<u>הפונקציה הלוגריתמית</u>

עד היום הכרנו פונקציות ואת הפונקציות ההפוכות המתאימות להן :

כפל $2x = y$

$\updownarrow$ פונקציות הפוכות

חילוק $x = \frac{y}{2}$

חזקה $x^3 = y$

$\updownarrow$ פונקציות הפוכות

שורש $x = \sqrt[3]{y}$

הפונקציה הלוגריתמית היא פונקציה הפוכה לפונקציה המעריכית :

מעריכית $3^x = y$

$\updownarrow$ פונקציות הפוכות

לוגריתמית $x = \log_3 y$

ובמילים :

הפונקציה המעריכית : 3 בחזקת x שווה y

הפונקציה הלוגריתמית : לוג y לפי בסיס 3 שווה x.

דוגמאות לפונקציה הלוגריתמית :

אם $2^3 = 8$ אז $\log_2 8 = 3$

וכך $\log_4 64 = 3$, $\log_8 64 = 2$, $\log_9 81 = 2$, $\log_3 81 = 4$ וכן הלאה.

בהקבלה לשמות שהגדרנו בפונקציה המעריכית :

החזקה

$\log_b a = c$ כלומר $b^c = a$

הבסיס <u>המעריך!</u>

מכיוון שהפונקציה המעריכית הוגדרה רק עבור בסיס חיובי ($b > 0$), גם בפונקציה הלוגריתמית הבסיס תמיד חיובי ($b > 0$). ראינו כבר שכתוצאה מכך החזקה בפונקציה המעריכית גם היא תמיד חיובית (אם $b > 0$ אז $b^t > 0$ לכל t).

גם בפונקציה הלוגריתמית החזקה תמיד חיובית ולכן הפונקציה מוגדרת רק עבור <u>$a > 0$</u> .

המעריך יכול לקבל ערכים חיוביים או שליליים :

דוגמה :

$\log_4 2 = \frac{1}{2}$ כי $4^{\frac{1}{2}} = 2$

$\log_4 \frac{1}{16} = -2$ כי $4^{-2} = \frac{1}{16}$

נביא דוגמה קצת יותר מורכבת :

מה ערכו של $\log_4 \sqrt{32}$?

כפי שכבר ראינו הפתרון טמון ביכולת שלנו להסב את $\sqrt{32}$ לחזקה של 4 כי :

אם $\log_4 \sqrt{32} = x$

אז x הוא הפתרון, ולפי ההגדרה : $4^x = \sqrt{32}$

נותר לפתח את הכיתוב של $\sqrt{32}$ לכתיב חזקות :

$$\sqrt{32} = 32^{\frac{1}{2}} = 2^{5\cdot\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{5}{2}} = 4^{\frac{5}{4}}$$

ולכן $\log_4 \sqrt{32} = \frac{5}{4}$

נציין עוד שלוש הסכמות :

1. כאשר הבסיס אינו מצוין בתרגיל מוסכם עלינו שהוא 10.

כלומר $\log 100 = 2$

כי $10^2 = 100$

2. כאשר הבסיס הוא המספר e שכבר הכרנו איננו מציינים אותו אלא משנים את שם הפונקציה מ-log ל-ln (ובמילים לאן).

כלומר $\log_e e^2 = \ln e^2 = 2$

ובמילים : לוג לפי בסיס e שווה לאן.

שימו לב שאת הבסיס תמיד מציינים בסמוך ל"רגלי" של הg <u>למטה!</u>

3. לוג לפי בסיס 1 חייב להיות 1 ! כלומר עם בסיס 1 מתקיים : כל מספר $= \log_1 1$

כלומר בבסיס זה $x = 1$ בלבד ו y יכול לקבל כל ערך. זה נוגד את חוקי הפונקציות ולכן הבסיס $\neq 1$!

ומעתה הגדרות הפונקציה :

$$\boxed{\begin{array}{l} \log_a x = y \\ a > 0 \quad x > 0 \quad a \neq 1 \end{array}}$$

<u>בדיקת הבנה :</u> תרגיל 91

92. חשבו את הלוגריתמים הבאים :

א. $\log_2 8$ ב. $\log_5 25$ ג. $\log_4 64$ ד. $\log 1000$

ה. $\ln e^3$ ו. $\log_{\frac{1}{3}} 9$ ז. $\log_4 \frac{1}{2}$ ח. $\log_8 32$

ט. $\ln\frac{1}{e^3}$ י. $\ln\sqrt[4]{e}$

כדרכנו נתחיל בהכרת פתרונות פשוטים של משוואות על בסיס הפונקציה.

דוגמאות:

כה. פתרו את המשוואות הבאות:

1. $\log_3 x = 4$
2. $\log_{0.2} x = -2$
3. $\ln x = 5$
4. $\log x = 3$
5. $\log_3(2x+3) = 3$
6. $\log_4 \frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{2}$
7. $\log_5 \log_2 x = 1$
8. $\log_x 81 = 4$
9. $\log_x \frac{1}{6} = -\frac{1}{2}$

פתרון:

1. $\log_3 x = 4$

לפי ההגדרה: $3^4 = x$

ולכן $\underline{x = 81}$

2. $\log_{0.2} x = -2$

במשוואות לוגריתמיות תמיד כדאי תחילה לעבור

לשברים פשוטים ולא עשרוניים ולכן: $\log_{\frac{1}{5}} x = -2$

ולפי ההגדרה: $\underline{x = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 25}$

3. $\ln x = 5$

הבסיס הוא e! ולפי ההגדרה: $\underline{x = e^5 = 148.4}$

4. $\log x = 3$

הבסיס הוא 10! $\underline{x = 10^3 = 1000}$

5. $\log_3(2x+3) = 3$

לפי ההגדרה: $2x + 3 = 3^3 = 27$

$2x = 24$

$\underline{x = 12}$

6. $\log_4 \frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{2}$

$\frac{x+1}{x-1} = 4^{\frac{1}{2}} = 2,-2$

$x+1 = 2x-2$ עבור התוצאה 2

$\underline{x = 3}$

$x+1 = -2x+2$ עבור התוצאה -2

$3x = 1$

$x = \frac{1}{3}$

אבל הצבה חרת של תוצאה זו בתרגיל תראה: $\frac{\frac{1}{3}+1}{\frac{1}{3}-1} < 0$ וזה לא מוגדר. לכן תשובה סופית: $\underline{x = 3}$

7. $\log_5 \log_2 x = 1$

הערה: אין פה כפל! זהו לוג של לוג, כלומר פונקציה בתוך פונקציה.
וכמו שלמדנו בנגזרות תחילה פותרים את הפונקציה החיצונית:

לפי ההגדרה: $\log_2 x = 5^1 = 5$

עתה נפתור את הפונקציה הפנימית: $\underline{\underline{x = 2^5 = 32}}$

8. $\log_x 81 = 4$

לפי ההגדרה: $x^4 = 81$

$x = \pm 3$

גם כאן מתקבלים שני פתרונות. אולם אם נחזור ונציב את הפתרון השלילי במשוואה נקבל שהבסיס שלילי, ואינו נמצא בתחום ההגדרה של הפונקציה. לכן משמיטים פתרון זה, והתוצאה הסופית היא:

$\underline{x = 3}$

ומעתה: בכל פעם שמקבלים פתרון - בפרט אם מתקבלים שני פתרונות – יש לחזור ולהציב את הפתרונות בתרגיל כדי לוודא שאכן הוא מתקבל והוא מוגדר!

9. $\log_x \frac{1}{6} = -\frac{1}{2}$

לפי ההגדרה: $x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}$

כלומר $\frac{1}{6} = \sqrt{\frac{1}{x}}$

והתוצאה: $x = 36$

בדיקת הבנה: תרגיל 92

93. פתרו את המשוואות הבאות:

א. $\log_3(x+3)=2$

ב. $\log_{0.5}(2x-4)=16$

ג. $\ln(x-5)=0$

ד. $\log_{16}\frac{2x}{x-2}=\frac{1}{4}$

ה. $\log_{25}\frac{2x+6}{4-x}=\frac{1}{2}$

ו. $\log_{32}\log_3 x=\frac{1}{5}$

ז. $\log_x\frac{1}{9}=-2$

כדי לפתור משוואות יותר מורכבות עלינו להכיר את חוקי הלוגריתמים כפי שלמדנו את חוקי החזקות כדי לפתור משוואות מעריכיות:

חוקי הלוגריתמים:

1. $\log_m a+\log_m b=\log_m(ab)$

הוכחה: כבר הכרנו את השוויון: $m^x\cdot m^y=m^{x+y}$

החלה של הגדרת הלוגריתמים על השוויון: $\left(\log_b a=c\leftrightarrow b^c=a\right)$

$\log_m(m^x\cdot m^y)=x+y$

אבל ברור לנו ש $x=\log_m m^x$

$y=\log_m m^y$

ועל ידי הצבה: $\log_m(m^x\cdot m^y)=\log_m m^x+\log_m m^y$

נגדיר: $a=m^x \quad b=m^y$

נציב ונקבל: $\boxed{\log_m a+\log_m b=\log_m(ab)}$

לדוגמה: $\log_2 4+\log_2 8=\log_2 32$

ואכן $2+3=5$

2. בדומה מאד: $\log_m a-\log_m b=\log_m\frac{a}{b}$

הוכחה: $\frac{m^x}{m^y}=m^{x-y}$

וכמו קודם: $\log_m\frac{m^x}{m^y}=x-y$

אבל שוב $x=\log_m m^x$

$$y=\log_m m^y$$

ולכן:
$$\log_m \frac{m^x}{m^y}=\log_m m^x-\log_m m^y$$

ובהצבת $a=m^x \quad b=m^y$

נקבל:
$$\boxed{\log_m a-\log_m b=\log_m \frac{a}{b}}$$

לדוגמה:
$$\log_2 2-\log_2 8=\log_2 \frac{2}{8}=\log_2 \frac{1}{4}$$

ואכן
$$1-3=-2$$

3.
$$\boxed{\log_m a^b=b\cdot\log_m a}$$

<u>שימו לב!</u> בחוק זה המעריך b הוא <u>רק</u> על הגורם $\underline{\underline{a}}$, ואז הוא הופך <u>להיות המקדם של הפונקציה!</u>

הוכחה:
$$\log_m a^b=\log_m \overbrace{(a\cdot a\ldots\cdot a)}^{\text{פעמים } b}=$$

ולפי החוק הראשון:
$$=\underbrace{\log_m a+\log_m a+\ldots+\log_m a}_{\text{פעמים } b}=b\cdot\log_m a$$

4.
$$\log_b a=\frac{\log_m a}{\log_m b}$$

כאן אנו מוצאים שניתן לעבור מבסיס b בתרגיל נתון לבסיס כלשהו m! זוהי נוסחה מאד שימושית וחשובה.

הוכחה: נסמן:
$$\log_b a=\gamma \qquad (1)$$

אנו מחפשים בסיס משותף m ל b,a כך ש:
$$a=m^\alpha \quad b=m^\beta$$

ואז:
$$\log_b a=\log_{m^\beta} m^\alpha=\gamma$$

לפי הגדרת הלוגריתמים:
$$m^\alpha=\left(m^\beta\right)^\gamma=m^{\beta\cdot\gamma}$$

ממשוואות מעריכיות אנו זוכרים:
$$\alpha=\beta\cdot\gamma$$

וכבר ראינו כי:
$$\alpha=\log_m m^\alpha$$
$$\beta\cdot\gamma=\log_m m^{\beta\cdot\gamma}$$

ולכן:
$$\log_m m^\alpha=\log_m m^{\beta\cdot\gamma}=\log_m \left(m^\beta\right)^\gamma$$

ולפי חוק 3:
$$\log_m m^\alpha=\gamma\cdot\log_m m^\beta$$

ולכן :
$$\frac{\log_m m^{\alpha}}{\log_m m^{\beta}} = \gamma$$

כבר ראינו ש :
$$a = m^{\alpha} \qquad b = m^{\beta}$$

ולכן :
$$\frac{\log_m a}{\log_m b} = \gamma \qquad (2)$$

מ(1)+(2) נקבל :

$$\boxed{\log_b a = \frac{\log_m a}{\log_m b}}$$

כאשר m הוא בסיס משותף כלשהו!

.5
$$\boxed{a^{\log_a b} = b}$$

חוק זה הוא ממש טריוויאלי. למעשה הוא מסתמך על משמעות הלוגריתם.

נניח כי $\log_a b = \alpha$

המשמעות היא $a^{\alpha} = b$

אם נציב $\log_a b = \alpha$ נקבל: $\underline{\underline{a^{\log_a b} = b}}$!

אלו אם כן חמשת כללי הלוגריתמים בהם אנו עושים שימוש בפתרון משוואות לוגריתמיות.

לפני שנעבור לפתרון משוואות נראה כיצד משתמשים בחוקים אלה.

כו. חשבו את ערכי הביטויים הבאים :

1. $\log 25 + \log 4$
2. $\log_3 54 - \log_3 2$
3. $\log_8 100 - \log_8 25 + 2\log_8 4$
4. $\log_{16} 32$
5. $\log_5 100 + \log_5 \sqrt{75} - \log_5 4 - \log_5 \sqrt{3}$
6. $\log_9 27 + \log_{27} 243$

פתרון :

לפי חוק 1 : 1. $\log 25 + \log 4 = \log 100 = 2$

(לא כתוב הבסיס ולכן הוא 10!)

לפי חוק 2 : 2. $\log_3 54 - \log_3 2 = \log_3 \frac{54}{2} = \log_3 27 = 3$

3. $\log_8 100 - \log_8 25 + 2\log_8 4 =$

כדי להשתמש בחוקים 1 או 2 על האיבר השלישי צריך קודם להפעיל את חוק 3
כדי לבטל את המקדם ואז :

$$=\log_8 100-\log_8 25+\log_8 16=\log_8\left(\frac{100}{25}\cdot 16\right)=\log_8 64=2$$

על ידי שינוי בסיס (חוק 4):

$$4.\ \log_{16} 32=\frac{\log_2 32}{\log_2 16}=\frac{5}{4}=1.25$$

$$5.\ \log_5 100+\log_5\sqrt{75}-\log_5 4-\log_5\sqrt{3}=$$

לפי חוק 3:

$$=\log_5 100+\frac{1}{2}\log_5 75-\log_5 4-\frac{1}{2}\log_5 3=$$

$$=\log_5 100-\log_5 4+\frac{1}{2}\left(\log_5 75-\log_5 3\right)=$$

$$=\log_5\frac{100}{4}+\frac{1}{2}\log_5\frac{75}{3}=\log_5 25+\frac{1}{2}\log_5 25=2+1=3$$

$$6.\ \log_9 27+\log_{27} 243=\frac{\log_3 27}{\log_3 9}+\frac{\log_3 243}{\log_3 27}=\frac{3}{2}+\frac{5}{3}=3\frac{1}{6}$$

*__בדיקת הבנה:__*תרגיל 93

94. חשבו את הביטויים הבאים:

א. $\log_6 2+\log_6 18$

ב. $\log_2 24-\log_2 3$

ג. $\log_8 96+2\log_8 2-\log_8 3$

ד. $2\log_6 2+\frac{1}{2}\log_6 9+\frac{\log 3}{\log 6}$

ה. $\log_8 32+\log_{16} 128+\log_4\sqrt{8}$

עתה נעבור לפתרון משוואות מעריכיות בעזרת חוקי הלוגריתמים.

מכיוון שפונקציה זו הפוכה לפונקציה המעריכית, וכבר ראינו שהפונקציה המעריכית היא חד חד ערכית, גם פונקציה זו היא חד חד ערכית; כלומר לכל בסיס וחזקה שווים יש רק מעריך אחד. מכאן אנו יודעים:

1. אם $\log_m x=\log_m y$

אז $x=y$

2. אם $k=t$

אז $\log_m k=\log_m t$

כה. פתרו את המשוואות הבאות:

$$1.\ \log x-\log 3=2\log(x-1)$$

$$2.\ \log_3\frac{x}{2}+1=\log_3(2x-5)$$

$$3.\ \log_3 9x\cdot\log_3 x=-1$$

$$4.\ (2x)^{\log_2 x-2}=64x$$

$$5.\ \log_9 x-\log_{3x} 9=1$$

6. $2^{\log_2 4x-1} \cdot 5^{\log_2 x} = 50x$

פתרון :

1. $\log x - \log 3 = 2\log(x-1)$

מחוקים 2,3 :

$$\log\frac{x}{3} = \log(x-1)^2$$

$$\frac{x}{3} = (x-1)^2$$

$$x = 3x^2 - 6x + 3$$

$$0 = 3x^2 - 5x + 3$$

$$\underline{x_1 = 1.77} \qquad \underline{x_2 = 0.57}$$

2. $\log_3\frac{x}{2} + 1 = \log_3(2x-5)$

ניתן לפתור תרגיל זה בשני אופנים :

I : המרה של $\log_3 3 = 1$ ואז :

$$\log_3\frac{x}{2} + \log_3 3 = \log_3(2x-5)$$

$$\log_3\frac{3x}{2} = \log_3(2x-5)$$

$$\frac{3x}{2} = 2x - 5$$

$$3x = 4x - 10$$

$$\underline{x = 10}$$

II : העברת אגפים :

$$\log_3\frac{x}{2} - \log_3(2x-5) = -1$$

$$\log_3\frac{x}{2(2x-5)} = -1$$

$$\frac{x}{2(2x-5)} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$3x = 4x - 10$$

ושוב :

$$\underline{x = 10}$$

3. $\log_3 9x \cdot \log_3 x = -1$

שימו לב! אין נוסחה למכפלת לוגים.

$$\left(\log_3 9 + \log_3 x\right)\log_3 x = -1$$

נציב $t = \log_3 x$:

$$(2+t)t = -1$$

$$t^2 + 2t + 1 = 0$$

$$t = -1$$

כלומר :

$$\log_3 x = -1$$

$$\underline{x=\frac{1}{3}}$$

4. $(2x)^{\log_2 x-2}=64x$

כאשר מופיע $\log$ בחזקה יש להפעיל את פונקצית ה-$\log$ על שני האגפים. כדאי תמיד לבחור את הבסיס שכבר מופיע בשאלה, ובמקרה שלנו הבסיס הוא 2.

לכן: $\log_2\left((2x)^{\log_2 x-2}\right)=\log_2 64x$

ולפי חוק 3: $(\log_2 x-2)(\log_2 2x)=\log_2 64x$

וההמשך: $(\log_2 x-2)(\log_2 2+\log_2 x)=\log_2 64+\log_2 x$

$$(\log_2 x-2)(1+\log_2 x)=6+\log_2 x$$

הצבה $t=\log_2 x$: $(t-2)(1+t)=6+t$

$$t^2-t-2=6+t$$

$$t^2-2t-8=0$$

כלומר: $t_1=4 \qquad t_2=-2$

$$\log_2 x=4 \qquad \log_2 x=-2$$

$$\underline{x_1=16} \qquad \underline{x_2=\frac{1}{4}}$$

5. $\log_9 x-\log_{3x} 9=1$

ברור לנו שכאן עלינו למצוא בסיס משותף. ממבט בתרגיל אנו רואים שאחד הבסיסים כולל את המספר 3 ואילו 9 הוא ריבוע שלו ולכן

נבחר כבסיס משותף את 3. ואז: $\frac{\log_3 x}{\log_3 9}-\frac{\log_3 9}{\log_3 3+\log_3 x}=1$

$$\frac{\log_3 x}{2}-\frac{2}{1+\log_3 x}=1$$

הצבה $t=\log_3 x$: $\frac{t}{2}-\frac{2}{1+t}=1$

הכפלה במכנה משותף: $t(1+t)-4=2(1+t)$

$$t^2+t-4=2t+2$$

$$t^2-t-6=0$$

$$t_1=2 \qquad t_2=-1$$

$$\log_3 x=2 \qquad \log_3 x=-1$$

$$\underline{x_1=9} \qquad \underline{x_2=\frac{1}{3}}$$

6. $2^{\log_2 4x-1}\cdot 5^{\log_2 x}=50x$

$$\log_2\left(2^{\log_2 4x-1}\cdot 5^{\log_2 x}\right)=\log_2 50x$$

$$\log_2\left(2^{\log_2 4x-1}\right)+\log_2\left(5^{\log_2 x}\right)=\log_2 50+\log_2 x$$

$$(\log_2 4x-1)(\log_2 2)+(\log_2 x)(\log_2 5)=\log_2 50+\log_2 x$$

$$(\log_2 4+\log_2 x-1)\cdot 1+(\log_2 x)(\log_2 5)=\log_2 50+\log_2 x$$

$$(\log_2 x+1)\cdot 1+(\log_2 x)(\log_2 5)=\log_2 50+\log_2 x$$

עד כאן פעלנו כפי שכבר הכרנו אולם עד הלום הכרנו מספרים יפים ($\log_2 4=2$, $\log_3 9=2$....)

מה עושים עם $\log_2 5$?

נמשיך עם הצבה של $t=\log_2 x$ ונקווה לטוב (זה תמיד כדאי):

$$t+1+t\cdot\log_2 5=\log_2 50+t$$

נעביר אגפים:

$$t\log_2 5=\log_2 50-1$$

אבל $\log_2 2=1$ ולכן:

$$t\log_2 5=\log_2 50-\log_2 2=\log_2\frac{50}{2}=\log_2 25$$

על ידי חילוק:

$$t=\frac{\log_2 25}{\log_2 5}$$

ולפי חוק 4 זה בדיוק:

$$t=\log_5 25=2$$

$$\log_2 x=2$$

$$\underline{x=4}$$

וכמו שראינו בתרגיל האחרון גם מצבים שנראים "אבודים" נפתרים אם פועלים על פי החוקים.

בדיקת הבנה תרגיל 95

__תרגול עצמי:__

96. פתרו את המשוואות הבאות:

א. $\log_2(6x+2)=3$

ב. $\log_{16}\left(x^2-5x-10\right)=\frac{1}{2}$

ג. $\log_x\left(2x^2+3\right)=4$

ד. $\log_{(x-1)}(4x-7)=2$

ה. $\log_2\left(2^x-4\right)=5-x$

ו. $\log_3(x+4)+\log(6x-3)=\log\left(3x^2+6\right)+1$

ז. $2\log_5(x+2)=\log_5(8-x)+1$

ח. $\frac{1}{2}\log_4\left(2x^2+14\right)+\log_4\frac{1}{x-1}=\frac{1}{2}$

ט. $\log_2(2x)\cdot\log_2 x^2 = 4$

<u>לוגריתמים עם פרמטרים</u>

אני מקווה שעד עתה קניתם מיומנות מספיקה בשימוש בחוקי הלוגריתמים. עבודה עם פרמטרים דורשת מיומנות גבוהה בשימוש בחוקים אלה, וכן אינטואיציה.

לדוגמה:

כו. נתון $a=\log_5 3$.

1. הביעו את $\log_5 9$ באמצעות a.

פתרון:

כאן קל לראות ש: $9=3^2$

ולכן: $\log_5 9=\log_5 3^2=2\log_5 3=2a$

2. ואם רוצים להביע את $\log_5 15$:

פתרון:

$$\log_5 15=\log_5 3+\log_5 5=a+1$$

3. וכאשר מבקשים את $\log_{27} 5$:

פתרון:

נעבור לבסיס 5 ונקבל: $\log_{27} 5=\frac{\log_5 5}{\log_5 27}=\frac{1}{\log_5 3^3}=\frac{1}{3a}$

הפתרונות מסתבכים כאשר מוסיפים עוד פרמטר, לדוגמה $b=\log_3 2$.

עתה יש בידינו שני נתונים שאותם אנו יכולים לשלב.

4. הביעו את הביטוי $\log_5 2$ בעזרת b,a.

פתרון:

כדי להביע את $\log_5 2$ בעזרת b,a אנו צריכים להחליט לאיזה בסיס נעבור.

מכיוון שחסר לנו המספר 3 שנמצא בשני הנתונים, נעבור לבסיס 3 ונקבל:

$$\log_5 2=\frac{\log_3 2}{\log_3 5}=\frac{b}{\log_3 5}$$

נפתח את $\log_3 5$: $\log_3 5=\frac{\log_5 5}{\log_5 3}=\frac{1}{a}$

ולאחר הצבה: $\log_5 2=\frac{b}{\frac{1}{a}}=ab$

5. הביעו את הביטוי $\log_2 75$ בעזרת b,a.

פתרון:

בגלל ש75 הוא כפולה של 5 נבחר בסיס 5 ונקבל:

$$\log_2 75=\frac{\log_5 75}{\log_5 2}$$

נפתח את המונה: $\log_5 75=\log_5 3\cdot 25=$

$$(1)\ = \log_5 3 + \log_5 25 = a + 2$$

נפתח את המכנה:
$$\log_5 2 = \frac{\log_3 2}{\log_3 5} = \frac{b}{\log_3 5}$$

אבל:
$$\log_3 5 = \frac{\log_5 5}{\log_5 3} = \frac{1}{a}$$

ובהצבה במכנה:
$$(2)\ \log_5 2 = \frac{b}{\frac{1}{a}} = ab$$

(אגב יכולנו לחסוך ולהסתמך על הדוגמה הקודמת!)

בשילוב (1)+(2):
$$\log_2 75 = \frac{a+2}{ab}$$

בדיקת הבנה: 97

כפי שכבר הורגלנו נעבור עתה לפתרון מערכת שתי משוואות בשני נעלמים:

כז. פתרו את המערכת:
$$\begin{cases} \mathrm{I} & 2x+1=y \\ \mathrm{II} & \log_3 x + \log_3 (y+2) = 3 \end{cases}$$

פתרון:

משוואות כאלו פותרים על ידי הצבה פשוטה של y במשוואה II:

$$\mathrm{II}\ \log_3 x + \log_3 (2x+1+2) = 3$$

$$\log_3 x + \log_3 (2x+3) = 3$$

$$\log_3 x(2x+3) = 3$$

$$x(2x+3) = 27$$

ומכאן לפי פתרון משוואה ריבועית:
$$x_1 = -4.5$$

$(x > 0)$ לא מתאים

$$\underline{x_2 = 3}$$

$$\underline{y = 2\cdot 3 + 1 = 7}$$

כח. פתרו את המערכת:
$$\begin{cases} \mathrm{I} & \log(x+y) - \log 2 = \log(y-x) \\ \mathrm{II} & \log(2y+3x) = 2\log y \end{cases}$$

פתרון:

במערכת כזו נוח תחילה "להפטר" מה-log ואז מקבלים משוואות פשוטות בשני נעלמים:

$$\mathrm{I}\ \ \log\frac{x+y}{2} = \log(y-x)$$

$$\mathrm{II}\ \log(2y+3x) = \log y^2$$

$$\mathrm{I}\ \ \frac{x+y}{2} = y - x$$

$$\mathrm{II}\ 2y + 3x = y^2$$

$$\text{I} \quad x + y = 2y - 2x$$
$$3x = y$$
$$\text{II} \quad 2y + 3x = y^2$$
$$2 \cdot 3x + 3x = (3x)^2$$
$$0 = 9x^2 - 9x$$

והפתרון:

$$x_1 = 0$$

$(x > 0)$ לא מתאים

$$\underline{x = 1}$$
$$\underline{y = 3}$$

כט. פתרו את המערכת:

$$\begin{cases} \text{I} & \log_3 x - \log_5 y = 2 \\ \text{II} & \log_3 x \cdot \log_5 y^3 = 24 \end{cases}$$

פתרון:

במשוואות כאלה כדאי להציב את האיבר עצמו כמשתנה כלומר $\log_3 x = t$, $\log_5 y = k$. יש לשים לב שצריך קודם לפתח את משוואה II:

$$\text{I} \quad \log_3 x - \log_5 y = 2$$
$$\text{II} \quad \log_3 x \cdot 3\log_5 y = 24$$

ואז בהצבה:

$$\text{I} \quad t - k = 2$$
$$\text{II} \quad t \cdot 3k = 24$$
$$\text{I} \quad t = 2 + k$$
$$\text{II} \quad 3k(2 + k) = 24$$

שוב מגיעים למשוואה ריבועית והפתרון המתאים:

$$k = 2 \qquad t = 4$$
$$\log_5 y = 2 \qquad \log_3 x = 4$$
$$\underline{y = 25} \qquad \underline{x = 81}$$

ל. פתרו את המערכת:

$$\begin{cases} \text{I} & \log_3 x + \log_2 y = 5 \\ \text{II} & \log_x 3 - \log_y 2 = \frac{1}{6} \end{cases}$$

פתרון:

גם כאן תחילה נסדר את הלוגריתמים כך שבשתי המשוואות יהיו בסיסים שווים ואח"כ נציב אותם כמשתנים:

$$\text{I} \quad \log_3 x + \log_2 y = 5$$
$$\text{II} \quad \frac{\log_3 3}{\log_3 x} - \frac{\log_2 2}{\log_2 y} = \frac{1}{6}$$

ועל ידי $\log_3 x = t$, $\log_2 y = k$:

$$\text{I} \quad t + k = 5$$
$$\text{II} \quad \frac{1}{t} - \frac{1}{k} = \frac{1}{6}$$

ועל ידי הכפלה וסידור:

$$\mathrm{I}\quad t=5-k$$
$$\mathrm{II}\ 6k-6t=kt$$

הצבה של I ב־ II:

$$6k-6(5-k)=k(5-k)$$

פתרון המשוואה הריבועית:

$$k=3 \qquad t=2$$
$$\log_2 y=3 \qquad \log_3 x=2$$
$$\underline{y=8} \qquad \underline{x=9}$$

לא. פתרו את המערכת:

$$\begin{cases} \mathrm{I} & \dfrac{x}{y}=16 \\ \mathrm{II} & \log_y x+\log_x y=\dfrac{10}{3} \end{cases}$$

פתרון:

ניתן להעביר אגפים ולמצוא הצבה של x אולם קל יותר לראות את הפתרון על ידי הפעלת log על שני האגפים במשוואה I:

$$\mathrm{I}\quad \log_y \frac{x}{y}=\log_y 16$$
$$\log_y x-\log_y y=\log_y 16$$
$$\log_y x-1=\log_y 16$$
$$\underline{\log_y x=\log_y 16+1}$$

עכשיו נעבור לבסיס y במשוואה 2:

$$\mathrm{II}\ \log_y x+\frac{\log_y y}{\log_y x}=\frac{10}{3}$$
$$\underline{\log_y x+\frac{1}{\log_y x}=\frac{10}{3}}$$

אחרי הצבה של I ב־ II:

$$\left(\log_y 16+1\right)+\frac{1}{\log_y 16+1}=\frac{10}{3}$$

נציב $t=\log_y 16+1$:

$$t+\frac{1}{t}=\frac{10}{3}$$
$$3t^2-10t+3=0$$

והפתרון:

$$t_1=3 \qquad t_2=\frac{1}{3}$$
$$\log_y 16+1=3 \qquad \log_y 16+1=\frac{1}{3}$$
$$\log_y 16=2 \qquad \log_y 16=-\frac{2}{3}$$
$$\underline{y_1=4} \qquad 16=y^{-\frac{2}{3}}$$

$(y > 0)$ $$y_2 = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{8 \cdot 2}\right)^2}$$

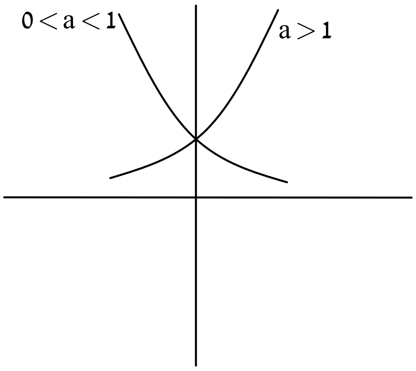
$$\underline{y_2 = \frac{1}{4 \cdot \sqrt[3]{4}}}$$

$\underline{x_1 = 64}$ $$\underline{x_2 = \frac{4}{\sqrt[3]{4}}}$$

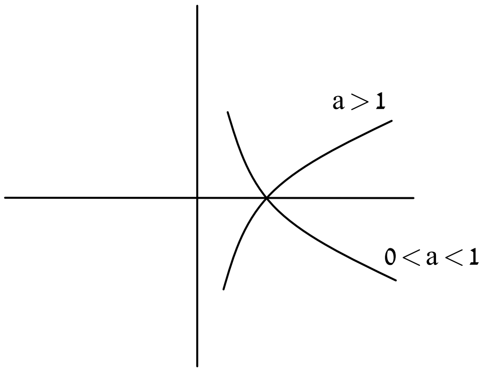
__בדיקת הבנה:__

כמו בכל פונקציה חדשה, לאחר שלמדנו פתרון משוואות נעבור לפתרון אי שוויונים.

כזכור לכם מפתיחת הנושא, הפונקציה הלוגריתמית היא פונקציה הופכית לפונקציה המעריכית ולכן קל לשרטט אותה בהזזה של 90° ימינה על הצירים. נשרטט את הגרפים:



$y = a^x$



$y = \log_a x$

קל לראות שכמו שבפונקציה המעריכית שאותה כבר חקרנו כאשר $a > 1$ הפונקציה עולה וכאשר $0 < a < 1$ הפונקציה יורדת, כך גם בפונקציה הלוגריתמית:

כאשר $a > 1$ הפונקציה עולה כלומר $\log_a 2 < \log_a 3$

וכאשר $0 < a < 1$ הפונקציה יורדת כלומר $\log_a 2 > \log_a 3$.

פתרון אי השוויונים לא שונה בהרבה מזה שהכרנו בפונקציה המעריכית:

לב. פתרו את אי השוויונים הבאים:

1. $\log_5(2x+6) > 0$
2. $\log_{\frac{3}{4}}(x-2) < 2$
3. $\log_3(x^2-2x) - 2 \geq 0$
4. $\log_{\frac{1}{4}}(x^2-4x) > \log_{\frac{1}{4}}(2x+16)$
5. $\log_{\frac{1}{4}} x < \log_{\frac{1}{2}} x$
6. $\log_{\frac{1}{3}}(x+2) < \log_3(2x-1)$

7. $\log_x(x-3) < \log_x(2x+1)$

8. $\log_x \frac{x+1}{x-1} > 0$

9. $\log_{x-3} \frac{x+2}{x-5} < 1$

פתרון :

1. $\log_5(2x+6) > 0$

לפי ההגדרה : $\text{I}\quad 2x+6 > 5^0$ וגם $\text{II}\quad 2x+6 > 0$

$2x+6 > 1 \qquad\qquad 2x > -6$

$2x > -5 \qquad\qquad x > -3$

$x > -2.5$

תשובה : $\underline{x > -2.5}$

2. $\log_{\frac{3}{4}}(x-2) < 2$

הסימן מתהפך בגלל ש-
$0 <$ בסיס < 1

$\text{I}\quad x-2 > \left(\frac{3}{4}\right)^2$ וגם $\text{II}\quad x-2 > 0$

$x-2 > \frac{9}{16} \qquad\qquad x > 2$

$x > 2\frac{9}{16}$

תשובה : $\underline{x > 2\frac{9}{16}}$

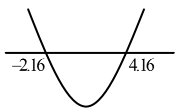
3. $\log_3(x^2-2x) - 2 \ge 0$

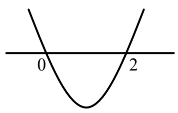
$\log_3(x^2-2x) \ge 2$

$\text{I}\quad x^2-2x \ge 9$ וגם $\text{II}\quad x^2-2x > 0$

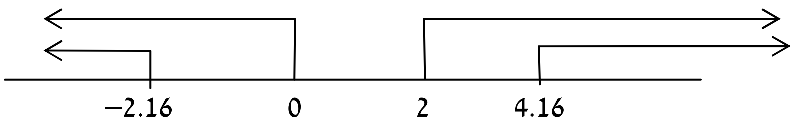
$x^2-2x-9 \ge 0 \qquad\qquad x_1 = 0 \quad x_2 = 2$

$x_1 = 4.16 \quad x_2 = -2.16$





$x \ge 4.16$ או $x \le -2.16 \qquad\qquad x > 2$ או $x < 0$

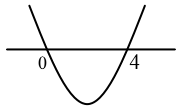


תשובה : $\underline{x \le 2.16}$ או $\underline{x > 4.16}$

4. $\log_{\frac{1}{4}}(x^2-4x) > \log_{\frac{1}{4}}(2x+16)$

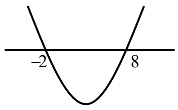
I $x^2-4x<2x+16$ וגם II $x^2-4x>0$ וגם III $2x+16>0$

$x^2-6x-16<0$



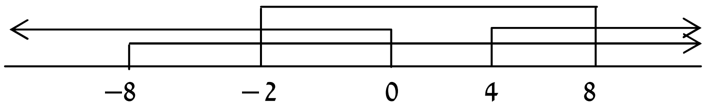
$2x>-16$

$x>-8$



$-2<x<8$

$x<0$ או $x>4$



תשובה : $\underline{-2<x<0}$ או $\underline{4<x<8}$

5. $\log_{\frac{1}{4}} x < \log_{\frac{1}{2}} x$

תחילה נפתח את המשוואה כדי להגיע לבסיס שווה :

$$\frac{\log_{\frac{1}{2}} x}{\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}} < \log_{\frac{1}{2}} x$$

$$\frac{\log_{\frac{1}{2}} x}{2} < \log_{\frac{1}{2}} x$$

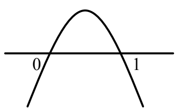
$$\log_{\frac{1}{2}} x < 2\log_{\frac{1}{2}} x$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} x^2$$

מכאן : I $x>x^2$ וגם II $x>0$

תזכורת : $x^2>0$ לכל x

I $x-x^2>0$



$0<x<1$

תשובה : $\underline{0<x<1}$

6. $\log_{\frac{1}{3}}(x+2) < \log_3(2x-1)$

לפי הרעיון של התרגיל הקודם : $\dfrac{\log_3(x+2)}{\log_3 \frac{1}{3}} < \log_3(2x-1)$

$$\frac{\log_3(x+2)}{-1} < \log_3(2x-1)$$

הכפלה במסי שלילי מחליפה סימנים

$$\log_3(x+2) > -1 \cdot \log_3(2x-1)$$

$$\log_3(x+2) > \log_3(2x-1)^{-1}$$

$$x+2 > (2x-1)^{-1}$$

$$x+2 > \frac{1}{2x-1}$$

תזכורת לפתרון אי שוויון של שברים

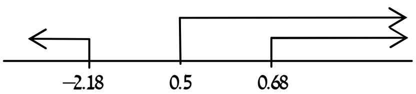
$$x+2-\frac{1}{2x-1} > 0$$

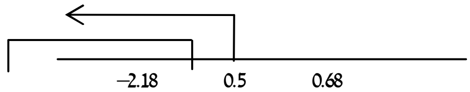
$$\frac{(x+2)(2x-1)-1}{2x-1} > 0$$

$$\frac{2x^2+3x-3}{2x-1} > 0$$

$$\text{וגם}\left\{\begin{array}{l} \text{I} \quad 2x^2+3x-3>0 \\ \text{II} \; 2x-1>0 \end{array}\right. \qquad \text{או} \qquad \left.\begin{array}{l} \text{III} \; 2x^2+3x-3<0 \\ \text{IV} \; 2x-1<0 \end{array}\right\}\text{וגם}$$

$$\text{וגם}\left\{\begin{array}{l} \text{I} \quad x<-2.18 \quad \text{או} \quad x>0.68 \\ \text{II} \; x>0.5 \end{array}\right. \qquad \text{או} \qquad \left.\begin{array}{l} \text{III} \; -2.18<x<0.68 \\ \text{IV} \; x<0.5 \end{array}\right\}\text{וגם}$$





$x>0.68$ או $-2.18<x<0.5$

תשובה: $\underline{x>0.68}$ או $\underline{-2.18<x<0.5}$

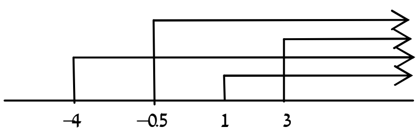
תרגיל זה היה דוגמה לפתרון "קצת" מורכב, וכמו תמיד כאשר עובדים בשיטתיות ובסבלנות מוצאים פתרון.

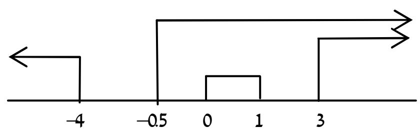
7. $\log_x(x-3) < \log_x(2x+1)$

מכיוון שלא נתון לנו בסיס מספרי עלינו לזכור שיש כאן מערכת "או" חדשה:

$$\text{וגם}\left\{\begin{array}{l} \underline{\text{I} \quad x>1} \\ \text{II} \; x-3<2x+1 \\ \text{III} \; x-3>0 \\ \text{IV} \; 2x+1>0 \end{array}\right. \qquad \text{או} \qquad \left.\begin{array}{l} \underline{\text{I} \quad 0<x<1} \\ \text{II} \; x-3>2x+1 \\ \text{III} \; x-3>0 \\ \text{IV} \; 2x+1>0 \end{array}\right\}\text{וגם}$$

$$\text{וגם}\left\{\begin{array}{l} \underline{\text{I} \quad x>1} \\ \text{II} \; x>-4 \\ \text{III} \; x>3 \\ \text{IV} \; x>-0.5 \end{array}\right. \qquad \text{או} \qquad \left.\begin{array}{l} \underline{\text{I} \quad 0<x<1} \\ \text{II} \; x<-4 \\ \text{III} \; x>3 \\ \text{IV} \; x>-0.5 \end{array}\right\}\text{וגם}$$





$x=\phi$ או $x>3$

ולכן פתרון התרגיל: $\underline{x>3}$

8. $\log_x \frac{x+1}{x-1}>0$

וגם $\left.\begin{cases} \underline{\text{I}\quad 0<x<1} \\ \text{II}\quad 0<\frac{x+1}{x-1}<1 \\ \text{III}\ x\neq 1 \end{cases}\right\}$ או וגם $\begin{cases} \underline{\text{I}\quad x>1} \\ \text{II}\quad \frac{x+1}{x-1}>1 \\ \text{III}\ x\neq 1 \end{cases}$

עבור $x>1$: $\text{II}\quad \frac{x+1}{x-1}>1$

(כלומר לפי התנאי הזה הוא ודאי חיובי!)

$$\frac{x+1}{x-1}-1>0$$

$$\frac{x+1-x+1}{x-1}>0$$

$$\frac{2}{x-1}>0$$

$$x-1>0$$

$$x>1$$

פתרון משותף: $x>1$

ועבור $0<x<1$: $\text{II}\quad 0<\frac{x+1}{x-1}<1$

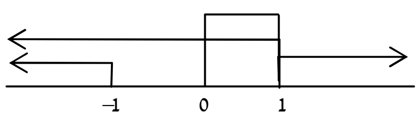
$\frac{x+1}{x-1}<1$ וגם $\frac{x+1}{x-1}>0$

מפתרון קודם: $\frac{2}{x-1}<0$ וגם $\left.\begin{matrix} x+1<0 \\ x-1<0 \end{matrix}\right\}$ או $\begin{cases} x+1>0 \\ x-1>0 \end{cases}$ וגם

$x-1<0$ $\qquad$ $x<-1$ או $x>1$

$x<1$

פתרון משותף:



$x=\phi$

ופתרון התרגיל: $\underline{x>1}$

$$9.\ \log_{x-3}\frac{x+2}{x-5}<1$$

בדיוק כמו בתרגיל הקודם :

$$\left.\begin{array}{l} \text{I}\quad \underline{0<x-3<1} \\ \text{II}\quad \dfrac{x+2}{x-5}>0 \\ \text{III}\quad \dfrac{x+2}{x-5}>x-3 \\ \text{IV}\quad x\neq 5 \end{array}\right\}\text{וגם} \qquad \text{או} \qquad \text{וגם}\left\{\begin{array}{l} \text{I}\quad \underline{x-3>1} \\ \text{II}\quad \dfrac{x+2}{x-5}>0 \\ \text{III}\quad \dfrac{x+2}{x-5}<x-3 \\ \text{IV}\quad x\neq 5 \end{array}\right.$$

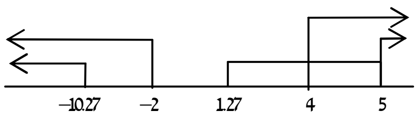
עבור $x>4 \leftarrow x-3>1$:

$x\neq 5$ וגם $\dfrac{x+2}{x-5}<x-3$ וגם $\dfrac{x+2}{x-5}>0$

$$\frac{x^2+9x-13}{x-5}<0 \qquad \left.\begin{array}{l} x-5<0 \\ x+2<0 \end{array}\right\}\text{וגם} \quad \text{או} \quad \text{וגם}\left\{\begin{array}{l} x-5>0 \\ x+2>0 \end{array}\right.$$

$x<-10.27$ או $1.27<x<5$ $\qquad$ $x<-2$ או $x>5$

פתרון משותף :



$x=\phi$

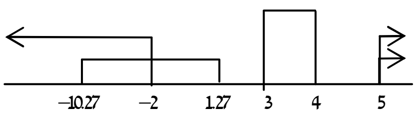
ועבור $3<x<4 \leftarrow 0<x-3<1$:

$x\neq 5$ וגם $\dfrac{x+2}{x-5}>x-3$ וגם $\dfrac{x+2}{x-5}>0$

$$\frac{x^2+9x-13}{x-5}>0 \qquad \left.\begin{array}{l} x-5<0 \\ x+2<0 \end{array}\right\}\text{וגם} \quad \text{או} \quad \text{וגם}\left\{\begin{array}{l} x-5>0 \\ x+2>0 \end{array}\right.$$

$x>5$ או $-10.27<x<1.27$ $\qquad$ $x<-2$ או $x>5$

פתרון משותף :



$x=\phi$

והתשובה היא שאין פתרון!

(זה אולי קצת מאכזב אך גם זו תשובה).

בדיקת הבנה תרגיל 99

תרגול עצמי תרגיל 100-104