14. בטטראדר $ABCS$

נתון :

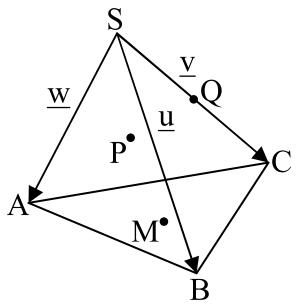
$\overrightarrow{SA} = \underline{w} \qquad \overrightarrow{SB} = \underline{u} \qquad \overrightarrow{SC} = \underline{v}$

Q הוא אמצע המקצוע SC.

P היא נקודת פגישת התיכונים של הפֵּאה SAB.

M היא נקודת פגישת התיכונים של הבסיס ABC.

מְצאו את הווקטורים $\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{QM}, \overrightarrow{SM}$.



15. בפירמידה מרובעת $ABCDS$:

$\overrightarrow{AB} = \underline{u} \qquad \overrightarrow{AD} = \underline{v} \qquad \overrightarrow{AS} = \underline{w}$

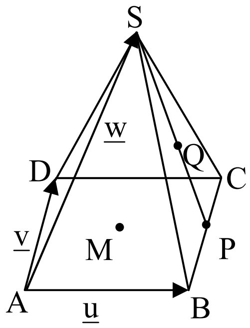
M - נקודת מפגש אלכסוני הבסיס.

P - אמצע המקצוע BC.

$\overrightarrow{SQ} = \alpha \overrightarrow{SP}$

א. מְצאו את הווקטורים $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MS}, \overrightarrow{MQ}$

ב. מה צריך להיות גודל הזווית α כדי שהווקטור $\overrightarrow{MQ}$ יקביל לפֵּאה ADS ?



16. נתון :

$\overrightarrow{AB} = \underline{u} \qquad \overrightarrow{AD} = \underline{v} \qquad \overrightarrow{AS} = \underline{w}$

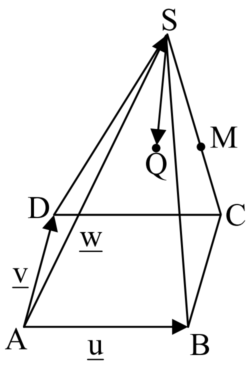
$\overrightarrow{SQ} = \alpha \underline{u} + \beta \underline{w}$

M - אמצע המקצוע SC.

בטא בעזרת $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \alpha, \beta$ את :

א. $\overrightarrow{MS}, \overrightarrow{MQ}$.

ב. האם יש β, α כאלה כך ש- $\overrightarrow{MQ}$ יקביל לבסיס ?



לאחר שלמדנו פעולות בסיסיות בווקטורים, עתה נלמד עוד פעולה מתמטית אחת הקשורה לווקטורים, והיא :

<u>המכפלה הסקלרית</u>.

שמה ניתן לה כי אנו מכפילים שני וקטורים ומקבלים גודל שהוא סקלר (זוכרים? גודל ללא כיוון).

כדי להבהיר את הרעיון נביא דוגמה פיזיקלית.

עבודה / השקעת אנרגיה - מוגדרת בפיזיקה כמכפלה של כוח בדרך.

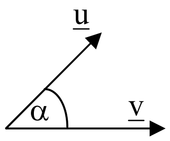
כוח – וקטור. ברור לנו שהפעלת כוח על שולחן מלמעלה כלפי מטה שונה מהפעלת אותו כוח על אותו שולחן מימין לשמאל. במקרה הראשון רוב הסיכויים שהשולחן יישאר במקום, ובמקרה השני סביר שהוא ינוע.
כלומר לגודל נוסף כיוון ← וקטור.

דרך – גם היא גודל וקטורי. אם אומר שאני במרחק 30 ק"מ מירושלים, יהיה קשה מאוד לאתר אותי, אלא אם אגדיר שאני נמצא ממערב או ממזרח או בכל כיוון אחר. כלומר גם דרך היא וקטור.

עבודה – גודל סקלרי. אם הזזתי שולחן 2 מטר ימינה, השקעתי בדיוק אותה אנרגיה כמו במקרה שהייתי מזיז את אותו שולחן על אותה רצפה 2 מטר שמאלה.

כיצד מבצעים הכפלה זו ?

<u>הגדרת המכפלה הסקלרית</u>



אם נתונים שני וקטורים $\underline{v},\underline{u}$ עם זווית α ביניהם ורוצים לחשב את הסקלר t :

$$\boxed{t=\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}||\underline{v}|\cos\alpha}$$

ובמילים: מכפלה סקלרית = (הזווית ביניהם) $\cos$ · הגודל של $\underline{v}$ · הגודל של $\underline{u}$

דוגמאות:

ו. מִצאו את המכפלה הסקלרית $\underline{u}\cdot\underline{v}$ אם נתון: $|\underline{u}|=2$ $|\underline{v}|=5$ $\alpha=25°$

פתרון:

לפי הנוסחה: $\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos\alpha=2\cdot5\cos25$

$\underline{u}\cdot\underline{v}=9.06$

ז. נתונים הווקטורים: $|\underline{u}|=3$ $|\underline{v}|=7$ ונתון שמכפלתם $\underline{u}\cdot\underline{v}=13.5$.

מה הזווית בין הווקטורים ?

פתרון:

כבר למדנו שנוסחאות הן קשר בין רכיבים שונים, ומשתמשים באותה נוסחה כדי למצוא את הנעלם.

במקרה שלנו: $\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos\alpha$

ע"י העברת אגפים:

וקיבלנו נוסחה חדשה למציאת הזווית.

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}}$$

ע"י הצבת הנתונים: $\cos\alpha=\frac{13.5}{3\cdot7}=0.643$

$\alpha=50°$

ח. נתון: $|\underline{u}|=6$, $\underline{u}\cdot\underline{v}=3$ והזווית ביניהם $\alpha=60°$. מה גודל הווקטור $\underline{v}$?

פתרון:

גם פה נשתמש באותה נוסחה:

$3=6\cdot|\underline{v}|\cos60$

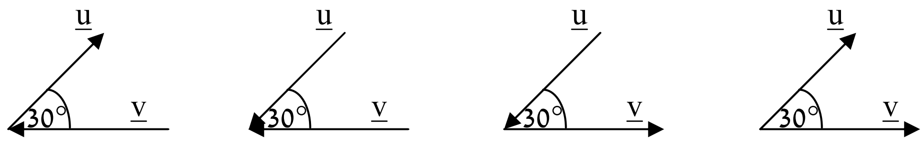
$3=3\cdot|\underline{v}|$

$1=|\underline{v}|$

כלומר הגודל $\underline{v}$ הוא יחידה.

<u>חשוב: הזווית בין הווקטורים מוגדרת כזווית שקדקודה הוא "זנבות" הווקטורים!!</u>

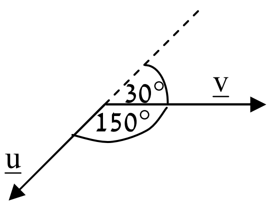
כלומר :



ציור 1 ציור 2 ציור 3 ציור 4

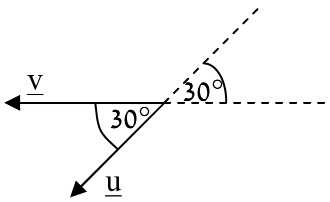
בציור 1 $\alpha = 30^\circ$

בציור 2 כדי לזהות את הזווית עלינו להעתיק את הווקטורים כך שיֵצאו מאותה נקודה, ולכן :



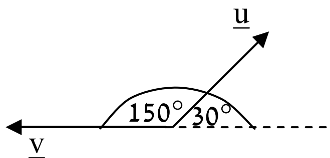
$\alpha = 150^0$

בציור 3



$\alpha = 30^0$

בציור 4

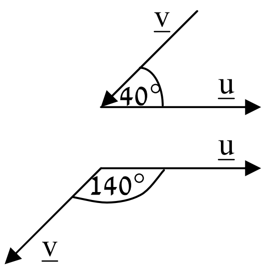


$\alpha = 150^0$

כך נוכל למצוא תמיד (ובקלות) מהי α .

ט. מִצאו את המכפלה הסקלרית בציור הבא אם נתון :

$|\underline{u}| = 4 \qquad |\underline{v}| = 9 \qquad \alpha = 40^0$



פתרון :

כדי למצוא את α נעתיק את הווקטור $\underline{v}$.

$\alpha = 140^0$

ומכאן : $\underline{u} \cdot \underline{v} = 4.9 \cdot \cos 140 = -27.58$

<u>בדיקת הבנה</u>

17. מְצאו את המכפלה הסקלרית לפי הנתונים הבאים :

א. $|\underline{u}| = |\underline{v}| = 3 \qquad \alpha = 72^0$

ב. $|\underline{v}| = 8 \qquad |\underline{u}| = 7 \qquad \alpha = 115^0$

18. מְצאו את הזווית α בין הווקטורים לפי הנתונים הבאים :

א. $|\underline{v}| = 5$ $\quad |\underline{u}| = 3$ $\quad \underline{u}\cdot\underline{v} = 13.25$

ב. $|\underline{v}| = 6$ $\quad |\underline{u}| = 9$ $\quad \underline{u}\cdot\underline{v} = -34.7$

19. מְצאו את גודל הווקטור $|\underline{v}|$ אם נתון :

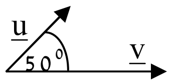
א. $|\underline{u}| = 7$ $\quad \alpha = 45^\circ$ $\quad \underline{u}\cdot\underline{v} = 19.8$

ב. $|\underline{u}| = 2$ $\quad \alpha = 110^\circ$ $\quad \underline{u}\cdot\underline{v} = -5.5$

20. מְצאו את המכפלה הסקלרית בציורים הבאים :

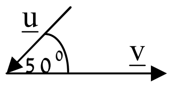
א. $|\underline{u}| = 3$

$|\underline{v}| = 7$



ב. $|\underline{u}| = 3$

$|\underline{v}| = 7$



חוקי המכפלה הסקלרית :

בדומה למכפלה של סקלרים גם בווקטורים מתקיימים החוקים הבאים :

1. $\underline{u}\cdot\underline{v} = \underline{v}\cdot\underline{u}$

2. $\underline{u}\cdot t\underline{v} = t(\underline{u}\cdot\underline{v})$

הוכחה : $\underline{u}\cdot t\underline{v} = |\underline{u}|\cdot t|\underline{v}|\cos\alpha = t|\underline{u}||\underline{v}|\cos\alpha = t(\underline{u}\cdot\underline{v})$

3. $\underline{w}\cdot(\underline{u}+\underline{v}) = \underline{w}\cdot\underline{u} + \underline{w}\cdot\underline{v}$

הוכחה :

$$\underline{w}\cdot(\underline{u}+\underline{v}) = |\underline{w}|\cdot|\underline{u}+\underline{v}|\cos\alpha =$$
$$= (|\underline{w}|\cdot|\underline{u}| + |\underline{w}|\cdot|\underline{v}|)\cdot\cos\alpha =$$
$$= |\underline{w}|\cdot|\underline{u}|\cos\alpha + |\underline{w}|\cdot|\underline{v}|\cos\alpha =$$
$$= \underline{w}\cdot\underline{u} + \underline{w}\cdot\underline{v}$$

אבל זהירות!

לא מתקיימים החוקים הבאים :

- $(\underline{w}\cdot\underline{v})\cdot\underline{u} \neq \underline{w}(\underline{v}\cdot\underline{u})$

הסיבה היא שאמנם $(\underline{w}\cdot\underline{v})$ הוא סקלר t , ויש משמעות ל- $t\cdot\underline{u}$.

אבל $(\underline{v}\cdot\underline{u})$ הוא סקלר k , ואין הגדרה ל- $\underline{w}\cdot k$!

- אם $\underline{u}\cdot\underline{v} = \underline{w}\cdot\underline{v}$, אין להסיק מכך ש- $\underline{u} = \underline{w}$.

אנו יודעים שיש 2 זוויות בכל מחזור שעבורן $\cos\alpha = \cos\beta$, והן לא שוות. ומכאן שיכול להיות ש- $\underline{u}$ נמצא בכיוון אחר מ- $\underline{w}$.

<u>תוצאות מתוך נוסחת המכפלה הסקלרית :</u>

1. תוצאה ראשונה היא שכאשר מכפילים וקטור בעצמו על פי המכפלה הסקלרית, מקבלים את <u>גודלו בריבוע</u>.

כלומר : $\underline{u}\cdot\underline{u}=|\underline{u}|\cdot|\underline{u}|\cos\alpha$

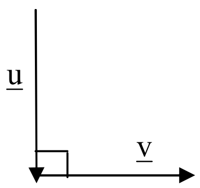
כאשר $\alpha=0$ (כי שניהם אותו וקטור!) ו- $\cos 0=1$

ולכן : $\underline{u}\cdot\underline{u}=|\underline{u}|^2$

ומכאן שניתן לחלץ גודל של וקטור : $|\underline{u}|=\sqrt{\underline{u}\cdot\underline{u}}=\sqrt{\underline{u}^2}$

$$\boxed{|\underline{u}|^2=\underline{u}^2}$$

2. באותו אופן שני וקטורים ניצבים – מכפלתם 0.

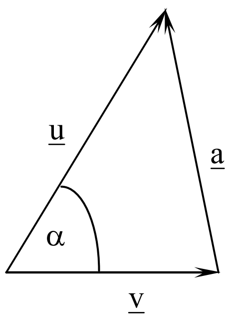


$\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cos 90^0=0$

כי : $\cos 90^0=0$

ולכן תנאי ניצבות של וקטורים : $\underline{u}\cdot\underline{v}=0$

3. אם נתון וקטור המיוצג ע"י וקטורים נתונים כמו בציור הבא :



$\underline{a}=\underline{u}-\underline{v}$

ורוצים להעלות אותו בריבוע, מתקיימת הנוסחה שאנו כבר מכירים :

$(\underline{u}-\underline{v})^2=\underline{u}^2-2\underline{u}\cdot\underline{v}+\underline{v}^2$

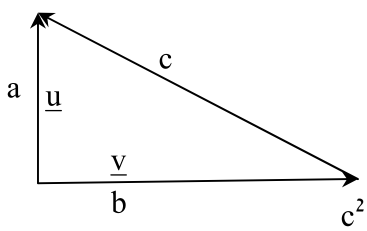
כאשר $|\underline{u}|^2=\underline{u}^2$ כפי שכבר ראינו,

$|\underline{v}|^2=\underline{v}^2$ כפי שכבר ראינו,

$2|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cos\alpha=2\underline{u}\cdot\underline{v}$

דוגמאות לשימוש בתוצאות שקיבלנו :

י. הוכיחן כי כל משולש שמקיים $a^2+b^2=c^2$, הוא ישר זווית.



הוכחה :

נגדיר : $a=\underline{u}$

$b=\underline{v}$

מכאן מקבלים : $c=\underline{u}-\underline{v}$

$c^2=(\underline{u}-\underline{v})^2=\underline{u}^2-2\underline{u}\underline{v}+\underline{v}^2$

כבר למדנו שאם : $a=\underline{u}$

אז : $a^2=\underline{u}^2$

כך גם : $b^2=\underline{v}^2$

ועל ידי הצבה : $c^2=\underline{u}^2-2\underline{u}\underline{v}+\underline{v}^2=a^2-2\underline{u}\underline{v}+b^2$

ומתוך התנאי : $c^2=a^2+b^2$

מתקיים : $-2\underline{u}\underline{v}=0$

וזהו תנאי ניצבות, כי: $-2\underline{u}\,\underline{v}=0=-2|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cos\alpha$

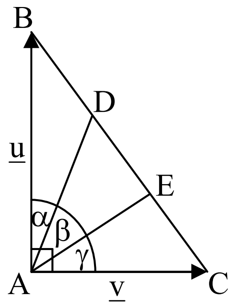
אבל $\underline{u}\neq 0$ $\underline{v}\neq 0$, לכן: $\cos\alpha=0$

כלומר: $\alpha=90^0$

ולכן המשולש הוא <u>ישר זווית</u> !

כפי שאנו רואים עכשיו, כבר יש בידינו כלים לפתור שאלות יותר "משמעותיות".

יא. נתון משולש ישר זווית ABC , ונתון:



$\overrightarrow{AB}=\underline{u}$ $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$

$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{DB}$

$|\underline{u}|=7$ $|\underline{v}|=5$

א. הביעו את הווקטורים $\overrightarrow{AD}$ ו $\overrightarrow{AE}$ בעזרת $\underline{u},\underline{v}$.

ב. מִצאו את הזוויות: α,β,γ .

פתרון:

א. מציאת $\overrightarrow{AD}$:

כפי שכבר למדנו נבחר מסלול: $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$

לפי הנתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$

למדנו כבר: $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}(\underline{v}-\underline{u})$

אחרי הצבה: $\overrightarrow{AD}=\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}-\frac{1}{3}\underline{u}$

$$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}$$

באותו אופן נמצא את $\overrightarrow{AE}$: $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}$

$$\overrightarrow{AE}=\underline{u}+\frac{2}{3}(\underline{v}-\underline{u})$$

$$\overrightarrow{AE}=\underline{u}+\frac{2}{3}\underline{v}-\frac{2}{3}\underline{u}=\frac{2}{3}\underline{v}+\frac{1}{3}\underline{u}$$

ב. עתה נעבור למציאת הזוויות.

לפי הנוסחה: $\cos\alpha=\frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}$

ומתוך שלמדנו ש: $|\underline{u}|=\sqrt{\underline{u}^2}$, נוכל לחשב את הגדלים הנדרשים.

למציאת זווית α :

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|}$$

אחרי הצבה:

$$\cos\alpha=\frac{\underline{u}\cdot\left(\frac{2}{3}\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}\right)}{|\underline{u}|\cdot\sqrt{\left(\frac{2}{3}\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}\right)^2}}=\frac{\frac{2}{3}\underline{u}^2+\frac{1}{3}\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}|\cdot\sqrt{\frac{4}{9}\underline{u}^2+\frac{4}{9}\underline{u}\cdot\underline{v}+\frac{1}{9}\underline{v}^2}}$$

אך המשולש הוא ישר זווית, כלומר המכפלות $\underline{u}\cdot\underline{v}=0$!

לכן:
$$\cos\alpha=\frac{\frac{2}{3}\underline{u}^2}{|\underline{u}|\cdot\sqrt{\frac{4}{9}\underline{u}^2+\frac{1}{9}\underline{v}^2}}$$

ומכיוון ש: $\underline{u}^2=|\underline{u}|^2=49$

ו: $\underline{v}^2=|\underline{v}|^2=25$

נוכל להציב:
$$\cos\alpha=\frac{\frac{2}{3}\cdot 49}{7\cdot\sqrt{\frac{4}{9}\cdot 49+\frac{1}{9}\cdot 25}}=\frac{32.67}{7\cdot 4.96}=0.942$$

$\alpha=19.6^0$

באותו אופן – מציאת β :

$$\cos\beta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AE}|}=\frac{\left(\frac{2}{3}\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\underline{u}+\frac{2}{3}\underline{v}\right)}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{3}\underline{u}+\frac{2}{3}\underline{v}\right)^2}}=$$

$$=\frac{\frac{2}{9}\underline{u}^2+\frac{5}{9}\underline{u}\cdot\underline{v}+\frac{2}{9}\underline{v}^2}{\sqrt{\frac{4}{9}\underline{u}^2+\frac{4}{9}\underline{u}\cdot\underline{v}+\frac{1}{9}\underline{v}^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{9}\underline{u}^2+\frac{4}{9}\underline{u}\cdot\underline{v}+\frac{4}{9}\underline{v}^2}}$$

ואחרי הצבה של $\underline{u}\cdot\underline{v}=0$:

$$\cos\beta=\frac{\frac{2}{9}\cdot 49+\frac{2}{9}\cdot 25}{\sqrt{\frac{4}{9}\cdot 49+\frac{1}{9}\cdot 25}\cdot\sqrt{\frac{1}{9}\cdot 49+\frac{4}{9}\cdot 25}}=\frac{16.44}{4.95\cdot 4.07}=0.816$$

$\beta=35.31^0$

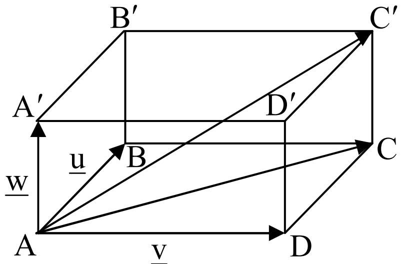
כך גם נמצא את γ :

$$\cos\gamma=\frac{\left(\frac{1}{3}\underline{u}+\frac{2}{3}\underline{v}\right)\cdot\underline{v}}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\underline{u}+\frac{2}{3}\underline{v}\right)^2}\cdot|\underline{v}|}=\frac{\frac{1}{3}\cancelto{0}{\underline{u}\cdot\underline{v}}+\frac{2}{3}\underline{v}^2}{\sqrt{\frac{1}{9}\underline{u}^2+\frac{4}{9}\cancelto{0}{\underline{u}\cdot\underline{v}}+\frac{4}{9}\underline{v}^2}\cdot|\underline{v}|}=$$

$$=\frac{\frac{2}{3}\cdot 25}{\sqrt{\frac{1}{9}\cdot 49+\frac{4}{9}\cdot 25}\cdot 5}=\frac{26.67}{4.07\cdot 5}=0.819$$

$\gamma=35.01^0$

יב. בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ נתון:



$\overrightarrow{AB}=\underline{u} \qquad \overrightarrow{AD}=\underline{v} \qquad \overrightarrow{AA'}=\underline{w}$

$|\underline{u}|=|\underline{v}|=3 \qquad |\underline{w}|=1$

א. הביעו את הווקטורים $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{AC'}$ באמצעות $\underline{u},\underline{v},\underline{w}$.

ב. מִצאו את הזווית $\sphericalangle C'AC$.

פתרון:

א. למציאת $\overrightarrow{AC'}$:

מסלול: $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CC'}=\underline{v}+\underline{u}+\underline{w}$

למציאת $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\underline{v}+\underline{u}$

ב. לפי הנוסחה למציאת זווית:

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|}$$

$$\cos\alpha=\frac{(\underline{v}+\underline{u})(\underline{v}+\underline{u}+\underline{w})}{\sqrt{(\underline{v}+\underline{u})^2}\cdot\sqrt{(\underline{v}+\underline{u}+\underline{w})^2}}=$$

$$=\frac{\underline{v}^2+\underline{u}\cdot\underline{v}+\underline{v}\cdot\underline{w}+\underline{u}\cdot\underline{v}+\underline{u}^2+\underline{u}\cdot\underline{w}}{\sqrt{\underline{v}^2+2\underline{u}\cdot\underline{v}+\underline{u}^2}\cdot\sqrt{\underline{v}^2+\underline{v}\cdot\underline{u}+\underline{v}\cdot\underline{w}+\underline{u}\cdot\underline{v}+\underline{u}^2+\underline{u}\cdot\underline{w}+\underline{w}\cdot\underline{v}+\underline{w}\cdot\underline{u}+\underline{w}^2}}$$

מכיוון שזו תיבה, הווקטורים $\underline{u},\underline{v},\underline{w}$ מאונכים זה לזה.

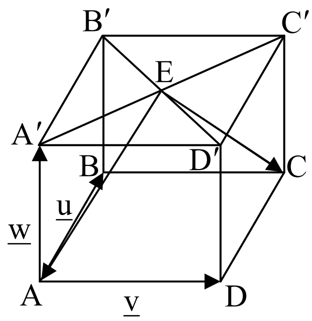
לכן כל המכפלות הסקלריות המעורבות שוות 0, ונותר רק:

$$\cos\alpha=\frac{\underline{v}^2+\underline{u}^2}{\sqrt{\underline{v}^2+\underline{u}^2}\cdot\sqrt{\underline{v}^2+\underline{u}^2+\underline{w}^2}}=\frac{9+9}{\sqrt{9+9}\cdot\sqrt{9+9+1}}$$

$$\cos\alpha=\frac{18}{\sqrt{18\cdot\sqrt{19}}}=0.973$$

$$\alpha=13.26^0$$

יג. בקובייה $ABCDA'B'C'D'$ נתון:



$\overrightarrow{AB}=\underline{u} \qquad \overrightarrow{AD}=\underline{v} \qquad \overrightarrow{AA'}=\underline{w}$

E - נקודת מפגש האלכסונים של הבסיס העליון.

א. בַּטאו את הווקטורים $\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EC}$ באמצעות $\underline{u},\underline{v},\underline{w}$.

ב. מִצאו את הזווית $\sphericalangle AEC$.

פתרון:

א. $\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{EA'}+\overrightarrow{A'A}$

$$\overrightarrow{EA'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{C'A'}=\frac{1}{2}(-\underline{v}-\underline{u})=-\frac{1}{2}\underline{v}-\frac{1}{2}\underline{u}$$

$$\overrightarrow{A'A}=-\underline{w}$$

ולכן: $\overrightarrow{EA}=-\frac{1}{2}\underline{v}-\frac{1}{2}\underline{u}-\underline{w}$

$$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EC'}+\overrightarrow{C'C}$$

$$\overrightarrow{EC'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}=\frac{1}{2}\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{u}$$

$$\overrightarrow{C'C}=-\underline{w}$$

$$\overrightarrow{EC}=\frac{1}{2}\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{u}-\underline{w}$$

ב. לכאורה חסרים לנו נתונים בדבר אורך הצלעות. אבל מכיוון שזו קובייה:

$$|\underline{u}|=|\underline{v}|=|\underline{w}|$$

נוכל להשתמש בשוויון זה כדי לחלץ את הזווית.

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EC}}{|\overrightarrow{EA}|\cdot|\overrightarrow{EC}|}=\frac{\left(-\frac{1}{2}\underline{v}-\frac{1}{2}\underline{u}-\underline{w}\right)\left(\frac{1}{2}\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{u}-\underline{w}\right)}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\underline{v}-\frac{1}{2}\underline{u}-\underline{w}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{2}\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{u}-\underline{w}\right)^2}}$$

מכיוון שזו קובייה, ואנו יודעים שכל המכפלות המעורבות שוות 0 (כי הווקטורים $\underline{w},\underline{v},\underline{u}$ ניצבים זה לזה) , לכן לצורך קיצור לא נרשום אותם כלל.

<u>ו... כן, מותר להשתמש בהערה זו במבחן ולצמצם את הרישום</u> !

בתנאי שרושמים את ההערה, וכמובן, היא צריכה להיות נכונה.

ונמשיך:

$$\cos\alpha=\frac{-\frac{1}{4}\underline{v}^2-\frac{1}{4}\underline{u}^2+\underline{w}^2}{\sqrt{\frac{1}{4}\underline{v}^2+\frac{1}{4}\underline{u}^2+\underline{w}^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{4}\underline{v}^2+\frac{1}{4}\underline{u}^2+\underline{w}^2}}$$

עתה נשתמש בשוויון שרשמנו כבר: $|\underline{u}|=|\underline{v}|=|\underline{w}|$

ונציב את כל הגדלים כ- $|\underline{u}|$:

$$\cos\alpha=\frac{-\frac{1}{4}\underline{u}^2-\frac{1}{4}\underline{u}^2+\underline{u}^2}{\sqrt{\frac{1}{4}\underline{u}^2+\frac{1}{4}\underline{u}^2+\underline{u}^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{4}\underline{u}^2+\frac{1}{4}\underline{u}^2+\underline{u}^2}}$$

ע"י כינוס איברים:

$$\cos\alpha=\frac{\frac{1}{2}\underline{u}^2}{\sqrt{1.5\underline{u}^2}\cdot\sqrt{1.5\underline{u}^2}}$$

הוצאת $\underline{u}^2$ מחוץ לשורש:

$$\cos\alpha=\frac{\frac{1}{2}\underline{u}^2}{\sqrt{1.5}\,|\underline{u}|\cdot\sqrt{1.5}\,|\underline{u}|}$$

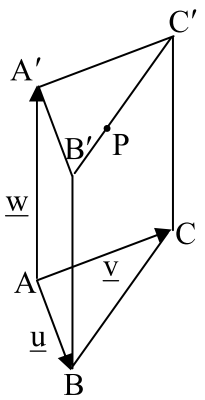
מכיוון ש- $\underline{u}^2=|\underline{u}|^2$ ניתן לצמצם את החילוק ולקבל:

$$\cos\alpha=\frac{\frac{1}{2}}{1.5}=\frac{1}{3}$$

$$\alpha=70.53^0$$

לאלה מהלומדים ה"נבהלים" מאורך הפתרונות ומורכבותם, אני חייב הרגעה.
אמנם יש פה הרבה חישובים אריתמטיים, אולם תרגול ושיטתיות בעבודה תגלה לכם שהמתכונת מאוד פשוטה וחוזרת על עצמה.
ואחרי הפוגה זו נמשיך עם...

יד. במנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה ישר זווית $\measuredangle A = 90°$,



נתון :

$\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$ $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$ $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$

$|\underline{u}| = 2$ $|\underline{v}| = 3$ $|\underline{w}| = 4$

P - נקודה המקיימת : $\overrightarrow{B'P} = t\overrightarrow{B'C'}$.

א. הביעו את הווקטורים $\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{AP}$ באמצעות $t, \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$.

ב. מִצאו עבור איזה t מתקבל משולש APC שווה שוקיים.

ג. מהן זוויות המשולש שווה השוקיים ?

פתרון :

א.

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'P}$$

$$\overrightarrow{AP} = \underline{u} + \underline{w} + t\overrightarrow{B'C'}$$

$$\overrightarrow{B'C'} = -\underline{u} + \underline{v}$$

ועל ידי הצבה :

$$\overrightarrow{AP} = \underline{u} + \underline{w} + t(-\underline{u} + \underline{v}) = (1-t)\underline{u} + \underline{w} + t\underline{v}$$

$$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'P} = \underline{w} + (1-t)\overrightarrow{C'B'}$$

$$\overrightarrow{C'B'} = -\overrightarrow{B'C'} = \underline{u} - \underline{v}$$

ואחרי הצבה :

$$\overrightarrow{CP} = \underline{w} + (1-t)\underline{u} - (1-t)\underline{v}$$

ב. כדי שהמשולש יהיה שווה שוקיים, צריך להתקיים:

$$|\overrightarrow{CP}| = |\overrightarrow{AP}|$$

כלומר :

$$\sqrt{(\overrightarrow{CP})^2} = \sqrt{(\overrightarrow{AP})^2}$$

נתין להכפיל את המשוואה בריבוע ולקיים :

$$(\overrightarrow{CP})^2 = (\overrightarrow{AP})^2$$

כלומר אנו נדרשים לשוויון :

$$(w + (1-t)\underline{u} - (1-t)\underline{v})^2 = ((1-t)\underline{u} + \underline{w} + t\underline{v})^2$$

מכיוון שהווקטורים $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ ניצבים זה לזה, המכפלות המעורבות שוות 0,
ולכן לא נרשום אותן ונקבל:

$$\underline{w}^2 + (1-t)^2\underline{u}^2 + (1-t)^2\underline{v}^2 = (1-t)^2\underline{u}^2 + \underline{w}^2 + t^2\underline{v}^2$$

$$(1-t)^2 = t^2$$

$$1 - 2t + t^2 = t^2$$

$$\frac{1}{2} = t$$

כלומר אנו מוצאים שללא כל קשר לאורך הווקטורים תמיד הנקודה P צריכה להיות אמצע $\overrightarrow{B'C'}$ כדי שהמשולש יהיה שווה שוקיים.

ג. כדי למצוא את זווית המשולש קל להתחיל דווקא מזווית הבסיס $\measuredangle PAC$.

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AP}\right|}=\frac{\underline{v}\cdot\left((1-t)\underline{u}+\underline{w}+t\underline{v}\right)}{\sqrt{\underline{v}^2}\cdot\sqrt{\left((1-t)\underline{u}+\underline{w}+t\underline{v}\right)^2}}$$

שני הווקטורים
יוצאים מנקודה A.

גם כאן מתאפסות המכפלות המעורבות, ולכן:

$$\cos\alpha=\frac{t\underline{v}^2}{\left|\underline{v}\right|\sqrt{(1-t)^2\,\underline{u}^2+\underline{w}^2+t^2\,\underline{v}^2}}$$

ובהצבה של: $t=\frac{1}{2}$ $\left|\underline{v}\right|=3$ $\left|\underline{u}\right|=2$ $\left|\underline{w}\right|=4$

$$\cos\alpha=\frac{\frac{1}{2}\cdot 9}{3\cdot\sqrt{\frac{1}{4}\cdot 4+16+\frac{1}{4}\cdot 9}}=0.34$$

$$\alpha=70^0$$

כלומר: $\measuredangle PAC=\measuredangle PCA=70^0$

וזווית הראש: $\measuredangle APC=40^0$

טו. בטטראדר $ABCS$ נתון שהבסיס הוא משולש שווה צלעות.

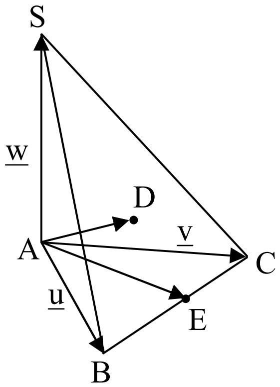
AS מאונך לבסיס.

E נקודה על אמצע המקצוע BC.

D נקודת מפגש התיכונים במשולש SCB.

נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$ $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$ $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$

$\underline{u}=\underline{v}=3$ $\underline{w}=5$



א. בַּטאו את הווקטורים $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}$.

ב. מְצאו את זווית $\measuredangle DAE$.

פתרון:

א.

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SD}$$

$$\overrightarrow{SD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{SE}$$

$$\overrightarrow{SE}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}$$

$$\overrightarrow{SE}=-\underline{w}+\underline{u}+\frac{1}{2}\left(-\underline{u}+\underline{v}\right)$$

$$\overrightarrow{SE}=-\underline{w}+\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}$$

אחרי הצבה:

$$\overrightarrow{AD}=\underline{w}+\frac{2}{3}\left(-\underline{w}+\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}\right)=\frac{1}{3}\underline{w}+\frac{1}{3}\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}$$

$$\overrightarrow{AE}=\underline{u}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\underline{u}+\frac{1}{2}\left(-\underline{u}+\underline{v}\right)=\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}$$

ב. מציאת הזווית :

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}}{\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AE}\right|} = \frac{\left(\frac{1}{3}\underline{w}+\frac{1}{3}\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\underline{w}+\frac{1}{3}\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}\right)^2}}$$

שימו לב !

הפעם רק $\underline{w}$ מאונך לווקטורים $\underline{v},\underline{u}$, אבל ביניהם יש זווית של 60^0. המכפלות המעורבות של וקטורים אלה אינן מתאפסות, ועלינו לחשב אותן.

מכיוון ש- $\underline{w}$ מאונך לווקטורים $\underline{v},\underline{u}$, לא נרשום מכפלות אלה כי הן מתאפסות, ומקבלים :

$$\cos\alpha = \frac{\frac{1}{6}\underline{u}^2+\frac{1}{6}\underline{u}\underline{v}+\frac{1}{6}\underline{v}\underline{u}+\frac{1}{6}\underline{v}^2}{\sqrt{\frac{1}{9}\underline{w}^2+\frac{1}{9}\underline{u}^2+\frac{1}{9}\underline{u}\underline{v}+\frac{1}{9}\underline{v}\underline{u}+\frac{1}{9}\underline{v}^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{4}\underline{u}^2+\frac{1}{2}\underline{u}\underline{v}+\frac{1}{4}\underline{v}^2}}$$

כדי להקל על ההצבה המספרית נבצע תחילה את חישוב המכפלה המעורבת $\underline{u}\cdot\underline{v}$:

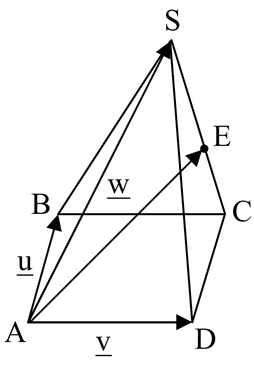
$$\underline{u}\cdot\underline{v} = |\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos 60 = 3\cdot 3\cdot\frac{1}{2} = 4.5$$

ניזכר בנתונים : $\underline{u}=\underline{v}=3 \quad \underline{w}=5$

$$\cos\alpha = \frac{\frac{1}{6}\cdot 9+\frac{2}{6}\cdot 4.5+\frac{1}{6}\cdot 9}{\sqrt{\frac{1}{9}\cdot 25+\frac{1}{9}\cdot 9+\frac{2}{9}\cdot 4.5+\frac{1}{9}\cdot 9}\cdot\sqrt{\frac{1}{4}\cdot 9+\frac{1}{2}\cdot 4.5+\frac{1}{4}\cdot 9}}$$

$$\cos\alpha = \frac{4.5}{\sqrt{5.78}\cdot\sqrt{6.75}} = 0.72$$

$$\alpha = 43.9^0$$



טז. נתונה פירמידה מרובעת $ABCDS$ שבסיסה רבוע.

$\overrightarrow{AS}=\underline{w} \qquad \overrightarrow{AD}=\underline{v} \qquad \overrightarrow{AB}=\underline{u}$

א. מִצאו את הווקטורים $\overrightarrow{AE}$ ו- $\overrightarrow{BD}$.

ב. הוכיחו כי אם $\overrightarrow{AS}$ מאונך ל- $\overrightarrow{BD}$, גם $\overrightarrow{AE}$ מאונך ל- $\overrightarrow{BD}$.

פתרון :

א.

$$\overrightarrow{BD} = -\underline{u}+\underline{v}$$

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE} = \underline{v}+\underline{u}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CS}$$

$$\overrightarrow{CS} = -\underline{u}-\underline{v}+\underline{w}$$

$$\overrightarrow{AE} = \underline{v}+\underline{u}+\frac{1}{2}\left(-\underline{u}-\underline{v}+\underline{w}\right) = \frac{1}{2}\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{w}$$

ב. הוכחות מסוג זה נשענות על הנתון: "אם..."

לכן יש לבדוק תחילה את הנתון ואילו תנאים בין הווקטורים מתקיימים לגביו:

נתון: $\overrightarrow{AS} \perp \overrightarrow{BD}$

כלומר מכפלתם הסקלרית = 0. $\underline{w} \cdot (-\underline{u} + \underline{v}) = 0$

עתה נעבור להוכיח כי גם: $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{BD}$

כדי לעשות זאת נמצא את המכפלה הסקלרית ביניהם:

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} = \left(\frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{w}\right)(-\underline{u} + \underline{v}) =$$

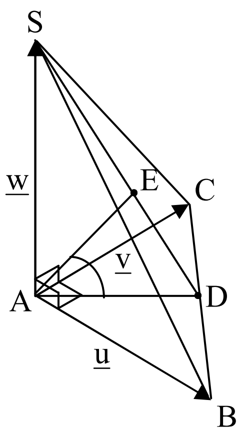
$$= \cancel{-\frac{1}{2}\underline{v}\underline{u}} + \frac{1}{2}\underline{v}^2 - \frac{1}{2}\underline{u}^2 + \cancel{\frac{1}{2}\underline{v}\underline{u}} + \frac{1}{2}\underline{w}(-\underline{u} + \underline{v})$$

לאחר כינוס איברים: $= \frac{1}{2}\underline{v}^2 - \frac{1}{2}\underline{u}^2 + \frac{1}{2}\underline{w}(-\underline{u} + \underline{v})$

לפי הנתון שהבסיס ריבוע $\underline{u}^2 = \underline{v}^2$ ולכן: $\frac{1}{2}\underline{v}^2 - \frac{1}{2}\underline{u}^2 = 0$

וכבר מצאנו מהנתון $\overrightarrow{AS} \perp \overrightarrow{BD}$ ש: $\underline{w}(-\underline{u} + \underline{v}) = 0$

ולכן: $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} = \cancel{\frac{1}{2}\underline{v}^2} - \cancel{\frac{1}{2}\underline{u}^2} + \frac{1}{2}\underline{w}(-\underline{u} + \underline{v}) = 0$



יז. נתונה פירמידה משולשת $ABCS$

שבסיסה משולש ישר זווית $(\sphericalangle a = 90^0)$.

$\overrightarrow{AB} = \underline{u} \quad \overrightarrow{AC} = \underline{v} \quad \overrightarrow{AS} = \underline{w}$

ונתון: $\overrightarrow{AS}$ מאונך לבסיס.

D נקודת אמצע הצלע BC.

$|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| = 1$

E נקודה המקיימת: $\overrightarrow{DE} = t\overrightarrow{DS}$.

מה צריך להיות ערכו של t שעבורו $\sphericalangle EAD = 60^\circ$?

פתרון:

כבר ראינו שהנוסחה למציאת זווית היא: $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AE}| \cdot |\overrightarrow{AD}|}$

לכן נתחיל במציאת הווקטורים.

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \underline{u} + \frac{1}{2}(-\underline{u} + \underline{v}) = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}$$

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + t\overrightarrow{DS}$$