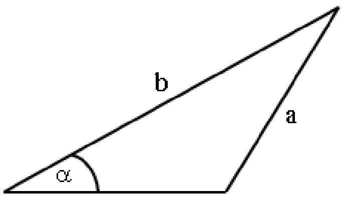
משפט הסינוסים

הרחבה של השימוש ביחסים טריגונומטריים במשולשים נעשתה לצורך פתרון משולשים שאינם מתפרקים למשולשים ישרי זווית.

לדוגמה :

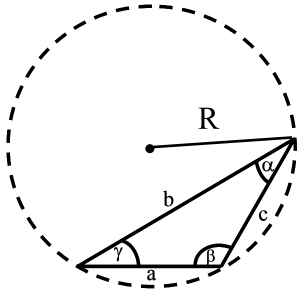
נתבונן במשולש שבציור :



במצב זה גם אם נתונים a, b, α,
יקשה עלינו מאוד למצוא את שאר
הזוויות והצלעות במשולש.

הרחבה אחת היא משפט הסינוסים.

משפט : בכל משולש מתקיים היחס :



$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R}$$

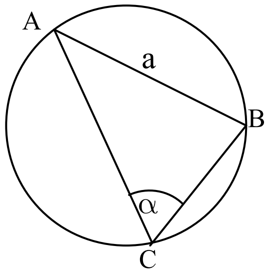
כאשר : α נמצאת מול צלע a.

β נמצאת מול צלע b.

γ נמצאת מול צלע c.

R הוא רדיוס המעגל **החוסם** את המשולש.

הוכחה :



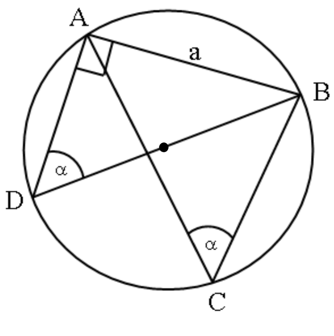
נתון : משולש ABC חסום במעגל

$AB=a \quad \measuredangle C=\alpha$

רדיוס המעגל R

צ"ל : $\frac{a}{\sin\alpha}=2R$

הוכחה :



בניית עזר : דרך המרכז נעביר קוטר BD

$BD=2R$

מתוך הגיאומטריה אנו יודעים :

$\measuredangle ADB=\alpha$ (זוויות היקפיות הנשענות על אותו מיתר במעגל, שוות.)

$\measuredangle DAB=90^0$ (זווית הנשענת על הקוטר $=90^0$.)

מהטריגונומטריה במשולשים ישרי זווית למדנו :

$$\sin\alpha=\frac{a}{BD}=\frac{a}{2R}$$

ועל ידי העברת אגפים : $\boxed{2R=\frac{a}{\sin\alpha}}$

כך ניתן להוכיח גם את הצלעות האחרות והזווית שמולן, ולקבל את משפט הסינוסים.

מעתה יש בידינו כלי לפתור מקרים מורכבים יותר מאלו שפתרנו קודם.

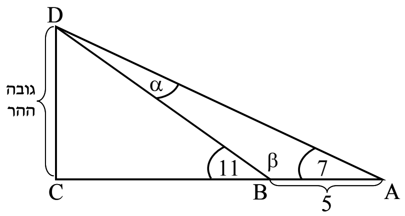
סו. כדי למפות טופוגרפית שטח משתמשים מודדים במכשיר למדידת זוויות גובה בשם תיאודוליט.

מודד נמצא במישור ומודד הר מרוחק. מדידה ראשונה מראה זווית גובה של 7^0. הוא מתקדם לעבר ההר מרחק של 5 ק"מ ומבצע שוב מדידה המראה זווית גובה של 11^0.

1) מה גובה ההר מעל פני מישור המדידה ?

2) מה מרחק ההר מנקודת התצפית הראשונה ?

פתרון :



1) גם כאן נשתמש בעקרון הרגרסיה.

כדי למצוא את CD – גובה ההר ואת AC - מרחק עלינו למצוא תחילה את AD. כך נוכל לעבוד עם משולש ישר זווית ADC.

כדי למצוא את AD עלינו להשתמש במשפט הסינוסים. אולם לשם כך עלינו למצוא תחילה את זווית α ואת זווית β.

למציאת α : $11-7=\alpha=4^0$ (על פי משפט הזווית החיצונית)

למציאת β : $180-11=\beta=169^0$ (זווית צמודה)

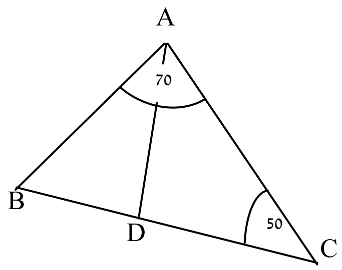
ומכאן :
$$\frac{5}{\sin 4}=\frac{AD}{\sin 169}$$
$$\frac{5\sin 169}{\sin 4}=AD=13.68$$

עתה נעבור למשולש ישר זווית DCA : $\sin 7=\frac{DC}{AD}$

$$13.68\sin 7=DC=_{\text{ק"מ}}\ 1.667$$

2) נתבונן במשולש DCA : $\cos 7=\frac{AC}{AD}$

$$13.68\cos 7=AC=_{\text{ק"מ}}\ 13.58$$



סז. במשולש שבציור נתון :

AD - חוצה זווית

$\sphericalangle A=70^0$, $\sphericalangle C=50^0$, $BC=10$

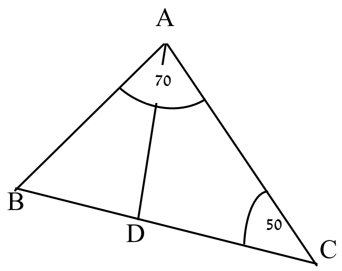
מה אורך AD ?

פתרון :

התבוננות בתרגיל תחדד לנו את המורכבות שלו. הצלע AD שאנו מחפשים, נמצאת במשולשים ABD ו- ADC. לגביהם אמנם יש נתונים של זוויות, אולם אין כל נתון של צלעות.

לכאורה זהו מצב בלתי פתיר.

מה עושים?



1. תחילה משרטטים.

2. עכשיו נתמקד במשולשים שהזכרנו.

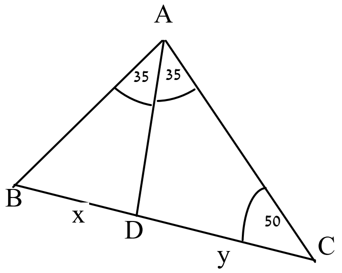
שני דברים אנו יכולים ללמוד :

1. הצלע AD משותפת לשניהם.

2. נתון לנו סכום BD + DC = 10.

לכן כדאי לתת לצלעות אלה שמות ולנסות לפתור בעזרתן.

האם יש הבטחה שזה יצליח ? לא. אבל יש סיכוי טוב (חשיבה חיובית..).
לעִתים נראה שניסינו דרך אחת והיא נכשלה, ובסוף ננסה בדרך אחרת (לא לכותבי ספרים כמובן...)



נציב : $BD=x \quad DC=y$

נתבונן במשולש ADC :
$$\frac{AD}{\sin 50} = \frac{y}{\sin 35}$$

(1)
$$\frac{\sin 35 \cdot AD}{\sin 50} = y = 0.75AD$$

חישוב פשוט מראה : $\measuredangle B = 180 - 70 - 50 = 60^0$

ולכן במשולש ABD נקבל :
$$\frac{AD}{\sin 60} = \frac{x}{\sin 35}$$

(2)
$$\frac{\sin 35 \cdot AD}{\sin 60} = x = 0.66AD$$

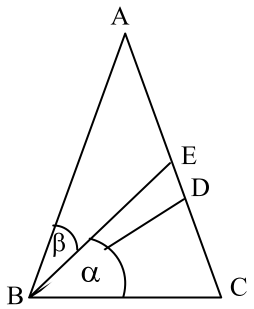
חיבור (2) + (1) : $0.66AD + 0.75AD = x + y = 10$

$$1.41AD = 10$$

$$AD = 7.1$$

(כמה טוב לחשוב חיובי...)

סח. במשולש שווה השוקיים הנראה בציור,
BD הוא חוצה זווית B, ו- BE הוא תיכון
היוצר זווית α עם הבסיס BC וזווית β עם השוק.



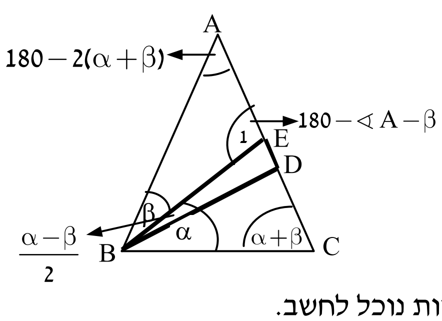
נתון : $AB = a \quad \alpha > \beta$

הביעו את שטח המשולש BDE בעזרת a, α, β.

פתרון :
תחילה נשרטט :
אנו מחפשים את שטח המשולש BDE.
מכיוון שהמשולש איננו ישר זווית,
ניעזר בנוסחת השטח שלמדנו : $s = \frac{a\ b \sin\alpha}{2}$

הזווית הנוחה למציאה היא $\measuredangle EBD$, ועליה אנו יודעים :

$$\measuredangle EBD = \alpha - \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\alpha-\beta}{2}$$ (BD חוצה זווית !)



נותר למצוא את BE ואת BD.
את BE נמצא בעזרת משולש ABE עליו אנו
כבר יודעים צלע אחת (a) וזווית אחת (β).
את הזווית השנייה נחשב. את BD נמצא
בעזרת משולש ABD שגם בו נתונה לנו צלע (a) ואת הזוויות נוכל לחשב.

מציאת BE : $\measuredangle B = \alpha + \beta$

מתוך הנתון : $\measuredangle B = \measuredangle C = \alpha + \beta$

המשולש שווה שוקיים, לכן : $\measuredangle A = 180 - 2(\alpha + \beta)$

$$\sphericalangle E_1 = 180 - \sphericalangle A - \beta$$

זווית E_1 (מול צלע a) תהיה:

$$\sphericalangle E_1 = 180 - [180 - 2(\alpha+\beta)] - \beta = 2\alpha + \beta$$

ומכאן:

$$\frac{a}{\sin(2\alpha+\beta)} = \frac{BE}{\sin[180 - 2(\alpha+\beta)]}$$

$$\frac{a \sin 2(\alpha+\beta)}{\sin(2\alpha+\beta)} = BE$$

על פי הזהות
$\sin\alpha = \sin(180-\alpha)$

מציאת BD:

גם כאן תחילה נחשב זוויות:

$$\sphericalangle BDE = \sphericalangle C + \frac{1}{2}\sphericalangle B$$

זווית חיצונית

$$\sphericalangle BDE = (\alpha+\beta) + \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{3\alpha+3\beta}{2}$$

ולכן:

$$\frac{a}{\sin\left(\frac{3\alpha+3\beta}{2}\right)} = \frac{BD}{\sin[180 - 2(\alpha+\beta)]}$$

$$\frac{a}{\sin\left(\frac{3\alpha+3\beta}{2}\right)} = \frac{BD}{\sin 2(\alpha+\beta)}$$

על פי הזהות שהזכרנו

$$\frac{a \sin 2(\alpha+\beta)}{\sin\left(\frac{3\alpha+3\beta}{2}\right)} = BD$$

והשטח:

$$s = \frac{BE \cdot BD \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{2}$$

ואחרי הצבה:

$$s = \frac{a \sin 2(\alpha+\beta)}{\sin(2\alpha+\beta)} \cdot \frac{a \sin 2(\alpha+\beta)}{\sin\left(\frac{3\alpha+3\beta}{2}\right)} \cdot \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{2}$$

$$s = \frac{a^2 \sin^2[2(\alpha+\beta)] \sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin(2\alpha+\beta)\sin\left(\frac{3\alpha+3\beta}{2}\right)}$$

תרגיל אחרון זה בא להראות שגם כאשר הביטויים אינם "נחמדים", עדיין בעזרת סבלנות והתמדה ניתן להגיע לתוצאה.

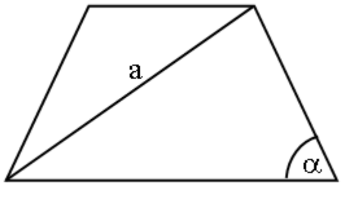
סט. בטרפז שווה שוקיים אורך הבסיס הקטן שווה לאורך השוק.

נתון:

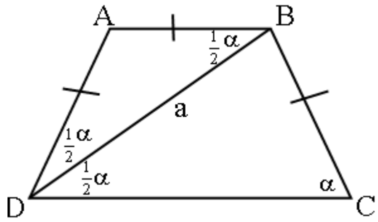
אורך האלכסון הוא a,

וזווית הבסיס היא α.

הביעו את היקף הטרפז באמצעות a, α.



פתרון :



שְׂרטוט : כבר ראינו שבטרפז כזה מתקיים :

האלכסון הוא גם חוצה זווית.

ניתן בקלות לחשב את זווית $\sphericalangle A$: $\sphericalangle A = 180 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\alpha = 180 - \alpha$

ואת זווית $\sphericalangle DBC$: $\sphericalangle DBC = 180 - \alpha - \frac{1}{2}\alpha = 180 - 1.5\alpha$

נתבונן במשולש ABD.

ובעזרת משפט הסינוסים : $\frac{AB}{\sin\frac{1}{2}\alpha} = \frac{a}{\sin(180-\alpha)} = \frac{a}{\sin\alpha}$

$$AB = AD = BC = \frac{a\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin\alpha}$$

מציאת DC : $\frac{DC}{\sin(180-1.5\alpha)} = \frac{a}{\sin\alpha}$

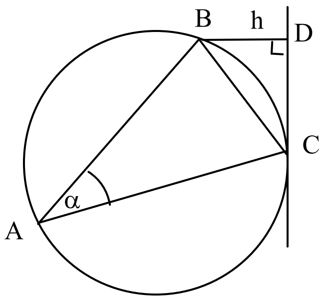
$$DC = \frac{a\sin 1.5\alpha}{\sin\alpha}$$

וההיקף : $p = \frac{3a\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin\alpha} + \frac{a\sin 1.5\alpha}{\sin\alpha}$

$$p = \frac{a}{\sin\alpha}\left[3\sin\frac{1}{2}\alpha + \sin 1.5\alpha\right]$$

ע. דוגמה עם מעגל :

דרך קדקוד C של משולש חסום במעגל העבירו משיק (כנראה בציור).



נתון :

R - רדיוס המעגל

$\sphericalangle A = \alpha$

בטאו את האורך h בעזרת α , R.

פתרון :

h הוא ניצב במשולש ישר זווית BDC. כדי למצוא את אורכו יש למצוא עוד צלע וזווית.

בשאלות כאלה יש בדרך כלל צורך להיזכר במשפטי הגיאומטריה, במיוחד אם יש אזכור למשיקים.

מתוך הגיאומטריה אנו יודעים שגם $\sphericalangle BCD = \alpha$ (לפי המשפט בדבר זווית בין משיק ומיתר במעגל).

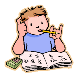
את הצלע BC נמצא בקלות לפי : $\frac{BC}{\sin\alpha} = 2R$

$$BC = 2R\sin\alpha$$

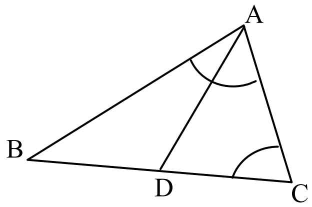
ועל ידי טריגונומטריה של משולש ישר זווית :

$$\sin\alpha = \frac{h}{BC} = \frac{h}{2R\sin\alpha}$$

$$2R\sin^2\alpha = h$$



בדיקת הבנה

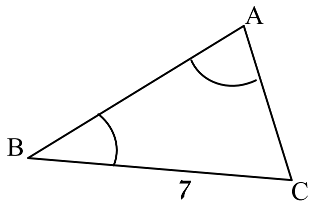


115. במשולש שבציור נתון :

AD - תיכון

$\sphericalangle A = 72^0$,$AB =$ 7 יח' ,$\sphericalangle C = 45^0$

מה היחס בין הצלע AC לצלע DC ?



116. במשולש ABC נתון :

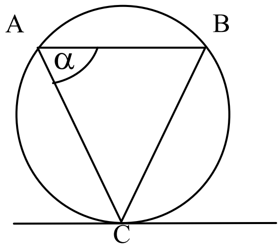
$\sphericalangle A = 80^0$

$\sphericalangle B = 35^0$

$BC =$ 7 ס"מ

מצאו את : א. צלעות המשולש.

ב. שטח המשולש.



117. דרך קדקוד C של משולש חסום במעגל העבירו משיק (כמוראה בציור).

נתון :

$AB \| CD$

R - רדיוס המעגל

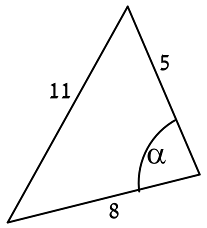
α - זווית A

בטאו את שטח המשולש ABC בעזרת α, R.

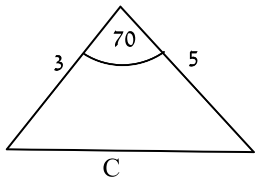
משפט הקוסינוסים

לאחר שראינו את ההרחבה של משפט הסינוסים, נדמה כי ניתן לפתור כל משולש שיש לגביו שלושה נתונים.
הבה נבחן את המשולשים הבאים:

1. נתון המשולש בציור, מהי זווית α ?



2. נתון המשולש בציור, מהי הצלע c ?



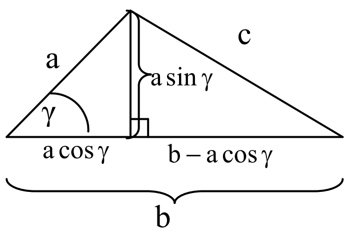
כפי שאנו רואים, משפט הסינוסים אינו "מכסה" מקרים מסוג זה; כלומר מצבים בהם אין זווית נתונה מול צלע נתונה.
לצורך כך פותח משפט הקוסינוסים:

בכל משולש מתקיים: $\boxed{a^2+b^2-2ab\cos\gamma=c^2}$ כאשר **<u>γ</u>** נמצאת מול צלע **<u>c</u>**.

הוכחה:

נתון:

משולש כלשהו (כנראה בציור):



צ"ל: $a^2+b^2-2ab\cos\gamma=c^2$

הוכחה:

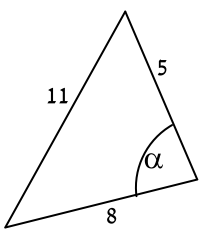
לפי משפט פיתגורס, במשולש ישר זווית: $(a\sin\gamma)^2+(b-a\cos\gamma)^2=c^2$

אחרי פתיחת סוגריים: $a^2\sin^2\gamma+b^2-2ab\cos\gamma+a^2\cos^2\gamma=c^2$

על ידי הוצאת גורם משותף: $a^2(\sin^2\gamma+\cos^2\gamma)+b^2-2ab\cos\gamma=c^2$

ולבסוף לפי הזהות $\sin^2\gamma+\cos^2\gamma=1$: $a^2+b^2-2ab\cos\gamma=c^2$

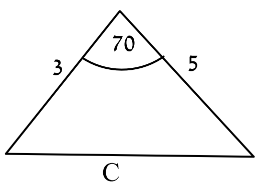
בעזרת משפט זה קל לפתור את המשולשים שהזכרנו:



1. $\boxed{(\alpha \text{ מול } 11)}$ $5^2+8^2-2\cdot5\cdot8\cos\alpha=11^2$

סידור המשוואה נותן: $\cos\alpha=0.4$

$\alpha=66.42^0$

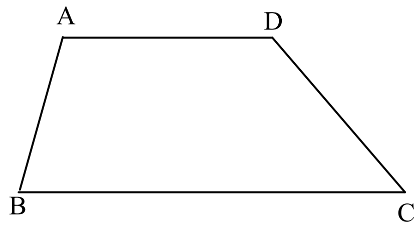


2. $c^2=5^2+3^2-2\cdot5\cdot3\cos70=23.74$

$c=4.87$

דוגמאות לפתרון בעזרת משפט זה:

עא. בטרפז ABCD נתון:



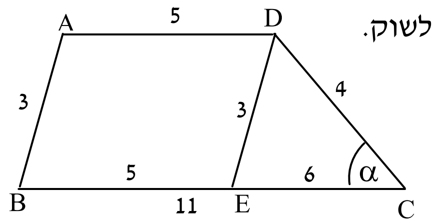
$AB = 3 \quad BC = 9$

$CD = 4 \quad AD = 5$

מצאו את זוויות הטרפז.

פתרון:

מכיוון שאין לנו נתון על זווית כלשהי,
אנו יודעים שיש צורך להשתמש במשפט הקוסינוסים.



עוד בניית עזר נפוצה במקבילית היא העברת מקביל לשוק.
כך אנו מקבלים מקבילית ומשולש שלגביהם
אנו יודעים את כל הצלעות.

חישוב פשוט ילמד אותנו ש: $BE = 5$ ו- $EC = 6$

עתה ניתן למצוא בקלות את זווית C:

במשולש DEC: $3^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos\alpha$

במשולש BDC: $-43 = -48\cos\alpha$

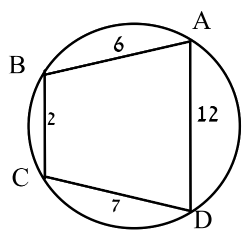
$\cos\alpha = 0.896$

$\alpha = 26.38^0$

וזווית D: $\sphericalangle D = 180 - \alpha = 153.61^0$

באותו אופן מעבירים מקביל לצלע DC ומוצאים את הזוויות האחרות. נסו בעצמכם.

עב. במרובע ABCD החסום במעגל נתון:



$AB = 6$, $BC = 2$, $CD = 7$, $AD = 12$

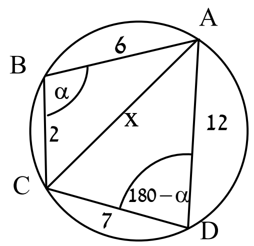
מצאו את:

א. זוויות המרובע.

ב. אורך הרדיוס.

פתרון:

שִׂרטוט.



נוח להעביר כאן את האלכסון כדי ליצור משולשים.
גם כאן אנו רואים שאין לנו זווית במשולש, ולכן נפתור
בעזרת משפט הקוסינוס. במקרה זה ניתן לחלץ שתי
משוואות משני המשולשים, אולם כאן יש לכאורה 3
נעלמים x, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle D$. גם בתרגיל זה עלינו להיזכר
במשפטי הגיאומטריה. לפי המשפט: הזוויות הנגדיות במרובע החסום במעגל משלימות
ל- 180^0, אנו מוצאים את הקשר: $\sphericalangle D = 180 - \sphericalangle B$.

א. עתה נפנה לבניית המשוואות:

במשולש ABC: $x^2 = 6^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 6 \cos\alpha$

$$(1) \quad x^2 = 40 - 24\cos\alpha$$

במשולש DAC:
$$x^2 = 7^2 + 12^2 - 2\cdot 7\cdot 12\cos(180-\alpha)$$
$$x^2 = 193 - 168\cos(180-\alpha)$$

לפי:
$\cos(180-\alpha) = -\cos\alpha$

$$x^2 = 193 + 168\cos\alpha \qquad (2)$$

ועל ידי הצבה (2) = (1):
$$40 - 24\cos\alpha = 193 + 168\cos\alpha$$
$$-192\cos\alpha = 153$$
$$\cos\alpha = -0.797$$
$$\alpha = 142.8^0$$
$$\sphericalangle B = 142.8^0 \qquad \sphericalangle D = 37.2^0$$

באותו אופן ניתן למצוא את הזוויות A ו- C אם מעבירים את האלכסון BD. נסו בעצמכם.

ב. כדי למצוא את רדיוס המעגל החוסם נשתמש בכך שאותו מעגל גם חוסם את משולש ABC, וכדי למצוא את R די לנו למצוא את x.

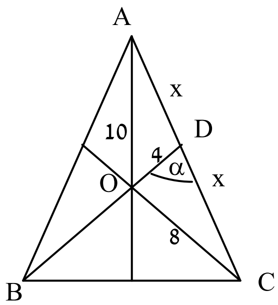
הצבת הזווית במשוואה (1):
$$x^2 = 40 - 24\cos 142.8$$
$$x^2 = 40 - 24\cdot(-0.797)$$
$$x^2 = 59.13$$
$$x = 7.69$$

ולפי משפט הסינוסים:
$$\frac{7.69}{\sin 142.8} = 2R = 12.72$$
$$R = 6.36$$

עג. הגובה לבסיס במשולש שווה שוקיים הוא 15 ס״מ, והתיכון לשוק הוא 12 ס״מ. מצאו את אורך השוק.

פתרון:

תחילה נשרטט את המשולש:



למעשה, ניתנו לנו בשאלה אורכם של שלושת התיכונים.

מתוך הידוע לנו מגיאומטריה נקודת פגישת התיכונים מחלקת אותם ביחס של 1:2.

נמצא תחילה את אורך הצלע AC.

לשם כך נחשב את הקטעים הרלוונטיים לנו:
$$AO = 10\ ,CO = 8\ ,DO = 4$$
$$AD = DC = x$$

לפי משפט הקוסינוסים:

במשולש DOC:
$$8^2 = x^2 + 4^2 - 2\cdot 4\cdot x\cos\alpha$$
$$48 = x^2 - 8x\cos\alpha \qquad (1)$$

במשולש DOA:
$$100 = x^2 + 4^2 - 2\cdot 4\cdot x\cos(180-\alpha)$$
$$84 = x^2 - 8x\cos(180-\alpha)$$
$$84 = x^2 + 8x\cos\alpha \qquad (2)$$

על ידי חיסור (2) מ- (1):
$$-36 = -16x\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{2.25}{x}$$

הצבה במשוואה (1):

$$48 = x^2 - 8x \cdot \frac{2.25}{x} = x^2 - 18 \qquad (1)$$

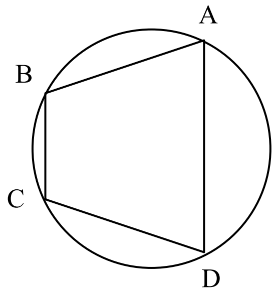
$$x^2 = 66$$

$$x = 8.12$$

כלומר אורך השוק: $8.12 \cdot 2 =$ 16.24 ס״מ

כפי שראינו בדוגמה זו, לא תמיד נידרש למצוא את הזווית כדי למצוא את אורכי הצלעות.

בדיקת הבנה



118. במרובע ABCD החסום במעגל נתון:

$AB = 5 \qquad BC = 3$

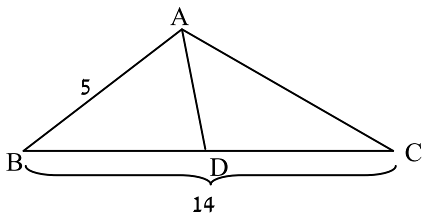
$\sphericalangle B = 100^0 \qquad CD = 4$

מצאו את:

א. AD.

ב. רדיוס המעגל החוסם את המרובע.

119. במשולש ABC נתון:



AD - תיכון

$AB =$ 5 ס״מ

$BC =$ 14 ס״מ

$AC = 2.5AD$

מצאו את אורך הצלע השלישית ואת אורך התיכון.

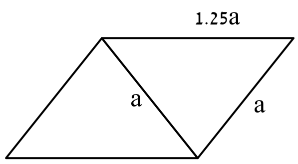
120. בטרפז שווה שוקיים ABCD אורך הבסיס הקטן הוא 7 ס״מ, הבסיס הגדול הוא 13 ס״מ, והשוקיים: 9 ו- 8 ס״מ.

מצאו את:

א. זוויות הטרפז.

ב. אורך האלכסונים.

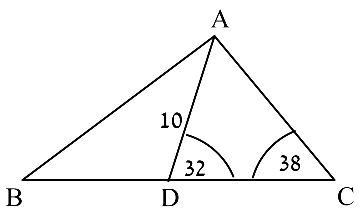
תרגול עצמי



121. במקבילית המתוארת בציור, אורך האלכסון הקצר שווה לצלע אחת של המקבילית, ואורך הצלע השנייה גדול פי 1.25 ממנה.

מצאו את זוויות המקבילית ואת אורך האלכסון השני.

122. במשולש ABC המתואר בציור, נתון:



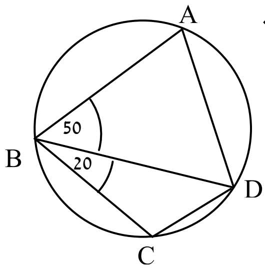
AD - תיכון $=$ 10 יח׳

$\sphericalangle D_1 = 32^0$

$\sphericalangle C = 38^0$

מצאו את צלעות המשולש ואת זוויותיו.

123. מרובע חסום במעגל שרדיוסו 5 ס"מ כמתואר בציור.



נתון: $\sphericalangle B_1 = 50^0$

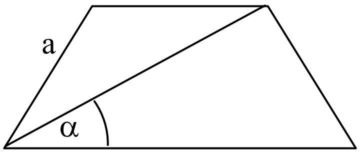
$\sphericalangle B_2 = 20^0$

$AB = 2BC$

$BD =$ 10 יח'

מצאו את צלעות המרובע, את זוויותיו ואת שטחו.

124. נתון טרפז שווה שוקיים.

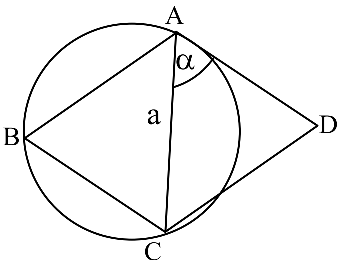


אורך הבסיס הקטן שווה לשוק, וגודלו a.

הזווית בין האלכסון לבסיס הגדול היא α.

הביעו את אורך האלכסון, את אורך הבסיס הגדול ואת שטח הטרפז באמצעות a ו- α.

125. המרובע ABCD הוא מקבילית.



את חצי המקבילית חסמו במעגל כך שהצלע AD משיקה למעגל בנקודה A (ראו ציור).

נתון כי אורך אלכסון המקבילית הוא a,

והזווית בין האלכסון למשיק היא α.

הביעו את צלעות המקבילית באמצעות a ו- α.

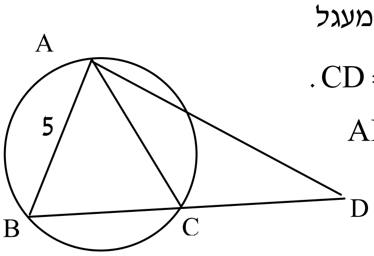
126. נתון משולש שאורך צלעותיו: 4, 6, 9.

מצאו את זוויות המשולש ואת אורך התיכון לצלע הגדולה.

127. מרובע שאורך צלעותיו הן: 3, 4, 5, 6 חסום במעגל.

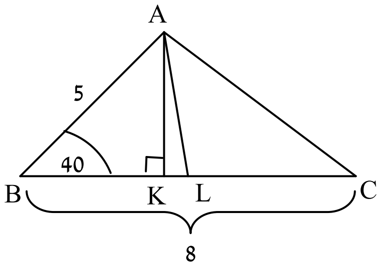
מצאו את אורך האלכסונים ואת רדיוס המעגל.

128. משולש שווה שוקיים ABC $(AB = AC)$ חסום במעגל שרדיוסו 3 יח'. המשיכו את צלע BC כך ש: $CD = AC$.

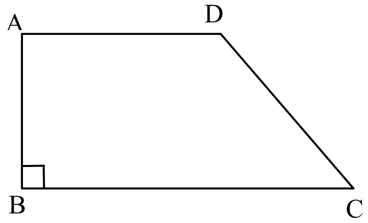


מצאו את אורך הצלע AD ואת שטח המשולש ABD אם ידוע שאורך השוק 5 יח'.

תרגול כללי טריגונומטריה במישור

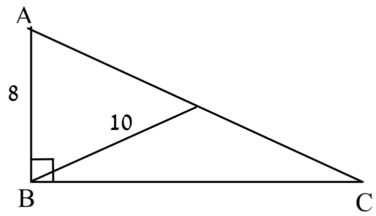


129. במשולש ABC המתואר בציור, AL הוא תיכון
ו- AK הוא גובה. נתון:
$AB = 5$ יח'
$\sphericalangle B = 40^0$
$BC = 8$ יח'
מצאו את שטח המשולש AKL.

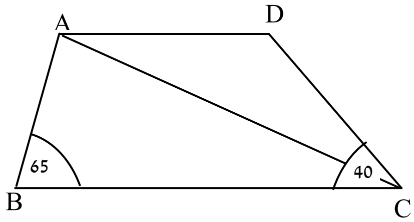


130. בטרפז ישר זווית גודל הזווית החדה היא 25^0.
אורך הבסיס הקטן הוא 4 ס״מ, והגובה 3 ס״מ.
מצאו את:
א. אורך הבסיס הגדול.
ב. אורך השוק.
ג. את שטח הטרפז.

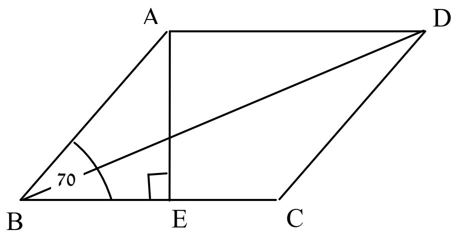
131. במשולש שווה שוקיים נתון שזווית הבסיס היא 2α, ורדיוס המעגל החסום במשולש הוא r.
הביעו את צלעות המשולש באמצעות r ו- α.



132. במשולש ישר זווית אורך הניצב הוא 8 ס״מ.
התיכון ליתר שווה ל- 10 ס״מ.
מצאו את זוויות המשולש ואת שטחו.

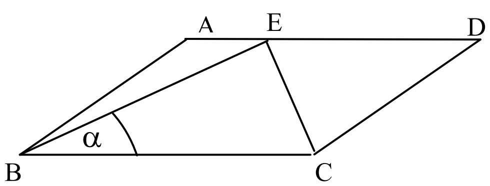


133. בטרפז $ABCD$ נתון:
$DC = 7$ ס״מ
$\sphericalangle B = 65^0$
$\sphericalangle C = 40^0$
האלכסון AC חוצה את זווית C.
מצאו את האלכסונים ואת שטח הטרפז.



134. במקבילית $ABCD$ נתון:
$AE \perp BC$
$AE = 9$ ס״מ
$BD = 13$ ס״מ
$\sphericalangle B = 70^0$
מצאו את צלעות המקבילית ואת שטחה.

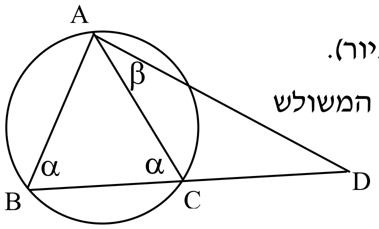
135. בשִׂרטוט שלפניכם מתוארת מקבילית $ABCD$.



$AB = 5$ ס״מ
$BC = 10$ ס״מ
$CE = ED = 7$ ס״מ
מצאו את זווית α ואת שטח משולש BEC.

136. על המשך בסיסו של משולש שווה שוקיים החסום במעגל שרדיוסו R, הקצו נקודה D (ראו ציור). זוויות הבסיס של המשולש הם α, והזווית בין צלע המשולש למיתר העובר דרך D, היא β.

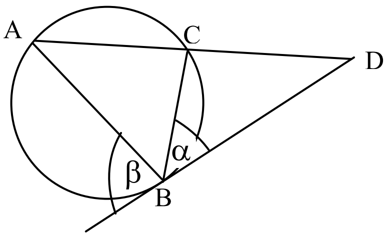
בטאו את אורך הקטע CD באמצעות α, β, R.



137. בשִׂרטוט שלפניכם מתואר משולש ABC חסום במעגל. המשיק למעגל העובר דרך נקודה B, חותך את המשך הצלע AC בנקודה D.

רדיוס המעגל הוא R, והזוויות β, α נתונות בציור.

הביעו את גודל המשיק BD באמצעות α, β, R.



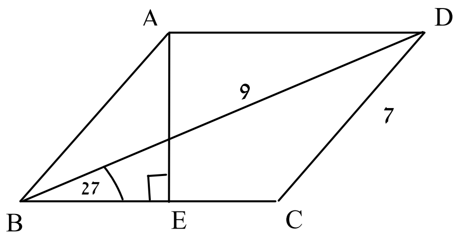
138. במקבילית $ABCD$ נתון:

$BD =$ 9 יח'

$CD =$ 7 יח'

$\sphericalangle DBC = 27^0$

מצאו את צלעות המקבילית ואת גובהה.



139. טרפז שווה שוקיים חוסם מעגל. זווית הבסיס של הטרפז היא 44^0, ואורך שוק הטרפז 12 יחידות.

מצאו את רדיוס המעגל ואת אורכי הבסיסים.

140. במשולש שווה שוקיים ABC העבירו את התיכון לשוק BD, ואת חוצה זווית הבסיס BE כפי שמתואר בציור.

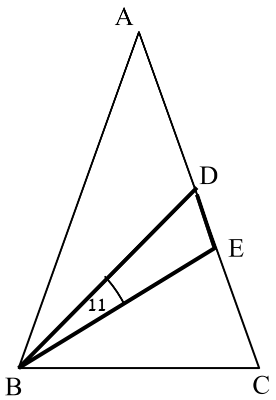
נתון:

$BD =$ 8 יח'

$BE =$ 7 יח'

$\sphericalangle EBD = 11^0$

מצאו את צלעות המשולש ABC.



טריגונומטריה במרחב

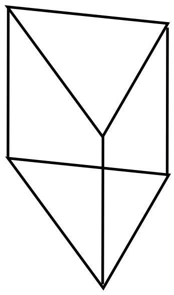
נדבך חשוב נוסף בטריגונומטריה של צורות הוא פתרון צורות מרחביות.
בדרך כלל אני מוצא שלומדים מתקשים בהבנת המושגים וב"ראיית" הקווים הפנימיים, לכן נבנה לנו תחילה את עולם המושגים, את הפרישות ואת הקווים הפנימיים של הצורות השונות.

מנסרה:

מנסרה היא גוף מרחבי שהבסיסים שלה הם בעלי אותה צורה גיאומטרית, ופֵאותיה מלבניות :

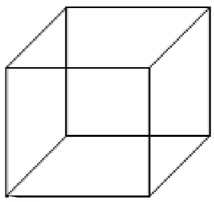
מנסרה משולשת:

מנסרה שבסיסיה משולשים



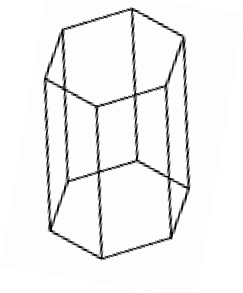
מנסרה מלבנית:

הגוף שאנו מכירים כתֵיבה



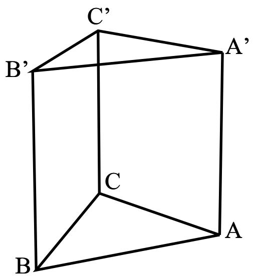
מנסרה משושה:

ברֵכת המשושים זכתה לשמה מפני שהתגבשות הקוורץ במקור היא של מנסרות בעלות בסיסים של משושה.

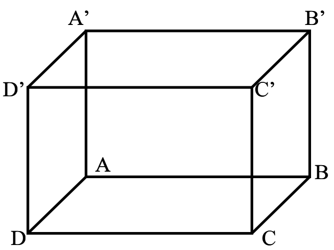


פֵאה ומקצוע במנסרות:

בכל הגופים המרחביים **הפֵאה** היא הדופן שבין הבסיסים המגבילה את הגוף.
המקצוע הוא הקו המגביל את הפֵאה.
בציור המנסרה המשולשת : $A'B'C'$, ABC – הבסיסים
$CBB'C'$, $ACC'A'$, $ABB'A'$ הם 3 פֵאות המנסרה.
כל קו היוצר את הגוף, הוא מקצוע :
AB ,BC ,CA, AA' , BB' , CC' , $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$



כך גם לגבי תיבה :
4 פֵאות : $A'B'BA$, $C'B'BC$, $CC'D'D$, $A'D'DA$
והמקצועות...... AB, BC, CC', DD'



(בעיקרון, בגופים מרחביים כל שני קדקודים סמוכים מגדירים מקצוע.)

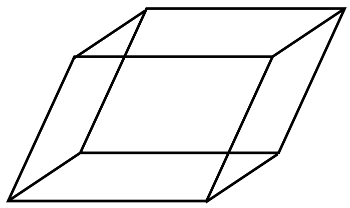
<u>מעטפת מנסרה:</u>

מעטפת המנסרה היא שטח **הפֵאות** שיוצרות (שעוטפות)
את החלל הפנימי (מכאן השם מעטפת).
כלומר: המעטפת היא סך כל **שטח הפֵאות ללא** הבסיסים.

<u>שטח הפנים:</u>

סה"כ השטח של פני המנסרה, כלומר: המעטפת + הבסיסים.

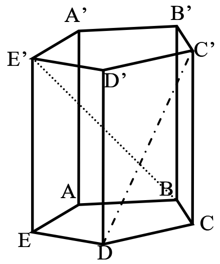
המנסרות מחולקות לשתי קטגוריות: מנסרות ישרות ומנסרות משופעות. במנסרה ישרה המקצועות הצדדיים מאונכים לבסיס.



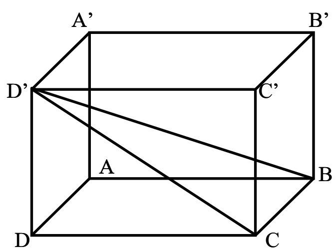
במנסרה משופעת יש זווית שונה מ- 90^0 בין הבסיס
למקצועות הצדדים, כמו למשל במקבילון:

נפח המנסרה הוא תמיד מכפלת שטח הבסיס בגובה: $\boxed{v = s \cdot h}$

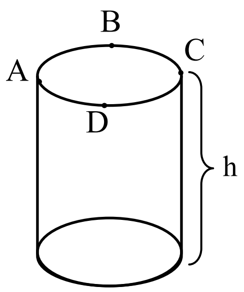
שטח הבסיס מחושב בהתאם לצורה שלו. לכן בתיבה הנפח הוא תמיד: אורך • רוחב • גובה = v



במנסרות אנו מפרידים בין אלכסונים העוברים בתוך
המנסרה, לבין אלכסוני הפֵאות.
האלכסון BE' הוא אלכסון במנסרה.
DC' הוא אלכסון הפֵאה.
<u>חשוב להבדיל ביניהם!</u>

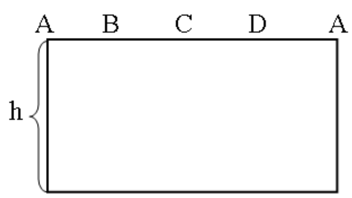


בתיבה יש 4 אלכסוני תיבה:
CA', DB', BD', AC' והם <u>שווים</u>.
לעומתם יש 8 אלכסוני פֵאות:
$A'B, AB', BC', B'C, CD', D'C, D'A, A'D$



<u>הגליל:</u>

הגליל הוא, למעשה, מנסרה בעלת בסיסים של מעגל.
המעטפת גם היא עגולה, ואין לגליל מקצועות ופֵאות.



פרישׂה של המעטפת נותנת מלבן,
ולכן מעטפת גליל היא:

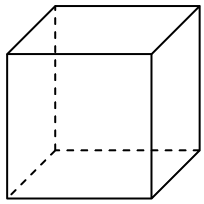
P = היקף · גובה = $2\pi R \cdot h$

שטח הפנים: $2\pi R^2$ + $2\pi R \cdot h$

$2\pi R^2$ ↓ בסיסים

$2\pi R \cdot h$ ↓ מעטפת

והנפח: $\boxed{v = \pi R^2 \cdot h}$

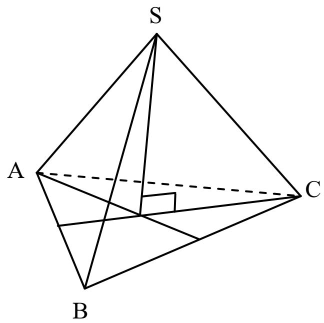


<u>הקובייה:</u>

בקובייה כל המקצועות שווים, ולכן כל פֵאה יכולה להיות בסיס אם מסובבים את הקובייה. לכל שאר הפרמטרים נתייחס אליה כמו תיבה. (היא "תיבה משוכללת".)

<u>פירמידה:</u>

פירמידה היא מנסרה שאחד הבסיסים שלה הוא נקודה (בדרך כלל הבסיס העליון), והיא נקראת קדקוד הפירמידה. ממילא מקצועות הפירמידה בדרך כלל אינם ניצבים לבסיס.



פירמידה משולשת (נקראת גם טטראדר)
היא פירמידה שבסיסה משולש. גם כאן אנו מוצאים פֵאות, אלא שבמקרה של פירמידה הם משולשים:
SAB , SBC ,SAC.
הגובה בפירמידה **משולשת וישרה** יורד מקדקוד הפירמידה אל נקודת מפגש **התיכונים** של הבסיס.

בפירמידה משופעת הקדקוד "מוזז" (כמו שראינו במנסרות).
בפירמידה מלבנית וישרה הגובה יורד אל נקודת **פגישת האלכסונים** של הבסיס.

בחרוט (פירמידה מעגלית) **ישר** הגובה יורד אל מרכז המעגל.
בחרוט, מאחר שאין מקצועות, אנו מכנים את המרחק מהקדקוד לקצה המעגל: הקו היוצר של החרוט.

נפח כל פירמידה הוא $\frac{1}{3}$ מהמנסרה המתאימה לאותו בסיס,

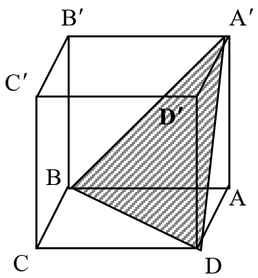
כלומר:

$$\boxed{\text{פירמידה } v=\frac{s\cdot h}{3}}$$

s - שטח בסיס הפירמידה   h - גובה הפירמידה

בבעיות העוסקות בגופים מרחביים, בדרך כלל מפרקים את השאלה למשולשים.
ברוב המקרים המשולשים הם ישרי זווית, וקל לטפל בהם.
ככלל, אין הבדל באסטרטגיית הפתרון בין גופים מרחביים לצורות במישור. תמיד מכילים עליהם את שיטת הרגרסיה.

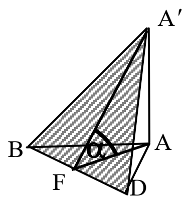
דוגמאות:



עד. נתונה תיבה שבסיסה ריבוע.
אורך צלע הריבוע הוא 10,
וגובה התיבה הוא 7.
מהי הזווית בין מישור משולש $A'BD$ לבין בסיס התיבה ?

פתרון:

תחילה נגזור מהציור רק את השִׂרטוט הרלוונטי:



הזווית בין מישור $A'BD$ לבין מישור ABD

היא הזווית α בין AF ל- $A'F$ כאשר

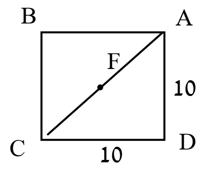
$BD \perp AF$ וגם $BD \perp A'F$.

המשולש FAA' הוא ישר זווית $\sphericalangle A = 90^0$. גובה התיבה כבר נתון: $AA' = 7$, ולכן נותר למצוא את $A'F$ או את AF.

AF הוא מחצית מאלכסון הבסיס, והבסיס הוא ריבוע, לכן קל יותר למצוא אותו.

אבל לשם כך נמצא תחילה את אלכסון הבסיס CA.

מציאת CA:

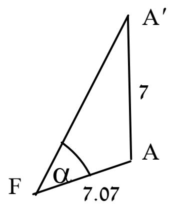


תחילה נשרטט את המישור הרלוונטי.

נשרטט ריבוע ולפי פיתגורס:

$$AC = \sqrt{10^2 + 10^2} = 14.14$$

ולכן:
$$7.07 = AF = \frac{1}{2} \cdot 14.14$$

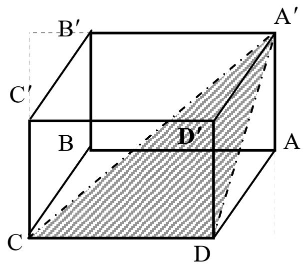


עתה נחזור לשִׂרטוט של משולש $A'FA$:

$$\tan\alpha = \frac{7}{7.07} = 0.99$$

$$\alpha = 44.71^0$$

עה. בקובייה $ABCDA'B'C'D'$



העבירו את אלכסון הקובייה CA'

ואת אלכסון הפֵּאה DA'.

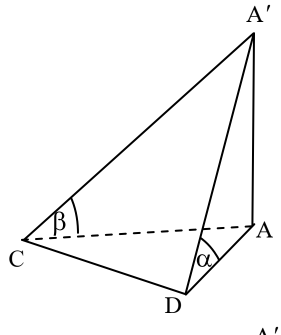
אורך צלע הקובייה הוא a.

א. מצאו את הזוית שבין אלכסון הפֵּאה DA' לבין מישור הבסיס.

ב. מצאו את הזווית שבין אלכסון הקובייה CA' למישור הבסיס.

ג. הביעו את שטח המשולש $A'DC$ בעזרת a.

פתרון:



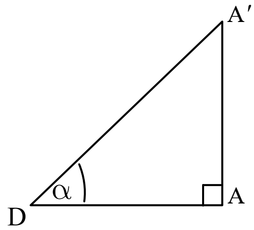
שוב נתחיל בשִׂרטוט החלק הרלוונטי לתרגיל:

א. זווית בין ישר למישור מוגדרת כזווית שבין הישר לבין היטלו במישור,

כלומר זווית α במשולש,

וזווית β היא הזווית שבין CA' לבין מישור הבסיס.

נתבונן במשולש: DAA'



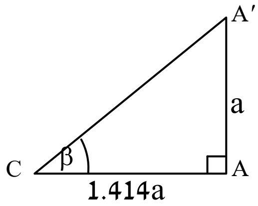
שוב זהו משולש ישר זווית

עליו נתון: $DA = AA' = a$

ולכן:
$$\tan\alpha = \frac{a}{a} = 1$$

$$\alpha = 45^0$$

ב. כך גם לגבי זווית β: $AA' = a$



אולם עלינו לחשב את CA.

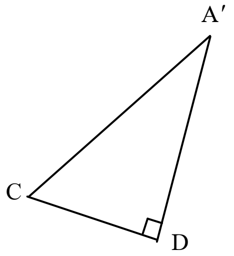
התבוננות בשִׂרטוט המקורי מראה ש:

CA הוא אלכסון הבסיס, ולפי פיתגורס:

$$CA=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}\,a=1.414a$$

לכן:
$$\tan\beta=\frac{a}{1.414a}=0.707$$
$$\beta=35.26^0$$

ג. נתחיל בשִׂרטוט:



DA' עובר במישור הפֵאה, ולכן $CD\perp DA'$.

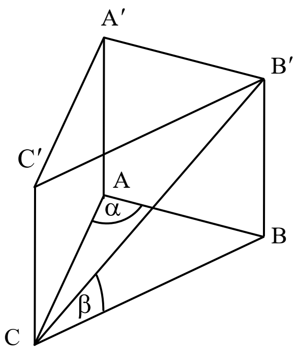
שוב קיבלנו משולש ישר זווית.

$DC=a$ (נתון)

$DA'=1.414a$ (בקובייה אין הבדל בין פֵאה לבסיס.)

ולכן: $s=\frac{a\cdot 1.414a}{2}=0.707a^2$

עו. במנסרה משולשת וישרה שבבסיסה שווה שוקיים,



נתון:

$AA'=h \quad AB=AC$

$\sphericalangle A=\alpha \quad \sphericalangle B'CB=\beta$

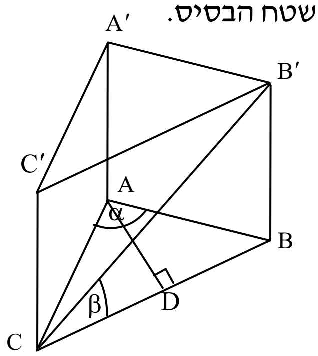
הביעו את נפח המנסרה בעזרת $h,\ \alpha,\ \beta$.

פתרון:

כדי למצוא את הנפח עלינו למצוא את שטח הבסיס כי הגובה כבר נתון – h.

כדי לקבל את שטח הבסיס עלינו למצוא את הצלעות או צלע + גובה הבסיס.

קל לראות שניתן על ידי β ו- h למצוא את BC. מכיוון שנתונה הזווית: $\sphericalangle A=\alpha$, והמשולש הוא ש״ש, נוכל למצוא את הגובה ל- BC וכך למצוא את שטח הבסיס.



ומכאן: $h=BB'=AA'$

במשולש CBB': $\frac{h}{CB}=\tan\beta$

$$\frac{h}{\tan\beta}=BC$$

נוריד גובה $AD\perp CB$

מכיוון שהמשולש הוא שווה שוקיים: $AB=AC$

ונקבל:
$$\tan\frac{1}{2}\alpha=\frac{BD}{AD}=\frac{\frac{1}{2}BC}{AD}$$

$$AD=\frac{\frac{1}{2}BC}{\tan\frac{1}{2}\alpha}$$

אחרי הצבה של $BC = \frac{h}{\tan\beta}$: $AD = \frac{\frac{1}{2}h}{\tan\beta \cdot \tan\frac{1}{2}\alpha}$

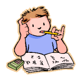
שטח הבסיס : $s_{ABC} = \frac{AD \cdot BC}{2}$

$$s_{ABC} = \frac{\frac{1}{2}h}{\tan\beta \cdot \tan\frac{1}{2}\alpha} \cdot \frac{h}{\tan\beta} \cdot \frac{1}{2}$$

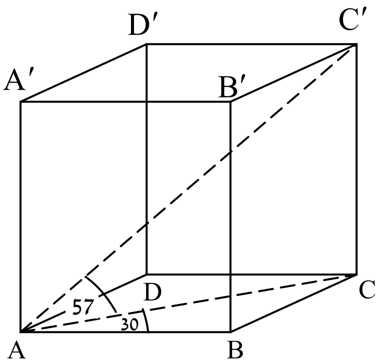
$$s_{ABC} = \frac{h^2}{4\tan^2\beta \cdot \tan\frac{1}{2}\alpha}$$

והנפח : $V = s_{ABC} \cdot h$

$$V = \frac{h^3}{4\tan^2\beta \tan\frac{1}{2}\alpha}$$

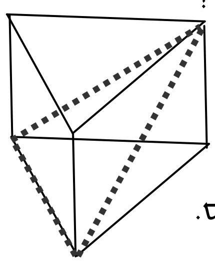


<u>בדיקת הבנה</u>



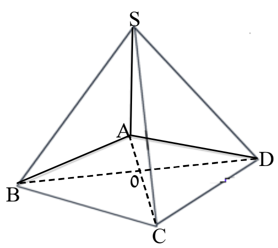
141. אורך האלכסון הראשי בתיבה הוא 30 ס״מ.
הזווית בין האלכסון הראשי לאלכסון הבסיס היא בת 57^0,
והזווית בין אלכסון הבסיס לבין מקצוע AB היא בת 30^0
(ראו ציור).
מצאו את נפח התיבה.

142. נתונה קובייה שאורך מקצועה הוא 5 ס״מ.
א. מה אורך האלכסונים הראשיים ?
ב. מה המרחק בין נקודת מפגש האלכסונים הראשיים וקדקודי הקובייה ?

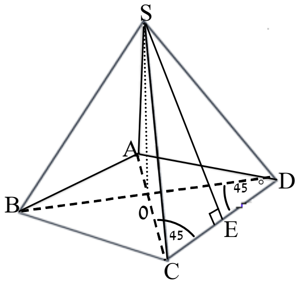


143. הבסיס של מנסרה ישרה הוא משולש שווה צלעות .
אורך אלכסון הפֵּאה הוא 8 ס״מ, וגובהה 5 ס״מ.
א. מה הזווית בין אלכסון הפֵּאה לבין הבסיס?
ב. בין שני אלכסוני פֵּאות יוצרים מישור. מה הזווית בין מישור זה לבסיס.

עז. בפירמידה מרובעת משוכללת וישרה
נתון שהגובה הוא 13 ס״מ, ואורך מקצוע צדדי הוא 15.
1. מה שטח מעטפת הפירמידה ?
2. מה שטה הפנים של הפירמידה ?
3. מה נפח הפירמידה ?

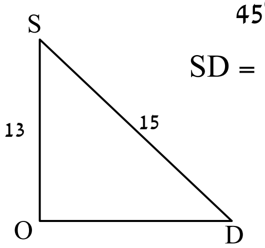


פתרון :
פירמידה משוכללת מצביעה על כך שהבסיס הוא מצולע
משוכלל - במקרה זה - ריבוע. מכיוון שהיא ישרה, הגובה יורד אל נקודת פגישת האלכסונים.



1. כדי לחשב את שטח הפנים יש למצוא את שטחי המשולשים של פֵאות הפירמידה. למעשה, בתרגיל זה די לנו למצוא גודל של פֵאה אחת כי כולן שוות. כדי למצוא את שטח הפֵאה עלינו למצוא את הבסיס ואת הגובה של הפֵאה.

מציאת CD :

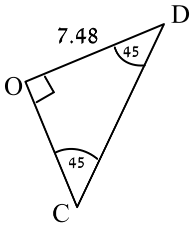


ניעזר בעובדה שהבסיס הוא ריבוע, ולכן : $45^0 = \sphericalangle OCD = \sphericalangle ODC$

אם נמצא את OD, נוכל לחשב את CD. על ידי CD והנתון : $SD = 15$ נוכל לחשב את גובה הפֵאה SE.

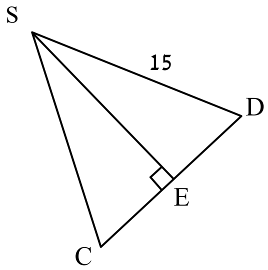
נעבור לחישובים :

במשולש SOD : $OD = \sqrt{15^2 - 13^2} = 7.48$



במשולש ODC : $\cos 45^0 = \dfrac{7.48}{DC}$

$$DC = \frac{7.48}{\cos 45} = 10.58$$



משולש SDC הוא שווה שוקיים (הפירמידה משוכללת וישרה) ולכן : $ED = EC = 5.3$

$$SE = \sqrt{15^2 - 5.3^2} = 14.04$$

שטח הפֵאה : $s_{SCD} = \dfrac{DC \cdot SE}{2}$

$$s_{SCD} \frac{10.58 \cdot 14.04}{2} = 74.23$$

ושטח המעטפת : $4 \cdot 74.23 = 296.92$

2. שטח הפנים הוא שטח המעטפת + הבסיס.

נחשב את הבסיס : $s_{ABCD} = DC^2 = 10.58^2 = 111.94$

לכן שטח הפנים : $297.06 + 111.94 = 409$

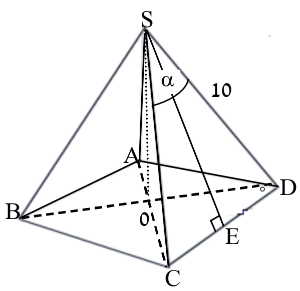
3. נפח הפירמידה : $v = \dfrac{s_{\text{בסיס}} \cdot \text{גובה}}{3}$

$$v = \frac{111.94 \cdot 13}{3} = 485.07$$

עח. שטח הפֵאה של פירמידה מרובעת משוכללת וישרה הוא 25 סמ״ר.

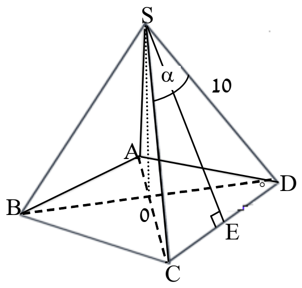
אורך המקצוע הצדדי הוא 10 סמ״ר.

מצאו את :



1. הזווית בין פֵאה לבסיס.
2. הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס.
3. הזווית בין מקצוע צדדי למקצוע הבסיס.

פתרון :



נתחיל בשִׂרטוט הפירמידה והנתונים :

1. הזווית בין פֵּאה לבסיס היא הזווית : $\sphericalangle SEO$

כדי לחשב אותה אנו זקוקים לשתי צלעות

במשולש SOE.

$\frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}BC = OE$ (הבסיס הוא ריבוע)

בעזרתו וביחד עם הנתון : $SD = 10$ נוכל למצוא את SE, ואז למצוא את הזווית.

הקושי העיקרי, אם כן, הוא למצוא את CD.

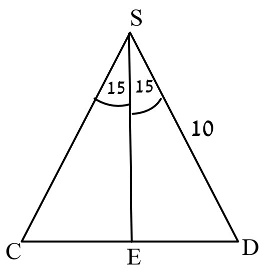
במשולש SCD נתון לנו השטח ואורך הצלע. כדי להתחיל לפתור את המשולש עלינו למצוא זווית אחת.

לכן נשתמש בנוסחת השטח : $s = \frac{ab\sin\alpha}{2}$

במקרה שלנו : $25 = \frac{10 \cdot 10 \sin\alpha}{2}$

$\frac{1}{2} = \sin\alpha$

$\alpha = 30^0$

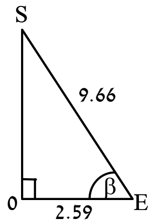


מכאן הכול פשוט יותר : $\sin 15 = \frac{ED}{10}$

$10\sin 15 = ED = 2.59 = OE$

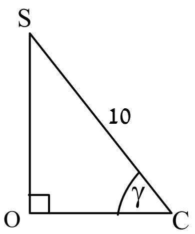
$\cos 15 = \frac{SE}{10}$

$10\cos 15 = SE = 9.66$



הזוויות בין פֵּאה לבסיס : $\cos\beta = \frac{2.59}{9.66} = 0.268$

$\beta = 74.4^\circ$

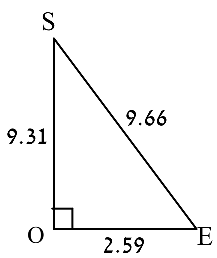


2. אם נחזור לציור הפירמידה, נראה שהזווית בין

מקצוע לבסיס היא זווית SCO. כדי למצוא זווית זו,

מספיק אם נמצא את SO גובה הפירמידה.

גובה זה נוכל למצוא מהנתונים שכבר יש לנו מסעיף א׳.



במשולש SOE מצאנו : $SE = 9.66$ $OE = 2.59$

ולכן : $SO = \sqrt{9.66^2 - 2.59^2}$

$SO = 9.31$

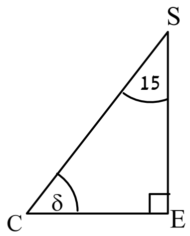
ולכן : $\sin\gamma = \frac{9.31}{10} = 0.931$

$\gamma = 68.53$

3. הזווית בין מקצוע צדדי למקצוע הבסיס

היא : $\sphericalangle SCE$.

חישוב פשוט יראה : $\delta = 90 - 15 = 85^0$



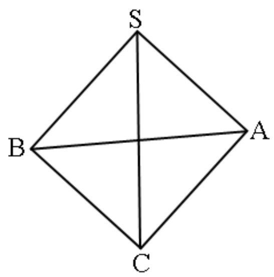
תנו דעתכם לכך שכל זווית היא בעלת ערך **שונה**. רבים מאוד מתלבטים ומניחים שהזווית בין מקצוע צדדי לבסיס שווה לזווית בין מקצוע צדדי למקצוע הבסיס. אני מקווה שעכשיו ברור יותר שאין זה כך.

עט. בטטראדר משוכלל שכל המקצועות בו שווים, נתון שאורך המקצוע היא a.

הביעו את נפח הטטראדר באמצעות a.

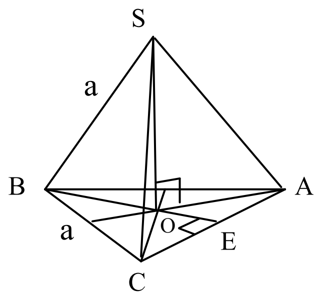
פתרון :

טטראדר הוא גוף בעל 4 פֵאות, והוא, למעשה, פירמידה משולשת. מכיוון שכל המקצועות שווים, הרי שמדובר ב- 4 משולשים שווי צלעות.



כדי למצוא את נפח הפירמידה עלינו למצוא את שטח הבסיס ואת הגובה. שטח הבסיס קל לביטוי באמצעות a מכיוון שהזווית בין כל שתי צלעות היא 60^0 .

נקבל : $s = \dfrac{a \cdot a \sin 60}{2} = 0.43a^2$



כדי למצוא את הגובה יש לדעת שהגובה SO , במקרה זה, יורד מהקדקוד אל נקודת מפגש התיכונים של הבסיס.

כבר הזכרנו שמתוך הגיאומטריה אנו יודעים ש :

<u>מפגש התיכונים מחלק כל תיכון ביחס של 2:1 -</u>

$\frac{2}{3}$ בכיוון הקדקוד, $\frac{1}{3}$ בכיוון הצלע.

לכן מספיק לנו למצוא אורך של תיכון אחד וליצור אִתו משולש ישר זווית. נבחר תיכון BE.

את אורך התיכון נמצא בעזרת משולש BEC שגם הוא ישר זווית (ACB הוא שווה צלעות) :

$$\sin 60 = \frac{BE}{a}$$

$$0.866a = BE$$

$$BO = \frac{2}{3}BE = 0.57a$$

בעזרת פיתגורס : $OS = \sqrt{a^2 - (0.57a)^2}$

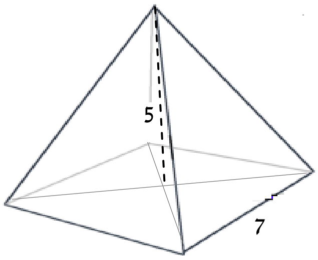
$$OS = 0.82a$$

והנפח : $v = \dfrac{0.43a^2 \cdot 0.82a}{3} = 0.12a^3$

בדיקת הבנה

144. בסיסה של פירמידה ישרה הוא ריבוע. אורך אלכסון הבסיס הוא 18 ס"מ, והזווית בין הפֵּאה הצדדית לבסיס היא בת 70^0. מצאו את נפח הפירמידה.

145. בסיסה של פירמידה ישרה הוא ריבוע שצלעו 7 ס"מ.



גובה הפירמידה הוא 5 ס"מ. מצאו:

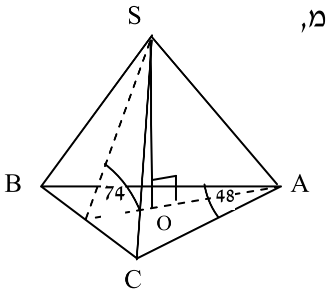
א. את שטח מעטפת הפירמידה.

ב. את המקצוע הצדדי.

ג. את הזווית בין המקצוע לבסיס.

ד. את הזווית בין שתי פֵּאות נגדיות.

146. בפירמידה משולשת וישרה הבסיס הוא משולש שווה שוקיים.



אורך השוק הוא 12 ס"מ, גובה הפֵּאה SCA הוא 13 ס"מ,

זווית הראש של המשולש היא בת 48^0,

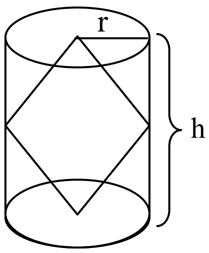
והזווית בין הפֵּאה SBC לבסיס היא בת 74^0.

מצאו את:

א. נפח הפירמידה.

ב. שטח הפנים של הפירמידה.

ג. את הזווית בין הפֵּאה SCA לבסיס.

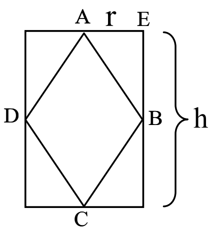


פ. בגליל שרדיוסו 4 יחידות, ונפחו 96π יחידות נפח, חסמו מעוין.

1. מהו אורך צלע המעוין ?
2. מהי הזווית החדה של המעוין ?

פתרון:

1. שִׂרטוט:



אם המעוין חסום בגליל,

חייבים 2 מקדקודיו להתלכד עם

מרכזי הבסיסים של הגליל.

החתך הצירי (שעובר דרך ציר הגליל) של הגליל הוא מלבן.

המעוין החסום בו הוא, למעשה, מעוין החסום במלבן.

לפי הנתונים שלנו, $r = 4$, h לא נתון,

אולם נתון הנפח: $v = 96\pi$

כך נוכל למצוא את h.

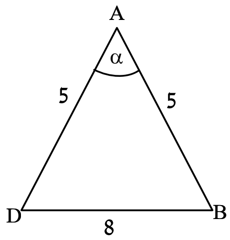
מידיעת h ו- r, נוכל לחשב את צלעות המשולש ABE, וממנו נוכל לחשב את זווית הראש במשולש ADB.

נמצא את h:

לפי הנוסחה:
$$v = \pi r^2 \cdot h$$
$$96\pi = \pi 16 \cdot h$$
$$6 = h$$

מסימטריית המעוין החסום אנו יודעים : $BE = 3$

מכאן אורך צלע המעוין : $AB = 5$ יחידות (שלשה פיתגורית 5 ,4 ,3)



2. עתה נתבונן במשולש DAB.

מצאנו : $AD = AB = 5$

ואנו יודעים : $DB = 2r = 8$

ניתן להשתמש במשפט הקוסינוס

(ניתן גם להוריד גובה) :

$$8^2 = 5^2 + 5^2 - 2\cdot5\cdot5\cos\alpha$$

$$14 = -50\cos\alpha$$

$$\frac{14}{-50} = \cos\alpha = -0.28$$

$$\alpha = 106.26^0$$

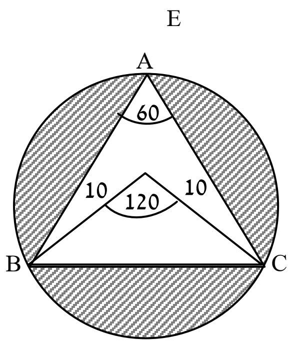
והזווית החדה :

$$180 - 106.26 = 73.74^0$$

פא. זכוכית בצורת מנסרה משולשת משוכללת משונעת בתוך גליל קרטון. כדי למנוע את שבירתה ממלאים בספוג את החלל בינה לבין הגליל.

אם רדיוס הגליל המינימלי הוא 10 ס"מ, ואורכו h, הביעו את נפח הספוג בעזרת h.

פתרון :



שִׂרטוט חתך רוחבי של הגליל עם המנסרה :

(האזורים המקווקווים הם הספוג הדרוש.)

כדי למצוא את נפחו יש למצוא את שטחו של הספוג בחתך ולהכפילו ב- h.

את שטח הספוג נמצא על יד חיסור :

$S_{\text{ספוג}} = S_{\text{משולש}} - S_{\text{מעגל}}$

שטח המעגל הוא : $s = \pi\cdot10^2 = 100\pi$

כדי לחשב את שטח המשולש נמצא תחילה את אורך הצלע. מהנתון שהמנסרה היא משוכללת, אנו יודעים שמשולש ABC הוא שווה צלעות.

מהגיאומטריה אנו יודעים שהזווית ההיקפית היא 60^0, ולכן הזווית המרכזית היא 120^0 .

בעזרת משפט הקוסינוסים נקבל :

$$BC^2 = 10^2 + 10^2 - 2\cdot10\cdot10\cos120$$

$$BC^2 = 300$$

$BC = 17.32$ ס"מ

ושטח המשולש :

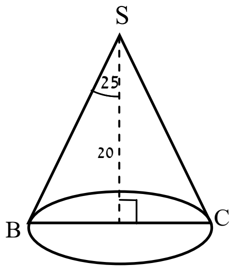
$$s = \frac{17.32^2\cdot\sin60}{2}$$

$$s = 129.9$$

שטח הספוג : $s = 100\pi - 129.9 = 184.26$ סמ"ר

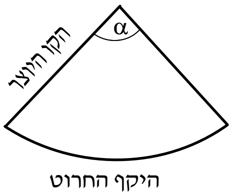
נפח : $v = 184.26\cdot h$ סמ"ק

פב. בחרוט ישר הגובה הוא 20 יחידות, והזווית בין הקו היוצר לבין הגובה היא 25^0.



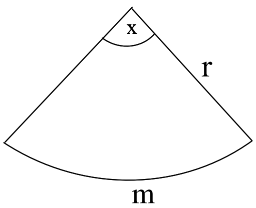
1. מהו שטח המעטפת ?
2. מהו שטח הפנים ?
3. מה נפח החרוט ?

פתרון :



1. כדי למצוא את שטח המעטפת יש לפרוש את מעטפת החרוט. מהפרישה אנו מוצאים שלמעשה, זוהי גִזרה של מעגל שרדיוסו הוא הקו היוצר, ואורך הקשת הוא היקף בסיס החרוט.

<u>מציאת נוסחה למעטפת חרוט :</u>



שטח מעגל הוא : πr^2

לכן שטח הגִזרה הוא : $s = \frac{\pi r^2}{2\pi} \cdot x$ כאשר x מבוטא ברדיאנים.

אולם אנו יודעים ש : $x = \frac{m}{r}$ כאשר m הוא אורך הקשת.

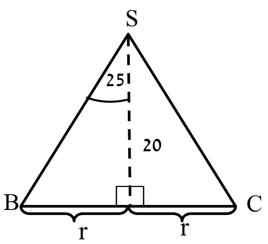
ולכן : $s = \frac{r^2}{2} \cdot \frac{m}{r} = \frac{r \cdot m}{2}$ גִזרה

בתרגיל שלנו : $m = 2\pi r$ (r – רדיוס החרוט)

$R = l$ (l- הקו היוצר)

לכן נוסחת מעטפת החרוט : $s = \frac{2\pi r l}{2}$

כלומר : $\boxed{s = \pi r l}$



כדי למצוא את השטח עלינו לחשב את r :

חתך צירי של החרוט יראה משולש ש״ש שגובהו 20 יחידות, וזווית הראש היא בת 50^0.

לכן : $\tan 25 = \frac{r}{20}$

$20 \tan 25 = r = 9.33$

למציאת אורך הקו היוצר : $\cos 25 = \frac{20}{SB}$

$SB = \frac{20}{\cos 25} = $ 22.07 יח'

ושטח המעטפת : $s = \pi \cdot 9.33 \cdot 22.07 = 646.82$ יחידות שטח

2. שטח הפנים הוא שטח המעטפת + שטח הבסיס :

$s = 646.82 + \pi \cdot 9.33^2 = 920.3$

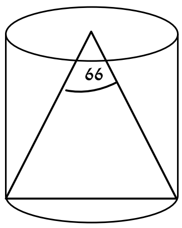
3. נפח החרוט :

$$v=\frac{\pi r^2\cdot h}{3}$$

$$v=\frac{\pi 9.33^2\cdot 20}{3}=1823.15_{\text{יחידות נפח}}$$

בדיקת הבנה

147. בגליל חסמו משולש שווה שוקיים.



אורך השוק 9 ס״מ, וזווית הראש 66^0.

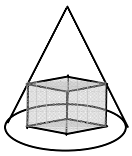
מצאו :

א. את נפח הגליל.

ב. את שטח הפנים של הגליל.

148. נפחו של חרוט ישר הוא 7.21π סמ״ק. גובה החרוט הוא 8.66 ס״מ. מהו שטח מעטפת החרוט ?

149. בחרוט שרדיוס בסיסו 8 ס״מ חסמו קובייה (ראו ציור).

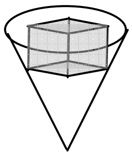


אורך צלע הקובייה 3 ס״מ.

מצאו :

א. את זווית הבסיס של החתך הצירי של החרוט.

ב. את נפח החרוט.

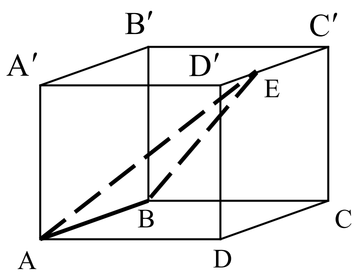


כאשר הופכים חרוט זה, הוא צורת כוס שבתוכה קוביית קרח.

ג. מה כמות המשקה שניתן למזוג לכוס זו בלי שיישפך ?

תרגול עצמי

150. בתיבה הנתונה בציור, הבסיס הוא ריבוע שצלעו 6 ס״מ.



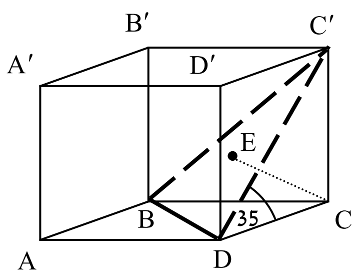
הזווית בין אלכסון הפֵּאה לבין הבסיס היא בת 37^0.

הנקודה E מחלקת את $D'C'$ ביחס של $1:3$.

מצאו את הזווית בין מישור ABE לבין בסיס התיבה

ואת הזווית בין AE לבסיס.

151. בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ שבסיסה ריבוע,



חסום משולש $C'BD$ (ראו ציור).

גובה התיבה 4 ס״מ, והזווית בין אלכסון הפֵּאה לבסיס

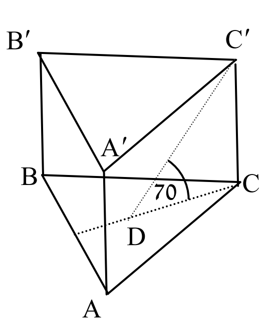
היא בת 35^0. E היא נקודת מפגש התיכונים

במשולש $C'BD$.

מצאו : א. את הזווית בין מישור המשולש לבסיס התיבה.

ב. את אורך EC.

152. בסיסה של מנסרה משולשת הוא משולש שווה צלעות.



אורך צלע המשולש הוא a. DC' הוא ישר המחבר את

קדקוד המנסרה עם מפגש התיכונים של הבסיס.

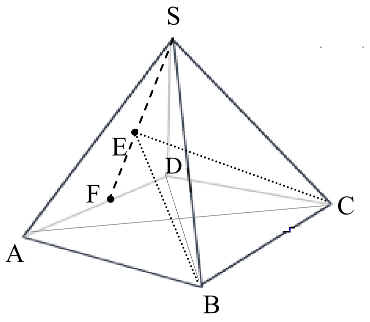
$\measuredangle C'DC=70^0$ (ראו ציור).

הביעו את אורך $C'D$ ואת נפח המנסרה באמצעות a.

153. במנסרה ישרה שבסיסה משושה משוכלל, הגובה גדול פי 2 מצלע הבסיס. נתון: צלע הבסיס הוא a.
הביעו את שטח הפנים של המנסרה ואת נפחה באמצעות a.

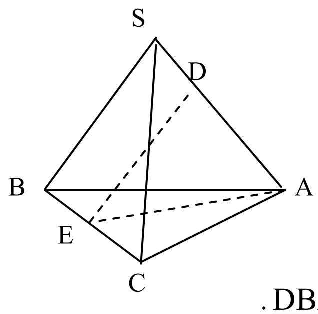
154. בפירמידה מרובעת שבסיסה ריבוע, נתון שהזווית בין פֵּאה צדדית לבסיס היא 75^0. מצאו הזווית בין מקצוע הפירמידה לבסיס.
(הדרכה: הציבו את 2a כגודל צלע הבסיס ובטאו את שאר הקטעים בעזרת a).

155. בפירמידה הישרה המתוארת בציור:



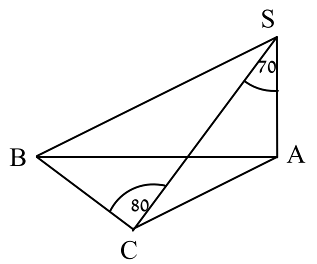
הבסיס הוא ריבוע שצלעו 8 ס"מ.
מישור EBC מאונך לפֵּאה SAD.
הנקודה E היא אמצע הגובה לפֵּאה SF.
מצאו:
א. את הזווית בין מישור EBC לבסיס.
ב. את הזווית בין הישר EB למישור הבסיס.
ג. את נפח הפירמידה.

156. בפירמידה ABCS כל הצלעות שוות, וגודלן a.



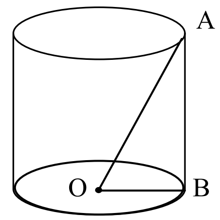
נתון: $EC = EB$
$DA = 2DS$
מצאו את:
א. זווית $\sphericalangle DEA$.
ב. הביעו את נפח הפירמידה החדשה שנוצרת: <u>DBAC</u>.

157. בפירמידה שבציור, SA מאונך למישור הבסיס, וגודלו a.



$\sphericalangle CSA = 70^0$ ו- $\sphericalangle BCS = 80^0$.
הביעו את שטח הפנים של הפירמידה באמצעות a.

158. בגליל שבציור נתון:



$AO = 1.2AB$
$OB = r$
הביעו את מעטפת המנסרה את ואת נפחה באמצעות r.

159. בגליל חסמו תיבה שרוחב הבסיס שלה שווה לרדיוס הגליל. מה יחס הנפחים של התיבה והגליל?

160. א. הוכיחו כי הקו היוצר של חרוט ישר תמיד ארוך מגובהו.
ב. בחרוט ישר נתון שאורך הקו היוצר גדול פי 1.4 מגובה החרוט, ורדיוסו r. מה שטח המעטפת של החרוט?

161. האם ייתכן שבחרוט ישר יהיה שטח הפנים כפול משטח המעטפת?
אם כן, מצאו את הזווית הנוצרת בין גובה החרוט לקו היוצר במצב זה.
אם לא, הוכיחו ונמקו מדוע.

בעיות ערך קיצון בטריגונומטריה

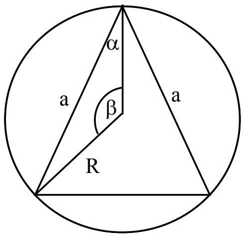
בעיות אלה משלבות את כל החומר שלמדנו בטריגונומטריה. כאן נבין טוב יותר מה כוחה של הבעה בעזרת פרמטר, וכיצד ניתן לעשות שימוש בנגזרת של טריגונומטריה.

את אסטרטגיות הפתרון למציאת ערכי קיצון של בעיות כבר למדנו בעבר. לכן נותר לנו רק לראות איך מיישמים אותן בנושא זה.

פג. במעגל שרדיוסו R, חוסמים משולש שווה שוקיים.

מה צריכה להיות זווית הראש של המשולש כדי ששטחו של המשולש יהיה מקסימלי ?

פתרון :



נתחיל בשִׂרטוט ובהבעה של הצלעות

באמצעות R וזווית הראש :

במצבים כאלה (כאשר אנו רואים שנשתמש

בחצי זווית), נגדיר את זווית הראש 2α .

<u>פונקציית המטרה</u> : $s=\frac{a^2\sin(2\alpha)}{2}$

מציאת פונקציית הקשר :

ממשפט הסינוסים : $\frac{a}{\sin\beta}=\frac{R}{\sin\alpha}$

אבל : $\beta=180-2\alpha$ ← $\frac{a}{\sin(180-2\alpha)}=\frac{R}{\sin\alpha}$

$$\frac{a}{\sin(2\alpha)}=\frac{R}{\sin\alpha}$$

$$a=\frac{R\sin(2\alpha)}{\sin\alpha}=\frac{R\,2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

ו<u>פונקציית הקשר</u> היא : $a=2R\cos\alpha$

אחרי הצבה בפונקציית המטרה :

$$s=\left(2R\cos\alpha\right)^2\cdot\frac{\sin(2\alpha)}{2}$$

$$s=4R^2\cos^2\alpha\cdot\frac{\sin(2\alpha)}{2}$$

$$s=2R^2\cos^2\alpha\cdot2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$s=4R^2\cos^3\alpha\sin\alpha$$

כדי למצוא שטח מקסימלי :

$$s'=\frac{\Delta s}{\Delta\alpha}=4R^2\left[3\cos^2\alpha\cdot(-\sin\alpha)\cdot\sin\alpha+\cos^3\alpha\cdot\cos\alpha\right]$$ $\boxed{\text{נגזרת מכפלה!}}$

$$s'=4R^2(-3\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\cos^4\alpha)=0$$

$$-3\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\cos^4\alpha=0$$

$$\cos^2\alpha(-3\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=0$$

$\cos^2\alpha=0$ או $-3\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=0$

$\alpha=90^\circ$ לא מתאים $\qquad 3\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$

$$\tan^2\alpha=\frac{1}{3}$$

$$\tan\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm 0.577$$

$\alpha_1 = 30^0 \quad \alpha_2 = -30^0$ לא מתאים

זווית הראש: $2\alpha = 60^0$

כלומר המשולש הוא שווה צלעות.

כדי להוכיח שהשטח הוא אכן מקסימלי:

נחזור אל הנגזרת: $s' = 4R^2(-3\cos^2\alpha\sin^2\alpha + \cos^4\alpha)$

נכתוב אותה באופן שונה (כדי שיהיה נוח למצוא נגזרת שנייה):

$$s' = 4R^2(-\frac{3}{4}\sin^2(2\alpha) + \cos^4\alpha)$$

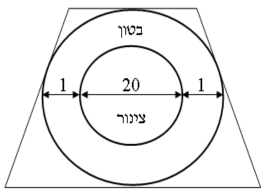
נגזרת שנייה:

$$s'' = 4R^2\left[-\frac{3}{4}2\sin(2\alpha)\cos(2\alpha)\cdot 2 - 4\cos^3\alpha\sin\alpha\right]$$

עבור זוויות <u>חדות</u> קל לראות ש: $s'' < 0$ כלומר נקודת הקיצון היא מקסימלית.

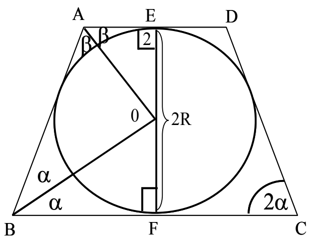
פד. להנחת צינור מים בקוטר 20 ס״מ דרושים אדני בטון. עובי הבטון סביב הצינור לא יֵרד מ- 1 ס״מ, וצורתו תְּהֵא של טרפז שווה שוקיים. מה צריכה להיות זווית הבסיס כדי שנפח הבטון באדנים יהיה מינימלי?

פתרון:



זוהי דוגמה לבעיה מעשית. כדי לפתור אותה צריך לבצע חתך באדן ולהתייחס לבעיה כבעיה במישור.
אנו נתייחס אל הבעיה כאילו אנו נדרשים למצוא את השטח המינימלי של טרפז שווה שוקיים סביב מעגל שרדיוסו 11 ס״מ.

לכן <u>פונקציית המטרה</u> היא: $s = \frac{AD + BC}{2}\cdot h$



שוב נגדיר את זוויות הבסיס הגדול 2α

ואת זווית הבסיס הקטן 2β.

מציאת פונקציית הקשר:

מתוך סימטריית המשיקים וחוקי המקבילים:

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

$$\alpha + \beta = 90$$

$$\beta = (90 - \alpha)$$

גובה הטרפז הוא: $2R = h$

ממשולש AOE:

$$\frac{R}{AE} = \tan\beta = \tan(90 - \alpha)$$

$$R = AE\tan(90 - \alpha) = \frac{AE}{\tan\alpha}$$

$$R\tan\alpha = AE$$

<u>פונקציית קשר</u> ראשונה: $2R\tan\alpha = AD$

באותו אופן:
$$\frac{R}{BF}=\tan\alpha$$
$$\frac{R}{\tan\alpha}=BF$$

<u>פונקציית קשר</u> שנייה:
$$\frac{2R}{\tan\alpha}=BC$$

כבר ראינו שפונקציית המטרה היא:
$$s=\frac{AD+BC}{2}\cdot h$$

אחרי הצבה של פונקציות הקשר:
$$s=\frac{2R\tan\alpha+\frac{2R}{\tan\alpha}}{2}\cdot 2R$$

אחרי צמצום:
$$s=(2R\tan\alpha+\frac{2R}{\tan\alpha})R$$
$$s=2R^2(\tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha})=2R^2\left[\frac{\tan^2\alpha+1}{\tan\alpha}\right]$$
$$s'=\frac{\Delta s}{\Delta\alpha}=2R^2\left[\frac{2\tan\alpha\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\tan\alpha-\frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\left(\tan^2\alpha+1\right)}{\tan^2\alpha}\right]=0$$

נתייחס רק לסוגריים (כי $2R^2\neq0$):
$$\frac{\frac{2\tan^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\frac{\tan^2\alpha+1}{\cos^2\alpha}}{\tan^2\alpha}=0$$

נכפיל ב- $\cos^2\alpha\neq0$ וב- $\tan^2\alpha\neq0$:
$$2\tan^2\alpha-\tan^2\alpha-1=0$$
$$\tan^2\alpha=1$$
$$\tan\alpha=\pm1$$

$\alpha=45^0$ או $\alpha=-45^0$ לא מתאים

וזווית הבסיס: $2\alpha=90^0$

כך נקבל נפח בטון מינימלי של האדנים.

כדי לוודא שאכן קיבלנו מינימום, נבדוק את הנגזרת השנייה. כבר ראינו שכדי לוודא נקודות מינימום או מקסימום בפונקציות מנה ניתן לגזור רק את המונה.

הנגזרת כפי שמצאנו:
$$\frac{\frac{2\tan^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\frac{\tan^2\alpha+1}{\cos^2\alpha}}{\tan^2\alpha}$$

והמונה:
$$\frac{2\tan^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\frac{\tan^2\alpha+1}{\cos^2\alpha}$$

לשם נוחות נְפַתֵּחַ את הביטוי:
$$\frac{2\tan^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\frac{\tan^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{\tan^2\alpha}{\cos^2\alpha}\left[2-1\right]-\frac{1}{\cos^2\alpha}=$$
$$=\frac{\tan^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\frac{1}{\cos^2\alpha}=\left(\frac{\tan\alpha}{\cos\alpha}\right)^2-\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

נגזרת שנייה :

$$s''=2\left(\frac{\tan\alpha}{\cos\alpha}\right)\left(\frac{\frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\cos\alpha+\sin\alpha\cdot\tan\alpha}{\cos^2\alpha}\right)+\frac{1}{\cos^4\alpha}\cdot 2\cos\alpha\sin\alpha$$

גם כאן קל לראות שעבור זוויות חדות כל הערכים חיוביים, ולכן : $s''>0$

כלומר הנקודה שקיבלנו, היא אכן נקודת מינימום.

כדאי לשים לב :

א. הצורה המתקבלת היא של ריבוע.

ב. התוצאה אינה קשורה כלל לקוטר הצינור.

למעשה, כדי לבנות תבנית בטון מתאימה יש עכשיו צורך לחזור ולחשב את הצלעות :

$$22=2R$$

צלע הריבוע הוא : $AD=22\cdot\tan 45^\circ=22$ ס״מ

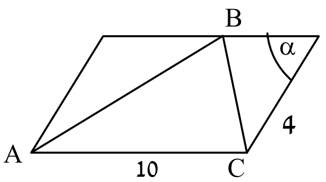
<u>בדיקת הבנה</u>

162. במשולש נתונות שתי צלעות $a,\ b$. מה צריכה להיות הזווית הכלואה ביניהן, כדי ששטח המשולש יהיה מקסימלי ?

163. במשולש שווה שוקיים חסמו מעגל. מה צריכה להיות זווית הבסיס כדי ששטחו יהיה מינימלי ?

(תזכורת : $\tan(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$)

<u>תרגול עצמי</u>



164. צלעות מקבילית הן : 10 ס״מ ו- 4 ס״מ.

α היא הזווית החדה של המקבילית.

משולש ABC חסום במקבילית זו (כפי שנראה בציור).

מה צריכה להיות הזווית α כדי ששטח המשולש יהיה מקסימלי ?

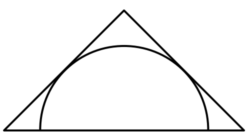
165. בטרפז המצויר, אורכי השוקיים שווים ושווים לבסיס הקטן.

α היא זווית הבסיס של הטרפז.

מה צריכה להיות α כדי ששטח הטרפז יהיה מקסימלי ?

166. במעגל שרדיוסו R חסום משולש ישר זווית. מה צריכה להיות הזווית החדה של המשולש כדי ששטחו יהיה מקסימלי ?

167. מבין כל המשולשים שווי השוקיים שאורך שוקיהן הוא a, איזו זווית בסיס תהיה למשולש ששטחו מקסימלי ?



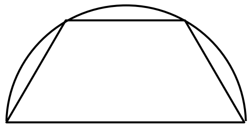
168. בתוך משולש שווה שוקיים חסמו חצי מעגל שרדיוסו R,

כך שקוטרו מתלכד עם הבסיס של המשולש.

א. מה גודל זווית הראש של המשולש ששטחו מינימלי ?

ב. מהו השטח המינימלי ?

169. בתוך חצי מעגל שרדיוסו R חסמו טרפז שווה שוקיים.



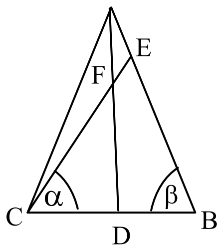
מצאו :

א. מה צריכה להיות זווית הבסיס של הטרפז כדי שהיקפו יהיה מקסימלי ?

ב. מהו היקף זה ?

תרגול כללי

170. במשולש המתואר בציור, מתקיימים הנתונים הבאים :



$AB = AC$

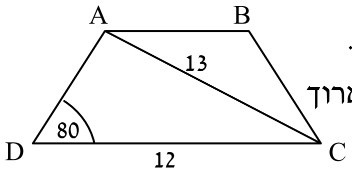
$FD = 2AF$

$AD \perp BC$

א. הוכיחו : $\tan\alpha = \frac{2}{3}\tan\beta$

ב. הוכיחו : $\frac{EB}{AB} = \frac{4}{5}$

171. אורך האלכסון AC בטרפז $ABCD$ נתון הוא 13 יח'.



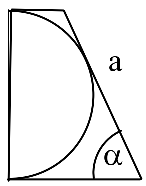
בסיסו הארוך DC הוא 12 יח', והזווית בין הבסיס הארוך

לשוק AD היא 80^0.

מצאו את היקף הטרפז אם ידוע שהאלכסון הנתון הוא גם חוצה את זווית הבסיס.

172. בטרפז המתואר בציור, הבסיסים והשוקיים משיקים

לחצי המעגל.



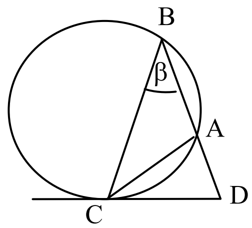
א. בטאו את סכום הבסיסים באמצעות a.

ב. בטאו את היקף הטרפז ואת שטחו באמצעות a, α.

173. משולש שווה שוקיים ABC חסום במעגל שרדיוסו R

$(AB = AC)$. דרך נקודה C העבירו משיק

למעגל החותך את המשך השוק AB בנקודה D.



א. בטאו את שטח המשולש ACD באמצעות R, β.

ב. עבור איזו זווית β יהיה שטח משולש ACD שווה לשטח משולש ABC ?

174. נתון מרובע חסום במעגל. AB הוא קוטר המעגל.

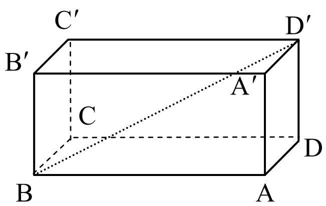
כמו כן נתון : $BC = m$

$\sphericalangle B = \beta$

$\sphericalangle A = \alpha$

הביעו את אורכי הצלעות באמצעות m, α, β.

175. בתיבה המתוארת בציור, האלכסון BD' יוצר

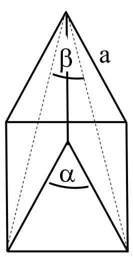


זווית α עם הבסיס, וזווית β עם הפֵּאה $ADD'A'$.

h הוא גובה התיבה.

הביעו את נפח התיבה באמצעות h, α, β.

176. במנסרה משולשת וישרה הבסיס הוא משולש שווה שוקיים.

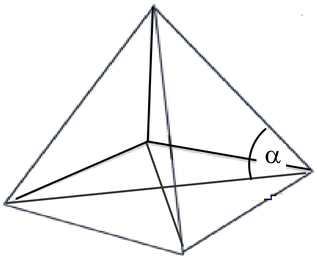


אורך השוק הוא a, וזווית הראש היא α.

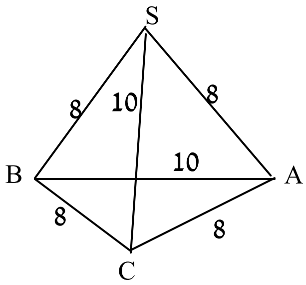
נתון כי הזווית בין אלכסוני הפֵּאות הצדדיות היא β.

הביעו את נפח המנסרה באמצעות a, α, β.

177. בפירמידה ישרה שבסיסה ריבוע, נתון ש:
α - הזווית בין מקצוע צדדי לבין בסיס
הפירמידה היא בת 63.16^0 (ראו ציור).
א. מצאו את הזווית בין פֵּאה צדדית לבין בסיס הפירמידה.
ב. מצאו את הזווית בין שתי פֵּאות סמוכות.



178. אורכי הצלעות של פירמידה משולשת נתונים בציור.
מצאו את הזווית בין המקצוע AS לבסיס.



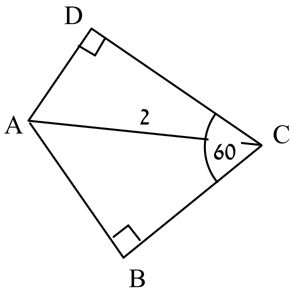
179. מבין כל המרובעים ABCD שלגביהם נתון:

$\sphericalangle B = \sphericalangle D = 90^0$

$\sphericalangle C = 60^0$

$AC =$ 2 ס"מ

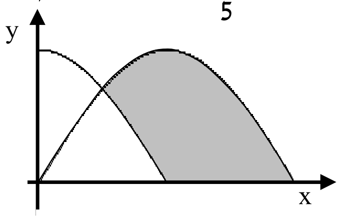
א. מהן צלעותיו של המרובע ששטחו מקסימלי?
ב. מהו שטח זה?



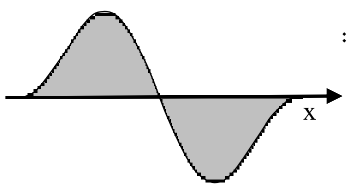
180. מבין כל הטרפזים שווי השוקיים שבהם אורך הבסיס הקטן שווה לשוק, מהו השטח של הטרפז ששטחו מקסימלי אם נתון שאורכי הבסיס הקטן והשוקיים הוא a?

181. חקרו את הפונקציה: $y = 2x - \tan x$ בתחום: $-\frac{2}{5}\pi < x < \frac{\pi}{2}$ ושרטטו סקיצה.

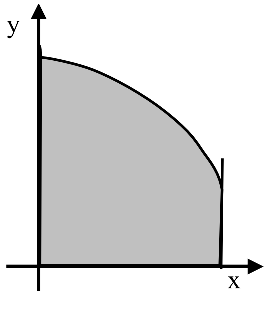
182. מצאו את השטח המוגבל בין הגרפים:
$y = \cos x$ ו- $y = \sin x$ לבין ציר ה- x
(השטח המושחר בציור).



183. א. מצאו את נגזרת הפונקציה: $y = \cos^3 x$
ב. מצאו את השטח המוגבל בין עקום הפונקציה:
$y = \cos^2 x \sin x$ וציר ה- x
בתחום: $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$



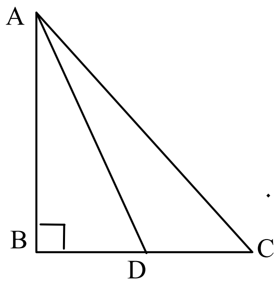
184. א. הראו כי נגזרת הפונקציה: $y = \cos x \cdot \sin 2x$
היא: $y' = 6\cos^3 x - 4\cos x$
ב. מצאו את השטח המוגבל על ידי
העקום: $y = 6\cos^3 x - 4\cos x$, ציר ה- x,
ציר ה- y והישר: $x = \frac{\pi}{6}$



185. נתון משולש ישר זווית ABC $(\sphericalangle B = 90^0)$

AD הוא תיכון.

נתון: $AB + BC = 4$ ס״מ



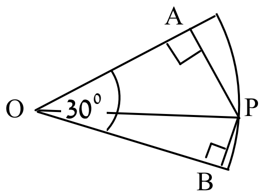
א. סמנו ב- x את BD והביעו את אורכי הניצבים באמצעות x.

ב. מצאו את x שעבורו אורך התיכון AD הוא מינימלי.

186. נתונה גִזרת מעגל בעלת זווית מרכזית שגודלה 30^0.

רדיוס המעגל הוא R. מנקודה P הורידו שני אנכים לשני הרדיוסים (כמתואר בציור).

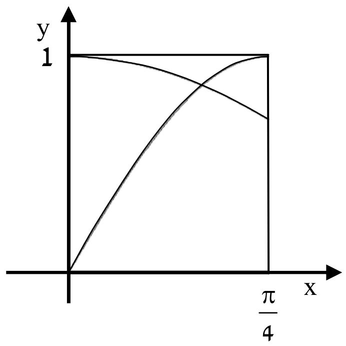
מצאו את גודל הזווית $\sphericalangle BOP$ שעבורה שטח המרובע $OAPB$ הוא מקסימלי.



187. נתונות הפונקציות: $y = \sin 2x$ ו- $y = \cos x$

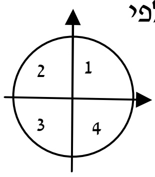
בתחום: $0 < x < \frac{\pi}{4}$ (ראו ציור).

חשבו בתחום הנתון את השטח המוגבל על ידי הגרפים והישר: $y = 1$



פתרונים

1. טבלה:

	הזווית במעלות	הזווית ברדיאן ככפולה של π	הזווית ברדיאן בכתיבה עשרונית	המיקום לפי רביעים 
.1	90	$\frac{1}{2}$	1.57	על הציר האנכי
.2	-45	$-\frac{1}{4}$	-0.79	רביעי
.3	120	$\frac{2}{3}$	2.09	שני
.4	150	$\frac{5}{6}$	2.62	שני
.5	-225	-1.25	-3.93	שני
.6	135	$\frac{3}{4}$	2.36	שני
.7	270	$\frac{3}{2}$	4.71	ציר אנכי
.8	396	$\frac{11}{5}$	6.91	ראשון
.9	-210	$-\frac{7}{6}$	-3.67	שני
.10	57.29	0.32	1	ראשון
.11	128.91	0.72	2.25	שני
.12	-246.37	-1.37	-4.3	שני
.13	458.37	2.55	8	שני
.14	-30.37	-0.17	-0.53	רביעי

2. א. 12.566rad , 13.96rad , 17.453rad
ב. 5.65 מטר, 6.28 מטר , 7.85 מטר
ג. 1.38 מטר

3. א. 523.6 רדיאן
ב. 51.19 מ"מ

4. טבלה:

הזווית	המחזור (k)	הזווית במחזור הראשון (k=0)	הרביע	עוד זווית לאותה נקודה
100	15	5.75	4	18.31
35.42	5	4	3	10.28
27.35	4	2.21	2	8.5
16	2	3.43	3	9.72
-12	-2	5.66	4	6.85
9.56	2	-3	3	-9.28
-34.2	-6	3.5	3	-22
-28	-5	2.86	2	9.15
38.98	7	-5	4	1.28

5. $1+(2\pi k)/3$ $0.14+2\pi k$
6. $1+(\pi k)/2$ $-0.429+\pi k$
7. $1.11+2\pi k/3$ $-0.066+2\pi k/3$
8. $1.163-\pi k$ $2.27-\pi x$
9. $0.34+2\pi k$ $2.8+2\pi k$

$0.39+\frac{1}{2}\pi k \quad 0.92+\frac{1}{2}\pi k$ .10

$0.14+\frac{2}{7}\pi k \quad -1+\frac{2}{7}\pi k$ .11

$1.62+2\pi k \quad -3.62+2\pi k$ .12

$\pm 0.64+2\pi k$ .13

$0.96++2\pi k/3 \quad 0.29++2\pi k/3$ .14

$-0.666++2\pi k/3$ .15

$-0.35+\frac{2}{3}\pi k \quad 1.04+\frac{2}{3}\pi k$ .16

$-2.03 \quad -0.98 \quad 1.11 \quad 2.16$ .17

$-5.24 \quad -\pi \quad -1.05 \quad 1.05 \quad \pi \quad 5.24$ .18

$1.1+\pi k$ .19

$-0.39 \quad -1.96$ .20

$-1.03+\pi k$ .21

$\pm 1.23+2\pi k \quad \pi k/3$ .22

$0.79+2\pi k \quad 2.36+2\pi k$ .23

$-1.18 \quad -1.95 \quad 5.1 \quad 4.33 \quad 3 \quad 2.23 \quad 0.14 \quad 0.91$ .24

$-0.78+\pi k \quad 1.57+\pi k$ .25

$2.67 \quad -1.88 \quad -0.31 \quad -1.1$ .26

$-5.94 \quad -4.71 \quad -3.48 \quad 0.34 \quad 1.57 \quad 2.8$ .27

$0.79+\pi k$ .28

$3.66+2\pi k \quad 2.62+2\pi k \quad -0.52+2\pi k \quad 0.52+2\pi k$ .29

$0.17+2\pi k \quad 0.33+2\pi k \quad 2.8+2\pi k \quad 2.97+2\pi k$ .30

$\pm 0.72+2\pi k$ .31

$0.39+\frac{1}{2}\pi k$ .32

$-1.22+2\pi k \quad 1.22+2\pi k \quad 1.92+2\pi k \quad 4.36+2\pi k$ .33

$\pm 0.79+2\pi k \quad \pm 2.48+2\pi k$ .34

$\pi+2\pi k \quad 1.04+4\pi k \quad 5.24+4\pi k$ .35

$0.79+\pi k$ .36

$0.264+\pi k \quad 1.31+\pi k$ .37

$0.39+\frac{1}{2}\pi k$ .38

$\pi k \quad 0.52+\frac{\pi k}{3} \quad \pm 1.05+2\pi k$ .39

$\pm 0.79+\pi k$ .40

41. $0.26+\frac{\pi k}{3}$ $\quad 0.78+\frac{1}{2}\pi k$

42. -2sinx+cosx

43. -sin(2x)

44. 8x-3sin(6x)

45. $\sin(2x)(1-4\sin^2 x)$

46. $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$

47. $\frac{\sin(2x)(\cos x - x\sin x) - 2x\cos x}{3\sin^2 x} = \frac{2\cos^2 x\sin x - 2\sin(2x)\sin x - 2x\cos^3 x}{3\sin^2 x}$

48. $\frac{-4.5\sin(6x)}{2\sqrt{\cos(3x)}}$

49. $-\frac{4\sin x}{5}-\frac{\cos x}{3}$

50. $\frac{\cos x + x\sin x}{\cos^2 x}$

51. $\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$

52. $-3\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

53. $\frac{2}{5\cos^2 x}$

54. $\sin(4x)+4x(\cos(4x)$

55. $\frac{-2+2\tan x}{\cos^2 x}$

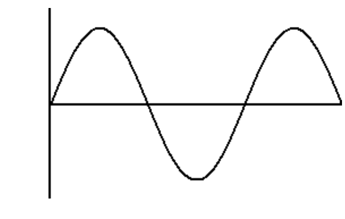
56. נק. קיצון : מינ. : (1.57,-1)

מקס. : (0.52,1) (2.62,1)

תחומי עלייה וירידה : עלייה : 0≤x<0.52 , 1.57<x<2.62

ירידה : 2.62<x≤π , 0.52<x<1.57

נק. חיתוך עם הצירים : (0,0) (1.05,0) (2.09,0) (π,0)



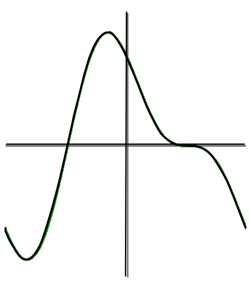
57. נק. קיצון : מינ. : (−2.61,−2.59)

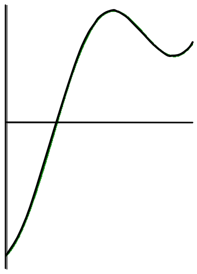
מקס. : (−0.52,2.59)

תחומי עלייה וירידה : עלייה : -2.62<x<-0.52

ירידה : -π≤x<-2.62 , -0.52<x≤π

נק. חיתוך עם הצירים : (0,2) (-1.57,0) (1.57,0)





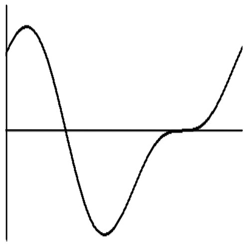
58. נק. קיצון: מינ. (2.88,1.01)

מקס: (1.83,1.669)

תחומי עלייה וירידה: עלייה: $0\le x<1.83$ $2.88<x\le\pi$

ירידה: $1.83<x<2.88$

נק. חיתוך עם הצירים: (0,-2) חיתוך ציר x לא מחשבים



59. נק. קיצון: מקס.: (0.56,2.56)

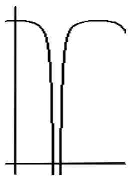
מינ.: (2.67,-2.56)

נקודת פיתול: (4.71,0)

תחומי עלייה וירידה: עלייה: $0<x<0.56, 2.57<x<2\pi$

ירידה: $0.56\le x<2.67$

נק. חיתוך עם הצירים: (0,2)(4.71,0)(1.57,)



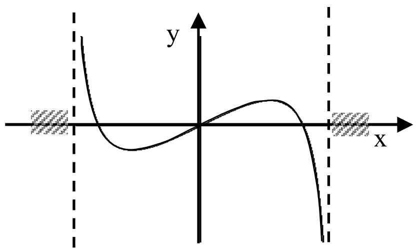
60. א. אסימפטוטות אנכיות: $x=1.57$

ב. נקודות קיצון: $(0,5.87)(\pi,5.87)$

61. נקודות פיתול: (0.52,0.56) (2.62,2.21)

קמירות כלפי מעלה U: $0<x<0.52$, $2.62<x<\pi$

קמירות כלפי מטה ∩: $0.52<x<2.62$



62. א. $a=4$ ב. $x=-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}$

ג. מינ.: $(-0.39,-0.57)$

מקס.: $(0.39,0.57)$

תחומי עלייה וירידה: עלייה: $-0.39<x<0.39$

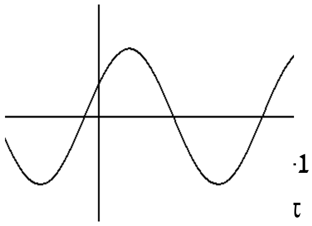
ירידה: $0.39<x<\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}<x<-0.39$

63. ב. מקס.: $0.26+\pi k$

מינ.: $1.3+\pi k$

ג. תחומי עלייה וירידה: עלייה: $1.3<x<\pi$, $-1.84<x<0.26$, $-\pi<x<-2.88$

ירידה: $026<x<1.3$, $-2.88<x<-1.84$



64. א. $b=0.53$ $a=0.92$

ב. נקודות קיצון: מקס.: (0.52,1.06)

מינ.: $(2.09,-1.06)$, $(-1.05,-1.06)$

תחומי עלייה וירידה: עלייה: $2.09<x<\pi$, $-1.05<x<0.52$

ירידה: $0.52<x<2.09$, $-\frac{\pi}{2}<x<-1.05$

חיתוך צירים: $(1.3,0)$, $(-0.26,0)$, $(0,0.53)$

65. א. מקס. : $\left(\frac{5\pi}{2},7\right)$, $\left(\frac{\pi}{2},7\right)$ מין. : $\left(\frac{3\pi}{2},-7\right)$

תחומי עלייה וירידה : עלייה : $\frac{5\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$, $0<x<\frac{\pi}{2}$

ירידה : $\frac{5\pi}{2}<x<3\pi$, $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$

ב. תחומי קעירות כלפי מעלה :

$8.55<x<3\pi$, $2\pi<x<7.15$, $4.01<x<5.41$, $2.27<x<\pi$, $0<x<0.87$

תחומי קעירות כלפי מטה :

$7.15<x<8.55$, $5.41<x<2\pi$, $\pi<x<4.01$, $0.87<x<2.27$

66. y=3.464x-0.81

67. $y=-2x+\pi$, $y=2x-2\pi$, $y=2x$

68. $y=x-1.38$, $y=-x+1.28$

69. א. יש, כמובן, אינסוף ישרים כאלה. לדוגמה : $y=-x+0.39$, $y=x-1.54$

ב. בהמשך לדוגמה : $x=1.57$

70. א. מקס. מקומי : $(2.14,6.37)$ מקס. מוחלט : $(0,7)$ מין. מקומי : $(1,5.63)$ מין. מקומי ומוחלט : $(\pi,5)$

ב. מקס. מקומי : $(-0.31,0.22)$ מקס. מקומי ומוחלט : $(0.63,1.19)$ מין. מקומי : $(0.31,-0.22)$

מין. מקומי ומוחלט : $(-0.63,-1.19)$

ג. מקס. מקומי ומוחלט : $(\pi,3)$, $(0,3)$ מין. מקומי ומוחלט : $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$

71. א. $y=-3.1x+6.1$ ב. $y=4.4x+5.4$

72. א. $-2\cos x+3\sin x+c$

ב. $\frac{-\cos(3x)}{3}+\frac{x^4}{4}+c$

ג. $-\frac{\cos x}{4}+c$

ד. $-4\cos\frac{x}{4}+c$

ה. $\frac{\sin(2x)}{2}+c$

ו. $\pi x+\frac{\sin(2x)}{2}+c$

ז. $x-\frac{\cos(2x)}{2}+c$

73. א. $y=-2\cos x+\tan x+3.62$

ב. $y=\frac{x^2}{2}-2\sin x+3.82$

ג. $y=2\sin x+4\cos x+0.52$

ד. $f(x)=4\sin x+2x+1$

74. $y=-0.75\cos(2x)+3.25$

75. א. $y'=\sin x+x\cos x+c$ ב. $y=x\sin x+3.03$

76. א. $2\pi k<x<\pi+\pi k$ ב. $y=2\sqrt{\sin x}$

77. א. $y'=2\sin x\cos x+c$ ב. 1

78. 3.06

79. 2.58

80. 0.11

81. 1.07

82. 0.75

83. 9.01

84.

β	α	**c**	**b**	**A**
65	25	7.1	6.43	3
20	70	20.47	7	19.24
22	68	8	3	7.42
63.4	26.6	8.94	8	4
35	55	10.46	6	8.57
28	62	2.265	1.06	2
75	15	9	8.69	2.33
44.43	45.57	10	7	7.14
36.87	53.13	5	3	4
60	30	12.7	11	6.35

85. $\alpha=\beta=45^\circ$, AB=BC=4.24

86. $AB=8.157$, BC=9.72, $AC=12.67$

87. $AD=4.36$

88. 9.4^0

89. א. 90^0, 45.6^0, 44.4^0 ב. 0.7

90. א. הבסיס: $\frac{a}{\cos\alpha}$ השוק: $\frac{a}{\sin(2\alpha)}$ ב. $s=\frac{a^2}{2\sin(2\alpha)}$

91. היקף: 12.44 ס"מ שטח: 5.34סמ"ר

92. היקף: 130.42ס"מ שטח: 600.6סמ"ר

93. א. 45.15 מטר ב. 6.95מטר

94. א. $\alpha=56.44,\ \beta=33.56$ ב. 26.25

95. היקף: $a\left(1+\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)$ שטח: $\frac{a^2}{4\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{a^2\sin\alpha}{8\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

96. היקף: $2h\left(\dfrac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)+1}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)$ שטח: $h^2 tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

97. היקף: $a\left(\sqrt{1.21+\sin^2\alpha}+1.1+\cos\alpha\right)$ שטח: $\dfrac{a^2\sin\alpha(1.1+\cos\alpha)}{2}$

98. א. 1.89 יח' ב. $\sphericalangle B=\sphericalangle D=38.94^0$, $\sphericalangle A=\sphericalangle C=141.06^0$ ג. 5.67 יח"ר

99. א. $\sphericalangle B=\sphericalangle C=65^0$, $\sphericalangle A=\sphericalangle D=115^0$ ב. 32.2 יח"ר

100. שטח המלבן: 63.18 סמ"ר אורך האלכסון: 11.64 ס"מ

101. א. 123.9^0 ב. 10.04 סמ"ר

102. היקף: 24.32 שטח: 30.11

103. אלכסונים: $BD=12.2,\ AE=8.54$ שטח: 52.09

104. היקף: $\dfrac{a(2\cos(2\alpha))}{\cos\alpha}$ שטח: $\dfrac{a^2\sin^2\alpha(1+\cos(2\alpha))}{\sin(2\alpha)}=a^2\sin\alpha$

105. שטח: $\dfrac{a^2\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{2}$

106. $OD=1.41$

107. שטח: $R^2\left(\dfrac{1}{tg\beta}+\tan\beta+2\right)$

108. א. $\alpha=30^\circ$ ב. $2R$ ג. $0.866R^2$

109. א. 28.08 ב. 7.6

110. $\pi\cdot\dfrac{a^2}{4\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

111. 16.57 סמ"ר

112. א. $50\sin(2\alpha)$ ב. $50\sin^2(\alpha)\sin(2\alpha)$

113. א. $\cos\left(\dfrac{180}{n}\right)$ ב. 0.5

114. $\cos^2\left(\dfrac{180}{n}\right)$

115. 1.87

116. א. $AB=_{\text{ס"מ}}6.44,\ AC=_{\text{ס"מ}}4.07$ ב. 12.93 סמ"ר

117. שטח: $4R^2\sin^2\alpha\sin(2\alpha)$

118. א. $AD=5.56$ ב. $R=3.18$

119. $AC=_{\text{ס"מ}}10.36$, $AD=_{\text{ס"מ}}4.14$

120. זוויות: 101.42^0, 78.58^0, 119.39^0, 60.68^0 האלכסונים: 11.62 ס"מ 13.85 ס"מ

121. זוויות המקבילית: 128.68^0 51.32^0 אורך האלכסון: 2.03a

122. $AC = 8.6,\ BC=30.52,\ AB = 24.91,\ \sphericalangle A = 129.41^\circ,\ \sphericalangle B = 12.59^0$

123. צלעות: 7.66,3.42,4.3,8.6 ס"מ. זוויות: 110,70,129.67,50.33 מעלות. שטח: 31.01 סמ"ר

124. אלכסון: $a\sqrt{2(1-\cos(2\alpha))}$ הבסיס הגדול: $\dfrac{a\sin(3\alpha)}{\sin\alpha}$

שטח: $\dfrac{1}{2}a^2\left(\dfrac{\sin(3\alpha)}{\sin\alpha}+1\right)\cdot\dfrac{1}{\sin(2\alpha)}=\dfrac{a^2}{\tan\alpha}$

125. $AB = CD = a,\ BC=AD=2a\cos\alpha$

126. $AD = 2.39,\ \alpha = 127.17^\circ,\ \beta = 32.09^\circ,\ \gamma = 20.74^\circ$

127. $AC = 6.57,\ BD=5.94,\ R = 3.29$

128. $AD = 8.81$ יח' $s = 21.93$ יח"ר

129. $s = 0.26$ יח"ר

130. א. 10.43 ס"מ ב. 7.1 ס"מ ג. 21.64 ס"מ

131. בסיס $= \dfrac{2r}{tg\alpha}$, שוק $= \dfrac{r}{\tan\alpha\cos 2\alpha}$

132. $\alpha = 66.42^\circ,\ \beta = 23.58^\circ,\ s = 73.32$ סמ"ר

133. $AC = 13.16$ ס"מ, $BD = 10.15$ ס"מ, $s = 48.31$ סמ"ר

134. $AB = CD = 9.58$ ס"מ, $AD=BC= 6.1$ ס"מ, $s = 54.91$ סמ"ר

135. $\alpha = 44.3^0$ שטח: 23.36 סמ"ר

136. $CD = \dfrac{R\sin(2\alpha)}{\sin(\alpha-\beta)}$

137. $CD = \dfrac{R\sin(2\alpha)}{\sin(\alpha-\beta)}$

138. $AD = BC = 13.7$ יח' או $AD = BC = 2.33$ יח' $h = 4.09$ יח'

139. $R = 4.17$ ס"מ בסיסים: 20.62 ס"מ, 3.37 ס"מ

140. בסיס: 10.73 יח' השוק: 6.41 יח' או בסיס: 6.26 יח' השוק: 13.31 יח'

141. 2908.8 סמ"ק

142. א. 8.66 ס"מ ב. 4.33 ס"מ

143. א. 38.68° ב. 41.14°

144. 943.6 סמ"ק

145. א. 85.45 סמ"ר ב. 7.04 ס"מ ג. 45.29^0 ד. 69.98^0

146. א. 226.74 סמ"ק ב. 274.92 סמ"ר ג. 76.9^0

147. א. 569.49 סמ"ק ב. 383.3 סמ"ר

.148 43.68 סמ"ר

.149 א. 38.59^0 ב. 136.11π סמ"ק ג. 400.6 סמ"ק

.150 א. 37^0 ב. 36.2^0

.151 א. 44.73^0 ב. 3 ס"מ

.152 א. $C'D = 2.18a$ ב. $V = 0.67a^3$

.153 א. $S = 17.2a^2$ ב. $V = 5.2a^3$

.154 69.3^0

.155 א. 30^0 ב. 26.57^0 ג. 147.84 סמ"ק

.156 א. 35.36^0 ב. $V = 0.29a^3$

.157 $5.5a^2$

.158 א. $s = 3\pi r^2$ ב. $V = 1.5\pi r^3$

.159 $P = 0.55$

.160 ב. $s = 2.86\pi r^2$

.161 לא

.162 90^0

.163 60^0

.164 $\alpha = 90^\circ$

.165 $\alpha = 60^\circ$

.166 $\alpha = 45^\circ$

.167 $\alpha = 45^\circ$

.168 א. $\alpha = 90^\circ$ ב. $S = 2R^2$

.169 א. $\alpha = 60^\circ$ ב. $5R$

.171 35.3 יח'

.172 א. a ב. $s = \frac{1}{2}a^2 \sin\alpha$, $H = 2a + a\sin\alpha$

.173 א. $s = \dfrac{2R^2 \sin^3\beta \cdot \sin(2\beta)}{\sin(3\beta)}$ ב. $\beta = 45^0$

.174 $DC = \dfrac{m}{\cos\beta}\cos(\alpha+\beta)$, $AD = \dfrac{m}{\cos\beta}\cos\alpha$, $AB = \dfrac{m}{\cos\beta}$

.175 $V = \dfrac{h^3 \sin\beta}{\sin^2\alpha}\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}$

.176 $V = \dfrac{a^3 \sin\alpha}{2\sin\frac{\beta}{2}}\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2}}$

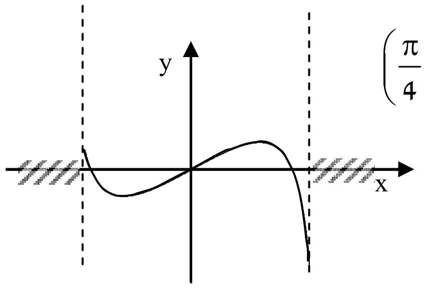
.177 א. 70.31^0 ב. 96.5^0

.178 51.16

.179 א. $AB = AD = 1,\ BC = CD = \sqrt{3}$ ב. $s = \sqrt{3}$

.180 $0.75a^2\sqrt{3}$

.181 תחום: $-\frac{2}{5}\pi < x < \frac{\pi}{2}$



נקודות קיצון: מינ.: $\left(-\frac{\pi}{4}, -0.57\right)$ מקס.: $\left(\frac{\pi}{4}, 0.57\right)$

אסימפטוטות: אין

הפונקציה עולה: $-0.79 < x < 0.79$

הפונקציה יורדת: $x < -0.79,\quad x > 0.79$

.182 $\sqrt{2}$

.183 $\frac{2}{3}$

.184 0.75

.185 א. $BC = 2x$, AB=4-2x ב. 1.6

.186 $\sphericalangle BOP = 15^{\circ}$

.187 א. 0.0354