מספרים מרוכבים

כדי להבין מהם מספרים מרוכבים, נתחיל בסקירה על מספרים בכלל.

ביחד עם התפתחות האדם על פני כדור הארץ התפתחה המתמטיקה. תחילה עשה האדם שימוש בחישובים בסיסיים על מספרים טבעיים – שלמים וחיוביים. אחר כך הגיע לרמת חשיבה מופשטת יותר והרחיב את שדה המספרים גם למספרים שלמים ושליליים, וכך התקבלו כל המספרים השלמים.

בהמשך התפתחה המתמטיקה, והאדם נדרש גם לשברים. וכך הורחבו המספרים גם לכאלה שניתן לכתוב אותם בצורה $\frac{a}{b}$ כאשר a,b מספרים שלמים. אלה, כמובן, כל המספרים הרציונליים.

מספרים, שהפיתגוראים הגדירו באופן זה כל מה שנחשב מספר. כאשר אחד התלמידים הוכיח שאת המספר $\sqrt{2}$ (שהוא אורך אלכסון ריבוע בעל צלע שארכה 1) אי אפשר לכתוב באופן זה $(\frac{a}{b})$, הוא הואשם על ידי חבריו בכפירה וטוּבַּע.

בהמשך הוגדרו גם המספרים האי רציונליים (כמו $\sqrt{2}$), וקיבלנו את הישר הממשי שהוא אוסף כל המספרים וכל הנקודות על ישר זה.

בימינו אנו זקוקים להרחבה נוספת של שדה המספרים, והיא נקראת מספרים מרוכבים.

מספרים מרוכבים מטפלים במצב שבו אין לנו מספר ממשי.

כפי שאנו יודעים, למספר $\sqrt{-1}$ אין ערך ממשי. אנו מכנים אותו מספר מדומה ומסמנים אותו באות i.

לדוגמה: $\sqrt{-49}=\sqrt{49}\cdot\sqrt{-1}=\pm 7i$

כך גם: $\sqrt{-256}=\sqrt{256}\cdot\sqrt{-1}=\pm 16i$

ובאופן זה אנו מגדירים שורשים לערכים קטנים מ- 0.

מספר מרוכב הוא מספר שיש בו ערך אחד ממשי וערך אחד מדומה, כמו $4+2i$.

4 הוא מספר ממשי.

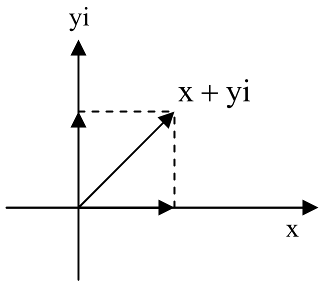
$2i$ הוא מספר מדומה.

חיבורם הוא מספר מרוכב.

נוח להציג את המספרים המרוכבים כנקודות במישור שבו הציר האופקי הוא הישר הממשי, והציר האנכי הוא ציר המספרים המדומים. ואז כל נקודה מייצגת מספר: $z=x+yi$

(נהוג ש-: z מייצג מספר מרוכב).

כפי שאנו רואים, בהצגה כזו אנו מקבלים וקטור דו ממדי שבו יש חיבור של שני וקטורים על ציר x ועל ציר yi.



נעבור להגדרת פעולות במספרים מרוכבים.

כפי שלמדנו בפעולות בווקטורים,

חיבור וקטורים באותו כיוון מתקיים: $2i+3i=5i$

וכן הכפלת וקטור בסקלר: $2\cdot 3i=6i$

ולפי שוויון וקטורים:

אם: $a+bi=x+yi$

מתקיים: $a=x \quad , \quad b=y$

ומעתה :

חיבור שני מספרים מרוכבים : $a+bi+x+yi=(a+x)+(b+y)i$

הכפלת שני מספרים מרוכבים : $(a+bi)+(x+yi)=ax+ayi+xbi+byi^2$

אבל $i^2=-1$ (כי $i^2=\sqrt{-1}^2=-1$)

ולכן ההמשך : $=(ax-by)+(ay+xb)i$

דוגמה :

א. נתון : $z_1=3+7i$ $z_2=1+5i$

1. מצאו את הערך של z_1+z_2
2. מצאו את הערך של $z_1\cdot z_2$

פתרון :

1. $z_1+z_2=1+5i+3+7i=4+12i$

כפי שאנו רואים, מחברים את המספרים הממשיים לחוד ואת המדומים לחוד.

2. $z_1\cdot z_2=(1+5i)\cdot(3+7i)=3+15i+7i+35i^2=$

$(3-35)+(15+7)i=32+22i$

כך גם כאשר יש סימנים הפוכים!

ב. נתון : $z_1=3-2i$ $z_2 5+6i$

מצאו את הערכים של: 1. z_1+z_2 2. $z_1\cdot z_2$

פתרון :

1. $z_1+z_2=5+6i+3-2i=8+4i$

2. $z_1\cdot z_2=(5+6i)\cdot(3-2i)=15-10i+18i-12i^2=$

$(15+12)+(-10+18)i=27+8i$

שימו לב שכאן : $-1^2=-(-1)=\underline{\underline{1}}$

ולכן התוצאה חיובית!

ג. נתון : $z_1=7-2i$ $z_2=4+8i$

מצאו את : 1. z_1+2z_2 2. $2z_1-3z_2$ 3. z_1^2 4. $z_1^2+z_2^2$ 5. $(z_1+z_2)^2$

פתרון :

1. $z_1+2z_2=7-2i+2(4+8i)=7-2i+8+16i=15+14i$

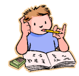
2. $2z_1-3z_2=2(7-2i)-3(4+8i)=14-4i-12-24i=2-28i$

3. $z_1^2=(7-2i)^2=49-28i+4i^2=49-28i-4=45-28i$

4. $z_1^2+z_2^2=(7-2i)^2+(4+8i)^2=$

$49-28i-4+16+64i-64=-3+36i$

5. $(z_1+z_2)^2=(7-2i+4+8i)^2=(11+6i)^2=121+132i-36=85+132i$



בדיקת הבנה

1. נתון: $z_1 = 4-2i$ $\quad z_2 = 3+i$

מצאו את: א. $z_1 + z_2$ ב. $z_1 \cdot z_2$ ג. $3z_1 - 2z_2$

ד. $z_1{}^2 + z_2{}^2$ ה. $(z_1 - z_2)^2$

קל לראות כי מספר מדומה בחזקה זוגית הופך למספר ממשי: $i^2 = -1$

ובמספר מרוכב: אם המספרים הממשיים שווים, מקבלים: z^4 - מספר ממשי

דוגמה:

עבור $z = (a+ai)$

$$z^4 = (a+ai)^4 = [(a+ai)^2]^2 = (a^2 + 2a^2 i - a^2)^2 = (2a\ \ i)^2 = -4a^4$$

וזה מספר ממשי.

כך גם לגבי $z = (a-ai)$

התוצאה היא: $z^4 = -4a^4$ (נסו בעצמכם לפי אותה דרך.)

ולכן: $(2+2i)^4 = -4 \cdot 2^4 = -64$

וכן: $(2-2i)^8 = (-64)^2 = 4096$

וכאשר מבקשים: $(2-2i)^{10}$

פותרים לפי: $(2-2i)^{10} = (2-2i)^8 \cdot (2-2i)^2 =$

$4096 \cdot (4-8i-4) = 4096 \cdot (-8i) = -32768i$

עוד אנו יכולים ללמוד שאם $i^2 = -1$ $\leftarrow$ $i^4 = 1$

ולכן מתקיים: $i^{4n} = 1$ לכל n טבעי.

ומכאן: $i^8 + i^{16} = i^{4\cdot 2} + i^{4\cdot 4} = 1+1 = \underline{\underline{2}}$

$i^{70} = i^{4\cdot 17} \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = \underline{\underline{-1}}$

באופן כללי אנו יכולים ללמוד ש-: $i^{4n+3} = i$ $\quad i^{4n+2} = -1$ $\quad i^{4n+1} = i$ $\quad i^{4n} = 1$

ולכן: $i + i^2 + i^3 + i^4 + ...i^{20} = i - 1 - i + 1 + i - 1 - i + 1........ = 0$

כי אנו רואים שכל 4 איברים נותנים סכום 0.

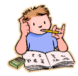
ואם מחברים 20 איברים, מקבלים 5 פעמים סכום 0. ולכן הסכום הכולל הוא 0.

ואם נחשב את הביטוי: $(i + i^2 + i^3 + i^4 + ...i^{19})^{13}$

נמצא בסוגריים: $(i - 1 + i + 1....... + i - 1 + i)^{13} =$

כבר ראינו ש-16 האיברים הראשונים נותנים סכום 0,

לכן נותר רק לחשב את סכום 3 האיברים האחרונים: $(0 + i - 1 - i)^{13} = (-1)^{13} = \underline{\underline{-1}}$



בדיקת הבנה

2. חשבו את הביטויים הבאים : א. $(1-i)^8$ ב. $(3+3i)^5$

ג. $(2-2i)^{14}$

3. חשבו את הסכומים הבאים :

א. $i+i^2+i^3+i^4.......+i^{101}=$

ב. $i+i^3+i^5+i^7+.......i^{83}=$

ג. $i^{11}+i^{13}+i^{15}=$

4. חשבו את הביטויים הבאים :

א. $(i^3+i^4+i^5+i^6.......+i^{10})^2$

ב. $(i+i^3+i^5+i^7.......+i^{85})^{17}$

ג. $(i^7-i^8+i^9-i^{10}.......-i^{20})^3$

כפי שכבר ראינו, שוויון בין מספרים מרוכבים הוא שוויון בין הרכיבים הממשיים וגם שוויון הרכיבים המדומים, כך אנו יכולים לפתור משוואות.

ד. חשבו את המספרים הממשיים במשוואה הבאה : $3-2i+x=2i+16-yi$

פתרון :

נעביר אגפים : $3-2i-16-2i=-x-yi$

נכנס איברים : $-13-4i=-x-yi$

ולכן : $\underline{y=4}$ $\underline{x=13}$

כמו שאנו רואים, על אף שזו משוואה עם 2 נעלמים, מכיוון שכל רכיב צריך להוות שווה, אנו, למעשה, מקבלים 2 נתונים, ולכן היא פתירה.

דוגמה נוספת :

ה. $7(x-i)+y(1+i)=7$

פתרון :

$$7x-7i+y+yi=7$$

ומקבלים 2 משוואות :

$$\text{I} \quad 7x+y=7$$

$$\text{II} \quad -7i+yi=0$$

ממשוואה II : $\underline{y=7}$

הצבה ב- I : $7x+7=7$

$\underline{x=0}$

ו. חשבו את המספרים הממשיים (x,y) במשוואה הבאה: $(3x-5i)(7+yi)-(2y\cdot 1)(4+xi)=7-28i$

פתרון:

$$21x+3xyi-35i+5y-(8y+2xyi-4-xi)=7-28i$$

$$21x+3xyi-35i+5y-8y-2xyi+4+xi=7-28i$$

$$\text{I}\qquad y=\frac{21x-3}{3}$$

$$\text{II}\qquad x\cdot\frac{21x-3}{3}+x=7$$

$$21x^2-3x+3x=21$$

$$x^2=21$$

$$x=\pm1$$

$$y_1=\frac{21\cdot1-3}{3}=6\qquad y_2=\frac{21\cdot(-1)-3}{3}=-8$$

והתוצאה: (1,6) (-1,-8)

ומעתה נוכל לפתור גם משוואות ריבועיות עבור $\Delta<0$

דוגמה:

ז. פתרו את המשוואה: $x^2-2x+5=0$

פתרון:

$$x_{12}=\frac{2\pm\sqrt{4-20}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{2}$$

$$x_1=\frac{2+4i}{2}=1+2i\qquad x_2=\frac{2-4i}{2}=1-2i$$

<u>בדיקת הבנה</u>

5. חשבו את המספרים הממשיים במשוואות הבאות:

א. $3x-2yi-4xi-12+y=4i-2yi+5y$

ב. $2(x+yi)+3x-(4y-5)i=7$

ג. $(2+6i)(x-yi)+(1-2i)(2x-4yi)+6+28i=0$

ד. $2(x+6i)-(x+3i)(5-yi)=2y+14+2(x-3y)i$

6. פתרו את המשוואות הבאות:

א. $x^2-4x+10=0$

ב. $2x^2+x+2=0$

ג. $x^2-x+1=0$

תרגול עצמי

7. חשבו את הערכים הבאים :

א. i^7 ב. i^{25} ג. i^{102} ד. i^{423}

8. נתונים המספרים המרוכבים : $z_2 = 3 + i$ $z_1 = 1 - 2i$

חשבו את : א. $z_1 + z_2$ ב. $z_1 \cdot z_2$ ג. ${z_1}^2 \cdot z_2$

ד. $(z_1 + z_2)^2$ ה. ${z_1}^2 + {z_2}^2$

9. הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים :

א. $i^{4n+1} = i$ ב. $i^{4n} = 1$ ג. $i^{4n-1} = -i$

10. חשבו את הערכים הבאים :

א. $(2+i)^{13}$ ב. $(1-i)^{21}$ ג. $(3-2i)^3$

11. חשבו את הטורים הבאים :

א. $(i^2 + i^3 + i^4 + \ldots\ldots.i^{20})^{35}$

ב. $(i^3 + i^6 + i^9 + i^{12})^{131}$

ג. $(i + 1^2 - i^3 + i^4 - i^5 \ldots\ldots. - i^{17})^5$

12. חשבו את המספרים הממשיים (x, y) במשוואות הבאות :

א. $3 + 4x + 12yi - 5(x + 21) + 2(y - xi) = -16i$

ב. $2(x + i) - (4 - x)i + 2(xi)^2 + x(1 - xi) = -2 - xi$

ג. $(3 - xi)(2 + yi) - 3(y - xi) + 4(x - 3i) = -17 - 5i$

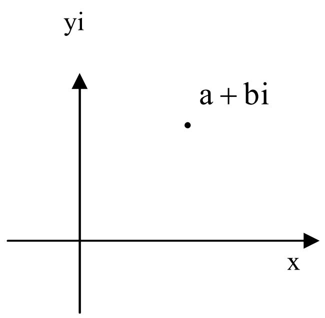
ד. $(2x - 3yi)^2 = 85 + 18i$

13. פתרו את המשוואות הבאות :

א. $x^2 + 2x + 3 = 0$

ב. $x^2 + 25 = 0$

ג. $(x - 3)(x - 5) + 5x = 0$



לאחר שלמדנו פעולות בסיסיות במספרים מרוכבים, וראינו

שכל מספר מרוכב מוגדר על ידי שני מספרים ממשיים : a, b

כך ש- : $z = x + yi$

אם עדיין אתם זוכרים את מערכת הצירים שראינו,

לכל מספר מרוכב ניתן למצוא נקודה במישור.

אולם מה קורה כאשר מקבלים מספר מרוכב הנמצא במכנה ?

כלומר כיצד ניתן לכתוב את המספר : $\frac{i}{1-2i}$ או כל מספר בעל תבנית $\frac{1}{z}$?

ברור לנו שמספר זה אינו יכול להיכתב על ידי שני מספרים ממשיים בתבנית : $x+yi$

לשם כך אנו מבצעים "טריק" מתמטי, ומכפילים את המונה והמכנה במספר כך שהסימן של האיבר המדומה <u>הפוך</u> לזה הנתון.

כלומר אם בדוגמה שלנו : $z=1-2i$, אנו נכפיל את המונה והמכנה במספר : $1+2i$

ונקבל : $\frac{1}{1-2i}\cdot\frac{1+2i}{1+2i}=$

לפי נוסחת כפל מקוצר : $\frac{1+2i}{1+2}=$

ומכאן : $\frac{1+2i}{3}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$

וכעת אנו יודעים מהו המספר המרוכב השווה למספר $\frac{1}{z}$ שבו פתחנו.

למספר הכופל שמצאנו, כלומר מספר שסימן האיבר המדומה הפך למספר המרוכב z , אנו קוראים <u>מספר צמוד</u>, וסימנו : $\bar{z}$.

ומעתה: אם $z=a+bi$

אז $\bar{z}=a-bi$ (z צמוד)

וכפי שראינו מהדוגמה, תמיד מתקיים : $z\cdot\bar{z}=a^2+b^2$, וזהו תמיד <u>מספר ממשי</u>!

כך גם ניתן לראות ש- : $z-\bar{z}=a+bi-(a-bi)=2bi$, וזהו תמיד <u>מספר מדומה</u>!

ומעתה בכל עת שנקבל מספר מרוכב במכנה, נכפילו בצמוד.

דוגמה נוספת :

ח. כתבו את המספר : $\frac{1+2i}{4-5i}$ כמספר מרוכב.

פתרון :

$$\frac{1+2i}{4-5i}\cdot\frac{4+5i}{4+5i}=\frac{(1+2i)(4+5i)}{4+5}=\frac{4+8i+5i-10}{9}=\frac{-6}{9}+\frac{13}{9}i=-\frac{2}{3}+\frac{13}{9}i$$

באותו אופן בדיוק,

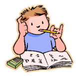
ט. חשבו את הסכום : $1-2i+\frac{4-6i}{8+9i}$

פתרון :

$$1-2i+\frac{4-6i}{3+9i}\cdot\frac{3-9i}{3-9i}=1-2i+\frac{(4-6i)(3-9i)}{12}=$$

הכפלה וסידור המשוואה : $\frac{12-24i+12-18i-36i-54}{12}=$

$$\frac{-30-78i}{12}=-\frac{5}{2}-\frac{13}{2}i$$



בדיקת הבנה

14. מצאו את המספרים הצמודים למספרים הנתונים :

א. $3+2i$ ב. $4-5i$ ג. $-5i-7$ ד. $3i-8$

15. חשבו את החלוקות הבאות :

א. $\frac{1}{2-3i}$ ב. $\frac{5}{1+4i}$ ג. $\frac{1-i}{1+i}$ ד. $\frac{3-2i}{1+7i}$

ה. $2+5i+\frac{4-2i}{1+10i}$ ו. $\frac{4-i}{3+i}\cdot\frac{3+5i}{1-i}$

16. נתון : z מספר מרוכב.

מצאו מי מבין המספרים הבאים הוא מספר ממשי, מספר מרוכב או מספר מדומה.

א. $z\cdot\bar{z}$ ב. $z-\bar{z}$ ג. $\frac{z}{\bar{z}}$

עתה נוכל לעבור לפתרון משוואות בהן מופיע המספר z כנעלם.

(אל דאגה, זה רק נראה רע. האמת היא שזה די פשוט).

י. פתרו את המשוואה : $zi-2=3i+z$

פתרון :

כמו בכל פתרון משוואה מותר להשתמש בכל הפעולות האלגבריות.

נתחיל בהעברת אגפים : $zi-z=2+3i$

ונציב : $z=x+yi$

$(x+yi)i-(x+yi)=2-3i$

$xi-y-x-yi=2-3i$

ומכאן : $-x-y=2$ I

$\underline{x-y=-3}$ II

$x=y-3$ II

הצבה ב- I : $-y+3-y=2$ I

$-2y=-1$

$\underline{y=0.5}$

הצבה חוזרת ב- II : $x=0.5-3=-2.5$

והמספר : $z=-2.5+0.5x$

י״א. מצאו את המספר המרוכב z במשוואה : $\frac{z+zi-5}{23i}=\bar{z}$

פתרון :

(גם כאן זה נראה גרוע יותר ממה שזה באמת).

$z+zi-5=\bar{z}(2+3i)$

הצבה $z=x+yi$ $\bar{z}=x-yi$: $x+yi+(x+yi)i-5=(x-yi)(2+3i)$

$x+yi+xi-y-5=2x+3xi-2yi+3y$

העברת אגפים : $x-y-2x-3y+yi+xi-3xi+2yi=5$

I $-x-4y=5$

II $\underline{-2(-4y-5)+3y=0}$

I $x=-4y-5$

II $-2(-4y-5)+3y=0$

$8y+10+3y=0$

$y=\frac{-10}{11}$

I $x=\frac{40}{11}-5=\frac{-15}{11}$

והמספר : $z=-\frac{15}{11}-\frac{10}{11}i$

גם משוואות ריבועית שבהן z נעלם, ניתן לפתור בדיוק לפי מה שכבר למדנו.

י״ב. פתרו את המשוואה : $z^2=10i-24$

פתרון :

הצבה של $z=x+yi$ נותנת : $(x+yi)^2=10i-24$

$x^2+2xyi-y^2=10i-24$

I $x^2-y^2=-24$

II $2xy=10$

II $y=\frac{10}{-2x}=\frac{5}{x}$

הצבה ב- I : $x^2-\left(\frac{5}{x}\right)^2=-24$

$x^2-\frac{25}{x^2}=-24$

הכפלה ב- x^2 : $x^4-25+24x^2=0$

עבור $t=x^2$: $t^2+24t-25=0$

$t_1=-25$ $t_2=1$

אבל x הוא מספר <u>ממשי</u>, ולכן עבור t_1 : $x^2=-25$ לא מתקיים

ונשאר : $x^2=t_2=1$

$\underline{x=\pm1}$

נציב חזרה במשוואה II : $y_1 = \frac{5}{1} = 5 \qquad y_2 = \frac{5}{-1} = -1$

והמספר z : $z_1 = 1 + 5i \qquad z_2 = -1 - 5i$

י״ג. פתרו את המשוואה : $z^2 + (1+i)z - 6 + 3i = 0$

פתרון :

במצב זה פועלים לפי נוסחת השורשים : $z_{12} = \frac{-(1+i) \pm \sqrt{(1+i)^2 - 4(-6+3i)}}{2 \cdot 1}$

נמצא תחילה את פתרון השורש לפי דוגמה י״ב :

$$\sqrt{(1+i)^2 - 4(-6+3i)} = \sqrt{1 + 2i - 1 + 24 - 12i} = \sqrt{24 - 10i}$$

כלומר אנו מחפשים מספר z_3 כך ש- : $z_3 = \sqrt{24 - 10i}$

או : $z_3^2 = 24 - 10i = (x + yi)^2$

וכבר ידענו ש- :

I $\quad x^2 - y^2 = 24$

II $\quad 2xy = -10$

$$y = -\frac{5}{x}$$

I $\quad x^2 - \frac{25}{x^2 = 24}$

$$x^4 - 25 = 24x^2$$

ובדיוק כמו קודם מקבלים : $x = \pm 5$

ואחרי הצבה : $y = \pm 1$

כלומר השורשים המתקבלים : $5 + i$ או $5 - i$

נציב אותם בנוסחת השורשים ונקבל : $z_1 = \frac{(1+i) + 5 - i}{2} = \frac{-1 - i + 5 - i}{2} = 2 - i$

$$z_2 = \frac{-(1+i) - 5 + i}{2} = \frac{1 - i - 5 + i}{2} = -3$$

העובדה ש- : z_2 יוצא מספר ממשי לא צריכה לבלבל או להלחיץ (זה מיותר).

בדיקת הבנה

17. פתרו את המשוואות הבאות :

א. $z - \bar{z}i = 5 - 5i$

ב. $\frac{2z + 4zi}{1 + i} = 8 + 6i$

ג. $\frac{z \cdot \bar{z} - 2(7 - 3i)}{zi} = 3 - 5i$

18. פתרו את המשוואות הבאות :

א. $z^2 + 13 + 42i = 0$

ב. $z^2 - 2z - 4 + 12i = 0$

ג. $z^2 - (2 - 2i)z + 3 + 2i = 0$

מכאן נעבור לחקירת משוואה ריבועית.

כדי לבצע חקירות פשוטות נזכיר לעצמנו את נוסחאות ויטה:

במשוואה ריבועית מהסוג: $Ax^2+Bx+C=0$
מתקיים תמיד: $x_1+x_2=-\frac{B}{A}$
$x_1\cdot x_2=\frac{C}{A}$

הבה נבחן שימוש של נוסחאות אלה במספרים מרוכבים:

י"ד. אחד השורשים של המשוואה: $z^2-(3+i)z+m=0$ הוא $z_1=1-i$

א. מצאו את השורש השני.

ב. ב. מצאו את הפרמטר m.

פתרון:

מתוך נוסחאות ויטה אנו יודעים:

$z_1+z_2=\frac{B}{A}$ $\Leftarrow$ I $(1-i)+z_2=3+i$

II $\underline{(1-i)\cdot z_2=m}$

א. I $1-i+x+yi=3+i$

$1+x=3 \quad\Rightarrow\quad x=2$

$-1+y=1 \quad\Rightarrow\quad y=2$

והשורש השני: $z_2=2+2i$

ב. $(1-i)\cdot(2+2i)=m$

$2+2i-2i+2=m$

$4=m$

ט"ו. נתונה המשוואה: $z^2-(5-5i)z-13i=0$ ששורשיה הם: z_1 , z_2.

מבלי לחשב שורשים אלה מצאו את המשוואות הריבועיות לפי השורשים הבאים:

א. $z_1+i\ ,\ z_2+i$ ב. $5z_1\ ,\ 5z_2$ ג. $(z_1+z_2)\ ,\ (z_1-z_2)$

פתרון:

א. שורש המשוואה המבוקשת: $z_1+i\ ,\ z_2+i$

ולכן עבור $A=1$: $-B=z_1+i+z_2+i=z_1+z_2+2i$

מהמשוואה הנתונה אנו יודעים: $z_1+z_2=5-5i$

ואחרי הצבה: $-B=5-5i+2i=\underline{5-3i}$

$B=-(5+3i)$

כך גם נמצא את C של המשוואה המבוקשת:

$C=(z_1+i)(z_2+i)=z_1z_2+z_1i+z_2i-1$

$C=z_1z_2+i(z_1+z_2)-1$

וכבר מצאנו ש- : $z_1 + z_2 = 5 - 5i$

ומתוך המשוואה הנתונה אנו יודעים : $z_1 \cdot z_2 = 13i$

אחרי הצבה :

$$C = 13i + i(5 - 5i) - 1$$

$$C = -13i + 5i + 5 - 1$$

$$C = 4 - 8i$$

והמשוואה המבוקשת : $z^2 - (5 + 3i)z + 4 - 8i = 0$

ב. נשתמש בנתונים שמצאנו ב- א : $z_1 + z_2 = 5 - 5i$

$$z_1 \cdot z_2 = 13i$$

ובמשוואה המבוקשת מחפשים :

$$-B = 5z_1 + 5z_2 = 5(z_1 + z_2) = 5(5 - 5i)$$

$$B = -5(5 - 5i)$$

$$C = 5z_1 - 5z_2 = 25z_1z_2 = 25 \cdot (-13i) = -325i$$

והמשוואה : $z^2 - 5(5 - 5i)z - 325i = 0$

ג. למציאת השורשים : $z_1 - z_2 \;,\; z_1 + z_2$

$$-B = z_1 - z_2 + z_1 + z_2$$

$$C = (z_1 - z_2)(z_1 + z_2)$$

כדי למצוא את $z_1 - z_2$ נוכל להשתמש ב"טריק" של השלמה לריבוע :

$$(z \quad - z_2)^2 = z_1^{\ 2} - 2z_1z_2 + z_2^{\ 2}$$

על ידי תוספת של $4z_1z_2$ נקבל :

$$4z_1z_2 + (z_1 - z_2)^2 = z_1^{\ 2} + 2z_1z_2 + z_2^{\ 2}$$

עכשיו :

$$4z_1z_2 + (z_1 - z_2)^2 = (z_1 + z_2)^2$$

במילים אחרות :

$$(z_1 - z_2)^2 = (z_1 + z_2)^2 - 4z_1z_2$$

על ידי הצבה :

$$(z_1 - z_2)^2 = (5 - 5i)^2 - 4 \cdot (-13i)$$

$$= 25 - 50i - 25 + 52i$$

$$(z_1 - z_2)^2 = 2i$$

ומכאן :

$$(z_1 - z_2)^2 = (x + yu)^2 = 2i$$

$$x^2 + 2xyi - y^2 = 2i$$

$$\text{I} \quad x^2 = y^2$$

$$x = \pm y$$

$$\text{II} \quad 2xy = 2$$

$$xy = 1$$

עבור x=y $\Leftarrow$ $x = y = 1$

עבור x=-y $\Leftarrow$ $-y^2 = 1$

$y^2 = -1$

$y = i = x$

$z_1 - z_2 = x + yi = 1 + i$ או $z_1 - z_2 = x + yi = i + i^2 = -1 + i$

מעתה נוכל לחשב את המשוואה המבוקשת.

עבור : $(z_1 - z_2) = 1 + i$ $\quad -B = 1 + i + 5 - 5i = 6 - 4i$

$C = (1+i)(5-5i) = 5 - 5i + 5i + 5 = 10$

והמשוואה : $z^2 - (6-4i)z + 10 = 0$

עבור : $z_1 - z_2 = -1 + i$ $\quad -B = -1 + i + 5 - 5i = 4 - 4i$

$C = (-1+i)(5-5i) = -5 + 5i + 5i + 5 = 10i$

והמשוואה : $z^2 - (4-4i)z + 10i = 0$

ט"ז. נתונה המשוואה : $(mi+2)z^2 + 2(m+i)z + 6 = 0$

א. מצאו עבור אילו ערכי m יהיה למשוואה פתרון יחיד ?

ב. ב. מצאו פתרון זה.

פתרון :

א. לפתרון יחיד של משוואה ריבועית דרוש התנאי : $A \neq 0$ וגם $\Delta = 0$

או $A = 0$ למציאת פתרון של קו ישר !

עבור $A \neq 0$ $\quad mi + 2 \neq 0$

$mi \neq -2$

$m \neq \frac{-2}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{2i}{1}$

$\boxed{m \neq 2i}$

וגם : $\Delta = 0 = 4(m+i)^2 - 4 \cdot 6(mi+2) \quad / :4$

$(m+i)^2 = 6(mi+2)$

$m^2 + 2mi - 1 = 6mi + 12$

$m^2 - 4mi - 13 = 0$

m מספר מרוכב ולכן : $m = x + yi$ $\quad (x+yi)^2 - 4i(x+yi) - 13 = 0$

$x^2 + 2xyi - y^2 = 4xi + 4y - 13 = 0$

I $\quad x^2 - y^2 + 4y = 13$

II $\quad 2xy - 4x = 0$

$2x(y-2) = 0$

עבור $x = 0$ הצבה במשוואה I נותנת : $\quad -y^2 + 4y - 13 = 0$

$y^2 - 4y + 13 = 0$

זכרו : $\underline{x, y}$ <u>מספרים ממשיים</u> ! $\quad y = \varnothing$

עבור $y=2$ הצבה במשוואה I נותנת: $x^2-4+8=13$

$x^2=9$

$x=\pm3$

ולכן: $m_1=3+2i \qquad m_2=3-2i$

עבור $mi+2=0 \quad \Leftarrow \quad m_3=2i$

קבלנו 3 ערכי m: $m_1=3+2i \qquad m_2=3-2i \qquad m_3=2i$

ב. בהצבה של m_3 במשוואה מקבלים: $0+2(2i+i)\cdot z+6=0$

$2\cdot 3i\cdot z=-6$

$z=\frac{-6}{6i}\cdot\frac{-6i}{-6i}=\frac{36i}{36}=\underline{i}$

בהצבה של m_1 מקבלים: $\left[(3+2i)i=2\right]z^2+2(3+2i+i)z+6=0$

$3iz^2+(6+6i)z+6=0$

$(3i-2+2)z^2+(6+6i)z+6=0$

$z=\frac{-B}{2A}=\frac{6+6i}{6i}\cdot\frac{-6i}{-6i}=\frac{-36i+36}{36}$

$z=\underline{1-i}$

בהצבה של m_2 מקבלים: $(3-2i+2)z^2+2(3-2i+i)z+6=0$

$(5-2i)z^2+2(3-i)z+6=0$

$(5-2i)z^2+(6-2i)z+6=0$

$z=\frac{-(6-2i)}{2(5-2i)}\cdot\frac{5+2i}{5+2i}$

$z=\frac{(-6+2i)(5+2i)}{2\cdot 29}=\frac{-30+10i-12i-4}{2\cdot 29}$

$z=\frac{-34-2i}{58}=\underline{-\frac{17}{29}-\frac{1}{29}i}$

והפתרונות: $i, 1-i, -\frac{17}{29}-\frac{1}{29}i$

בדיקת הבנה

19. אחד השורשים של המשוואה: $z^2(5+4i)z+m=0$ הוא: $2-i$.
מצאו את השורש השני ואת הפרמטר m.

20. אחד השורשים של המשוואה: $z^2+mz+93+29i=0$ הוא: $7-9i$.
מצאו את השורש השני ואת הפרמטר m.

21. אחד השורשים של המשוואה: $mz^2-(15+15i)z-14+12i=0$ הוא: i.
מצאו את השורש השני ואת הפרמטר m.

22. שורשי המשוואה הריבועית: $z^1 - 3z + 2iz + 6 - 7i = 0$ הם: z_2, z_1.
מצאו מבלי לחשב שורשים אלה את המשוואות הריבועיות ששורשיהן הם:
א. $5z_2, z_1$ ב. $z_2 - i, z_1 - i$ ג. $\frac{z_1}{z_2}, \frac{z_2}{z_1}$

23. א. עבור איזה ערך של הפרמטר המרוכב m יש למשוואה:
$(4m+i)z^2 - 2(m+2)z + 2 = 0$ פתרון יחיד?
ב. מצאו פתרון זה.

וקצת על סדרות חשבוניות של מספרים מרוכבים:
גם במספרים אלה נשארים כל נוסחאות הסדרה החשבונית כמו שהיו.
להזכירכם:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad \text{או} \quad s_n = [2a_1 + (n-1)d]\frac{n}{2}$$

דוגמאות:
י"ז. נתון: $a_1 = 1 + 2i$ $d = 1 - 4i$
א. מצאו את האיבר העשירי בסדרה.
ב. מצאו את סכום 15 האיברים הראשונים.
פתרון:
א. $a_{10} = 1 + 2i + 9(1 - 4i) = 1 + 2i + 9 - 36i = 10 - 34i$

ב. $s_{10} = [2(1+2i) + 9 \cdot (1-4i)] \cdot \frac{10}{2} = (2 + 4i + 9 - 36i) \cdot 5 = 55 - 160i$

י"ח. נתון: $a_1 = 1 - 3i$ $a_{11} = -9 + 17i$
א. מצאו את ההפרש d.
ב. מצאו כמה איברים יש לחבר כדי לקבל סכום: $-54 + 96i$
פתרון:
א.
$$a_{11} = a_1 + 10d$$
$$-9 + 17i = 1 - 3i + 10(x + yi)$$
$$-10 + 20i = 10(x + yi) \quad / : 10$$
$$\underline{-1 + 2i = d} = x + y$$

ב.
$$s_n = [2a_1 + (n-1)d]\frac{n}{2}$$
$$-54 + 96i = [2(1-3i) + (n-1)(-1+2i)]\frac{n}{2} \quad / \cdot 2$$
$$-108 + 192i = [2 - 6i - n + 2ni + 1 - 2i]n$$
$$-108 + 192i = (3 - n - 8i + 2ni)n$$
$$-108 + 192i = 3n - n^2 - 8ni + 2n^2 i$$

$$\text{I} \quad -108 = 3n - n^2$$

$$\text{II} \quad \underline{192 = -8n + 2n^2}$$

$$\text{I} \quad n^2 - 3n - 108 = 0$$

$n_1 = 12 \qquad n_2 = -9$ לא מתאים

לבדיקה: $\text{II} \quad 2n^2 - 8n - 192 = 0$

$$n^2 - 4n - 96 = 0$$

$n_1 = 12 \qquad n_2 = -8$ לא מתאים

והתשובה: $n = 12$

אני מקווה שכבר הבנתם שכל השאלות בסדקה חשבונית נפתרות פשוט על ידי הנוסחאות, וכמובן, במספרים מרוכבים !

בדיקת הבנה

24. האיבר הראשון בסדרה חשבונית הוא: $3i$, והפרש הסדרה הוא: $d = 1 + 2i$.
מצאו את האיבר א. העשירי ב. השנים עשר
ג. מצאו את סכום 12 האיברים הראשונים.

25. בסדרה חשבונית נתון: $a_{15} = 57 + 40i \qquad a_1 = 1 - 2i$

א. מצאו את ההפרש d .

ב. כמה איברים יש לחבר בסדרה זו על מנת לקבל סכום של: $780 - 550i$?

תרגול עצמי

26. חשבו את הערכים הבאים:

א. $\frac{2-4i}{7+i}$ ב. $\frac{2i}{1-5i}$ ג. $\frac{4}{2i+1}$ ד. $\frac{3-4i}{9(6+7i)}$ ה. $\frac{i(2-5i)}{(3+5i)\cdot(2-i)}$

27. פתרו את המשוואות הבאות (z - מספר מרוכב):

א. $z - 4\bar{z} = 2(5i - 6)$ ב. $\frac{zi - 3\bar{z}}{1 + 3i} = -4$ ג. $\frac{zi - \bar{z}}{1 - i} = \frac{z}{1 + i} + \frac{5i}{2}$

28. פתרו את המשוואות הבאות (z - מספר מרוכב):

א. $z^2 - 2z + 13 + 16i = 0$ ב. $z^2 + (7 - 2i)z - 29 - 67i = 0$

ג. $zi - \frac{19 - 3i}{z} = 2i - 5$ ד. $(2 - i)z^2 - (5 + 4i)z - 15 + 3i = 0$

29. נתונה המשוואה: $z^2 + miz + 6 + 7i = 0$, ונתון שאחד הפתרונים הוא: $4 - i$.
מצאו את הפתרון השני ואת m .

30. אחד השורשים של המשוואה: $(1-2i)z^2+(3+14i)z+c=0$ הוא: $2+5i$.
מצאו את השורש השני ואת c .

31. אחד משורשי המשוואה: $mz^2-(3+9i)z-24+42i=0$ הוא: $3-2i$.
מצאו את m ואת השורש השני.

32. שורשי המשוואה: $z^2-(3+2i)z+5+5i=0$ הם: z_1,z_2 .
מבלי למצוא שורשים אלה מצאו מהי המשוואה הריבועים ששורשיה הם:

א. $\frac{z_2 i}{2}$, $\frac{z_1 i}{2}$ ב. $\frac{1}{z_2}$, $\frac{1}{z_1}$ ג. $\frac{z_2}{z_1}$, $\frac{z_1}{z_2}$

33. א. מצאו עבור אילו ערכים של m יש למשוואה: $z^2+mz-29-2m=0$ פתרון יחיד ?
ב. מצאו פתרון זה.

34. א. עבור אילו ערכי m יש למשוואה: $(m-4i)z^2-(m+7)z+4=0$ פתרון יחיד ?
ב. מצאו פתרון זה.

35. נתונה המשוואה: $4z^2-(m+24i)z+3+m=0$
א. מצאו עבור אילו ערכים של m יש למשוואה פתרון יחיד ?
ב. מצאו פתרון זה.

36. בסדרה חשבונית נתון: $a_7=-1+9i$ $s_{10}=5+12i$
מצאו את האיבר הראשון ואת הפרש הסדרה.

37. האיבר החמישי בסדרה חשבונית הוא: $8-7i$, והאיבר השביעי הוא: $10-11i$.
מצאו את האיבר הראשון, את הפרש הסדרה ואת סכום 10 האיברים הראשונים.

38. סכום האיברים: השני והחמישי, בסדרה חשבונית הוא: $3+9i$.
סכום האיברים: התשיעי והאחד עשר, הוא: $-7+10i$.
מצאו את סכום 15 האיברים הראשונים של הסדרה.