>1$, $x<-5$ הפונקציה יורדת,

ובתחום : $-5<x<1$ הפונקציה עולה.

כלומר : $(1,2)$ היא נקודת מקסימום, ו- $(-5,-0.18)$ היא נקודת מינימום.

<u>חיתוך עם הצירים :</u> $y=\frac{2x+4}{x^2-x+3}$

עבור : $x=0$ $\leftarrow$ $y=\frac{4}{3}=1.333$

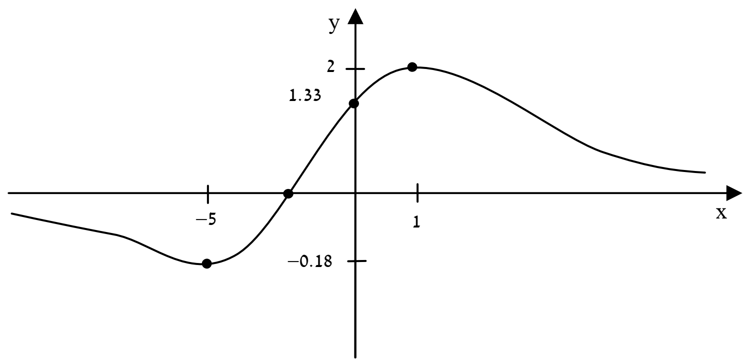
עבור : $y=0$ $\leftarrow$ $\frac{2x+4}{x^2-x+3}=0$

$2x+4=0$

$x=-2$

כלומר נקודות חיתוך צירים : $(-2,0)$, $(0,1.33)$

<u>שׂרטוט :</u>



<u>בדיקת הבנה</u>

חקרו את הפונקציות הבאות לפי השלבים הבאים :

א. תחום הגדרה

ב. מציאת נקודות קיצון

ג. מציאת תחומי עלייה וירידה

ד. חיתוך צירים

ה. שִׂרטוט

30. $y=\dfrac{x^2+5}{x^2-x+3}$

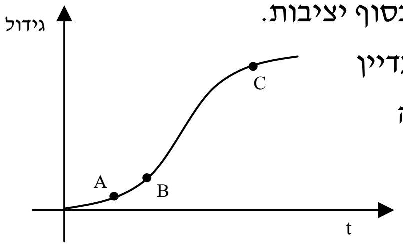
31. $y=\dfrac{x-7}{x^2+5}$

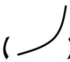
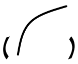
32. $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+4}{3x^2+x+1}$

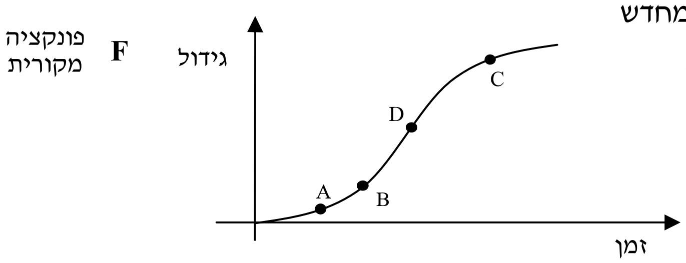
33. $f(x)=\dfrac{10x^2-x-21}{x^2+6}$

נגזרת שנייה

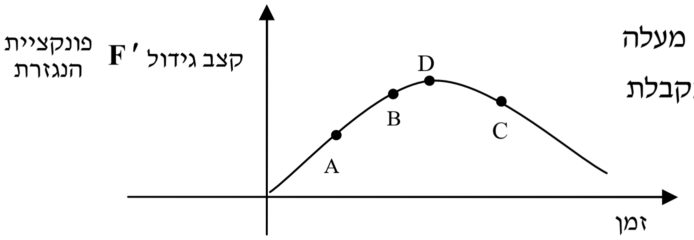
לעתים דרושה לנו הבנה מעמיקה יותר של התנהגות הפונקציה.
מהתבוננות על פונקציות גידול של חברות כלכליות ניתן לראות שבדרך כלל נקבל את העקום הבא:



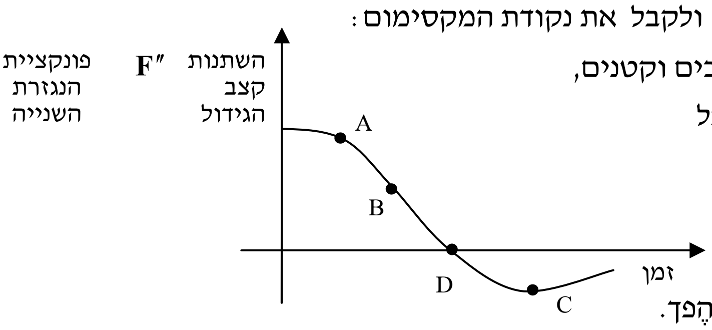
תחילה החברה מראה גידול מצומצם, לאחר מכן יש פריצת דרך, ולבסוף יציבות.
השקעה כספית בחברה כזו בנקודה A היא קצת מסוכנת; החברה עדיין צעירה, ואין ביטחון שהיא תשרוד. השקעה בנקודה C אמנם בטוחה כי החברה כבר יציבה, אולם שיעור גידולה כבר נמוך.
רובנו היינו מעדיפים להשקיע בחברה כזו סביב הנקודה B;
אז יש לנו כבר ביטחון יחסי שהחברה אכן תשרוד, ועדיין נוכל ליהנות מפריצת הדרך שתעשה.
ניתוח ויזואלי של הפונקציה מראה שאיכותה של נקודה B היא בעובדה שהיא קרובה לנקודה בה הפונקציה עוברת ממצב קעירות כלפי מעלה: () למצב קעירות כלפי מטה: ().
נקודת המעבר ממצב קעירות כלפי מעלה למצב קעירות כלפי מטה מצביעה על תחילת ההתייצבות של החברה, ולכן נתעניין דווקא בנקודה זו.



איך נוכל לזהות מקומות כאלה? הבה נבחן מחדש את משמעות הנגזרת ומה ניתן ללמוד ממנה.
כפי שכבר הערתי בתחילת הדיון על הנגזרת, כאשר גוזרים פונקציה, מקבלים, למעשה, <u>פונקציית שיפועים</u>. כלומר פונקציה המתארת, בכל נקודה ונקודה, את שיפוע הפונקציה המקורית. ובמקרה שלפנינו:
אנו רואים שבמעבר מצורה של קעירות כלפי מעלה לקעירות כלפי מטה (נקודה D) הפונקציה מקבלת שיפועים מקסימליים, כלומר אז יש ל- F' מקסימום.

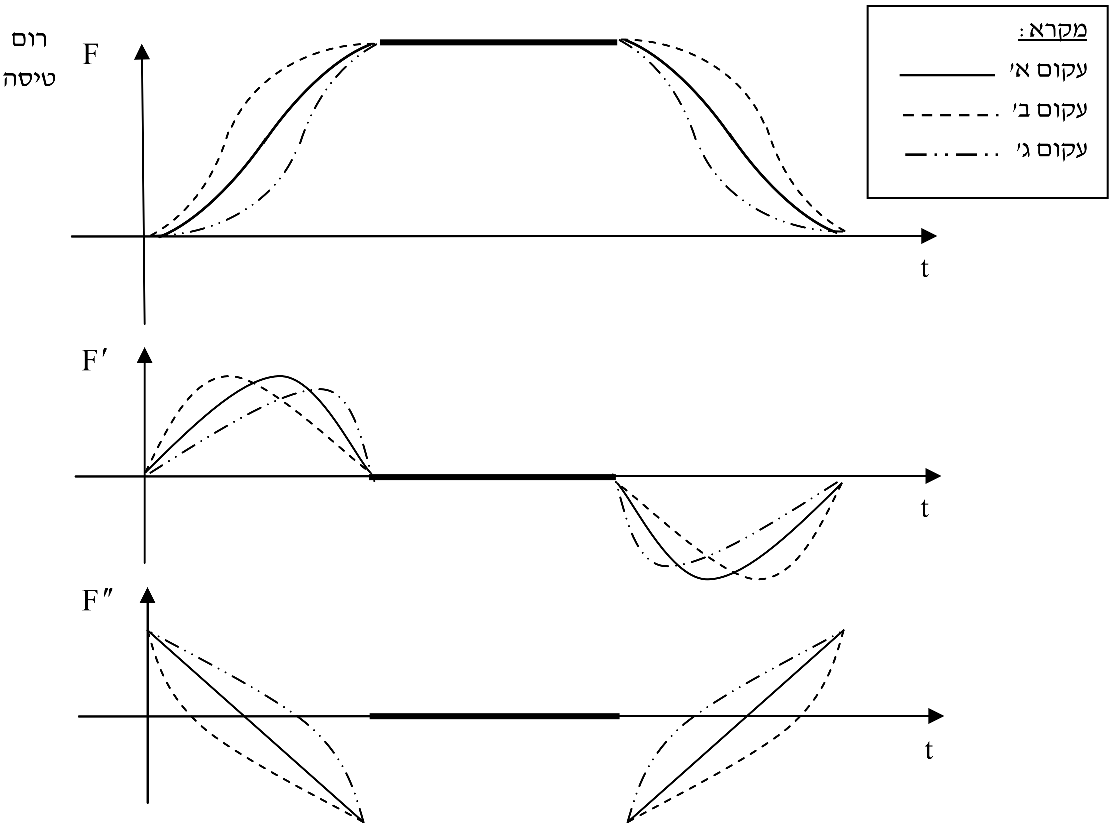


כדי למצוא נקודה זו עלינו לגזור שוב את F' ולקבל את נקודת המקסימום:
עד נקודה D יש ל- F' שיפועים חיוביים הולכים וקטנים, ואחריה שיפועים שליליים! וזה מה שמתקבל מתוך הנגזרת השנייה.
כלומר בעזרת נגזרת שנייה של פונקציה אנו לומדים מתי בדיוק היא עוברת מקעירות כלפי מטה לקעירות כלפי מעלה ולהֶפך.
אנו רואים זאת על ידי מציאת x שעבורו: $F''=0$.



כאשר $F''>0$, הפונקציה קעורה כלפי מעלה (U), וכאשר $F''<0$, הפונקציה קעורה כלפי מטה (∩).

אם נשוב ל״סיפור המטוס״ שבו פתחנו, נמצא שיש הבדלים גדולים בין אופן ההתרוממות והנחיתה (לפחות מבחינת הנוסעים) אם הם על פי עקוֹם א׳, ב׳ או ג׳.



אם נבחן את הפונקציה F, נעדיף לטוס באופן של גרף א׳ שבו גם ההתרוממות וגם הנחיתה הן באופן מתון.
ניתוח הגרף F' מראה שרק על ידי בחינת נקודות הקיצון לא נוכל לדעת אם אופן הטיסה שונה, שכן לכל הגרפים יש אותן נקודות קיצון ($F' = 0$ באותו מקום).
רק בחינה של F'' תראה לנו את ההבדלים בין אופני הטיסה השונים.
$F'' = 0$ בזמנים שונים עבור הגרפים השונים, וממנה נלמד אם היו נסיקות חדות או צלילות פתאומיות במהלך הטיסה.
בהמראה אנו מוצאים שגרף ב׳ מקדים את המַעֲבָר מקעירות כלפי מעלה לקעירות כלפי מטה ($F'' = 0$) ביחס לגרף א׳, וגרף ג׳ מְאַחֵר מַעֲבָר זה.
בנחיתה אנו מוצאים שגרף ג׳ מקדים את המעבר מקעירות כלפי מטה לקעירות כלפי מעלה ביחס לגרף א׳, וגרף ב׳ מאחֵר אותו. כך בעזרת הנגזרת השנייה ניתן ללמוד על מעברים אלה.
מעברים אלה הם <u>נקודות פיתול</u> של הפונקציה.
<u>הערה</u>: בעזרת הנגזרת השנייה יש בידינו כלי נוסף להבחין בין נקודות קיצון של פונקציה שאכן מחליפות מגמת שיפועים, לבין נקודות פיתול שאינן מחליפות מגמת שיפועים, אלא רק עוברות מקעירות כלפי מעלה לקעירות כלפי מטה או להֶפך.

לדוגמה: בפונקציה שחקרנו כבר: $y = x^4 + x^3 + 3$

ראינו ש: $f' = 0$ עבור: $x = -0.75\ ,\ 0$

כדי לדעת אם הן אכן נקודות קיצון, ניתן להציב את ערכי x שמצאנו בנגזרת השנייה:

$$y' = 4x^3 + 3x^2$$

$$y'' = 12x^2 + 6x$$

$y''(-0.75) = 2.25 \quad \rightarrow$ זוהי נקודת קיצון.

$y''(0) = 0 \quad \rightarrow$ <u>זוהי נקודת פיתול!</u>

יש גם משמעות לתוצאה שקיבלנו: $y''(-0.75) > 0$

כבר ראינו שבכל פעם שהפונקציה קעורה כלפי מעלה, $F'' > 0$ (ערך הנגזרת השנייה חיובי). לכן אם נקודת קיצון נמצאת באזור של קעירות כלפי מעלה,  זוהי נקודת מינימום.

ולהֶפך עבור אזורים קעורים כלפי מטה, $F'' < 0$ (ערך הנגזרת השנייה שלילי). ואם יש באזור כזה נקודת קיצון,  הרי שהיא חייבת להיות נקודת מקסימום.

לכן לא תמיד דרוש לנו בשלבי חקירה שונים למצוא תחומי עלייה וירידה ע"פ הנגזרת הראשונה, אלא אפשר לעשות שימוש בנגזרת השנייה. שימושים לכך נראה בהמשך.

<u>בשלב זה של חקירות פונקציה נמשיך ונסתמך על הצבה בנגזרת הראשונה.</u>

לא תמיד נזדקק למציאת נקודות הפיתול, אולם במצבים שבהם נרצה דיוק רב יותר בשִׂרטוט הפונקציה, או כאשר אין מספיק נתונים, ניתן לעשות שימוש בתכונה זו.

כב. חקרו את הפונקציה: $y = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x$

פתרון:

<u>ריכוז נתונים:</u>

תחום הגדרה: $x \in \mathbb{R}$ (כל x)

נקודות קיצון: אין

תחומי עלייה וירידה: הפונקציה עולה לכל x

חיתוך צירים: $(0,0)$

שִׂרטוט

<u>מציאת תחום הגדרה:</u> $x \in \mathbb{R}$ (ככל פונקציית פולינום)

<u>מציאת נקודות קיצון:</u>

$$y = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x$$

$$y' = x^2 + 4x + 5$$

$$x^2 + 4x + 5 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2}$$

$$x = \phi$$

הנגזרת חיובית לכל x, ולכן אין נקודות קיצון.

<u>חיתוך עם הצירים :</u>

עבור : $x = 0$ $\leftarrow$ $y = 0$

עבור : $y = 0$ $\leftarrow$ $\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x = 0$

$$x(\frac{x^2}{3} + 2x + 5) = 0$$

$x = 0$ או $\frac{x^2}{3} + 2x + 5 = 0 / \cdot 3$

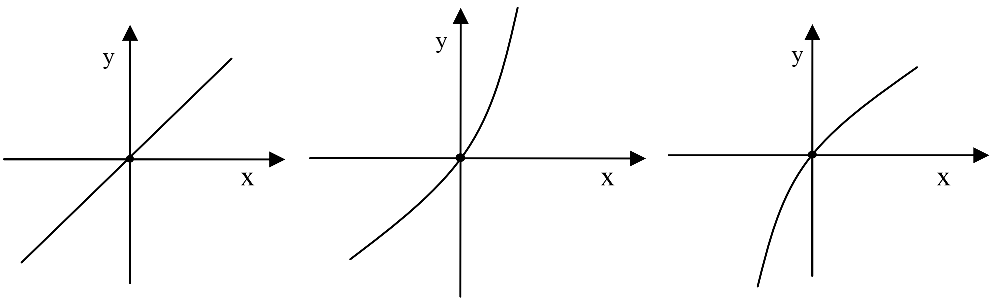
$$x^2 + 6x + 15 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 60}}{2}$$

$$x = \phi$$

כלומר נקודת חיתוך צירים : $(0,0)$

אם נרצה לשרטט פונקציה זו, אין לנו כלים לדעת את צורתה. על פי הנתונים ניתן לשרטט את הפונקציות הבאות :



ועוד הרבה אפשרויות.

כדי לקבל עוד נתונים נמצא את הנגזרת השנייה : $y' = x^2 + 4x + 5$

$$y'' = 2x + 4$$

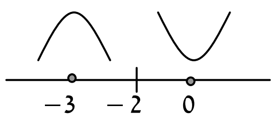
$$2x + 4 = 0$$

$$x = -2$$

כלומר בנקודה : $x = -2$ יש נקודת פיתול.

היכן הפונקציה קעורה כלפי מעלה, והיכן היא קעורה כלפי מטה ?

לשם כך נבדוק ערכים משמאל ומימין :



$$y'' = 2x + 4$$

$x < -2$ תחום קעירות כלפי מטה $y''(-3) = 2 \cdot (-3) + 4 < 0$

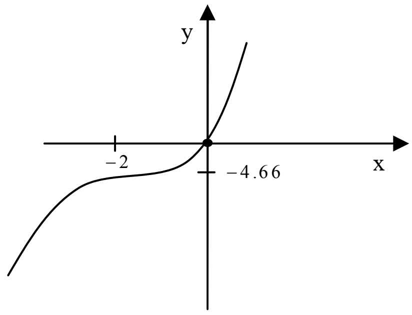
$x > -2$ תחום קעירות כלפי מעלה $y''(0) = 2 \cdot 0 + 4 > 0$

נמצא את ערך y בנקודה זו : $y(-2) = \frac{(-2)^3}{3} + 2 \cdot (-2)^2 + 5 \cdot (-2) = -4.66$

נקודת פיתול : $(-2, -4.66)$

עתה נוכל לייצג טוב יותר את הפונקציה.

<u>שׂרטוט:</u>



<u>בדיקת הבנה</u>

מצאו תחומי עלייה וירידה ותחומי קעירות כלפי מעלה וקעירות כלפי מטה בפונקציות הבאות:

.34 $y=3x^4-4x^3+1$

.35 $y=\frac{1}{2}x^5-1$

<u>נקודות אי רציפות ואסימפטוטות</u>

עד הנה עסקנו בפונקציות רציפות. עתה נפנה לחקור מהי המשמעות של פונקציה לא רציפה.

רמז לפונקציה כזו כבר נתנו, והיא הפונקציה: $y = \frac{1}{x}$

כדי להבין מדוע פונקציה זו אינה מוגדרת עבור: $x = 0$, נבחן תחילה מהי המשמעות של נקודה מוגדרת.

נניח: $x = 2$

כאשר אנו מתקרבים ל- $x = 2$, מצד שמאל אנו מקבלים את הערכים הבאים:

1.999	1.99	1.9	1.75	1.5	1	x
0.5002	0.5025	0.5263	0.5714	0.666	1	y

כלומר אנו רואים שאנו מתקרבים לערך 0.5 .

כך נבדוק לגבי ערכים המתקרבים ל- $x = 2$ מימין:

2.001	2.01	2.1	2.25	2.5	3	x
0.4997	0.4975	0.4761	0.444	0.4	0.333	y

גם כאן אנו רואים שאנו מתקרבים לערך 0.5.

עתה נעשה את אותה בדיקה לגבי ערכים המתקרבים ל- $x = 0$. תחילה משמאל:

-0.001	-0.01	-0.1	-0.25	-0.5	-1	x
-1000	-100	-10	-4	-2	-1	y

אנו רואים שככל שמתקרבים ל- 0, ערך הפונקציה קטן מאוד, כלומר הוא מספר שלילי השואף ל- $-\infty$.

הערכים המתקבלים מימין:

0.001	0.01	0.1	0.25	0.5	1	x
1000	100	10	4	2	1	y

עתה אנו רואים שערכי y גדלים מאוד, כלומר שואפים ל- $+\infty$.

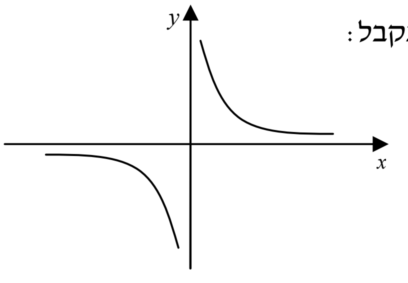
ההבדל בין שתי הדוגמאות הוא:

כאשר קרבים ל- $x = 2$, יש <u>התכנסות</u> של הערכים גם מימין וגם משמאל לערך 0.5.

כאשר מתקרבים לערך $x = 0$, יש התבדרות של ערכי y ל- $+\infty$ מימין ול- $-\infty$ משמאל, ולערך $x = 0$ אין התכנסות כלל.

זוהי המשמעות של נקודה לא מוגדרת.

אם נשרטט את הפונקציה: $y = \frac{1}{x}$ בסביבת הנקודה $x = 0$, נקבל:



מבט קצר בשִׂרטוט מראה לנו שהפונקציה הולכת וקרבה לציר ה- y אך אינה נוגעת בו בפועל.

למצבים מסוג זה, כלומר מצבים בהם הפונקציה קרבה לערך גבולי מסוים אולם אינה חוצה אותו, אנו קוראים מצבים <u>אסימפטוטיים</u>.

משוואת <u>האסימפטוטה</u> נקבעת על פי הערך אליו שואפת הפונקציה.

בשִׂרטוט שלנו אנו רואים שהמשוואה $x=0$ היא <u>אסימפטוטה אנכית</u> לפונקציה.

באותו אופן אנו יכולים לנתח את הפונקציה לגבי הערך $y=0$. ניסיון למצוא את נקודות ה- 0 של הפונקציה יראה לנו: $\frac{1}{x}=0$, כלומר: $x=\phi$, כלומר: הפונקציה אינה נוגעת בציר x.

ניתוח הגיוני יראה לנו שגם המשוואה: $y=0$ היא אסימפטוטה, כי כאשר x גדל עד לאינסוף, ערכי הפונקציה קטֵנים ומתקרבים לישר $y=0$. גם כאשר x קטן ל- $-\infty$, הערכים מתכנסים ל- $y=0$ (על אף שהם שליליים), כלומר ככל שמתרחקים מ- 0, כך הפונקציה הולכת וקרבה ל- $y=0$ אולם אינה חוצה ישר זה. לכן זוהי <u>אסימפטוטה אופקית</u>.

(על נושא האסימפטוטה האופקית נרחיב בהמשך.)

לעת עתה מצאנו שבפונקציית מנה: בתחום אי ההגדרה יש סבירות גבוהה שקיימת אסימפטוטה אנכית. אולם זה אינו תמיד נכון.

נבחן למשל את הפונקציה: $y=\frac{3x+6}{x^2+5x+6}$

למציאת תחום ההגדרה: $x^2+5x+6=0$

$(x+2)(x+3)=0$

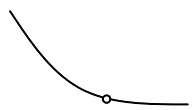
כלומר: $x\neq -2,-3$

אולם הצבה חוזרת בפונקציה תראה לנו שכאשר מציבים $x=-2$, מקבלים:

$$y=\frac{3\cdot(-2)+6}{(-2)^2+5\cdot(-2)+6}=\frac{0}{0}$$

מצב זה מעורר את הסָפֵק שאולי בכל זאת אין לפונקציה אסימפטוטה בנקודה זו אלא רק אי רציפות מקומית, כלומר נקודה החסרה בפונקציה, אולם אינה משפיעה על ההתנהגות סביבה.

כמו בשִׂרטוט:



מצב כזה נקרא "חור" בפונקציה, או בשפה מתמטית - <u>נקודה סליקה</u> ולא אסימפטוטה.

כפי שכבר ראינו, כדי לאפיין את הנקודה יש לבדוק האם יש ערך אליו מתכנסות התוצאות מימין ומשמאל. אם נבחן את ההתכנסות של פונקציה זו סביב הערך $x=-2$, נקבל:

$$y=\frac{3x+6}{x^2+5x+6}$$

x	-2.1	-2.01	-2.001		-1.999	-1.99	-1.9
y	3.333	3.030	3.003		2.997	2.9703	2.7273

אנו רואים שכאשר קרבים אל $x=-2$ גם משמאל וגם מימין, מתכנסים לערך 3. מכאן אנו מסיקים שאין אסימפטוטה לפונקציה בנקודה זו, אלא היא נקודה סליקה.

דרך קלה יותר להבחנה בין אסימפטוטה ל"חור" ולקביעת הערך של הפונקציה בנקודה זו גילה ברנולי (מתמטיקאי מפורסם שעל שמו קרויים מספר חוקים).

לשיטה זו נתנו את השם <u>"כלל לופיטל"</u> (על שם דה-לופיטל – מתמטיקאי שהיה תלמידו של ברנולי. אמנם היה זה ברנולי שפיתח כלל זה, אולם הכלל פורסם בספר לימוד שהוציא דה לופיטל ולכן הוא קרוי על שמו).

<u>יישום כלל לופיטל לחומר הלימוד שלנו :</u>

כאשר בפונקציית מנה $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ אנו מוצאים x שעבורו : $v(x)=0$, יש להציב את x גם ב- $u(x)$.

אם $u(x)\neq 0$, הרי שלפנינו אסימפטוטה אנכית.

אם מתקיים שגם $u(x)=0$, כלומר : $u(x)=v(x)=0$, נבחן את מנת הנגזרות : $\dfrac{u'(x)}{v'(x)}$

התוצאה של מנה זו <u>אם קיימת</u>, היא ערך ה- y של ה״חור״ שנוצר.

בדוגמה שלנו : $y=\dfrac{3x+6}{x^2+5x+6}$, ראינו שעבור $x=-2$ מתקיים : $y=\dfrac{0}{0}$

מנת הנגזרות : $g(x)=\dfrac{u'(x)}{v'(x)}=\dfrac{3}{2x+5}$

ובהצבה של $x=-2$ נקבל : $g(-2)=\dfrac{3}{2\cdot(-2)+5}=3$

ואכן <u>נקודת</u> אי ההגדרה היא $x=-2$, ונוצר ״חור״ עבור $\underline{y=3}$. כלומר הנקודה $(-2,3)$ ״נעלמת״ מרציפות הפונקציה.

אולם עבור : $x=-3 \quad \longrightarrow \quad y=\dfrac{3\cdot(-3)+6}{(-3)^2+5(-3)+6}=\dfrac{-3}{0}$, לכן בנקודה זו יש אסימפטוטה אנכית.

הבה נבצע חקירה שלמה של פונקציה זו כדי לראות כיצד זה נראה בשִרטוט.

חקירה שלמה לפונקציה : $y=\dfrac{3x+6}{x^2+5x+6}$

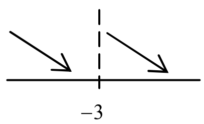
<u>ריכוז נתונים :</u>

תחום הגדרה : $x\neq -2,-3$

נקודות קיצון : אין

אסימפטוטות : $x=-3$

תחומי עלייה וירידה :



חיתוך צירים : $(0,1)$

שִרטוט

<u>מציאת תחום הגדרה :</u> כבר ראינו : $x\neq -2,-3$

<u>מציאת נקודות קיצון :</u>

$$y=\frac{3x+6}{x^2+5x+6}$$

ולפי נגזרת מנה :

$$y'=\frac{3(x^2+5x+6)-(2x+5)(3x+6)}{(x^2+5x+6)^2}$$

$$y'=\frac{3x^2+15x+18-6x^2-12x-15x-30}{(x^2+5x+6)^2}$$

$$y'=\frac{-3x^2-12x-12}{(x^2+5x+6)^2}$$

$$\frac{-3x^2-12x-12}{(x^2+5x+6)^2}=0$$

$$-3x^2-12x-12=0\,/:-3$$

$$x^2+4x+4=0$$

$$(x+2)^2=0$$

$$x=-2$$

אולם נקודה זו אינה מוגדרת, ולכן :

נקודות קיצון : אין.

<u>אסימפטוטות :</u>

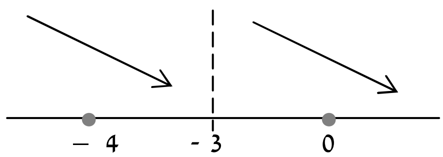
אנכיות : כבר ראינו : $x=-3$

אופקיות : נלמד בהמשך.

<u>תחומי עלייה וירידה :</u>

<u>**כאשר יש אסימפטוטות אנכיות בפונקציה, יש צורך לבדוק גם את מגמת העלייה והירידה משני צדי האסימפטוטה,**</u> כי נוצרת אי רציפות, ואין קשר ברור בין התנהגות הפונקציה מצד ימין של האסימפטוטה (עלייה או ירידה) לבין התנהגותה מצד שמאל. לכן אנו מוסיפים את האסימפטוטה לישר ומחלקים את הישר לעוד תחומי בדיקה.

במקרה שלפנינו :



כפי שראינו :

$$y'=\frac{-3x^2-12x-12}{(x^2+5x+6)^2}$$

$$y'(-4)=\frac{-3\cdot 16+48-12}{((-4)^2+5\cdot(-4)+6)^2}<0$$

$$y'(0)=\frac{-12}{6^2}<0$$

כלומר : הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

<u>חיתוך עם הצירים :</u> $y=\frac{3x+6}{x^2+5x+6}$

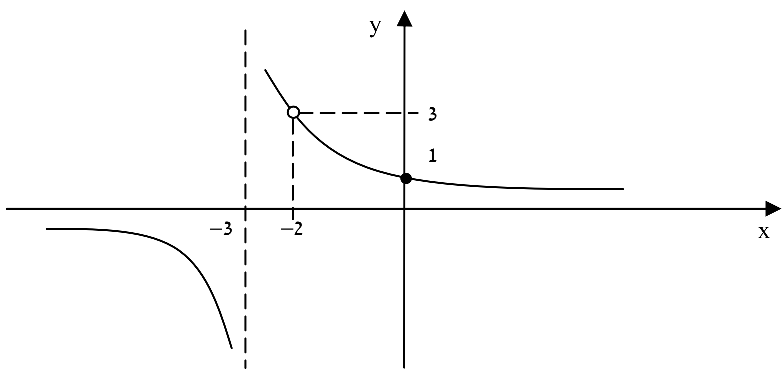
עבור : $x=0$ $\leftarrow$ $y=1$

עבור : $y=0$ $\leftarrow$ $3x+6=0$

$x=-2$ לא מוגדר!

כלומר נקודות חיתוך צירים : $(0,1)$

<u>שׂרטוט :</u>



הסבר לשִׂרטוט: הפונקציה יורדת מצד שמאל לאסימפטוטה. ומכיוון שלא מצאנו נקודות חיתוך עם ציר x, היא חייבת להתחיל מתחת לציר ולרדת כל הזמן עד לאסימפטוטה האנכית, אותה היא אינה חותכת. מימין היא חייבת להתחיל בסמוך לאסימפטוטה. בנקודה $(-2,3)$ ראינו שקיים "חור", וגם היא אינה יכולה לחתוך את ציר x, לכן היא רק קרבה אליו ואינה חותכת אותו.

<u>בדיקת הבנה</u>

מצאו אסימפטוטות ונקודות סליקות בתרגילים הבאים:

36. $y=\dfrac{4x+12}{x^2+8x+15}$

37. $y=\dfrac{2x+4}{x^2-5x-14}$

כג. חקרו את הפונקציה: $y=\dfrac{x-10}{x^2+2x-15}$

פתרון:

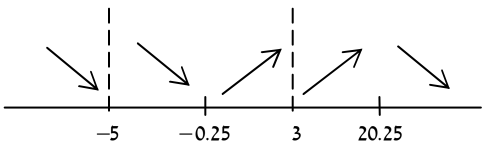
<u>ריכוז נתונים:</u>

תחום הגדרה: $x\neq 3,-5$

אסימפטוטות אנכיות: $x=-5$, $x=3$

נקודות קיצון: $(20.25,0.02)$, $(-0.25,0.66)$

תחומי עלייה וירידה:



חיתוך צירים: $(0,\frac{2}{3})$, $(10,0)$

שִׂרטוט

<u>מציאת תחום הגדרה:</u>

$$x^2+2x-15\neq 0$$
$$(x+5)(x-3)\neq 0$$
$$x\neq 3,-5$$

<u>אסימפטוטות אנכיות:</u>

ע"י הצבה חוזרת בפונקציה נקבל:

$y(3)=\dfrac{-7}{0}$ <u>אסימפטוטה</u> (לא "חור")

$y(-5)=\dfrac{-15}{0}$ <u>אסימפטוטה</u> (לא "חור")

אסימפטוטות אנכיות: x=-5,3

<u>מציאת נקודות קיצון</u> :

$$y=\frac{x-10}{x^2+2x-15}$$

ולפי נגזרת מנה :

$u=x-10 \qquad v=x^2+2x-15$

$u'=1 \qquad v'=2x+2$

$$y'=\frac{1\cdot(x^2+2x-15)-(x-10)(2x+2)}{(x^2+2x-15)^2}$$

$$y'=\frac{x^2+2x-15-(2x^2-20x+2x-20)}{(x^2+2x-15)^2}$$

$$y'=\frac{x^2+2x-15-2x^2+20x-2x+20}{(x^2+2x-15)^2}$$

$$y'=\frac{-x^2+20x+5}{(x^2+2x-15)^2}$$

$$\frac{-x^2+20x+5}{(x^2+2x-15)^2}=0$$

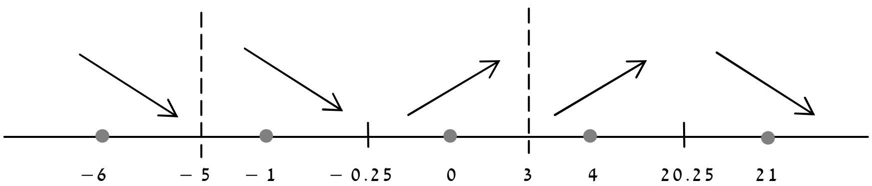
$$-x^2+20x+5=0$$

$x_1=-0.25 \qquad x_2=20.25$

$y_1=0.663 \qquad y_2=0.02$

נקודות קיצון : $(20.25,0.02)$, $(-0.25,0.66)$

<u>תחומי עלייה וירידה</u> :



$$y'=\frac{-x^2+20x+5}{(x^2+2x-15)^2}$$

$$y'(-6)=\frac{-(-6)^2+20\cdot(-6)+5}{((-6)^2+2\cdot(-6)-15)^2}<0$$

$$y'(-1)=\frac{-(-1)^2+20\cdot(-1)+5}{((-1)^2+2\cdot(-1)-15)^2}<0$$

$$y'(0)=\frac{5}{(-15)^2}>0$$

$$y'(4)=\frac{-4^2+20\cdot4+5}{(4^2+2\cdot4-15)^2}>0$$

$$y'(21)=\frac{-21^2+20\cdot21+5}{(21^2+2\cdot21-15)^2}<0$$

והתחומים: $x < -5$ ירידה

$-5 < x < -0.2$ ירידה

$-0.25 < x < 3$ עלייה

$3 < x < 20.25$ עלייה

$\mathbf{x} > 20.25$ ירידה

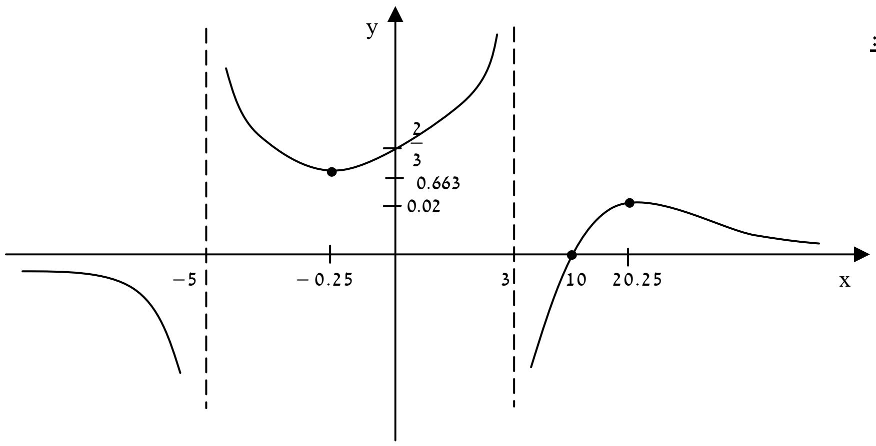
<u>חיתוך עם הצירים:</u> $y = \dfrac{x-10}{x^2+2x-15}$

עבור: $x = 0$ $\leftarrow$ $y = \dfrac{-10}{-15} = \dfrac{2}{3}$

עבור: $y = 0$ $\leftarrow$ $x - 10 = 0$ $\leftarrow$ $x = 10$

כלומר נקודות חיתוך צירים: $(0,\dfrac{2}{3})$, $(10,0)$

<u>שִׂרטוט:</u>



כד. חקרו את הפונקציה: $y = \dfrac{x-2}{x^2-7x+10}$

פתרון:

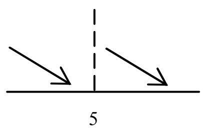
<u>ריכוז נתונים:</u>

תחום הגדרה: $x \neq 2,5$

אסימפטוטה אנכית: $x = 5$ נקודה סליקה: $(2,-\dfrac{1}{3})$

נקודות קיצון: אין.

תחומי עלייה וירידה:



חיתוך צירים: $(0,-0.2)$

שִׂרטוט

<u>מציאת תחום הגדרה:</u>

$x^2 - 7x + 10 \neq 0$

$(x-5)(x-2) \neq 0$

$x \neq 2,5$

<u>אסימפטוטות</u> : $y(2)=\frac{0}{0}$

נבדוק את מנת הנגזרות לפי כלל לופיטל : $f=\frac{u'}{v'}=\frac{1}{2x-7}$

$$f(2)=\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}$$

ולכן $(2,-\frac{1}{3})$ היא נקודה סליקה ואינה אסימפטוטה.

זוהי <u>אסימפטוטה אנכית</u>! $\rightarrow$ $y(5)=\frac{3}{0}$

<u>מציאת נקודות קיצון</u> : $y=\frac{x-2}{x^2-7x+10}$

$$y'=\frac{1\cdot(x^2-7x+10)-(2x-7)(x-2)}{(x^2-7x+10)^2}$$

לאחר פתיחת סוגריים וסידור : $y'=\frac{-x^2+4x-4}{(x^2-7x+10)^2}$

$$\frac{-x^2+4x-4}{(x^2-7x+10)^2}=0$$

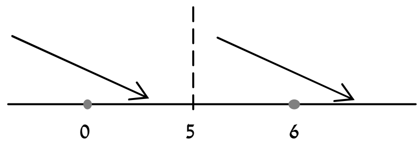
$$-x^2+4x-4=0$$

$$(x-2)^2=0$$

$x=2$ לא מוגדר!

נקודת קיצון : אין

<u>תחומי עלייה וירידה</u> :



$$y'=\frac{-x^2+4x-4}{(x^2-7x+10)^2}$$

$$y'(0)=\frac{-4}{10^2}<0$$

$$y'(6)=\frac{-6^2+4\cdot6-4}{(6^2-7\cdot6+10)^2}<0$$

הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה!

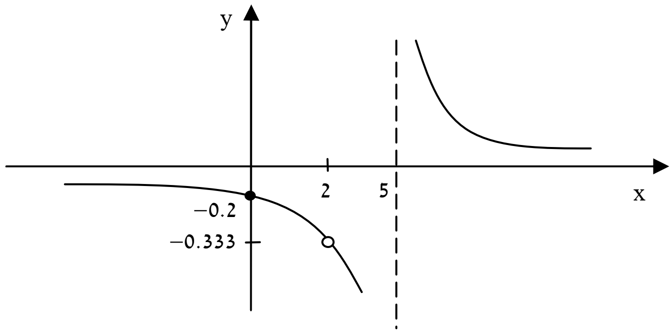
<u>חיתוך עם הצירים</u> : $y=\frac{x-2}{x^2-7x+10}$

עבור : $x=0$ $\leftarrow$ $y=\frac{-2}{10}=-0.2$

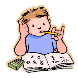
עבור : $y=0$ $\leftarrow$ $x-2=0$ $\leftarrow$ $x=2$ לא מוגדר

נקודת חיתוך צירים : $(0,-0.2)$.

שִׂרטוט:



גם כאן אנו מסתמכים על התוצאות שאין נקודת חיתוך עם ציר x , כדי להבין שציר x הוא אסימפטוטה אופקית.



תרגול עצמי

38. חקרו את הפונקציה: $y=\frac{8x^2-6}{x^2}$

39. חקרו את הפונקציה: $y=\frac{x^3}{x^2-4}$ ושרטטו סקיצה.

40. חקרו את הפונקציה: $y=\frac{3x^2-5x+2}{6x^2+11x-10}$ ושרטטו סקיצה.

41. חקרו את הפונקציה: $y=\frac{4x+2}{4x^2-1}$ ושרטטו סקיצה.

ניתוח אסימפטוטות אופקיות

אסימפטוטה אופקית מתקיימת במצב שבו יש התכנסות של y לגבול מסוים ככל ש- x גדל או קטן. לכן אנו בודקים את ערכי הפונקציה עבור $x \to \infty$ ועבור $x \to -\infty$.

אם קיים ערך שאליו מתכנסת הפונקציה, אנו קובעים אותו כאסימפטוטה אופקית.

כבר ראינו שלגבי הפונקציה: $y = \frac{1}{x}$ מתקיים: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ וכן: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

הסבר: $\lim$ היא קיצור של המילה limes – **גבול** (בלטינית), ובמילים: **הגבול** של הפונקציה $\frac{1}{x}$ כאשר $x \to \infty$ הוא 0, וכן **הגבול** של הפונקציה $\frac{1}{x}$ כאשר $x \to -\infty$ הוא 0.

ולכן: $y = 0$ הוא אסימפטוטה אופקית לפונקציה: $y = \frac{1}{x}$

בפונקציות יותר מורכבות אנו עדיין משתמשים באותו רעיון.

לדוגמה: $y = \frac{x+5}{x^2+3x-7}$

מהתבוננות בפונקציה ברור שהערך x^2 עבור $x \to \infty$ יהיה הדומיננטי ביותר במכנה, וכל שאר האיברים יהיו זניחים לגביו.

במונה יהיה הערך הדומיננטי x כאשר $x \to \infty$, ולכן האיבר 5 יהיה זניח.

לכן מציאת גבול (אם קיים) יכולה להסתפק רק בשני איברים אלה, כלומר:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+5}{x^2+3x-7} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2} =$$

אחרי צמצום:

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

ומכאן: הישר $y = 0$ יהיה אסימפטוטה אופקית מימין, ובאותו אופן נקבל גם $y = 0$ אסימפטוטה אופקית משמאל.

> **חשוב!** זכרו: את האסימפטוטה האופקית (בניגוד לאנכית) יכולה הפונקציה לחתוך בנקודות הקרובות ל- $x = 0$. במקרה שלנו אנו יודעים שעבור: $x = -5$ $y = 0$, כלומר הפונקציה חותכת את האסימפטוטה.

מה תהיה האסימפטוטה האופקית עבור: $y = \frac{3x^2+5x-7}{x^2-2x+1}$?

גם כאן ניישם את מציאת הגבול על פי האיברים הדומיננטיים במונה ובמכנה:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+5x-7}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{x^2} = \underline{3}$$

כאן האסימפטוטה היא $y = 3$

ועבור הפונקציה: $y = \frac{x^2}{x+1}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} x$$

לפונקציה זו אין גבול, ולכן אין אסימפטוטה אופקית.

<u>טיפים :</u>

- כאשר חזקת המונה > מחזקת המכנה, אין אסימפטוטה (הפונקציה מתבדרת).
- כאשר חזקת המונה = חזקת המכנה, חילוקם נותן את האסימפטוטה.
- כאשר חזקת המונה < מחזקת המכנה, $y=0$ היא האסימפטוטה.

כה. חקרו את הפונקציה : $y=\dfrac{x^2-3x-1}{x^2}$

פתרון :

<u>ריכוז נתונים :</u>

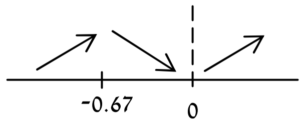
תחום הגדרה : $x \neq 0$

אסימפטוטות : אנכית : $x=0$

אופקית : $y=1$

נקודת קיצון : $(-0.666,3.25)$

תחומי עלייה וירידה :



חיתוך צירים : $(3.3,0)$, $(-0.3,0)$

שִׂרטוט

<u>מציאת תחום הגדרה :</u> $x^2 \neq 0$

$x \neq 0$

<u>אסימפטוטות :</u>

מציאת אסימפטוטה אנכית : $y(0)=\dfrac{-1}{0}$

אסימפטוטה אנכית : $x=0$

מציאת אסימפטוטה אופקית : $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x-1}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

אסימפטוטה אופקית : $y=1$

<u>מציאת נקודות קיצון :</u> $y=\dfrac{x^2-3x-1}{x^2}$

$$y'=\frac{(2x-3)\cdot x^2-2x(x^2-3x-1)}{x^4}$$

$$y'=\frac{3x^2+2x}{x^4}$$

$$\frac{3x^2+2x}{x^4}=0$$

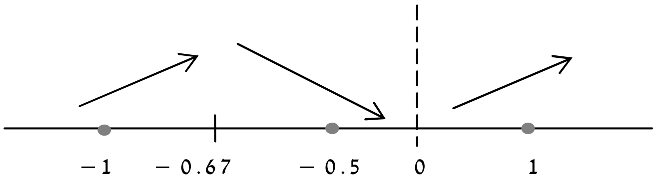
$$3x^2+2x=0$$

$x_2=-\dfrac{2}{3}$ $\qquad$ $x_1=0$ לא מוגדר

$$y\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^2-3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)-1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=3.25$$

נקודת קיצון : $(-0.67,3.25)$

<u>תחומי עלייה וירידה :</u>



$$y'=\frac{3x^2+2x}{x^4}$$

$$y'(-1)=\frac{3\cdot 1-2}{(-1)^4}>0$$

$$y'(-0.5)=\frac{3\cdot(-0.5)^2+2\cdot(-0.5)}{(-0.5)^4}<0$$

$$y'(1)=\frac{3+2}{1}>0$$

והתחומים : $x < -0.67$ עלייה

$-0.67 < x < 0$ ירידה

$x > 0$ עלייה

<u>חיתוך צירים :</u> $y=\frac{x^2-3x-1}{x^2}$

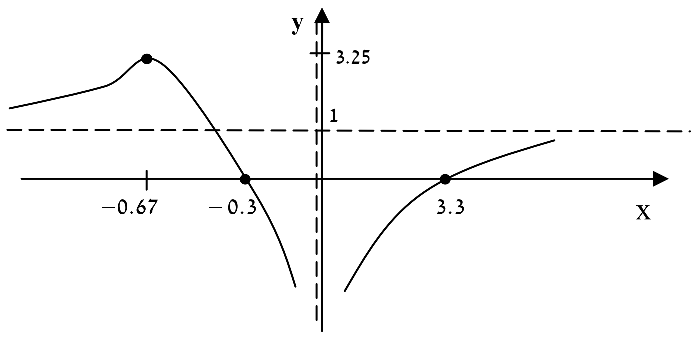
עבור : $x=0$ $\leftarrow$ לא מוגדר

עבור : $y=0$ $\leftarrow$ $x^2-3x-1=0$

$x_1=3.3 \qquad x_2=-0.3$

<u>נקודות חיתוך צירים</u> : $(3.3,0)$, $(-0.3,0)$

<u>שׂרטוט :</u>



כו. חקרו את הפונקציה: $y=\frac{x}{x^2-9}$

פתרון:

<u>ריכוז נתונים:</u>

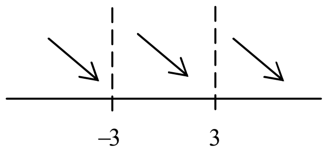
תחום הגדרה: $x\neq 3,-3$

אסימפטוטות: אנכיות: $x=3,-3$

אופקית: $y=0$

נקודות קיצון: אין

תחומי עלייה וירידה:



חיתוך צירים: $(0,0)$

שִׂרטוט

<u>מציאת תחום הגדרה:</u>

$$x^2-9\neq 0$$

$$x\neq \pm 3$$

<u>אסימפטוטות:</u>

מציאת אסימפטוטות אנכיות:

$$y(3)=\frac{3}{0}$$

$$y(-3)=\frac{-3}{0}$$

ולכן: אסימפטוטות אנכיות: $x=3 \quad x=-3$

מציאת אסימפטוטות אופקיות: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

ולכן אסימפטוטה אופקית: $y=0$

<u>מציאת נקודות קיצון:</u>

$$y=\frac{x}{x^2-9}$$

$$y'=\frac{1\cdot(x^2-9)-2x\cdot x}{(x^2-9)^2}$$

$$y'=\frac{-x^2-9}{(x^2-9)^2}$$

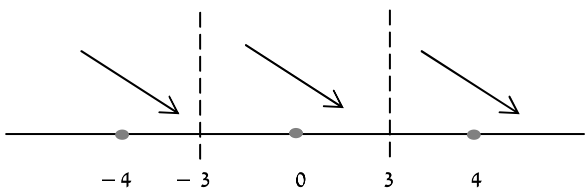
$$\frac{-x^2-9}{(x^2-9)^2}=0$$

$$-x^2-9=0$$

$$x=\phi$$

אין נקודות קיצון!

<u>תחומי עלייה וירידה:</u>



$$y' = \frac{-x^2 - 9}{(x^2 - 9)^2}$$

$$y'(-4) = \frac{-(-4)^2 - 9}{((-4)^2 - 9)^2} < 0$$

$$y'(0) = \frac{-9}{(-9)^2} < 0$$

$$y'(4) = \frac{-4^2 - 9}{(4^2 - 9)^2} < 0$$

הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה!

מאחר שאין לנו מספיק נתונים לשִרטוט, נמצא נקודות פיתול על ידי y'' :

$$y' = \frac{-x^2 - 9}{(x^2 - 9)^2} = \frac{-x^2 - 9}{x^4 - 18x^2 + 81}$$

$$y'' = \frac{-2x \cdot (x^4 - 18x^2 + 81) - (-x^2 - 9)(4x^3 - 36x)}{(x^4 - 18x^2 + 81)^2}$$

אחרי פתיחת סוגריים וכינוס איברים דומים :

$$y'' = \frac{2x^5 + 36x^3 - 486x}{(x^4 - 18x^2 + 81)^2}$$

$$\frac{2x^5 + 36x^3 - 486x}{(x^4 - 18x^2 + 81)^2} = 0$$

$$2x(x^4 + 18x^2 - 243) = 0$$

$x = 0$ או $x^4 + 18x^2 - 243 = 0$

יהי $t = x^2$: $t^2 + 18t - 243 = 0$

$t_1 = -27$ לא מתאים $t_2 = 9$

$x = \pm 3$ לא מוגדר!

לכן נקודת פיתול יחידה : $x = 0$

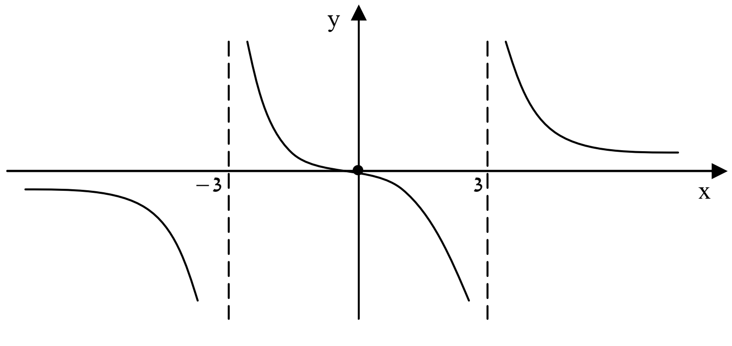
<u>חיתוך עם הצירים :</u> $y = \frac{x}{x^2 - 9}$

עבור : $x = 0$ $\leftarrow$ $y = \frac{0}{-9} = 0$

עבור : $y = 0$ $\leftarrow$ $x = 0$

כלומר נקודת חיתוך צירים : $(0,0)$

<u>שִרטוט :</u>



<u>בדיקת הבנה</u>

חקרו את הפונקציות:

.42 $y=\frac{x^3-2x+1}{x^3}$ (בלי חיתוך עם ציר x)

.43 $y=\frac{x}{x^2-25}$

גם בפונקציות שורש אנו נדרשים לתחומי הגדרה, אולם בשונה מפונקציות מנה אין לפונקציה זו אסימפטוטות, אלא היא פשוט "נעצרת".

עבור $y=\sqrt{x-5}$ אנו יודעים שחייב להתקיים: $x-5\ge 0$ (אין שורש למספר שלילי), ולכן $x\ge 5$ הוא תחום ההגדרה.

כאן אנו מוצאים שכאשר מתקרבים ל- $x=5$ מימין, $y=0$. אולם אין אפשרות להתקרב לנקודה זו משמאל, ולכן <u>אין כאן אסימפטוטה</u>.

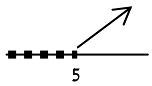
חקירה זריזה תראה לנו:

תחום: $x\ge 5$

נק' קיצון: אין

אסימפטוטות: אין

עלייה וירידה:



חיתוך צירים: $(0,5)$

שִׂרטוט

<u>תחום הגדרה</u>: כבר מצאנו.

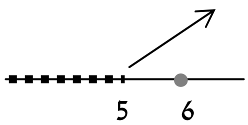
<u>נקודות קיצון</u>:

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x-5}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x-5}}=0$$

$$x=\phi$$

<u>תחומי עלייה וירידה</u>:



$$y'(6)=\frac{1}{2\sqrt{6-5}}=\frac{1}{2}>0$$

נוסיף מציאת נק' פיתול:

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x-5}}$$

$$y''=-\frac{1}{(2\sqrt{x-5})^2}\cdot\frac{2}{2\sqrt{x-5}}=-\frac{1}{4(x-5)}\cdot\frac{1}{\sqrt{x-5}}$$

$$y'' = -\frac{1}{4(x-5)\sqrt{x-5}} = 0$$
$$x = \phi$$

כלומר אין נקודות פיתול.

על ידי הצבה של x כלשהו בתחום, למשל, $x = 6$, נקבל:

$$y''(6) = -\frac{1}{4 \cdot 1 \cdot \sqrt{1}} < 0$$

ולכן הפונקציה קעורה כלפי מטה בכל התחום.

<u>חיתוך עם הצירים:</u>

במקרים כאלה – כשיש נקודות קצה – כדאי מאוד למצוא אותן:

עבור $x = 5$: $y(5) = \sqrt{5-5} = 0$

והנקודה היא $(5,0)$

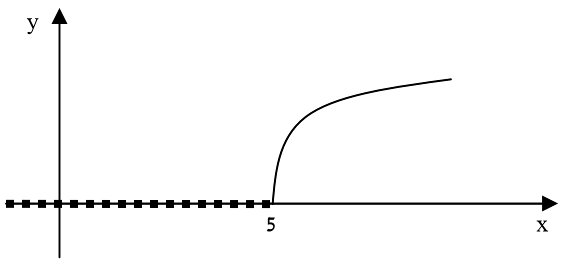
עבור $y = 0$: $\sqrt{x-5} = 0 \quad /(\ )^2$

$$x - 5 = 0$$
$$x = 5$$

וזו אותה נקודה,

כלומר נקודת חיתוך צירים: $(5,0)$.

<u>שִׂרטוט:</u>



לעִתים אנו נדרשים לפתרון אי שוויון ריבועי כפי שכבר למדנו.

כז. חקרו את הפונקציה: $y = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$

פתרון:

<u>ריכוז נתונים:</u>

תחום הגדרה: $x < -1$ או $x > 5$

אסימפטוטות: אין

נקודות קיצון: אין

תחומי עלייה וירידה:

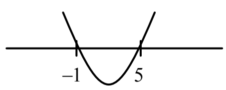
חיתוך צירים: $(5,0)$, $(-1,0)$

שִׂרטוט

<u>מציאת תחום הגדרה:</u> $x^2 - 4x - 5 \ge 0$

מציאת נקודות 0: $(x-5)(x+1) = 0$

$$x_1 = 5 \quad x_2 = -1$$



פתרון: $x < -1$ או $x > 5$

<u>אסימפטוטות :</u> אנכיות – אין.

אופקיות – אין.

<u>מציאת נקודות קיצון :</u>

$$y=\sqrt{x^2-4x-5}$$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x^2-4x-5}}\cdot(2x-4)$$

$$y'=\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x-5}}$$

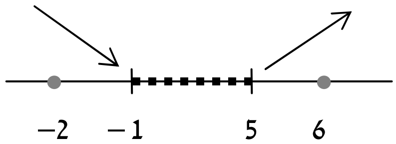
$$\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x-5}}=0$$

$$x-2=0$$

$x=2$ לא בתחום!

אין נקודות קיצון.

<u>תחומי עלייה וירידה :</u>



$$y'=\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x-5}}$$

$$y'(-2)=\frac{-2-2}{\sqrt{(-2)^2-4\cdot(-2)-5}}<0$$

$$y'(6)=\frac{6-2}{\sqrt{6^2-4\cdot6-5}}>0$$

והתחומים : הפונקציה יורדת בתחום : $x<-1$

ועולה בתחום : $x>5$

בשל מיעוט נתונים נבדוק קעירות כלפי מעלה וקעירות כלפי מטה :

$$y'=\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x-5}}$$

$$y''=\frac{1\cdot\sqrt{x^2-4x-5}-\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x-5}}\cdot(x-2)}{x^2-4x-5}$$

$$y''=\frac{x^2-4x-5-(x-2)^2}{(x^2-4x-5)\sqrt{x^2-4x-5}}$$

$$y''=\frac{x^2-4x-5-x^2+4x-4}{(x^2-4x-5)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-9}{(x^2-4x-5)^{\frac{3}{2}}}<0$$

לכן הפונקציה קעורה כלפי מטה בכל תחום הגדרתה.

<u>חיתוך עם הצירים:</u>

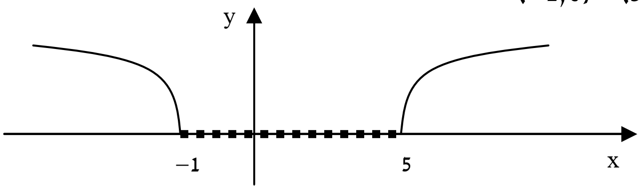
עבור: $x=0$ $\leftarrow$ $y(0)=$ לא מוגדר

עבור: $y=0$ $\leftarrow$ $\sqrt{x^2-4x-5}=0$

$x_1=5 \quad x_2=-1$

כלומר נקודות חיתוך צירים: $(5,0)$ $(-1,0)$

<u>שׂרטוט:</u>



כח. חקרו את הפונקציה: $y=\sqrt{x^3-8x^2+12x}$

פתרון:

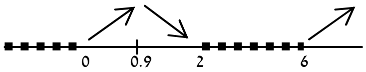
<u>ריכוז נתונים:</u>

תחום הגדרה: $x\ge 6$ או $0\le x\le 2$

אסימפטוטות: אין

נקודת קיצון: $(0.9,2.25)$

תחומי עלייה וירידה:



חיתוך צירים: $(2,0)$, $(6,0)$, $(0,0)$

שׂרטוט

<u>מציאת תחום הגדרה:</u> $x^3-8x^2+12x\ge 0$

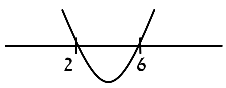
$x(x^2-8x+12)\ge 0$

מתקבלת מערכת אי שוויונות:

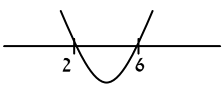
$x\le 0$ או $x\ge 0$

וגם $x^2-8x+12\le 0$ | וגם $x^2-8x+12\ge 0$

$(x-6)(x-2)\le 0$ | $(x-6)(x-2)\ge 0$

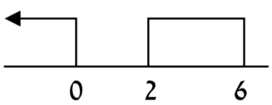


$2<x<6$

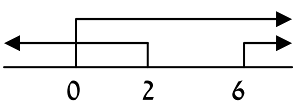


$x\ge 6$ או $x\le 2$

חיתוך פתרונים:



<u>אין פתרון</u>



$x\ge 6$ או $0\le x\le 2$

ולכן תחום ההגדרה הוא: $x\ge 6$ או $0\le x\le 2$

<u>אסימפטוטות:</u>

אנכיות: אין

אופקיות: $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^3-8x^2+12x}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^3}=\infty$

הפונקציה מתבדרת, ולכן אין אסימפטוטות.

<u>מציאת נקודות קיצון:</u> $y=\sqrt{x^3-8x^2+12x}$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x^3-8x^2+12x}}\cdot(3x^2-16x+12)$$

$$y'=\frac{3x^2-16x+12}{2\sqrt{x^3-8x^2+12x}}$$

$$\frac{3x^2-16x+12}{2\sqrt{x^3-8x^2+12x}}=0$$

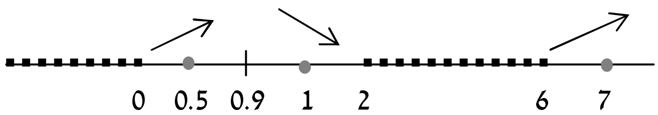
$$3x^2-16x+12=0$$

$x_1=4.43$ לא בתחום $\quad x_2=0.9$

$$y(0.9)=2.25$$

נקודת קיצון: $(0.9,2.25)$

<u>תחומי עלייה וירידה:</u>



$$y'=\frac{3x^2-16x+12}{2\sqrt{x^3-8x^2+12x}}$$

$$y'(0.5)=\frac{3\cdot(0.5)^2-16\cdot(0.5)+12}{2\sqrt{(0.5)^3-8\cdot(0.5)^2+12\cdot(0.5)}}>0$$

$$y'(1)=\frac{3-16+12}{2\sqrt{1-8+12}}<0$$

$$y'(7)=\frac{3\cdot 7^2-16\cdot 7+12}{2\sqrt{7^3-8\cdot 7^2+12\cdot 7}}>0$$

והתחומים: הפונקציה יורדת בתחום: $0.9<x<2$

ועולה בתחומים: $0<x<0.9 \;,\; x>6$

הנקודה $(0.9,2.25)$ היא נקודת מקסימום.

כדאי לבדוק מה צורת הגרף בתחום: $x>6$. מכיוון שפיתוח y'' הוא מורכב, לא נבצע פיתוח זה ונסתמך על חשיבה לוגית. אנו יודעים שפונקציית שורש היא למעשה סוג של פרבולה "שוכבת":

$y^2=x \rightarrow y=\sqrt{x}$ (כלומר יש כאן מעין סיבוב של הצירים ב- 90°).

לכן נקבל שבתחום: $x>6$ הפונקציה <u>קעורה כלפי מטה</u>!

<u>מציאת חיתוך עם הצירים:</u> $y=\sqrt{x^3-8x^2+12x}$

עבור: $x=0 \quad \leftarrow \quad y(0)=\sqrt{0}=0$

עבור: $y=0 \quad \leftarrow \quad \sqrt{x^3-8x^2+12x}=0$

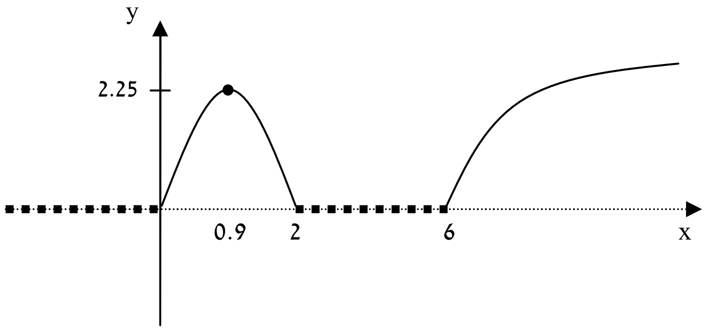
$$0=x^3-8x^2+12x=x(x^2-8x+12)$$

$$0=x(x-6)(x-2)$$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 6 \quad x_3 = 2$

כלומר נקודות חיתוך צירים: $(2,0)$, $(6,0)$, $(0,0)$.

<u>שִׂרטוט:</u>



<u>בדיקת הבנה</u>

חקרו את הפונקציות הבאות:

44. $y = \sqrt{x^2 + 2x - 15}$

45. $y = \sqrt{2x^3 - x^2 - 3x}$

לפני סיום נוסיף שילוב של פונקציית שורש עם מנה.

כט. חקרו את הפונקציה: $y = \dfrac{(x+1)\sqrt{x+5}}{x}$

פתרון:

<u>ריכוז נתונים:</u>

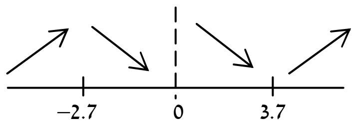
תחום הגדרה: $x \geq -5 \quad x \neq 0$

אסימפטוטות: אנכית: $x = 0$

אופקית: אין

נקודות קיצון: $(3.7, 3.75)$, $(-2.7, 0.95)$

תחומי עלייה וירידה:



חיתוך צירים: $(-5,0)$, $(-1,0)$

שִׂרטוט

<u>מציאת תחום הגדרה:</u> 1. $x \neq 0$

2. $x + 5 \geq 0$

$x \geq -5$

איחוד התוצאות 1+2: $x \geq -5 \quad x \neq 0$

<u>אסימפטוטות:</u>

אנכיות:

עבור $x = 0$: המונה $\neq 0$ והמכנה מתאפס ולכן:

אסימפטוטה אנכית: $x = 0$

אולם $x = -5$ אינו אסימפטוטה כי הפונקציה אינה מוגדרת כלל <u>משמאל!</u>

אופקיות :
$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)\sqrt{x+5}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}=\infty$$

הפונקציה מתבדרת - אין אסימפטוטה אופקית.

<u>מציאת נקודות קיצון :</u>
$$y=\frac{(x+1)\sqrt{x+5}}{x}$$

המונה הוא פונקציית מכפלה!

$$u=(x+1)\sqrt{x+5} \qquad v=x$$

$$u'=\sqrt{x+5}+\frac{x+1}{2\sqrt{x+5}} \qquad v'=1$$

$$u'=\frac{2(x+5)+(x+1)}{2\sqrt{x+5}}$$

$$u'=\frac{3x+11}{2\sqrt{x+5}}$$

$$y'=\frac{\frac{(3x+11)\cdot x}{2\sqrt{x+5}}-1\cdot(x+1)\sqrt{x+5}}{x^2}$$

$$y'=\frac{(3x+11)\cdot x-2\cdot(x+1)(x+5)}{2x^2\sqrt{x+5}}$$

$$y'=\frac{3x^2+11x-2x^2-12x-10}{2x^2\sqrt{x+5}}$$

$$y'=\frac{x^2-x-10}{2x^2\sqrt{x+5}}$$

$$\frac{x^2-x-10}{2x^2\sqrt{x+5}}=0$$

$$x^2-x-10=0$$

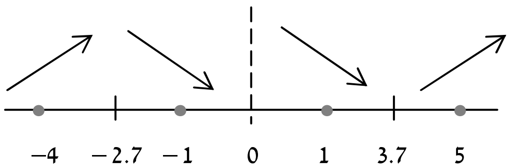
$$x_1=3.7 \quad x_2=-2.7$$

$$y(3.7)=\frac{(3.7+1)\sqrt{3.7+5}}{3.7}=3.75$$

$$y(-2.7)=\frac{(-2.7+1)\sqrt{-2.7+5}}{-2.7}=0.95$$

נקודות קיצון : $(3.7,3.75)$, $(-2.7,0.95)$

<u>תחומי עלייה וירידה :</u>



$$y' = \frac{x^2 - x - 10}{2x^2\sqrt{x+5}}$$

$$y'(-4) = \frac{(-4)^2 - (-4) - 10}{2\cdot(-4)^2\sqrt{-4+5}} > 0$$

$$y'(-1) = \frac{(-1)^2 - (-1) - 10}{2\cdot(-1)^2\sqrt{-1+5}} < 0$$

$$y'(1) = \frac{1^2 - 1 - 10}{2\cdot 1^2\sqrt{1+5}} < 0$$

$$y'(5) = \frac{5^2 - 5 - 10}{2\cdot 5^2\sqrt{5+5}} > 0$$

והתחומים: הפונקציה יורדת בתחום: $0 < x < 3.7$, $-2.7 < x < 0$

ועולה בתחום: $x < -2.7$, $x > 3.7$

נק' מקסימום: $(-2.7, 0.95)$

נק' מינימום: $(3.7, 3.75)$

<u>חיתוך עם הצירים:</u> $y = \frac{(x+1)\sqrt{x+5}}{x}$

עבור: $x = 0$ $\leftarrow$ $y(0) =$ לא מוגדר

עבור: $y = 0$ $\leftarrow$ $\frac{(x+1)\sqrt{x+5}}{x} = 0$

$(x+1)\sqrt{x+5} = 0$

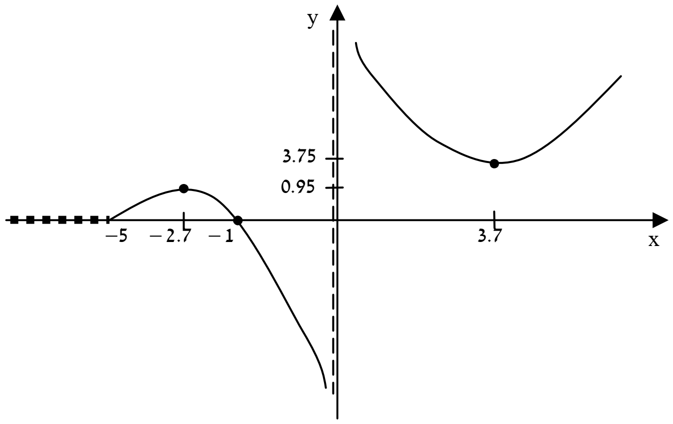
$\sqrt{x+5} = 0$ או $x + 1 = 0$

$x + 5 = 0$ $x = -1$

$x = -5$

כלומר נקודת חיתוך צירים: $(-5,0)$, $(-1,0)$

<u>שִׂרטוט:</u>



<u>בדיקת הבנה</u>

חקרו את הפונקציות:

46. $y=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-4}}$

47. $y=\dfrac{(x-1)\sqrt{x+4}}{x}$

<u>תרגול עצמי</u>

חקרו את הפונקציות הבאות ושרטטו סקיצה:

48. $y=\sqrt{x(12-x^2)}$

49. $y=2+\dfrac{4x-11}{(3-x)^2}$

50. $y=\dfrac{3x^2-7x+3}{(x-1)^2}$

51. $y=\dfrac{x}{x^2-6x+8}$

52. $y=\dfrac{-x}{x-2\sqrt{x}}$

53. $y=\dfrac{8\sqrt{x-6}}{x^2}$

חקירת פונקציה עם פרמטרים

עד כה עסקנו בפונקציות ידועות. אולם לעתים אנו נתקלים בפונקציות שאחד או שניים מהמקדמים אינם ידועים לנו, כלומר הם פרמטרים. כדי לחקור פונקציות כאלה יש צורך למצוא את ערכי הפרמטרים תחילה.
איך ניתן למצוא ערכים אלה ?
כמו תמיד יש לחפש את הנתון הנוסף שיגלה אותם בתוך השאלה. באופן מוחלט ניתן לומר שכאשר יש פרמטר אחד בפונקציה, נקבל רמז אחד. וכאשר יש שני פרמטרים, נקבל שני רמזים. רמזים אלה נתונים באופן בולט או סמוי. בכל מקרה יש לאתרם ולהשתמש בהם.

לדוגמה : נתונה הפונקציה : $y = x^3 + ax^2 - 24x$, ונתון שקיימת נקודת קיצון ב- $x = 2$. מה ערכו של הפרמטר a ?

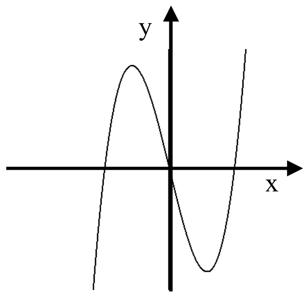
הרמז הנוסף במקרה זה הוא $y'(2) = 0$, וכדי למצוא את הפרמטר a יש לגזור את הפונקציה. אולם נגזרת הפונקציה היא לפי משתנה x! ולא a. (a הוא פרמטר). לכן נדגיש :

$$y' = \frac{\Delta y}{\Delta \underline{\underline{x}}} = 3x^2 + 2ax - 24$$

ובהצבה x=2 , $y' = 0$:

$$0 = 3 \cdot 4 + 4a - 24$$
$$-4a = -12$$
$$\underline{a = 3}$$

כדי למצוא נקודות קיצון נוספות או לערוך חקירה מלאה יש להציב את הפרמטר בפונקציה ולבצע חקירה מלאה מראשיתה, כלומר הפונקציה היא : $y = x^3 + 3x^2 - 24x$
מומלץ לבצע חקירה מלאה ולקבל :



דוגמה נוספת : נתון שלפונקציה : $f(x) = ax^3 - 21x^2 + bx - 50$ יש נקודת קיצון (2,2)

א. מצאו את הפרמטרים : a, b

ב. חקרו את הפונקציה ושרטטו סקיצה.

פתרון :

במצב זה, לכאורה, נתון רק רמז אחד, אולם, למעשה, יש כאן <u>שני</u> נתונים :

נתון (1) : $f'(2) = 0$

נתון (2) : $f(2) = 2$

ולכן משוואה I היא :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = 3ax^2 - 42x + b$$

$$f'(2) = 0 = 3a \cdot 4 - 42 \cdot 2 + b$$

$$\text{I} \quad 12a + b = 84$$

משוואה II :

$$f(2) = 2 = a \cdot 8 - 21 \cdot 4 + 2b - 50$$

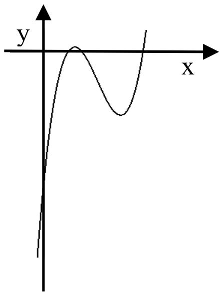
$$\text{II} \quad 8a + 2b = 136$$

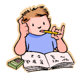
פתרון מערכת המשוואות: $\boxed{a=2}$ $\boxed{b=60}$

כלומר הפונקציה היא: $f(x)=2x^3-21x^2+60x-50$

ומכאן והלאה החקירה היא רגילה, ונקבל

את הגרף:





<u>בדיקת הבנה</u>

54. לפונקציה: $y=\frac{x^2-4x+c}{x-2}$ יש נקודת קיצון כאשר x=1 . מצאו את c.

55. לפונקציה: $y=\frac{(x-a)^2}{x^2+5}$ $a>0$ יש נקודת קיצון כאשר x=-0.5 . מצאו את a.

לעתים אנו יכולים למצוא רמזים על ידי <u>האסימפטוטות</u>:

ל. מצאו את הפרמטרים בפונקציה: $y=\frac{9+ax^2}{x^2-b}$ אם נתון שלפונקציה אסימפטוטה אופקית $y=-1$ ואסימפטוטה אנכית $x=1$.

פתרון:

מתוך הנתון על האסימפטוטה האופקית אנו למדים: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9+ax^2}{x^2-b}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax^2}{x^2}=-1$

כלומר: $\boxed{a=-1}$

מתוך הנתון על האסימפטוטה האנכית נוכל להסיק שקיימת נקודת אי הגדרה $x=1$, כלומר עבור

$x=1$ מתקיים: $x^2-b=0$

$1-b=0$

$\boxed{b=1}$

ומכאן שהפונקציה היא: $y=\frac{9-x^2}{x^2-1}$

כמובן, ניתן לשלב בין שני סוגי הרמזים, אולם אם הפנמנו את חקירת הפונקציה והמשמעות של נקודות קיצון ואסימפטוטות, נוכל לפתור כל פונקציה עם פרמטרים ללא קושי רב.

<u>בדיקת הבנה</u>

56. נתונה הפונקציה : $f(x)=\frac{6x+m}{px+2x^2}$ ידוע כי לפונקציה יש נקודת קיצון כאשר $x=-1$ והישר $x=1$ הוא אסימפטוטה לפונקציה. מצאו את m ו- p.

57. נתונה הפונקציה : $f(x)=\frac{8(x-1)}{(x-a)^2}+b$ נתון כי האסימפטוטה האופקית של הפונקציה חותכת את האסימפטוטה האנכית של הפונקציה בנקודה (7,-8). מצאו את a ו- b.

עוד אפשרות לחקור פונקציה היא על פי פרמטר נתון כמו בפונקציה : $y=\frac{x}{x^2-a}$ כאשר $a>0$
כאשר מבצעים את החקירה, כל התוצאות מבוטאות בעזרת a , ועדיין ניתן לקבל חקירה ממצה עד לשִׂרטוט.

נחקור את הפונקציה : $y=\frac{x}{x^2-a}$

פתרון :

<u>ריכוז נתונים :</u>

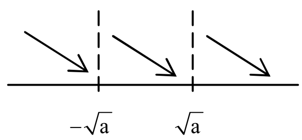
תחום הגדרה : $x\neq\pm\sqrt{a}$

אסימפטוטות : אנכית : $x=\pm\sqrt{a}$

אופקית : $y=0$

נקודת קיצון : אין

תחומי עלייה וירידה :



חיתוך צירים : (0,0)

שִׂרטוט

<u>מציאת תחום הגדרה :</u>

$$x^2-a\neq0$$

$$x\neq\pm\sqrt{a}$$

<u>אסימפטוטות :</u>

אנכיות : $x=\sqrt{a},-\sqrt{a}$

אופקיות : $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-a}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0 \quad\to\quad y=0$

וכנ"ל: $\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2-a}=0 \quad\to\quad y=0$

<u>מציאת נקודות קיצון :</u>

$$y=\frac{x}{x^2-a}$$

$$y'=\frac{1\cdot(x^2-a)-x\cdot2x}{(x^2-a)^2}$$

$$y'=\frac{x^2-a-2x^2}{(x^2-a)^2}$$

$$y'=\frac{-x^2-a}{(x^2-a)^2}$$

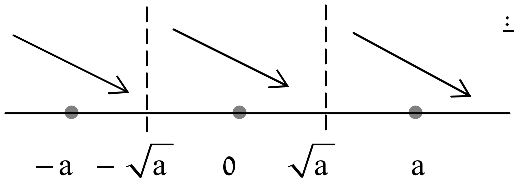
$$\frac{-x^2-a}{(x^2-a)^2}=0$$

$$-x^2-a=0$$

$$x=\phi$$

אין נקודות קיצון.

<u>תחומי עלייה וירידה:</u>



$$y'=\frac{-x^2-a}{(x^2-a)^2}$$

$$y'(-a)=\frac{-a^2-a}{(a^2-a)^2}<0$$

$$y'(0)=\frac{-a}{(-a)^2}<0$$

$$y'(a)=\frac{-a^2-a}{(a^2-a)^2}<0$$

הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

<u>חיתוך צירים:</u>

$$y=\frac{x}{x^2-a}$$

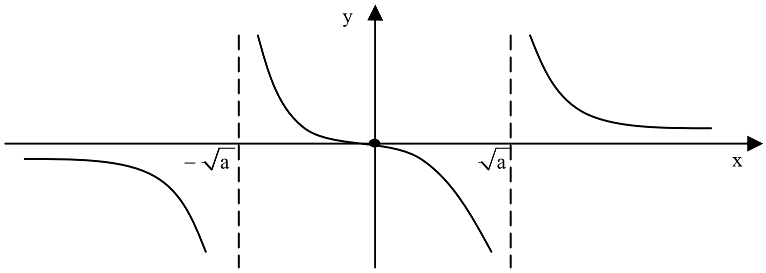
עבור: $x=0$ $\leftarrow$ $y(0)=\frac{0}{-a}=0$

עבור: $y=0$ $\leftarrow$ $\frac{x}{x^2-a}=0$

$$x=0$$

נקודות חיתוך צירים: $(0,0)$.

<u>שרטוט:</u>



בדיקת הבנה

58. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{a}{x^2-4}$ נתון כי ערך הנגזרת בנקודה $x=-4$ הוא 1.

א. מצאו את a.

ב. חקרו את הפונקציה ושרטטו סקיצה.

59. לפונקציה: $y=\frac{1}{x^2-5x+a}$ יש אסימפטוטה אנכית בנקודה $x=2$.

א. מצאו את a.

ב. חקרו את הפונקציה ושרטטו סקיצה.

תרגול עצמי

60. לפונקציה: $f(x)=\frac{2x^3+ax}{x^2-1}$ יש מינימום בנקודה שבה $x=2$.

א. מצאו את a.

ב. חקרו את הפונקציה ושרטטו סקיצה.

61. נתונה הפונקציה: $y=\frac{ax}{x^2-4x+c}$

א. מה צריך להיות ערכו של c כדי שהפונקציה תהיה מוגדרת לכל x ?

ב. נתון: $c=3$ וגרף הפונקציה עובר דרך הנקודה $(-1,-0.25)$

1. מהו הערך של a ?

2. חקרו פונקציה זו ושרטטו סקיצה שלה.

62. נתונה הפונקציה: $y=\frac{x^2}{ax^2+bx+c}$ ידוע כי לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית כאשר $x=-2$,

אסימפטוטה אופקית $y=1$ ונקודת מינימום כאשר $x=-12$.

א. מהם ערכי a, b, c ?

ב. האם קיימת נקודת קיצון נוספת? אם כן, מהם שיעוריה?

63. לפונקציה: $y=\frac{ax^2}{x^2+bx+c}$ יש אסימפטוטות אנכיות כאשר $x=1$ וכאשר $x=3$,

ואסימפטוטה אופקית $y=1$.

א. מהם ערכי a, b, c ?

ב. חקרו את הפונקציה ושרטטו סקיצה.

64. הפונקציה: $y=\frac{ax^2+b}{x^2+cx+1}$ עוברת דרך הראשית. נתון כי לפונקציה יש מקסימום

בנקודה $(-2,2\frac{2}{3})$. מהם ערכי הפרמטרים: a, b, c ?

65. לפונקציה: $y = \frac{ax^2 + 9x + b}{x^2 - 5x + c}$ יש אסימפטוטה אנכית $x = 3$ ואסימפטוטה אופקית $y = 1$.

הפונקציה חותכת את ציר ה- y בנקודה $(0, 3\frac{1}{3})$.

א. מהם ערכי a, b, c ?

ב. חקרו את הפונקציה ושרטטו סקיצה.

66. נתונה הפונקציה: $y = \frac{ax^2 + bx + 3}{(x-1)^2}$ $(-1, 3.25)$ היא נקודת קיצון של הפונקציה.

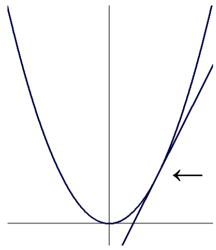
א. מהם ערכי a, b ?

ב. חקרו את הפונקציה ושרטטו סקיצה.

מציאת משיקים לפונקציה

עד כה ראינו את השימוש בנגזרת לחקירת פונקציה כוללת. נעבור לעוד שימושים של הנגזרת שניתן בעזרתם לפתור בעיות.

הגדרת המשיק: בדומה למה שכבר הכרנו בגיאומטריה לגבי משיק למעגל, המשיק הוא ישר ה"נושק" לפונקציה בנקודה אחת. כלומר בנקודה זו, שנקראת **נקודת ההשקה**, שיפוע הישר זהה בדיוק לשיפוע הפונקציה באותה נקודה.



לדוגמה: לפונקציה: $y = x^2$ יש שיפוע 2 בנקודה $x = 1$ (כי $y' = 2x$, ולכן $y'(1) = 2 = m$ כמו שראינו בתחילת הנושא), והיא עוברת דרך הנקודה $(1,1)$.

כדי שהישר ישיק לפונקציה בנקודה זו, הוא חייב למלא אחר שני תנאים:

א. $m = 2$ כדי שהוא ישיק לפונקציה ולא יחתוך אותה בנקודה זו!

ב. נקודת ההשקה חייבת להיות אחת הנקודות על המשיק, ולכן הישר חייב לעבור דרך הנקודה $(1,1)$.

כדי להבדיל בין הפונקציה הנתונה לישר המשיק לה, נסמן את המשיק ב- $j(x)$

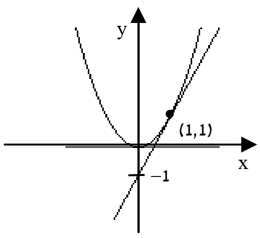
כעת על פי נוסחת שיפוע ונקודה נוכל לקבל את משוואת הישר:

$$j - 1 = 2(x - 1)$$

$$j = 2x - 1$$

וזוהי משוואת הישר המשיק לפונקציה בנקודה: $x = 1$

שִׂרטוט:



בדוגמה זו עשינו שימוש במספר מרכיבים חשובים ונציין אותם לשם הדגשה:

1. כפי שלמדנו בתחילת נושא הנגזרת, נגזרת היא פונקציה של שיפועים. לכן לכל נקודה אנו יכולים למצוא את השיפוע המתאים לה. מציאת שיפוע ב- x_0 היא, אם כן, הצבה של x_0 בנגזרת, כלומר $m = f'(x_0)$.
2. נקודת ההשקה היא נקודה משותפת לפונקציה ולמשיק אליה, ולכן (x_0, y_0) של נקודת ההשקה חייבים לקיים הן את משוואת הפונקציה והן את משוואת המשיק.
3. המשיק הוא בהגדרתו ישר! ולכן תבנית משוואת המשיק היא: $j = mx + n$.

לכן בכל שאלה בנושא משיקים נחפש תמיד את השיפוע ואת הנקודה כדי ליצור משוואת ישר.

הערה: גם בנושא זה אנו מוצאים שהנתונים ניתנים באופן עקיף, כלומר ברמז ולא באופן מפורש.

דוגמאות:

לא. נתונה הפונקציה: $y = x^2 - 11x + 30$

מצאו את משוואת המשיק לפונקציה המקביל לישר: $2y - 14x + 5 = 0$

פתרון:

בעזרת פונקציית הישר המקביל אנו נרמזים על שיפוע המשיק:

$2y - 14x + 5 = 0$

$2y = 14x - 5$

$y = 7x - 2.5$

ולכן: $m = 7$, כלומר אנו מחפשים על גרף הפונקציה: $y = x^2 - 11x + 30$ נקודה x_0 כך ש: $f'(x_0) = 7$.

כעת נגזור את הפונקציה $y = x^2 - 11x + 30$: $y' = 2x - 11$

$y'(x_0) = 2 \cdot x_0 - 11 = 7$

$2 \cdot x_0 = 18$

$x_0 = 9$

ומכאן הדרך למצוא את y_0 קצרה: $y_0 = y(x_0) = y(9) = 9^2 - 11 \cdot 9 + 30$

$y_0 = 12$

ועל ידי שיפוע $m = 7$ ונקודה $(x_0, y_0) = (9,12)$ מוצאים את משוואת המשיק:

$j - 12 = 7(x - 9)$

$j - 12 = 7x - 63$

$\underline{j = 7x - 51}$

לב. נתונה הפונקציה: $y = x^2 - 4x - 21$

העבירו לפונקציה שני משיקים בנקודות החיתוך עם ציר ה-x. שני המשיקים נחתכים בנקודה K.
מצאו את K.

פתרון:

כאן נרמז על שתי נקודות ההשקה דרכם עובר המשיק. אנו יודעים שבנקודות אלה $y = 0$, ועלינו למצוא תחילה את שיעורי ה-x.

לכן נמצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x:

$x^2 - 4x - 21 = 0$

$x_1 = 7 \qquad x_2 = -3$

למציאת שיפועים: $y = x^2 - 4x - 21$

$y' = 2x - 4$

$y'(7) = 2 \cdot 7 - 4 = 10 = m_1$

$y'(-3) = 2 \cdot (-3) - 4 = -10 = m_2$

ישר I : $m_1 = 10$ והנקודה $(7,0)$

$$j - 0 = 10(x - 7)$$

$$j = 10x - 70$$

ישר II : $m_2 = -10$ והנקודה $(-3,0)$

$$j - 0 = -10(x + 3)$$

$$j = -10x - 30$$

הנקודה K היא חיתוך של הישרים, ולכן :

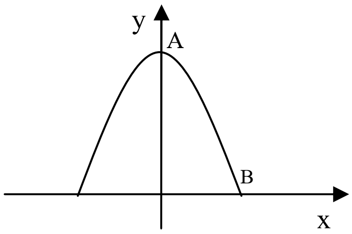
$$10x - 70 = -10x - 30$$

$$20x = 40$$

$$x = 2$$

ממשוואה II : $j(2) = -10 \cdot 2 - 30 = -50$

ולכן : $\underline{K = (2,-50)}$



לג. נתונה הפונקציה : $y = -x^2 - x + 6$. את נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y מסמנים ב- A , ואת נקודת החיתוך שלה עם ציר x החיובי מסמנים ב- B .
מהי משוואת המשיק לפונקציה המקביל לישר AB ?

פתרון :

אם מבקשים ישר מקביל, הרי שהרמז נמצא בשיפוע הישר AB . לכן נמצא תחילה את שיפועו על ידי מציאת הנקודות : A, B

בנקודה A : $x = 0 \leftarrow y(0) = 6$, ולכן : $A = (0,6)$

בנקודה B : $y = 0$, כלומר :

$$-x^2 - x + 6 = 0$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x_1 = -3 \qquad x_2 = 2$$

ולכן : $B = (2,0)$

מציאת שיפוע AB : $m_{AB} = \frac{6-0}{0-2} = -3$

כדי למצוא נקודה שבה השיפוע של הפונקציה הוא -3 , נגזור את הפונקציה :

$$y = -x^2 - x + 6$$

$$y' = -2x - 1$$

$$-3 = -2x - 1$$

$$-2 = -2x$$

$$x = 1$$

$$y(1) = -1 - 1 + 6 = 4$$

ונקודת ההשקה : $(1,4)$

כעת נוכל למצוא את משוואת המשיק : $j - 4 = -3(x - 1)$

$\underline{j=-3x+7}$

בפונקציות מנה שיטת הפתרון נשארת בעינה.

לד. א. מהן משוואות המשיקים לפונקציה : $y=\frac{x-1}{x+2}$ ששיפועיהם 3 ?

ב. האם ניתן לשרטט את הפונקציה ללא חקירה מלאה ?

פתרון :

א. $y'=\frac{1\cdot(x+2)-1\cdot(x-1)}{(x+2)^2}=\frac{3}{(x+2)^2}$

$y'(x_0)=3=\frac{3}{(x_0+2)^2}$

$3(x_0+2)^2=3\ /:3$

$(x_0+2)^2=1$

$x_0{}^2+4x_0+4=1$

$x_0{}^2+4x_0+3=0$

והפתרון : $x_1=-3 \quad x_2=-1$

למציאת הנקודות : $y(-3)=\frac{-3-1}{-3+2}=4 \quad (-3,4)$

$y(-1)=\frac{-1-1}{-1+2}=-2 \quad (-1,-2)$

והמשוואות : I $j_1-4=3(x+3)$

$\underline{j_1=3x+13}$

II $j_2+2=3(x+1)$

$\underline{j_2=3x+1}$

ב. תשובה : כן

והדרך :

קל למצוא אסימפטוטות : אנכית : $x=-2$

אופקית : $y=1$

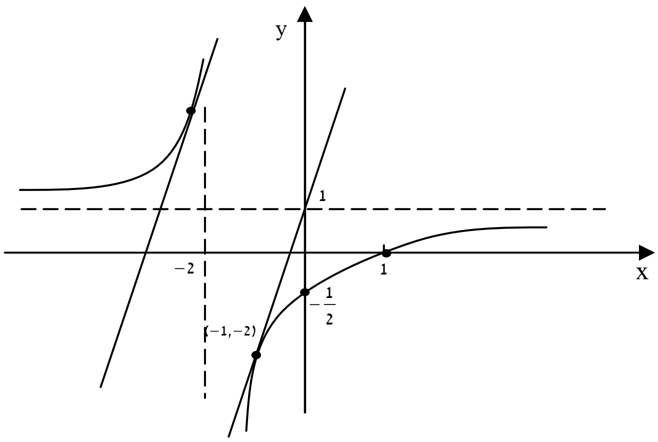
נמצא נקודות חיתוך : $y(0)=-\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad (0,-\frac{1}{2})$

$y=\frac{x-1}{x+2}=0$

$x-1=0$

$x=1 \quad \rightarrow \quad (1,0)$

והשִרטוט: תחילה נשרטט משיקים, אסימפטוטות ונקודות, ולאחר מכן נעביר את גרף הפונקציה.



לה. נתונה הפונקציה: $y=\sqrt{x^3-2x}$

א. מצאו את המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x=2$.

ב. מצאו את נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים.

פתרון:

א. $$y'=\frac{1\cdot(3x^2-2)}{2\sqrt{x^3-2x}}$$

$$y'(2)=\frac{3\cdot4-2}{2\sqrt{8-4}}=\frac{10}{4}=2.5$$

והנקודה: $y(2)=\sqrt{2^3-2\cdot2}=2 \quad\rightarrow\quad (2,2)$

והמשוואה: $j-2=2.5(x-2)$

$\underline{j=2.5x-3}$

ב. עבור: $x=0 \quad\leftarrow\quad j(0)=2.5\cdot0-3=-3 \quad\leftarrow\quad (0,-3)$

עבור: $j=0 \quad\leftarrow\quad 2.5x-3=0$

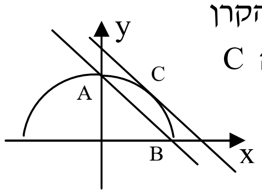
$3=2.5x$

$x=\frac{6}{5} \quad\leftarrow\quad \left(\frac{6}{5},0\right)$

תרגול עצמי

67. הפרבולה $y=4-x^2$ חותכת את ציר ה- y בנקודה A ואת הקרן החיובית של ציר ה- x בנקודה B. המשיק לפרבולה בנקודה C מקביל למיתר AB. (ראו ציור).

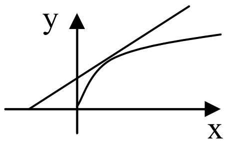
מצאו את שיעורי נקודה C ואת משוואת המשיק.



68. נתונה הפונקציה: $y=\sqrt{3x}$

בנקודה $x = 3$ מעבירים משיק לגרף הפונקציה.

מצאו את משוואת המשיק.



69. בנקודה (t,t^2) שעל גרף הפונקציה: $y=x^2$ $(t\neq0)$ העבירו משיק. הראו כי המשיק חותך את ציר ה- x בנקודה: $x=\frac{t}{2}$

70. נתונה הפונקציה: $y=3x^2+2$ לגרף של הפונקציה העבירו משיק בנקודה $(1,5)$. מצאו את משוואת המשיק.

71. נתונה הפונקציה: $y=\sqrt{x^2+6x+a}$ שיפוע המשיק בנקודה $x = -1$ הוא 2.

א. מצאו את a.

ב. מצאו את משוואת המשיק בנקודה הנ"ל.

72. הישר: $y=\frac{x}{4}+n$ משיק לגרף הפונקציה: $y=\sqrt{2x}+3$

א. מצאו את נקודת ההשקה.

ב. מצאו את משוואת הישר.

73. שיפוע הפונקציה: $f(x)=-\frac{2a}{x}$ בנקודה $x = -2$ שווה לשיפוע הפונקציה: $h(x)=\frac{a-3}{x}+6$ בנקודה $x = 1$.

א. מצאו את a.

ב. הראו שהמשיק לפונקציה: $f(x)=-\frac{2a}{x}$ בנקודה $x = -2$ הוא גם המשיק לפונקציה: $h(x)=\frac{a-3}{x}+6$ בנקודה $x = 1$, ומצאו את משוואת המשיק.

הנורמל

הנורמל של פונקציה בנקודה מסוימת הוא ישר המאונך למשיק של הפונקציה באותה נקודה. כדי למצוא נורמל עלינו לדעת תחילה את הקשר בין שיפוע הנורמל לשיפוע המשיק. כפי שנראה בהמשך (בנושא הנדסה אנליטית), הקשר בין שני ישרים מאונכים m_1, m_2 הוא: $m_1 \cdot m_2 = -1$

כלומר אם m_1 הוא שיפוע המשיק, ו- m_2 הוא שיפוע הנורמל, אז המכפלה ביניהם תהיה תמיד -1.

למעשה אנו מזהים את שיפוע הנורמל על פי:

$$\boxed{m_{\text{נורמל}} = \frac{-1}{m_{\text{משיק}}}}$$

ואת m משיק כבר ראינו כיצד למצוא.

נבחר את הפונקציה: $y = x^2 - 2x + 3$ ונמצא את משוואות המשיק והנורמל בנקודה שבה $x = -1$.

מציאת משוואת המשיק כבר מוכרת לנו:

$$y' = 2x - 2$$

$$y'(-1) = -2 - 2 = -4$$

והנקודה: $y(-1) = 1 + 2 + 3 = 6 \quad \rightarrow \quad (-1,6)$

משוואת המשיק: $j - 6 = -4(x + 1)$

$$\underline{j = -4x + 2}$$

עתה נפנה למציאת הנורמל:

הנקודה היא אותה נקודה $(-1,6)$, והשיפוע: $\frac{1}{4} = \frac{-1}{-4} = \frac{-1}{m_{\text{משיק}}} = m_{\text{נורמל}}$

ולכן משוואת הנורמל היא: $j - 6 = \frac{1}{4}(x + 1)$

$$\underline{j = \frac{1}{4}x + 6\frac{1}{4}}$$

דוגמה נוספת:

לו. נתון כי משוואת נורמל לפונקציה: $y = \sqrt{x^2 + 5x}$ בנקודה כלשהי היא: $12x + 13y = c$

א. מהי משוואת המשיק לפונקציה באותה נקודה?

ב. מהו c?

פתרון:

ראשית עלינו למצוא את נקודת ההשקה. לשם כך נתון לנו רמז על שיפוע המשיק מתוך שיפוע הנורמל. לכן:

א. נמצא את שיפוע הנורמל: $12x + 13y = c$

$$y = -\frac{12}{13}x + \frac{c}{13}$$

$$m_{\text{נורמל}} = -\frac{12}{13}$$

$$m_{\text{משיק}} = \frac{13}{12}$$

ב. נמצא את נקודת ההשקה:

$$y=\sqrt{x^2+5x}$$

$$y'=\frac{1\cdot(2x+5)}{2\sqrt{x^2+5x}}$$

ובנקודת ההשקה:

$$\frac{1\cdot(2x+5)}{2\sqrt{x^2+5x}}=\frac{13}{12}$$

$$24x+60=26\sqrt{x^2+5x}$$

העלאה בריבוע של שני האגפים:

$$576x^2+2880x+3600=676(x^2+5x)$$

$$576x^2+2880x+3600=676x^2+3380x$$

$$100x^2+500x-3600=0$$

$$x^2+5x-36=0$$

$$x_1=-9\qquad x_2=4$$

לאחר העלאה בריבוע יש צורך תמיד לבחון תוצאות.

כדי לבחון מי משתי התוצאות רלוונטית, נציב חזרה בנגזרת:

$$y'(-9)=\frac{2(-9)+5}{2\sqrt{81-45}}=-\frac{13}{12}\neq\frac{13}{12}$$

לכן הנקודה אינה רלוונטית!

לעומת זאת:

$$y'(4)=\frac{2\cdot4+5}{2\sqrt{16+20}}=\frac{13}{12}$$

כדי למצוא משוואת משיק נמצא את הנקודה:

$$y(4)=\sqrt{4^2+5\cdot4}=6\quad\rightarrow\quad(4,6)$$

והמשוואה:

$$j-6=\frac{13}{12}(x-4)$$

$$j-6=\frac{13}{12}x-\frac{13}{3}$$

$$\underline{12j-13x=20}$$

ולמציאת c נציב את נקודת ההשקה $(4,6)$ במשוואת הנורמל $12x+13y=c$:

$$12\cdot4+13\cdot6=c$$

$$\underline{c=126}$$

<u>תרגול עצמי</u>

74. בנקודה $(9,6)$ שעל גרף הפונקציה: $f(x)=2\sqrt{x}$ העבירו משיק ונורמל.

א. מצאו את משוואת המשיק.

ב. מצאו את משוואת הנורמל.

75. מצאו את משוואת הנורמל לפונקציות הנתונות דרך הנקודה הנתונה משמאל לפונקציה.

א. $y=x^2-6x+8$ $(2,0)$

ב. $f(x) = 18x^3-18x^2-16x+5$ $x=2$

ג. $y = \sqrt{x}$ $x=4$

ד. $y = \frac{4}{x} + 5x - 9$ $x=2$

76. מצאו את משוואת הנורמל לפונקציה על פי שיפוע הנורמל הנתון משמאל לפונקציה.

א. $y = 3x^2 - 4x - 8$ $m = -\frac{1}{14}$

ב. $y = \frac{1}{x}$ $m = 49$

77. נתון כי משוואת נורמל לפונקציה: $y = \sqrt{x}$ בנקודה כלשהי היא: $y = -6x + c$

א. מהי משוואת המשיק לפונקציה באותה נקודה ?

ב. מהו c ?

78. הנורמל לפונקציה: $y = x^3 + 3x^2$ בנקודה כלשהי ברביע הראשון ניצב לישר: $y = 9x + c$

א. מצאו את משוואת המשיק בנקודה.

ב. האם ניתן למצוא את הפרמטר c ? אם כן, מצאו אותו. אם לא, הסבירו למה.

משיק לפונקציה העובר דרך נקודה מחוץ לפונקציה

כפי שראינו עד עתה, עקרונות הפתרון למשיק ונורמל נשענים תמיד על מציאת שיפועים ונקודה. כך גם כאשר נתונה לנו נקודה שאיננה על גרף הפונקציה, ודרכה עובר משיק.

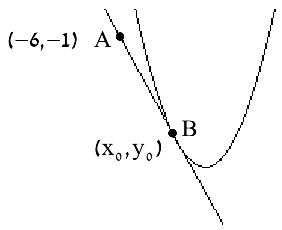
למשל: המשיק לפונקציה: $y = x^2 + 8x + 12$ עובר דרך הנקודה $(-6,-1)$. מהי משוואת המשיק ?

פתרון:

בדיקה מהירה תראה: $y(-6) = (-6)^2 + 8\cdot(-6) + 12 \neq -1$

ומכאן שהנקודה $(-6,-1)$ איננה על גרף הפונקציה.

כדי להבין כיצד ניתן למצוא את המשיק, נשרטט את הפונקציה ואת המשיק:



כפי שכבר הוזכר לפנים, משמעות המושג משיק היא: $y'(B) = m_{AB}$

ידוע לנו: $m_{AB} = \dfrac{y_0 + 1}{x_0 + 6}$

אנו יודעים מהפונקציה: $y_0 = x_0^2 + 8x_0 + 12$

ולכן: $m_{AB} = \dfrac{x_0^2 + 8x_0 + 13}{x_0 + 6}$

מנגזרת הפונקציה: $y' = 2x + 8$

$y'(B) = 2x_0 + 8$

ולפי השוויון $y'(B) = m_{AB}$, נקבל: $\dfrac{x_0^2 + 8x_0 + 13}{x_0 + 6} = 2x_0 + 8$

מכאן והלאה זהו פתרון פשוט של משוואה בנעלם אחד:

$x_0^2 + 8x_0 + 13 = 2x_0^2 + 20x_0 + 48$

$0 = x_0^2 + 12x_0 + 35$

$x_1 = -7 \quad x_2 = -5$

כדאי לבדוק את התוצאות:

עבור $x = -7$: $y'(-7) = 2\cdot(-7) + 8 = -6$

$m_{AB}(-7) = \dfrac{(-7)^2 + 8\cdot(-7) + 13}{-7 + 6} = -6$

פתרון מתאים.

נמצא נקודת השקה: $y = x^2 + 8x + 12$

$y(-7) = 49 - 56 + 12 = 5$

ומשוואת המשיק: $j - 5 = -6(x + 7)$

$\underline{j = -6x - 37}$

עבור $x=-5$: $y'(-5)=2\cdot(-5)+8=-2$

$$m_{AB}(-5)=\frac{(-5)^2+8\cdot(-5)+13}{-5+6}=-2$$

גם זה פתרון מתאים.

נמצא נקודת השקה : $y(-5)=25-40+12=-3$

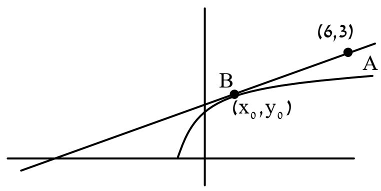
ומשוואת המשיק : $j+3=-2(x+5)$

$\underline{j=-2x-13}$

לז. דרך הנקודה $(6,3)$ מעבירים ישר המשיק לפונקציה : $y=\sqrt{x+2}$. מה נקודת ההשקה, ומהי משוואת המשיק ?

פתרון :

שִׂרטוט :



$$m_{AB}=y'(x_0)$$

$$\frac{3-y_0}{6-x_0}=\frac{1}{2\sqrt{x_0+2}}$$

הצבה $y_0=\sqrt{x_0+2}$: $\frac{3-\sqrt{x_0+2}}{6-x_0}=\frac{1}{2\sqrt{x_0+2}}$

$$6\sqrt{x_0+2}-2(x_0+2)=6-x_0$$

$$6\sqrt{x_0+2}=x_0+10\ /(\ )^2$$

$$36(x_0+2)=x_0^{\,2}+20x_0+100$$

והפתרון : $x_1=2 \qquad x_2=14$

עבור $x=14$: $y'(14)=\frac{1}{2\sqrt{14+2}}=\frac{1}{8}$

$m_{AB}(14)=\frac{3-\sqrt{14+2}}{6-14}=\frac{1}{8}$ פתרון מתאים.

נמצא נקודת השקה : $y(14)=\sqrt{14+2}=4$

ומשוואת המשיק : $j-4=\frac{1}{8}(x-14)$

$$\underline{j=\frac{1}{8}x+2.25}$$

עבור $x=2$:

$$y'(2)=\frac{1}{2\sqrt{2+2}}=\frac{1}{4}$$

$$m_{AB}(2)=\frac{3-\sqrt{2+2}}{6-2}=\frac{1}{4}$$ פתרון מתאים.

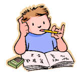
נמצא נקודת השקה :

$$y(2)=\sqrt{2+2}=2$$

ומשוואת המשיק :

$$j-2=\frac{1}{4}(x-2)$$

$$\underline{j=\frac{1}{4}x+1.5}$$



תרגול עצמי

79. דרך הנקודה $(4,39)$ מעבירים ישר המשיק לפונקציה : $y=2x^2+4x-7$
   א. מהן נקודות ההשקה ?
   ב. מהן משוואות המשיקים ?
80. א. מצאו את נקודות ההשקה ואת משוואות המשיקים היוצאים מהנקודה $(2,7)$ אל הפונקציה : $y=x^2+4$
   ב. מצאו את משוואות הנורמל לכל אחד מהמשיקים שמצאתם בסעיף א'.
81. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה : $y=\sqrt{3x-9}$ העובר בראשית הצירים.
82. דרך הנקודה $(0,\frac{1}{2})$ עובר משיק לפונקציה : $y=\frac{1}{x}$. מצאו את משוואת המשיק.