אי שוויון עם ערך מוחלט

חזרה ותזכורת

בטרם נעסוק באי שוויון עם ערך מוחלט, נערוך תזכורת קצרה לטכניקות של אי שוויונות בכלל. (מי שאמון על טכניקות אלה יכול לעבור מיד לנושא עצמו).

פתרון אי שוויון לינארי:

נפתור את אי השוויון: $1-4x<5$

תחילה נעביר אגפים: $-4x<4$

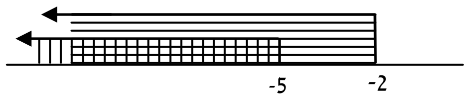
נחלק במקדם: $x>-1$ (הכפלה או חילוק במספר שלילי הופכים את הסימן!)

פתרון מערכת "או": $4x-3 > 7x+12$ או $7x < 2x-10$

$-3x>15$ $\quad$ $5x<-10$

$x<-5$ $\quad$ $x<-2$

הצגת הפתרונות:



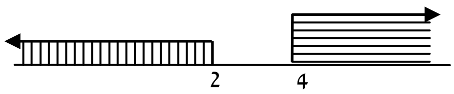
והתשובה הסופית: $x<-2$

פתרון מערכת "וגם": $5x+7<6x+3<15$

פירוק אי השוויונות: $6x+3<15$ וגם $5x+7<6x+3$

$6x<12$ $\quad$ $-x<-4$

$x<2$ $\quad$ $x>4$



והפתרון: $x = \phi$

בדיקת הבנה

פתרו את אי השוויונות הבאים:

1. $2x-5<4(3x-1)$ או $2(x+8)+7(x-1)>5$
2. $x-2<3(2x+5)-9<19$

פתרון אי שוויון ריבועי: $x^2-5x+6>0$

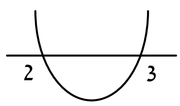
ישנן שתי גישות עיקריות לפתרון אי שוויון זה.

<u>דרך ראשונה</u>:

נמצא תחילה את שורשי המשוואה: $x^2-5x+6=0$

השורשים הם: $x_1=2 \quad x_2=3$

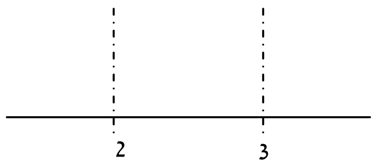
עתה נשרטט סכֵמטית את הפונקציה. מכיוון שהמקדם של x^2 חיובי, זוהי פונקציית מינימום, ולכן צורתה הכללית היא:



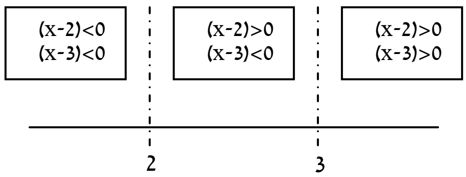
מהציור רואים שהפונקציה חיובית כאשר: $x<2$ או $x>3$

<u>דרך שנייה</u> :

על ידי פירוק לגורמים בעזרת טרינום (או לאחר מציאת השורשים) אנו מקבלים את הפונקציה בכיתוב חדש : $(x-2)(x-3)>0$ כדי למצוא את הקיום של הפונקציה משרטטים את הישר הממשי ומקצים עליו את נקודות ה-0. כל נקודה כזו מכתיבה תחום :



עכשיו בודקים בכל תחום את סימנו של כל גורם במכפלה :



מהתבוננות בתחומים אנו רואים שבתחום $x<2$ האיבר $(x-2)<0$ והאיבר $(x-3)<0$. לכן מכפלת הפונקציה חיובית בתחום זה.

בתחום $2<x<3$ האיבר $(x-2)>0$ והאיבר $(x-3)<0$. לכן מכפלת הפונקציה שלילית בתחום זה.

בתחום $x>3$ האיבר $(x-2)>0$ והאיבר $(x-3)>0$. לכן מכפלת הפונקציה שוב חיובית בתחום זה.

ומכאן : בתחומים $x<2$, $x>3$ הפונקציה חיובית, ומתקיים אי השוויון. בתחום $2<x<3$ הפונקציה שלילית, ואין היא מקיימת את אי השוויון.

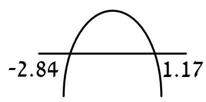
לכן גם כאן מתקבל הפתרון : $x>3$ או $x<2$

דוגמה נוספת : $-3x^2-5x+10>0$

במקרה זה די קשה לפרק את הביטוי על פי טרינום, אבל קל למצוא את השורשים של נקודות ה- 0 על פי נוסחת השורשים. מקבלים : $x_2=-2.84$ $x_1=1.17$

לפי הדרך הראשונה :

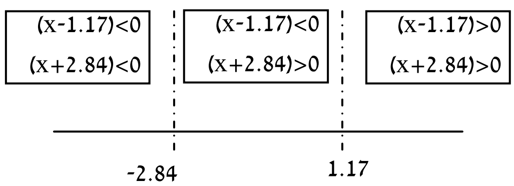
שִׂרטוט :



והפתרון : $-2.84<x<1.17$

לפי הדרך השנייה :

הפונקציה היא : $(x-1.17)(x+2.84)<0$ (היפוך הסימן נובע מהעובדה שיש פה חלוקה ב- (-3)), ואחרי הצבה בתחומים מתקבלת אותה תוצאה :



בדיקת הבנה

פתרו את אי השוויונות הבאים :

3. $2x^2-x-15<0$

4. $-x^2+7x-10<0$

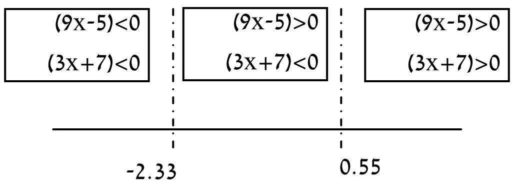
פתרון אי שוויון של שבר : $\frac{9x-5}{3x+7}>0$

במצב של שבר לא ניתן להכפיל את אי השוויון במכנה (כי איננו יודעים אם הוא חיובי, והסימן נשאר על כנו; או שהוא שלילי, ועל הסימן להתהפך). ניתן, כמובן, להשתמש בטכניקה של הדרך השנייה שהראינו בפתרון אי שוויון ריבועי (כי מה שנכון לכפל נכון גם לחילוק), או להכפיל את אי השוויון בחזקה שנייה של המכנה (דבר שיבטיח שההכפלה היא חיובית, והסימן יישאר כמות שהוא).

לפי שיטת התחומים : $9x-5=0 \rightarrow x=0.55$

$3x+7=0 \rightarrow x=-2.33$

ואחרי הצבה בתחומים :



והתוצאה : $x<-2.33$ או $x>0.55$

לפי שיטת המכפיל : $(9x-5)(3x+7)>0$, ומכאן והלאה הפתרון הוא של אי שוויון ריבועי ולא של שבר (ואי שוויון ריבועי כבר למדנו).

מה עלינו לעשות אם באגף ימין של אי השוויון יהיה מספר ולא שבר ?

נפתור : $\frac{9x-7}{4-3x}<5$

שלב מקדים יהיה להביא את ה- 0 לאגף ימין, לכן :

$$\frac{9x-7}{4-3x}<5$$

$$\frac{9x-7}{4-3x}-5<0$$

עתה נביא את אי השוויון לתבנית המוכרת :

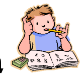
$$\frac{9x-7}{4-3x}-5<0$$

$$\frac{9x-7-5(4-3x)}{4-3x}<0$$

$$\frac{9x-7-20+15x}{4-3x}<0$$

$$\frac{24x-27}{4-3x}<0$$

ומכאן והלאה כבר ראינו איך פותרים.

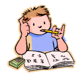


בדיקת הבנה

פתרו את אי השוויונות הבאים :

5. $\frac{2x-3}{2x+3} < 0$

6. $\frac{3-4x}{x+7} > 6$



תרגול עצמי

פתרו את אי השוויונות הבאים :

7. $x - 3 < 2(3x + 4) < 7x - 5$

8. $x^2 + 2x + 5 > 0$ וגם $-2x^2 + 7x - 9 < 0$

9. $-11 < 3x^2 - 4x - 15 < 6$

10. $\frac{2x+5}{7-x} < -1$

11. $0 < \frac{x-5}{3x+1} < 1$

12. $\frac{x^2+5x-1}{x+1} < 3$

<u>אי שוויון עם ערך מוחלט</u>

עוד שלב אחד נקדים לפני שנתחיל ללמוד את הטכניקה של פתרון אי שוויון עם ערך מוחלט; נחדד קצת את ההבנה של משמעות הערך המוחלט.

לא לחינם נקרא הנושא העוסק בלימוד מספרים שליליים, "מספרים מכוונים". כאשר אנו מייצגים את מערכת המספרים על הישר הממשי, אנו יודעים שמשמעות הסימן "-" הוא הֵפוֹך כיוון (או לך שמאלה), ומשמעות הסימן "+" הוא הֶמשֵך בכיוון הרגיל (או לך ימינה), כלומר אנו רואים שהסימנים מייצגים כיוון (מכוונים מלשון כיוון). סימן הערך המוחלט מייצג <u>גודל</u> לכל הכיוונים, כלומר הוא מייצג <u>מרחק</u> מנקודה מסוימת, ולא משנה לאיזה כיוון פונים. (אם תרצו, הרי הוא מזכיר את מושג הרדיוס).

לכן כאשר אנחנו רואים את הביטוי: $|x| = 3$, אנו מבינים שגודלו של x הוא 3 לכל הכיוונים, ולכן x=3 (בכיוון ימין) או x=-3 (בכיוון שמאל).

אותו הדבר לגבי השוויון: $|x-5| = 7$ אנו יודעים שמתקבלות שתי אפשרויות:

x-5=7 או x-5=-7

כאשר אנו באים לטפל באי שוויון של ערך מוחלט, המשמעות אינה משתנה.

הביטוי: $|x| > 7$ גם הוא מצביע על כך שגודלו של x גדול מהערך 7 בכל הכיוונים. לכן מתקבלות שתי אפשרויות: x>7 בכיוון ימין או x<-7 בכיוון שמאל.

כך גם לגבי ביטויים כמו: $|2x+6| > 10$

הפתרון הוא:

2x+6>10 או 2x+6<-10

וההמשך: 2x>4 2x<-16

x>2 x<-8

תשובה: x>2 או x<-8

כך גם לגבי ביטוי כמו: $|3-4x| > 15$

אנו כבר יודעים ש:

3-4x>15 או 3-4x<-15

וההמשך: -4x>12 -4x<-18

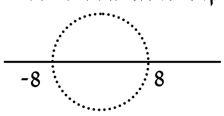
תזכורת: כאן עלינו לחלק את הביטוי במספר שלילי. ראינו שסימן "-" הוא סימן לשינוי כיוון. לכן בכל פתרון אי שוויון כאשר מחלקים אותו במספר שלילי, יש להפוך את הכיוון חזרה כדי לשמור על שקילות. במילים אחרות; עלינו להפוך סימן. לכן:

x<-3 או x>4.5

עד כאן עסקנו במצב של ערך מוחלט <u>גדול</u> ממספר. כאשר אנו עוברים לאי שוויון עם ערך מוחלט <u>קטן</u> ממספר, המשמעות אמנם לא משתנה, אבל ההיבט המתמטי נראה אחרת. ניקח לדוגמה את הביטוי:

$|x| < 8$. אנו יודעים שהמשמעות היא ש- x קטן מ- 8

<u>בכל הכיוונים</u>, כלומר: x<8 **<u>וגם</u>** x>-8 .



כלומר אנו רואים שכדי לשמר את אותה המשמעות של הערך המוחלט, כאשר אנו מבקשים למצוא ערך מוחלט קטן ממספר, אנו מקבלים מערכת "וגם", או בכתיבה מתמטית:

אם: $|x| < a$

אז: $-a<x<a$

ולכן עבור הביטוי: $|2x-5| < x+12$

הפתרון:

$2x-5<x+12$	וגם	$2x-5>-(x+12)$
$x<17$		$2x-5>-x-12$
		$3x>-7$
		$x>-2.33$

תשובה סופית: $-2.33<x<17$

מבחינה טכנית אנו יכולים לבנות את התבנית הבאה:

עבור:	$\lvert F(x)\rvert > a$	$\lvert F(x)\rvert < a$
פותרים את המערכת:	$F(x) > a$ **<u>או</u>** $F(x) < -a$	כלומר: $-a < F(x) < a$ $F(x) < a$ **<u>וגם</u>** $F(x) > -a$

בשני המקרים אנו רואים שבונים מערכת. בפעם הראשונה פשוט מתעלמים מסימן הערך המוחלט, ובפעם השנייה הופכים את הסימן ומציבים "-" לפני אגף ימין.

נעבור למספר דוגמאות נוספות:

א. פתרו את אי השוויון: $x < |2x-3| < 10$

פתרון:

ראשית עלינו לפרק את אי השוויון למערכת: $|2x-3| < 10$ (2) **<u>וגם</u>** $x < |2x-3|$ (1)

נתחיל עם אי שוויון (1):

גם הוא מתפרק למערכת אי שוויונות (אבל זו מערכת "או"):

$2x-3>x$	או	$2x-3<-x$
$x>3$		$3x<3$
		$x<1$

תשובה סופית ל- (1): $x>3$ או $x<1$

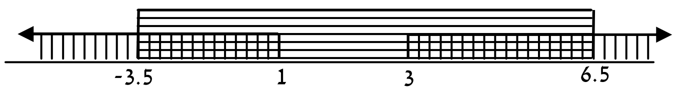
נעבור לאי שוויון (2):

גם הוא מתפרק למערכת אי שוויונות (מערכת "וגם"):

$2x-3<10$	וגם	$2x-3>-10$
$2x<13$		$2x>-7$
$x<6.5$		$x>-3.5$

תשובה סופית ל- (2): $-3.5<x<6.5$

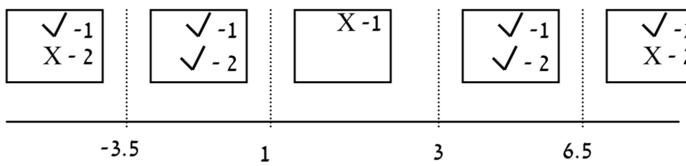
כדי להגיע לפתרון הכללי נשרטט את שתי התוצאות הסופיות:



תשובה: <u>$-3.5<x<1$ או $3<x<6.5$</u>

פתרון לפי שיטת התחומים:

תחילה נשרטט את התחומים השונים (כמו שראינו בשיטה הקודמת), ואחר כך נציב ערכים באי שוויונות כדי למצוא אילו מהם מתקיימים ואילו לא.



נבחר נקודות בתחומים השונים שהתקבלו, ונציב אותן באי שוויונות:

עבור $x = -4$: (נקודה משמאל ל- 3.5-)

אי שוויון (1) מתקיים: $-4<1$ אי שוויון (2) לא מתקיים: $-3.5 \nless -4$ לכן תחום זה איננו פתרון.

עבור $x = 0$:

אי שוויון (1) מתקיים: $0<1$ אי שוויון (2) מתקיים: $-3.5<0<6.5$ לכן תחום זה הוא פתרון.

עבור $x = 2$:

אי שוויון (1) לא מתקיים: $2 \nless 1$ וזה כבר מוכיח כי תחום זה איננו פתרון.

עבור $x = 4$:

אי שוויון (1) מתקיים: $4>3$ אי שוויון (2) מתקיים: $-3.5<4<6.5$ לכן תחום זה הוא פתרון.

עבור $x = 7$:

אי שוויון (1) מתקיים: $7>3$ אי שוויון (2) לא מתקיים: $7 \nless 6.5$ לכן תחום זה איננו פתרון.

התחומים היחידים שבהם שני אי השוויונות מתקיימים הם: <u>$-3.5<x<1$ או $3<x<6.5$</u>

מכאן והלאה אנו נציג פתרונות רק לפי השיטה הראשונה בשל הכתיבה המקוצרת.

<u>בדיקת הבנה</u>

13. פתרו את אי השוויון: $15 < |10-2x| < 20$

14. פתרו את אי השוויון: $2 \le |x-5| \le 6$

ב. פתרו את אי השוויון: $|x^2-3x+5| > 15$

פתרון:

על אף שהפעם אנו מחפשים ערך מוחלט של פונקציה ריבועית, הרי שדרך הפתרון נשארת זהה:

$x^2-3x+5>15$ או $x^2-3x+5<-15$

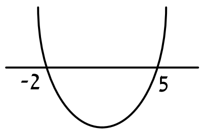
$x^2-3x-10>0$ $\quad$ $x^2-3x+20<0$

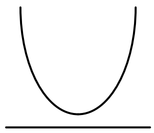
הפעם נְפַתח את הפתרונים לטובת מי שאיננו זוכר פתרון אי שוויון ריבועי :

נמצא נקודות אפס עבור : $x^2-3x-10=0$ $\qquad$ $x^2-3x+20=0$

פתרון המשוואה הריבועית : $x_1=5 \quad x_2=-2$ $\qquad$ אין פתרון

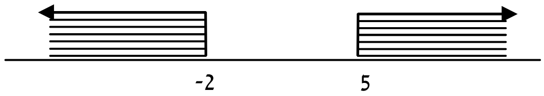
ועל ידי שִׂרטוט :





התוצאה : $x<-2$ או $x>5$ $\qquad$ אין פתרון

שִׂרטוט התוצאות :



ומכיוון שבמערכת "או" אנו עוסקים, התשובה היא : $x>5$ או $x<-2$.

ג. פתרו את אי השוויון : $6 \le \left|x^2-4x-6\right| \le 15$

פתרון :

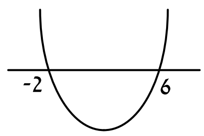
כמו תמיד נתחיל בפירוק אי השיוויון : $1)\ 6 \le \left|x^2-4x-6\right| \qquad 2)\ \left|x^2-4x-6\right| \le 15$

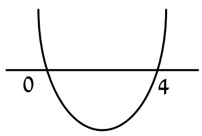
פתירת אי שיוויון (1) :

בניית המערכת : $x^2-4x-6 \ge 6$ או $x^2-4x-6 \le -6$

סידור התבנית : $x^2-4x-12 \ge 0$ $\qquad$ $x^2-4x \le 0$

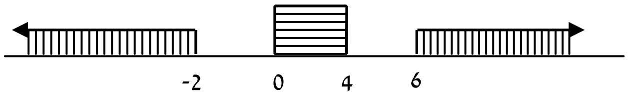
שִׂרטוט :





פתרון : $x \le -2$ או $x \ge 6$ או $0 \le x \le 4$

תשובה סופית לאי שוויון (1) :



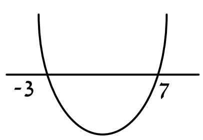
כלומר : $x \ge 6$ או $x \le -2$ או $0 \le x \le 4$

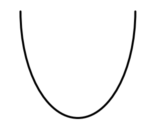
פתירת אי שוויון (2) :

בניית המערכת : $x^2-4x-6 \le 15$ וגם $x^2-4x-6 \ge -15$

סידור התבנית : $x^2-4x-21 \le 0$ $\qquad$ $x^2-4x+9 \ge 0$

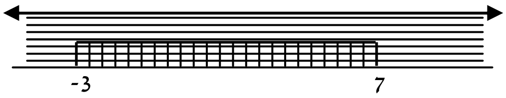
שִׂרטוט :





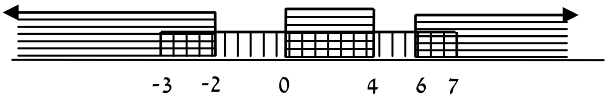
פתרון : $-3 \le x \le 7$ וגם כל x

תשובה סופית לאי שוויון (2):

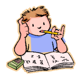


כלומר: $-3 \le x \le 7$

מכיוון שמערכת אי השוויונות (1) ו- (2) היא מערכת "וגם", מתקבלת התשובה:



ולכן: $6 \le x \le 7$ או $0 \le x \le 4$ או $-3 \le x \le -2$



בדיקת הבנה

15. פתרו את אי השוויון: $3 \le |x^2 + 4x - 2| \le 5$

16. פתרו את אי השוויון: $2 \le |2x^2 + 2x - 4| \le 8$

באותו אופן אנו פותרים גם אי שוויון של ערך מוחלט עם שברים, אלא שבמקרים של שבר יש לבדוק גם את תחום ההגדרה. בכל תחום שנקבל, נבדוק שהשבר מוגדר לכל התחום.

ד. פתרו את אי השוויון: $\left|\frac{x-4}{x-5}\right| < 7$

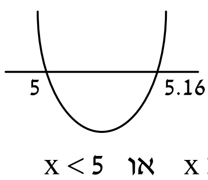
פתרון:

כרגיל נפרק את אי השוויון לשלוש: $\frac{x-4}{x-5} < 7$ (1) וגם $\frac{x-4}{x-5} > -7$ (2) וגם $x \neq 5$ (3)

נפתור את אי שוויון (1) על ידי הכפלה בריבוע המכנה:

$$(x-4)(x-5)<7(x-5)^2$$
$$x^2-4x-5x+20<7(x^2-10x+25)$$
$$x^2-4x-5x+20<7x^2-70x+175$$
$$0<6x^2-61x+155$$

שִׂרטוט:



פתרון אי שוויון (1): $x > 5.16$ או $x < 5$

נפתור את אי שוויון (2) לפי העברת אגפים ומכנה משותף:

$$\frac{x-4}{x-5}+7>0$$
$$\frac{x-4+7(x-5)}{x-5}>0$$
$$\frac{x-4+7x-35}{x-5}>0$$
$$\frac{8x-39}{x-5}>0$$

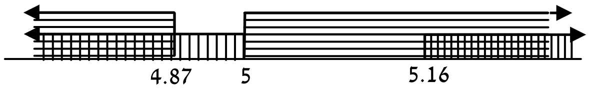
מכיוון שאנו מחפשים ערך חיובי, מתקיימת המערכת :

8x-39>0 וגם x-5>0 או 8x-39<0 וגם x-5<0

וההמשך : x>4.875 וגם x>5 או x<4.875 וגם x<5

פתרון אי שוויון (2) : x>5 או x<4.875

איחוד פתרונים (1) , (2) ו- (3) :



כלומר : $x > 5.16$ או $x < 4.87$

בדיקת הבנה

17. פתרו את אי השוויון : $6 > \left|\frac{2x+16}{3x-9}\right|$

18. פתרו את אי השוויון : $1 > \left|\frac{3x+1}{x+8}\right|$

גם כאן ניתן למצוא פונקציה ריבועית במונה, במכנה או בשניהם. דרך הפתרון לא תשתנה. יכול להיות שייתוספו עוד פרטים חישוביים (שיְאַטּוּ קצת את קֶצֶב הפתרון), אולם בפועל אין שינוי. אם נשכיל כל פעם לפרק את אי השוויונות ולטפל רק באלמנט אחד לאורך הפתרון, ניווכח שגם התרגילים המורכבים יותר נעשים די פשוטים. כאן באה לידי ביטוי חשיבות העבודה השיטתית. אני מקווה שהדוגמה הבאה תבהיר את העניין. (הערה : הדוגמה הבאה היא מעבר לדרישות משרד החינוך וניתן לדלג עליה.)

ה. פתרו את אי השוויון : $3 < \left|\frac{x^2+2x-8}{x^2-4x+3}\right| < 10$

במקרה זה אין צורך לבדוק את המכנה באופן ספציפי כי ממילא הוא שונה מ-0 במהלך הפתרון (כפי שנראה).

פתרון :

פירוק ראשון : (1) $3 < \left|\frac{x^2+2x-8}{x^2-4x+3}\right|$ וגם $\left|\frac{x^2+2x-8}{x^2-4x+3}\right| < 10$ (2)

פירוק שני של אי שוויון (1) :

(3) $3 < \frac{x^2+2x-8}{x^2-4x+3}$ או $-3 > \frac{x^2+2x-8}{x^2-4x+3}$ (4)

נפתור את אי שוויון (3) על ידי העברת אגפים ומכנה משותף. (קשה לבצע פה הכפלה בריבוע של המכנה!!)

$$0 < \frac{x^2+2x-8}{x^2-4x+3} - 3$$

$$0 < \frac{x^2+2x-8-3x^2+12x-9}{x^2-4x+3}$$

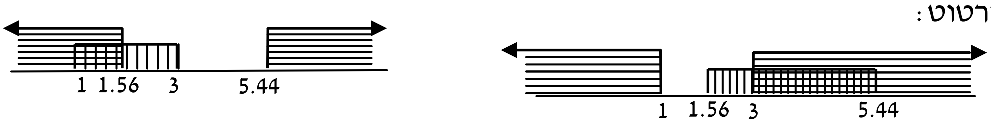
$$0 < \frac{-2x^2+14x-17}{x^2-4x+3}$$

$-2x^2+14x-17>0$ וגם $x^2-4x+3>0$ או $-2x^2+14x-17<0$ וגם $x^2-4x+3<0$

שִׂרטוט :

פתרון : $1.56<x<5.44$ וגם $\{x<1$ או $x>3\}$ או $\{x<1.56$ או $x>5.44\}$ וגם $1<x<3$

שִׂרטוט :



פתרון צד ימין : $3<x<5.44$ פתרון צד שמאל: $1<x<1.56$

פתרון אי שוויון (3) : <u>$3<x<5.44$ או $1<x<1.56$</u>

נעבור לפתרון אי שוויון (4) :

$$0>\frac{x^2+2x-8}{x^2-4x+3}+3$$

$$0>\frac{x^2+2x-8+3x^2-12x+9}{x^2-4x+3}$$

$$0>\frac{4x^2-10x+1}{x^2-4x+3}$$

$4x^2-10x+1>0$ וגם $x^2-4x+3<0$ או $4x^2-10x+1<0$ וגם $x^2-4x+3>0$

שִׂרטוט :

פתרון : $\{x<0.1$ או $x>2.4\}$ וגם $1<x<3$ או $0.1<x<2.4$ וגם $\{x<1$ או $x>3\}$

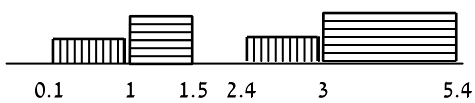
שִׂרטוט :

פתרון צד ימין : $2.4<x<3$ פתרון צד שמאל: $0.1<x<1$

פתרון אי שוויון (4) : <u>$2.4<x<3$ **או** $0.1<x<1$</u>

איחוד פתרונות לאי שוויונות (3) או (4) :

שִׂרטוט :



פתרון אי שוויון (1) : <u>$0.1<x<1.56$ או $2.4<x<5.44$ וגם $x\neq 1,3$</u>

את אותו תהליך נעבור עם אי שוויון (2) : $\left|\frac{x^2+2x-8}{x^2-4x+3}\right|<10$

פירוק שני של אי שוויון (2) :

(5) $\frac{x^2+2x-8}{x^2-4x+3}<10$ וגם (6) $\frac{x^2+2x-8}{x^2-4x+3}>-10$

נפתור את אי שוויון (5):

על ידי העברת אגפים ומכנה משותף:

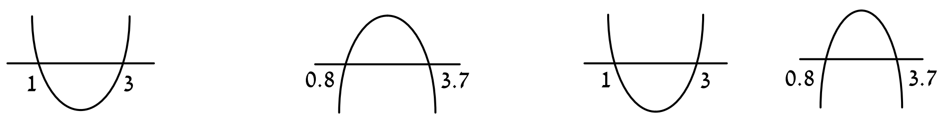
$$\frac{x^2+2x-8}{x^2-4x+3}-10<0$$

$$\frac{x^2+2x-8-10x^2+40x-30}{x^2-4x+3}<0$$

$$\frac{-9x^2+42x-38}{x^2-4x+3}<0$$

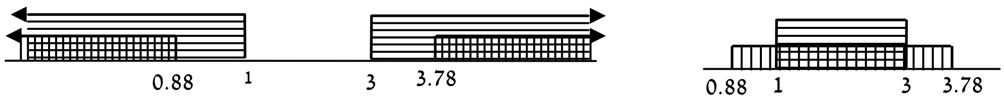
$-9x^2+42x-30>0$ וגם $x^2-4x+3<0$ או $-9x^2+42x-30<0$ וגם $x^2-4x+3>0$

שִׂרטוט:



פתרון: $0.88<x<3.78$ וגם $1<x<3$ או $\{x<0.88$ או $x>3.78\}$ וגם $\{x<1$ או $x>3\}$

שִׂרטוט:



פתרון צד ימין: $1<x<3$ פתרון צד שמאל: $x>3.78$ או $x<0.88$

<u>פתרון אי שוויון (5): $1<x<3$ או $x>3.78$ או $x<0.88$</u>

נעבור לפתרון אי שוויון (6):

על ידי העברת אגפים ומכנה משותף:

$$\frac{x^2+2x-8}{x^2-4x+3}+10>0$$

$$\frac{x^2+2x-8+10x^2-40x+30}{x^2-4x+3}>0$$

$$\frac{11x^2-38x+22}{x^2-4x+3}>0$$

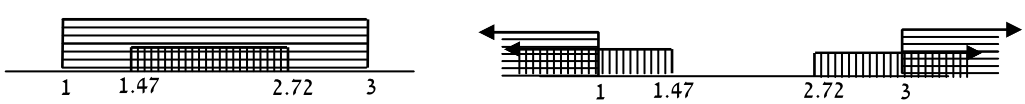
$11x^2-38x+22>0$ וגם $x^2-4x+3>0$ או $11x^2-38x+22<0$ וגם $x^2-4x+3<0$

שִׂרטוט:

פתרון:

$\{x<1.47$ או $x>2.72\}$ וגם $\{x<1$ או $x>3\}$ או $1.47<x<2.72$ וגם $1<x<3$

שִׂרטוט:

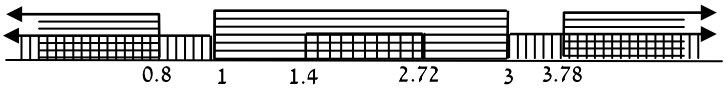


פתרון צד ימין: $x>3$ או $x<1$ פתרון צד שמאל: $1.47<x<2.72$

<u>פתרון אי שוויון (6): $x>3$ **או** $x<1$ **או** $1.47<x<2.72$</u>

חיתוך פתרונים לאי שוויונות (5) וגם (6) :

שִׂרטוט :

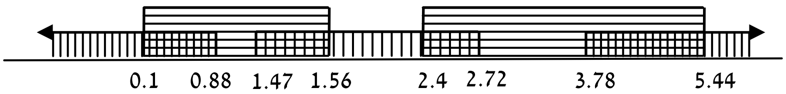


פתרון אי שוויון (2) : $x > 3.78$ או $1.47 < x < 2.72$ או $x < 0.88$

איחוד פתרונים לאי שוויונות (1) : $0.1<x<1.56$ **או** $2.4<x<5.44$ **וכן :** $x \neq 1,3$

וגם (2) : $x > 3.78$ או $1.47 < x < 2.72$ או $x < 0.88$

שִׂרטוט :



תשובה סופית : $2.4 < x < 2.72$ או $3.78 < x < 5.44$ או $0.1 < x < 0.88$ או $1.47 < x < 1.56$

בתרגיל ארוך ומורכב זה רציתי להראות שאם עובדים באופן שיטתי ללא דילוג על שלבים וכותבים את כל הפתרונות באופן מסודר, ניתן להתמודד גם עם המורכבות הרבה ביותר.

בדיקת הבנה (למחפשים אתגרים)

19. פתרו את אי השוויון : $\left|\frac{x^2+4x-19}{x^2+2x-15}\right| \le 2$

20. פתרו את אי השוויון : $\left|\frac{x^2+x-6}{x^2+5x+4}\right| > 3$

אי שוויון עם רב איבר בערך מוחלט

נראה שאם הגעתם עד הלום, אתם כבר מסוגלים לפתור כל תרגיל של אי שוויון עם ערך מוחלט אחד.

מה עושים כאשר יש יותר מאיבר אחד בערך מוחלט ?

הפתרון הוא לחלק את הישר הממשי לתחומים, לבדוק מה ערכו של כל איבר כזה, והאם יש להתייחס אליו כאל מספר שלילי או לא.

נשמע מסובך ? האמת היא שהרעיון די פשוט.

הבה נבדוק אילו תחומי x יקיימו את אי השוויון הבא: $|x-6|+|x+5|>0$

קל לראות שהאיבר הראשון מתאפס כאשר $x=6$.

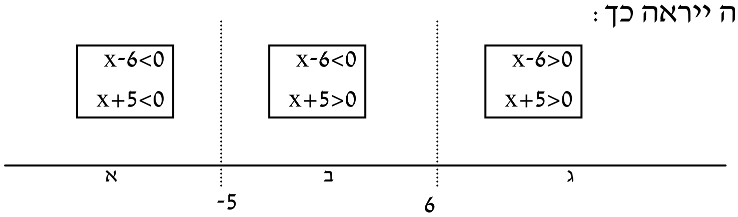
עתה אנו יכולים להיות בטוחים כי הביטוי $(x-6)$ <u>שלילי</u> לכל התחום: $x<6$, ולכן בתחום זה נציב את הסימן "-" לפני הביטוי כדי לקבל את הערך המוחלט (הגודל – שהוא תמיד חיובי). הֵהֶפֶך לגבי התחום: $x>6$. שם אנו יודעים ש – $(x-6)$ הוא גודל <u>חיובי</u>, ולכן נשאיר אותו בלי להפוך סימן.

כנ"ל לגבי האיבר השני. אנו רואים שהוא מתאפס כאשר $x=-5$.

לכן עבור: $x<-5$ נהפוך את הסימן כי הביטוי: $(x+5)$ יהיה <u>שלילי</u>, אולם עבור התחום: $x>5$ נשאיר את הביטוי: $(x+5)$ כפי שהוא כי הוא חיובי.

<u>זכרו!</u> מה שאנו מחפשים הוא מתי הביטויים מקבלים ערך שלילי ומתי ערך חיובי, ובהתאם לכך עלינו להחליט אם אנו הופכים את סימנם או לא. לכן אנו תמיד נמצא את ה- x שעבורו הביטויים מתאפסים!

אם נתבונן בישר הממשי, זה ייראה כך:



בתחום א' אנו מוצאים ששני האיברים שליליים. כדי להתייחס אליהם כ<u>ערך מוחלט</u> יש צורך להפוך את סימנם, לכן מקבלים את המערכת:

(1) $x<-5$ וגם $-(x-6)-(x+5)>0$

כאשר עוברים לתחום ב' מוצאים ש: $(x+5)>0$, ולכן אין לשנות את סימנו, אולם $(x-6)<0$ ועדיין יש צורך לשנות את סימנו. כך מתקבלת המערכת:

(2) $-5<x<6$ וגם $-(x-6)+(x+5)>0$

עבור תחום ג' שני האיברים חיוביים, ולכן אין לשנות את סימנם. המערכת היא:

(3) $x>6$ וגם $(x-6)+(x+5)>0$

מובן <u>שבין המערכות (1) (2) ו- (3) יש "או" כי אי אפשר להימצא בשני תחומים בו זמנית.</u>

פתרון:

מערכת (1): $x<-5$ וגם $-(x-6)-(x+5)>0$

$-2x+1>0$

$x<0.5$

פתרון מערכת (1): $x<-5$

מערכת (2): $-5<x<6$ וגם $-(x-6)+(x+5)>0$

$11>0$

נכון לכל x

פתרון מערכת (2): $-5<x<6$

מערכת (3) : x>6 וגם (x-6)+(x+5)>0

2x-1>0

x>0.5

פתרון מערכת (3) : x>6

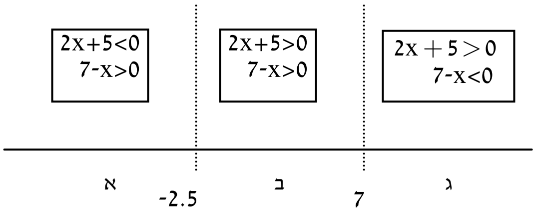
פתרון כללי : כל x

דוגמה נוספת :

ו. פתרו את אי השוויון : $3-|2x+5|<|7-x|+4x$

פתרון :

שִרטוט :



מערכת אי השוויונות

תחום א : x<-2.5 וגם 3+(2x+5)<7-x+4x

-x+1<0

x>1

פתרון תחום א : $x=\phi$

תחום ב : -2.5<x<7 וגם 3-(2x+5)<7-x+4x

-5x<9

x>-1.8

פתרון תחום ב : -1.8<x<7

תחום ג : x>7 וגם 3-(2x+5)<-(7-x)+4x

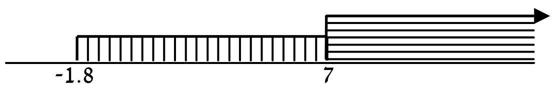
-7x<-5

x>0.71

פתרון תחום ג : x>7

איחוד הפתרונים :

שִרטוט :



פתרון כללי : x>-1.8

<u>בדיקת הבנה</u>

21. פתרו את אי השוויון : $|3x-9|+|x+1|<12$

22. פתרו את אי השוויון : $|3x-6|-|2x-5|>9$

<u>תרגול עצמי</u>

23. פתרו את אי השוויון : $\left|30x^2+6x+25\right|<10$

24. פתרו את אי השוויון : $\left|3x-6\right|>12-x$

25. פתרו את אי השוויון : $\left|\frac{4x-3}{2-x}\right|\le 4$

26. פתרו את אי השוויון : $\left|x+4\right|+\left|x-8\right|<10$

27. פתרו את אי השוויון : $\left|x+6\right|+\left|x-2\right|>12$

פתרונים

1. $x > -\frac{4}{9}$

2. $-\frac{8}{5} < x < \frac{13}{6}$

3. $-2.5 < x < 3$

4. $x > 5$ או $x < 2$

5. $-1.5 < x < 1.5$

6. $-7 < x < -3.9$

7. $x > 13$

8. כל x

9. $-2.06 < x < -\frac{2}{3}$ או $2 < x < 3.39$

10. $x > 7$ או $x < -12$

11. $x > 5$ או $x < -3$

12. $x < -3.24$ או $-1 < x < 1.23$

13. $12.5 < x < 15$ או $-5 < x < -2.5$

14. $-1 \le x \le 3$ או $7 \le x \le 11$

15. $1 < x < 1.32$ או $-1 < x < -0.27$ או $-3.73 < x < -3$ או $-5.32 < x < -5$

16. $-3 \le x \le -2.3$ או $-1.62 \le x \le 0.62$ או $1.3 \le x \le 2$

17. $x > 4.375$ או $x < 1.9$

18. $x > 3.5$ או $x < -8$ או $-8 < x < -2.25$

19. $x > 3.32$ או $-3.32 < x < 2.92$ או $x < 5.59$

20. $1.7 < x < -0.42$ או $-5.3 < x < -3.58$, $x \neq -1, -4$

21. $-1 < x < 5$

22. $x > 10$ או $x < -8$

23. ϕ

24. $x > 4.5$ או $x < -3$

25. $\frac{11}{8} \ge x$

26. ϕ

27. $x > 4$ או $-8 > x$

בעיות מילוליות

רקע

מספר קשיים עיקריים עומדים בפנינו כשאנו מתחילים לעסוק בפתרון בעיות מילוליות.

קושי ראשון הוא השפה. בבעיות מתמטיות אנו משתמשים בשפה העברית, אך חלק מהמושגים מקבלים שינוי קל, ועלינו ללמוד את כוונת השאלה ולזכור שהוראת מילה מסוימת היא קצת שונה מזו שאנו רגילים אליה בשימוש יומיומי.

דוגמאות :

זמן נסיעה : בחיי היומיום אנו מתייחסים אל זמן הנסיעה כפרק הזמן שעבר מרגע היציאה מהבית ועד הגיענו למחוז חפצנו. זמן זה כולל את ההמתנות להסעה, את העצירות להתרעננות וכד׳.

לעומת זאת בבעיות מתמטיות אנו מייחסים את <u>זמן הנסיעה</u> רק <u>לזמן שבו הגוף מצוי בתנועה</u>, כלומר זמן הנסיעה ללא כל אותן המתנות וחניות ביניים.

מנה ושארית : בדרך כלל אנו משתמשים במושג מנה לציון כמות. מנת גלידה, מנה שווארמה... שארית גם כן נתפסת ככמות; שאריות בדים או שאריות אוכל, כלומר כמות שנותרה אחר שימוש.

בבעיות מספרים <u>מנה</u> היא תוצאת החילוק של מונה במכנה, ו<u>שארית</u> היא <u>יחס בין הנותר מהמונה למכנה</u>.

השארית איננה גודל עצמאי, אלא היא מתייחסת למכנה.

בתרגיל : $7/3$ אנו מקבלים מנה 2 ושארית 1, אך כתיבה מתמטית של התוצאה היא : $\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$ כלומר השארית של 1 מתייחסת למכנה 3.

קושי שני הוא המעבר מהכרת האלגברה המופשטת לטיפול במודלים מתמטיים של העולם האמיתי. בבעיות מילוליות אנו מנסים לבנות מודל שיתאר מצבים ״מציאותיים״ בעזרת פונקציות מתמטיות. למצבים כאלה יש כבר משמעות למספר ולנעלם, והוא מפסיק להיות מספר טהור. נסביר את הדברים בעזרת דוגמה. כאשר אנו יושבים מול מסך ולפנינו מקלדת. לצִדֵּנו נמצא המארז של המחשב וכן העכבר. כל זה משתלב בשולחן, ולידו הכיסא שעליו אנו יושבים. האם אנו יכולים לומר שסביבנו יש 6 ? התשובה היא, כמובן : 6 מה ? כלומר בעולם האמיתי אנו צריכים להוסיף מֵמַד למספר. במקרה שלנו יש לומר : סביבנו נמצאים שישה פריטים. כפי שאנו רואים, אנו כבר לא מתייחסים אל המספר כמייצג מופשט, אלא מייחסים לו לשון זכר ומוסיפים מֵמַד שיתאר אותו.

כך יש לעשות גם בבעיות מילוליות. כאשר אנו בוחרים נעלם, לא מספיק להגדירו כ- x או y . אותיות אלה יכולות לייצג נעלם. אולם הגדרת הנעלם חייבת להיות בעלת מֵמַד מתאים לבעיה. לדוגמה : מרחק שעברה מכונית (ק״מ), כמות החומץ בתערובת (ליטר) וכד׳.

אם נגדיר נכון את הנעלמים, נוכל גם לבדוק את המשוואות שבנינו, ולהתאים להם את המְמַדים כפי שיפורט בהמשך.

קושי שלישי הוא ליקוט הנתונים מתוך השאלה. לעִתים הנתונים מופיעים באופן מפורש וברור, ולעִתים רק ברמז. כמו כן יש בעיות הבנויות מ״סיפור״ אחד המתאר מצב, ויש, שלהן שניים או שלושה סיפורים שונים. עלינו לזהות ממה מורכב כל סיפור, ולבדוק איך לייצגו באופן אלגברי. אם יש יותר מסיפור אחד, נצטרך לייצג כל אחד מהסיפורים באופן עצמאי. כל סיפור כזה מציב משוואה אחת לפחות. כך אנו יכולים לבנות מערכת משוואות היוצרת מודל מתמטי של הבעיה. על ״שליפת״ נתונים נתעכב בהמשך.

יש לתת תשומת לב מיוחדת למספר אלמנטים הקשורים לפתרון בעיות מילוליות.
כאשר אנו קוראים את הבעיה, יש לבחון היכן נמצא משפט השאלה. ברוב השאלות שאנו עוסקים בהן, היא כתובה דווקא בסוף הבעיה; בדרך כלל אפילו במשפט האחרון. לכן בכל בעיה רצוי להדגיש את משפט השאלה לבירור המטלה המבוקשת כבר בקריאה ראשונה, ובקריאה שנייה להתעמק וללקט נתונים. לעִתים נידָרֵש גם לקריאה שלישית. דבר זה קורה כאשר אנו מוצאים שיש לנו יותר נעלמים ממשוואות. במצב כזה צריך להיות לנו ברור שלא השתמשנו בכל נתוני השאלה, ולכן עלינו לקרוא אותה שוב ולחפש אחר נתונים ש"פספסנו".

אם התייחסנו לנעלמים, הרי שעלינו גם למצוא אותם. ראשית הנעלמים הטבעיים ביותר יבואו מתוך השאלה (שכפי שכבר נאמר - נמצאים במשפט האחרון). נעלמים נוספים יכולים להיווצר תוך כדי פתרון. לא תמיד נדע מראש כמה נעלמים נדרשים לנו. גם בעולם האמיתי איננו רואים תמיד את הפתרון למצב אלא מתמודדים תוך כדי מהלך הדברים. בכל מקום שלא נמצא נתון באופן מִיָּדִי, נציב במקומו נעלם. כדאי ורצוי "לסמוך" על "רוחב" לִבּוֹ של מחבר השאלה שלא ישאיר אותנו ללא מספיק משוואות לפתרון. (טיפ לחיי היומיום: בכלל כדאי להרפות קצת שליטה ולסמוך על העולם שלפעמים דברים יפעלו למעננו גם אם לא נִלְחַץ או נִילָחֵץ.)

<u>תרגול נעלמים ושליפת נתונים</u>

מכיוון שהמְמַדים חשובים לפתרון בעיות מילוליות, נרחיב קצת בנושא.

נתחיל <u>בבעיות תנועה.</u>

באופן כללי ומחיי היומיום אנו מכירים את המושגים: מהירות, דרך וזמן. מעטים מאִתנו נותנים את הדעת על כך שהמהירות איננה מֵמַד בפני עצמו, אלא היא פשוט חלוקה של מֵמַד הדרך במֵמַד הזמן. כאשר אנו משתמשים במושג - קמ״ש - אנו מתארים את המהירות באופן של $\frac{\text{ק״מ}}{\text{שעה}}$, כלומר <u>מהירות</u> היא תמיד <u>חלוקה של המרחק שעוברים ביחידת זמן אחת</u>. אמנם בדרך כלל בבעיות דרך אנו מוצאים מְמַדים של ק״מ ושעות, אך בעולם האמיתי ניתן להשתמש גם במְמַדים אחרים. למשל, ישנן ארצות בהם משתמשים במֵמַד של מייל לתיאור מרחקים, ואז המהירות היא מס׳ המיילים לשעה.

ישנן מהירויות שטווח המדידה שלהן הוא קצר, ואז נוח יותר לתארן במְמַדים של מטרים ושניות. למשל, כאשר מודדים מהירות בעיטה של שחקן כדורגל, המדידה תהיה במטרים לשנייה, או כאשר מחשבים מהירויות לוויינים בעלי מהירויות גבוהות, עוברים ממדידה של מטרים לשנייה למדידה של ק״מ לשנייה.

נוח יותר לחשוב על 16 $\frac{\text{ק״מ}}{\text{שנייה}}$ מאשר על 16000 $\frac{\text{מטר}}{\text{שנייה}}$.

אנו רואים שהמטרה היא להתאים את מְמַדי המדידה למהירויות הנמדדות. אם הזכרנו מהירויות גבוהות, נצביע גם על מהירויות נמוכות מאוד. למשל, כאשר רוצים למדוד תנועה של מים בתוך קרקע (לצרכים חקלאיים או לתכנון בארות), התנועה נמדדת במטרים ליום, ותנועת היבשות נמדדת בס״מ לשנה.

ישנה מדידה אחת שהיא שונה לחלוטין מהאחרות, והיא מדידת מרחק בין גלקסיות. אנו שומעים מעת לעת על מרחקים של ״שנות אור״. איך הפך מֵמַד של זמן (שנה) למֵמַד של אורך ?

התשובה היא שאכן שנה היא מֵמַד של זמן, אולם לאור יש מהירות קבועה ותמידית של 300000 ק״מ בכל שנייה בקירוב. אם נכפיל את המהירות הזו במספר השניות שיש בשנה, נקבל את המרחק שתעבור קרן אור. זהו המרחק המתואר ע״י ״שנת אור״ - המרחק שיעבור האור בשנה אחת.

(מומלץ לנסות ולבדוק כמה ק״מ יש בשנה כזו).

נעבור לדוגמה:

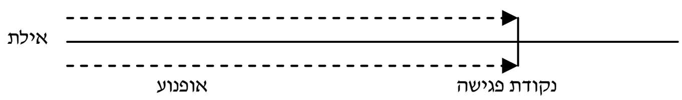
א. מכונית יצאה מאילת צפונה במהירות קבועה. כעבור שעה יצא רוכב אופנוע, גם הוא מאילת צפונה, במהירות קבועה. מהירות האופנוע גדולה ב – 30 קמ״ש ממהירות המכונית. רוכב האופנוע השיג את המכונית במרחק 250 ק״מ. מה הייתה מהירות המכונית ?

פתרון:

מקריאה ראשונית נמצא שהנעלם הטבעי הוא מהירות המכונית. כלומר:

x – מהירות המכונית

נוסיף שִׂרטוט של הבעיה:



אנו מוצאים כאן תיאור של שני סיפורים (תנועות שונות): אחת של המכונית ואחת של האופנוע. לכן נבנה את טבלת המאורעות על פי שני הסיפורים:

	סיפור א תנועת המכונית	סיפור ב תנועת האופנוע
מהירות		
זמן		
דרך		

כדי להשלים את הטבלה עלינו לקרוא שוב את השאלה. תחילה נתמקד בסיפור המכונית. כבר ראינו שמהירותה היא x . עתה עלינו למצוא את הזמן. מכיוון שהוא לא נתון לנו, נוסיף נעלם ונגדיר:

t – זמן תנועת המכונית

הדרך שעברה המכונית עד המפגש היא אותה דרך שעשה רוכב האופנוע, כי הם נפגשו לאחר 250 ק"מ.

כלומר הדרך היא 250 ק"מ.

מכאן אנו מקבלים את הטבלה:

	סיפור א תנועת המכונית	סיפור ב תנועת האופנוע
מהירות	x	
זמן	t	
דרך	250	250

עכשיו נפנה לתנועת האופנוע.

על זמן תנועת האופנוע יש לנו מידע בסיסי והוא: "כעבור שעה יצא רוכב אופנוע..." אם רוכב האופנוע יצא שעה לאחר המכונית, הרי שעד הפגישה הוא נסע שעה פחות (צריך לזכור שאנו מחשבים זמן נסיעה נטו). כלומר הוא נסע $(t - 1)$ שעות. גם על המהירות יש לנו מידע: "מהירות האופנוע גדולה ב – 30 קמ"ש ממהירות המכונית." לכן מהירותו $(x + 30)$. עכשיו הטבלה השלמה תֵיראה:

	סיפור א תנועת המכונית	סיפור ב תנועת האופנוע
מהירות	x	$x + 30$
זמן	t	$t - 1$
דרך	250	250

אותו רעיון ניתן ליישום גם ב<u>בעיות קנייה ומכירה</u>:

ב. תלמיד קנה מספר מחברות ושילם תמורתן 100 ₪. אם היה מחיר מחברת נמוך בשקל אחד, היה יכול לקנות באותו מחיר עוד 5 מחברות. מה מחירה של מחברת אחת, וכמה מחברות קנה התלמיד?

פתרון:

גם כאן אנו מוצאים את הנעלמים הטבעיים:

x – מחיר מחברת אחת

y – מספר מחברות שקנה התלמיד

גם כאן אנו מוצאים שני סיפורים: הקנייה בפועל והקנייה במקרה של מחיר נמוך בשקל.
הטבלה נראית כמו הטבלאות הקודמות:

	סיפור א הקנייה בפועל	סיפור ב הקנייה במקרה של מחיר מופחת
מחיר יחידה	x	x -1
כמות	y	y + 5
סה"כ תשלום	100	100

<u>בדיקת הבנה</u>

1. חקלאי קנה מספר חבילות זרעים ושילם תמורתם 100,000 ₪. לו היה מחיר חבילה נמוך ב- 5 שקלים, היה יכול לקנות עוד 12 חבילות. מה מחיר חבילת זרעים, וכמה חבילות קנה?
בנו טבלה מתאימה. **<u>(שימו לב, בשלב זה עליכם לבנות טבלה ולא למצוא פתרון!)</u>**

אותו רעיון קיים גם <u>בבעיות הֶספק</u>:
בעיות הֶספק כּשמן כן הן. אלה בעיות שבסיסן הוא קֶצֶב. אנחנו בדרך כלל רגילים לפתור שאלות של כמויות, ולכן לא אחת אנחנו מתקשים בלוגיקה של בעיות הֶספק. אם נפנים את המושג הֶספק, יקל עלינו להתמודד עם שאלות אלה.
<u>הֶספק</u> הוא תמיד **<u>כמות ליחידת זמן</u>**. לדוגמה: כאשר אנו מתכננים תאורה, הגורם המעניין הוא לאיזה הֶספק היא מתוכננת, שכן ככל שההֶספק גבוה יותר, כך יהיה לנו יותר אור. אנו לא יודעים כמה חשמל היא תְּצרךְ כי זה כבר תלוי גם במספר השעות שהיא תִּדלַק. אבל כן חשוב לנו כמה חשמל יעבור בה בכל יחידת זמן כי זה מצביע על עצמת ההארה. כנ"ל לגבי מיזוג אוויר. אמנם חשוב לנו החיסכון, אולם אנו יודעים כי ככל שֶהֶספק החשמל יִגבַּר, כך החדר יגיע מהר יותר לטמפרטורה הרצויה וישמור עליה גם בתנאים קיצוניים.
כמו כן אנו מודעים להֶספק בנוזלים. בטפטפות אנו עובדים ביחידות של ליטר לשעה.
בְּברז הכיור אנו נמדוד בליטר לדקה, ואילו במילוי בְּרֵכות נמדוד מ"ק לשעה.
כך אנו מתאימים יחידות לרמת ההֶספק הדרושה. גם כאן אנו רואים שההֶספק הוא כמות ליחידת זמן.

כך גם לגבי **<u>עבודה</u>**. אמנם יש לנו כמות מסוימת של עבודה (נניח לשטוף 200 צלחות), אבל אנו משלמים לפּוֹעל כדי שהוא יסיים אותה בזמן סביר. נבחר להעסיק את הפּוֹעל שיבצע את העבודה באופן יעיל. כלומר גם פה נביא בחשבון את ההֶספק של הפועל ולא רק את העובדה שהוא סיים את המלאכה (לא נעסיק פועל שישטוף את הצלחות לאורך כל הלילה. נחפש את זה שיעשה זאת בחצי שעה).
כל הפְּתִיחַ הזה הובא כדי להסביר שבבעיות מסוג זה אנו עוברים לבדיקה של קֶצֶב. אם מְספרים לנו על פועל שמסיים עבודה ביומיים, אנו מִיד נתייחס לעובדה שהוא מבצע חצי מהעבודה ביום. לא חשוב לנו מהי העבודה, אנו תמיד נתייחס אליה כאל יחידת עבודה שלמה.

אם מורה צריך לבדוק 500 מבחני בגרות בשבוע, אנו נדע שקֶצֶב עבודתו הוא $\frac{1}{7}$ מתוך העבודה ביום, וזה לא ממש משנה מהי כמות המחברות אם מתייחסים אל הבדיקה כאל יחידת עבודה שלמה.
כך גם בנושאי **<u>זרימה</u>**. גם אם לא נתונה הכמות במפורש, אנו יכולים ללמוד על קֶצֶב העבודה. אם ברז ממלא בְּרֵכה ביומיים, הרי שקֶצֶב המילוי שלו הוא $\frac{1}{48}$ מתוך הבְּרֵכה בכל שעה. באופן הסתכלות כזה נמצא שפתירת בעיות מסוג זה נהיית פשוטה ואינה מבלבלת.

לדוגמה :

ברז ממלא אמבטיה במשך 20 דקות. פתח הניקוז מרוקן אותה במשך 30 דקות. אם ממלאים אמבטיה זו ולא סוגרים את פתח הניקוז, תוך כמה זמן היא תתמלא ?

בחירת הנעלם : t – זמן מילוי האמבטיה (מילוי האמבטיה הוא יחידת העבודה, ולכן **<u>כמות העבודה =1</u>**.)

אם האמבטיה מתמלאת ב- 20 דקות, הרי שהֶספק (קֶצֶב המילוי) הוא : $\frac{1}{20}$ מהאמבטיה בדקה.

כנ"ל אם האמבטיה מתרוקנת ב- 30 דקות, הֶספק (קֶצֶב ההֲרָקָה) הוא : $\frac{1}{30}$ מהאמבטיה בדקה.

עתה אנו יכולים לעבור לטבלה. יש כאן <u>סיפור אחד</u> בלבד של מילוי במצב של זרימה חופשית פנימה והחוצה, ולכן :

הֶספק	$\frac{1}{20}-\frac{1}{30}$	(זהו הֶספק המילוי נטו אם לוקחים בחשבון את ההֲרָקָה.)
זמן	t	
כמות כוללת	1	(כלומר השלמת יחידת העבודה שהיא במקרה שלנו מילוי הברֵכה)

ג. שני ברזים ממלאים ברֵכה ב - 6 שעות. יום אחד פתחו את שני הברזים, ולאחר 5 שעות שמילאו יחד את הברֵכה, התקלקל ברז אחד, וכדי למלא את הברֵכה המשיכו להפעיל את הברז השני עוד 4 שעות.
בכמה זמן יכול כל ברז למלא את הברֵכה לבדו ?

פתרון :

גם כאן אנו מוצאים את נתוני זמן העבודה כיחידה אחת.

נבחר את <u>הזמנים</u> כנעלמים :

x - זמן מילוי ברֵכה על ידי ברז א'

y - זמן מילוי הברֵכה על ידי ברז ב'

ומכאן :

הֶספק ברז א' - $\frac{1}{x}$

הֶספק ברז ב' - $\frac{1}{y}$

בשאלה זו אנו מוצאים שני סיפורים : עבודת הברזים המשותפת ועבודה ביום התקלה, אך כל אחד מהם נחלק גם הוא לשניים. ברז א' וברז ב'. והטבלה :

	סיפור א		סיפור ב	
	עבודה משותפת		יום התקלה	
	ברז א	ברז ב	ברז א	ברז ב
הֶספק	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{y}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{y}$
זמן	6	6	5	9
סה"כ	1		1	

סגנון נוסף של שאלות הֶספק עוסק בבעיות שלגביהן <u>כן</u> נתונה הכמות כמו בדוגמה הבאה :

ד. שני גננים צריכים לשתול 180 שתילים. גנן א' עבד במשך שעתיים, ואחר כך החליף אותו גנן ב'. גנן ב' סיים את העבודה בתום 6 שעות. גנן א' זריז יותר ויכול לבצע שתילה של 90 שתילים בשעה וחצי פחות מגנן ב'. כמה שתילים שותל כל אחד מהגננים בשעה ?

פתרון :

כאן יש התייחסות לכמות העבודה (180 שתילים ו-90 שתילים), לכן נתייחס אל ה<u>הֶספק</u> כאל כנעלם.

בחירת הנעלמים היא פשוטה :

x – הֶספק (מסי השתילים לשעה) גנן א׳

y – הֶספק גנן ב׳

גם בשאלה זו נתונים שני סיפורים : 1) שתילת 180 שתילים, 2) שתילת 90 שתילים. אולם לאחר קריאה חוזרת אנו מוצאים, למעשה, ארבעה סיפורים כי לכל מצב יש פעולת גנן א׳ ופעולת גנן ב׳.

לכן הטבלה תֵּיראה :

	שתילת 180 שתילים		שתילת 90 שתילים	
	גנן א	גנן ב	גנן א	גנן ב
הֶספק	x	y	x	y
זמן	2	6		
סה״כ	s_1	s_2	90	90

עתה אנו רואים שחסר לנו נתון לגבי זמן השתילה של הגננים את 90 השתילים. לכן נוסיף לנו נעלם :

t - זמן השתילה של גנן א׳ את 90 השתילים.

עתה נוכל להשלים את הטבלה :

	שתילת 180 שתילים		שתילת 90 שתילים	
	גנן א	גנן ב	גנן א	גנן ב
הֶספק	x	y	x	y
זמן	2	6	t	$t+1.5$
סה״כ	s_1	s_2	90	90

שימו לב שבשאלה זו לא השתמשנו בכל הנתונים (180 שתילים). אין זה אומר שהנתון מיותר. נלמד להשתמש בנתון זה בהמשך.

כדאי לשים לב שגם משפט השאלה שונה בשתי הדוגמאות האחרונות. בדוגמה ג׳ מחפשים <u>**זמן**</u>, בדוגמה ד׳ מחפשים את <u>**ההֶספק**</u> (מספר שתילים לשעה). תשומת לב כזו תקל עלינו להבחין איך נוח יותר לגשת לפתרון השאלה.

<u>**בדיקת הבנה**</u>

2. שני פועלים יכולים לסיים עבודה מסוימת אם הם עובדים יחד במשך 15 דקות. נתון כי הזמן הדרוש לפועל השני לבצע את כל העבודה לבדו, גדול ב- 40 דקות מהזמן הדרוש לפועל הראשון לבצע את כל העבודה לבדו. בכמה זמן יכול כל אחד מהפועלים לבצע את כל העבודה לבדו ? בנו טבלה מתאימה.
3. שני פועלים גוזמים יחד 40 עצים בשעתיים. אם פועל א׳ יעבוד לבדו 3 שעות, יספיק פועל ב׳ לבדו להשלים את הגיזום כעבור חצי שעה. כמה עצים גוזם כל פועל בשעה ? בנו טבלה מתאימה.

בעיות כוללות לפעמים גם חישובים באחוזים. כדי שנדע להתמודד אִתם, נרחיב קצת על נושא האחוזים בכלל.

הדבר החשוב שעלינו לזכור בכל הקשור באחוזים, הוא שהאחוז מצביע על חלק יחסי מתוך גודל מסוים ואיננו מתאר כמות. בשפת היומיום אנו שומעים משפטים, כמו : "את החולצה הזו קניתי ב- 50%." המידע שעובר אלינו, הוא שיש לדובר תחושה טובה. איננו מקבלים כל מידע על מחיר החולצה.

כדי להדגיש את הנקודה הזו נשתמש בדוגמה.

שתי חנויות בגדים נפתחו במרכז מסחרי. חנות א' מפרסמת שהיא בעלת המחירים הנמוכים ביותר בעיר. בחלון הראווה של חנות ב' מופיעה כרזה גדולה על מכירת סוף עונה בהנחה של 50%. בחנות א' ניתן למצוא חולצה מסוימת במחיר של 180 ₪. בחנות ב' נמכרת אותה חולצה בדיוק במחיר של 400 ₪ לפני הנחה. לקוח הבא לקנות, יכול להתרשם מהכרזה המופיעה בחנות ב' ולהעדיף אותה, אולם המחיר שישלם יהיה 200 ₪ . אמנם הוא יוכל להתפאר בחולצה שרכש בחצי מחיר, אך בפועל שילם 20 ₪ מיותרים.

לכן עלינו לזכור תמיד כי אחוז חייב לבוא בצמידות למחיר הבסיסי (או כפי שהוא מופיע לפעמים, כמחיר הקרן).

אחרי שמבררים את האחוז ואת המחיר הבסיסי, ניתן לחשב את הכמות המסתתרת מאחורי האחוזים. לשם חישוב הכמות שמבטא האחוז (מכאן והלאה נכנה אותה הכמות האחוזית), יש לנו תבנית אחת ברורה :

$$\boxed{x \cdot \frac{p}{100} = y}$$

בתבנית זו x מבטא את הבסיס, p מבטא את האחוז, ו- y מבטא את הכמות האחוזית (הכמות שהיא החלק היחסי מתוך הבסיס).

כאשר נתון האחוז באופן מספרי, כדאי מאוד לזכור את המעבר מאחוז לחלק יחסי וההֵפֶך, זאת בעזרת הקבוע 100. כלומר אם נתון 30%, אנו מיד יכולים לתרגמו ל - 0.3. כנ"ל 7% יהיו - 0.07 .

וההֵפֶך : אם אנו מקבלים 0.23, ניתן לתרגמו ל - 23%.

לכן כדי לחשב מע"מ בשיעור 17% אנו מכפילים את המחיר ב - 0.17 ,

וכדי לחשב את התשלום אנו מכפילים ב - 1.17 כי אנו מחברים את המחיר עם המע"מ.

דוגמה : מחיר של חולצה הוא 150 ₪. חישוב המע"מ הוא : $0.17 \cdot 150 = 25.5$

ובנוסף למחיר החולצה התשלום הכולל הוא : $150 + 25.5 = 175.5$

ניתן, כמובן, גם לחשב זאת באופן מִיָּדִי : $150 + 150 \cdot 0.17 = 175.5$

ובהוצאת גורם משותף : $150(1 + 0.17) = 175.5$

במקרה זה יש משמעות הגיונית לסוגריים כי הם מייצגים את מחיר הקרן בתוספת החלק היחסי של המע"מ. לכן כאשר אנו רוצים להוסיף מחיר או משקל באחוזים ידועים, אנו נחבר את החלק היחסי לאחד ונכפיל בבסיס. ובדוגמה שלנו : $1.17 \cdot 150 = 175.5$

באותו אופן נוכל לחשב את הבלאי של סחורה בשווי 1250 ₪ אם ידוע ש- 7% ממנה ניזוק בהובלה.

מכיוון שעלינו לחסר את הכמות האחוזית, אנו מקבלים : $1250(1 - \frac{7}{100}) = m$

$1162.5 = m$ ₪

עתה נעבור לכמה דוגמאות פשוטות :

ה. מוצר מסוים הוזל ב- x אחוזים. לאחר תקופה מסוימת התייקר אותו מוצר שוב ב- x אחוזים. האם מחירו הסופי של המוצר היה שווה, יקר או זול ממחירו הראשוני ?

פתרון:

שאלה זו ייחודית בכך שאיננו נשאלים על כמות ורכישה אלא על השוואה פנימית של מחיר מוצר בדיד. מסגנון השאלה אנו רואים כי ניתן לבחור את הנעלם כמחירו המקורי של המוצר או כמחירו הסופי. ממילא אנו משווים את המחירים האלה. לכן באופן שרירותי נבחר:

y – מחיר מקורי של המוצר

עתה נפנה לטבלה:

	סיפור א׳ הוזלה	סיפור ב׳ התייקרות
מחיר מקורי	y	$y\left(1-\frac{x}{100}\right)$
אחוז	x	x
מחיר סופי	$y\left(1-\frac{x}{100}\right)$	$\left[y\left(1-\frac{x}{100}\right)\right]\left(1+\frac{x}{100}\right)$

כפי שאנו רואים מהטבלה, בשאלות מסוג זה מחירו הסופי של סיפור א׳ הוא מחירו המקורי של סיפור ב׳, ולכן תמיד כדאי להשלים תחילה את סיפור א׳ ורק אחר כך לעבור לסיפור ב׳.

<u>בבעיות תערובת</u> אנו מוצאים שימוש רב באחוזים. אין זה משנה את כללי העבודה עם אחוזים. התבנית נשארת בעינה. אולם עלינו להזכיר לעצמנו מהי תמיסה, ומהו ריכוז תמיסה.

<u>תמיסה או תערובת</u> מציינים שני חומרים או יותר המעורבבים זה בזה. הכמויות נמדדות בדרך כלל בְּמֵמַדי נפח: ליטרים או סמ״ק וכד׳. <u>מהילה</u> אף היא מציינת ערבוב. כאשר כוהל נמהל במים, מקבלים תמיסת כוהל. כבר הזכרנו בנושא האחוז שהוא תמיד מתוך גודל מסוים. הוא מצטרף תמיד לכמות. <u>ריכוז תמיסה</u> הוא האחוז של החומר המומס בתוך התמיסה, ולכן גם הריכוז מצטרף תמיד לכמות הכוללת.

באופן כללי המעבר מריכוז לכמות הוא על פי הנוסחה:

$$\text{כמות מומס} = \text{כמות כוללת} \cdot \frac{\text{ריכוז}}{100}$$

והֶהֶפֶך:

$$\text{ריכוז} = 100 \cdot \frac{\text{כמות מומס}}{\text{כמות כוללת}}$$

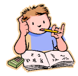
לדוגמה:

ו. לתוך 60 ליטר תמיסת כוהל של 35% הוסיפו 30 ליטר כוהל נקי. מה ריכוז התמיסה שהתקבלה?

פתרון:

בחירת הנעלם: x – ריכוז סופי

	תמיסת הכוהל	תוספת	ערבוב
יחס ריכוז	0.35	1	x
כמות כוללת	60	30	60+30=90
כמות מומס	$0.35\cdot 60=21$	$30\cdot 1=30$	21+30=51



<u>בדיקת הבנה</u>

4. נתונים שני כלים. בכלי א׳ יש 10 ליטרים כוהל בריכוז מסוים. בכלי ב׳ יש 15 ליטרים בריכוז הגבוה ב- 10% מהריכוז שנמצא בכלי א׳. את הקיבול שבשני הכלים יחד מזגו לכלי ג׳, והתקבלה תמיסה בריכוז של 46%. מה היה ריכוז הכוהל בכלי ב׳ ?
בנו טבלה מתאימה.

דוגמאות נוספות לשליפת נתונים :

ז. בשעה 8.00 בבוקר יצאה משאית במהירות 70 קמ״ש מאילת לבאר שבע. בשעה 8.40 יצאה מכונית מבאר שבע לאילת. בשעה 10.30 נפגשו המשאית והמכונית והמשיכו בדרכן. המכונית הגיעה לאילת שעה לפני שהמשאית הגיעה לבאר שבע.
א. מה הייתה מהירות המכונית ?
ב. מה המרחק מבאר שבע לאילת ?
בנו טבלה מתאימה.

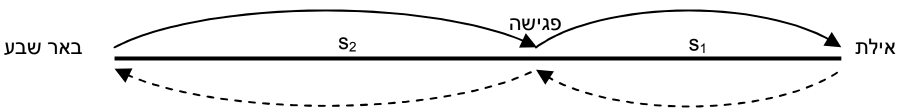
פתרון :

גם כאן אנו מוצאים מקריאה ראשונית שהנעלמים הטבעיים הם :

s – המרחק מבאר שבע לאילת

v – מהירות המכונית

מקריאה שנייה אנו מוצאים ארבעה סיפורים : תנועת המשאית עד הפגישה, תנועת המשאית אחרי הפגישה, תנועת המכונית עד הפגישה ותנועת המכונית אחרי הפגישה.



לכן הטבלה שנבנה, תֵּיראה כך :

	משאית		מכונית	
	לפני פגישה	אחרי פגישה	לפני פגישה	אחרי פגישה
מהירות	70	70	v	v
זמן	2.5	t	$\frac{110}{60}$	t -1
דרך	s_1	s_2	s_2	s_1

ההסבר :

המהירויות קבועות כל הזמן.

זמן המשאית עד הפגישה הוא לפי : 10.5-8=2.5. זמן המשאית אחרי הפגישה איננו ידוע, ולכן נקרא לו t.

זמן המכונית לפני הפגישה הוא : $2.5\cdot 60 = 150_{\text{דקות}}$. מהם עלינו להפחית 40 דקות (לפי המידע שהמכונית יצאה 40 דקות אחרי המשאית) : $150-40 = 110_{\text{דקות}}$, כלומר $\frac{110}{60}$ שעות.

זמן המכונית לאחר הפגישה הוא בשעה פחות מזמן המשאית.

הדרך של המשאית עד הפגישה אינה ידועה, ולכן נקרא לה s_1, אולם ידוע לנו שאם לאחר הפגישה המשיכה כל אחת לדרכה, הרי שהמכונית עשתה בדיוק את הדרך הזו מהפגישה ועד אילת. כנ״ל, הדרך של המשאית אחרי הפגישה שווה לדרך של המכונית לפני הפגישה, והיא s_2 .

ח. סוחר קנה 15 מוצרים במחיר כולל של 1000 ₪. 3 מוצרים נפגמו בדרך, ולכן מכר אותם בהנחה של 30% ממחיר הקנייה. עוד מוצר אחד לקח לעצמו. את השאר מכר ברווח של 15 ₪ ליחידה. כמה הרוויח הסוחר בעסקה זו ?

בנו טבלה מתאימה.

פתרון :

כאן אנו מוצאים שלושה סיפורים :

	קניית המוצרים	מכירת המוצרים	
		מוצרים תקינים	מוצרים פגומים
מחיר יחידה	x	$x+15$	$(1-0.3)x=0.7x$
כמות	15	11=15-3-1	3
סה״כ מחיר	1000	z_1	z_2

<u>תרגול עצמי - שליפת נתונים</u>

בתרגילים הבאים שִלפו את הנתונים ובנו טבלאות מתאימות.

5. מכונית נוסעת כל יום מרחק של 150 ק״מ במהירות קבועה. יום אחד לאחר נסיעה של חצי שעה האטה המכונית את המהירות ב – 15 קמ״ש, ולכן בשעה שהייתה אמורה להגיע ליעדה, עדיין הייתה במרחק 5 ק״מ מהיעד. מה הייתה מהירותה ההתחלתית ?

6. שני הולכי רגל יצאו זה לקראת זה. האחד יצא מנקודה A לנקודה B במהירות של 4 קמ״ש. השני יצא שעה מאוחר יותר מנקודה B לנקודה A במהירות 5 קמ״ש. הם נפגשו והמשיכו כל אחד בדרכו. ההולך הראשון הגיע לנקודה B חצי שעה לפני שההולך השני הגיע לנקודה A . מה המרחק מ - A ל - B ?

7. המרחק בין שתי ערים הוא 90 ק״מ. משאית יצאה מעיר א׳ לעיר ב׳ במהירות של 60 קמ״ש. חצי שעה אחר כך יצאה מונית מעיר א׳ לכיוון המשאית. המונית השיגה את המשאית ומיד החלה לחזור. כאשר הגיעה המונית חזרה לעיר א׳, הייתה המשאית במרחק 15 ק״מ מעיר ב׳. מה הייתה מהירות המונית ?

(שאלה למחשבה : האם יש מקום בתבנית לנתוני המרחק בין הערים ולמרחק המשאית מהעיר ? איזה שימוש ניתן לעשות בנתונים אלה לדעתכם ?)

8. עמותה למטרות צדקה קנתה חבילות שי בסכום של 10,000 ₪. את החבילות פירקו מתנדבים וארזו אותם מחדש בחבילות קטנות יותר. כל חבילה נמכרה בשקל יותר ממחיר חבילה שנקנתה. מספר החבילות שנמכרו היה גבוה ב- 300 ממספר החבילות שנקנו. סה״כ הכניסה העמותה לתקציבה 2000 ₪ . כמה חבילות נמכרו, ובאיזה מחיר ?

<u>הצבת משוואות ופתרון בעיות מילוליות</u>

מאופן שליפת הנתונים אנו כבר יכולים לראות שכל הבעיות המילוליות נפתרות באותה התבנית:

גודל כולל = מס' יחידות • $\frac{\textbf{גודל}}{\textbf{יחידה}}$ כאשר ההבדל היחיד בין הסוגים השונים הוא בְמְמַדים המתאימים לבעיה.

בבעיות דרך נקבל: מרחק כולל = זמן • $\frac{\text{מרחק}}{\text{זמן}}$ (מהירות)

בבעיות קנייה ומכירה: מחיר כולל = מס' יחידות • $\frac{\text{מחיר}}{\text{יחידה}}$

בבעיות הֶספק: סה"כ עבודה = זמן • $\frac{\text{כמות/חלקיות עבודה}}{\text{יחידת זמן}}$ (הֶספק)

בבעיות תערובת: כמות מומס = נפח/משקל • $\frac{\text{כמות מומס}}{\text{יחידת נפח/משקל}}$ (% הריכוז של המומס)

כלומר אנו יכולים לראות שבאופן כללי ההיגיון המנחה בבעיות מילוליות אינו תלוי בנושא השאלה. כדי שנהיה בטוחים במערכת ההצבות שלנו, כדאי גם לבדוק את המְמַדים של כל משוואה. נוכל להשוות בין המֵמַד המתקבל בצד שמאל, לבין המֵמַד המתקבל בצד ימין. אם ההתאמה אינה מתקיימת, סימן מובהק הוא שהמשוואה **<u>אינה</u>** נכונה. במקרה זה נחסוך זמן פתרון ונחזור למציאת המשוואה הנכונה. אם קיימת התאמה, יש סיכוי טוב שהמשוואה נכונה, ושווה להשקיע גם בפתרון כדי להגיע לתוצאה המבוקשת.

מכיוון שהמְמַדים חשובים לפתרון בעיות מילוליות, נרחיב קצת בנושא.

נתחיל בבעיות תנועה.

מתוך כל הנאמר לעיל, אני תקווה שכבר הבנתם כי בתנועה שולטת הנוסחה: דרך = זמן • מהירות

או כפי שכבר ראינו: מרחק כולל = זמן • $\frac{\text{מרחק}}{\text{זמן}}$ (מהירות)

בדרך כלל (אך זו ממש לא חובה) מסמנים את המהירות באות – v, את הזמן באות – t ואת הדרך באות - s, ואז מתקבלת אותה הנוסחה בצורה: $vt = s$

בדיקת המְמַדים תַּראה לנו שאכן מתקיים בהם שוויון: $v \cdot t = s$

$$\text{ק"מ} = \text{זמן} \cdot \frac{\text{ק"מ}}{\text{זמן}}$$

ואכן רואים שלאחר צמצום מתקבל מֵמַד של ק"מ בשני האגפים.

נתחיל בניתוח בעיות פשוטות.

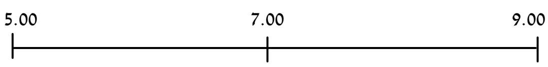
ט. אדם יצא לטייל בשעה 5.00 במהירות מסוימת. בשעה 7.00 הגדיל את מהירותו ב- 1 קמ"ש והתמיד במהירות זו עד השעה 9.00 . מה הייתה מהירותו התחילית אם עבר בסה"כ 18 ק"מ ?

פתרון:

תחילה נבחר נעלמים. הנעלם הוודאי הוא המהירות התחילית כפי שעולה מניסוח השאלה (בדרך כלל נמצא את הנעלם במשפט האחרון של השאלה). נזכיר כי לא נהסס להוסיף נעלמים, ככל שיידרשו, בהצגת המודל. לכן נציין בפנינו:

v - מהירות התנועה של הטייל עד השעה 7.00

נוסיף שִׂרטוט:



עתה נבחן שוב את השאלה; נבדוק כמה סיפורים מופיעים בשאלה ולפי זה, נציג את הנתונים.
מהסתכלות נוספת אנו מוצאים שני סיפורים: הראשון מתאר את ההליכה עד השעה 7.00, והשני - מהשעה 7.00 . לכן הצגת הנתונים תֵּיראה כך:

	עד 7.00	אחרי 7.00
מהירות	v (הנעלם הנבחר)	$v+1$ (הגדלת המהירות ב-1)
זמן	2 (זמן הליכה)	2 (זמן הליכה)
* דרך	s_1	s_2

* בהצגת הדרכים הוספנו נעלם. מכיוון שלא הוגדרה לנו הדרך באופן מפורש, נוסיף עוד נעלם ונקווה שנקבל מספיק משוואות. אל דאגה! באופן רגיל המשוואות מתכנסות במהירות ובקלות למספר מצומצם של משוואות (עד שתיים) ולפתרון פשוט.

עתה נוכל לעבור להצגת המשוואות שיתארו את תנאי השאלה:

משוואת התנועה עד השעה 7.00 תהיה לפי נוסחת הדרך: $2v = s_1$ (1)

משוואת התנועה אחרי השעה 7.00 תהיה לפי אותה נוסחה: $2(v+1) = s_2$ (2)

מכיוון שהשתמשנו בנוסחה, אנו יכולים לסמוך על נכונותה, ואין צורך לבדוק מְמַדים.
כדי להשוות את מספר המשוואות למספר הנעלמים כדאי לחפש נתון נוסף שלא הוצב בטבלה. את המשוואה השלישית נמצא לפי הנתון הנוסף של סה"כ הדרך. נתון זה מקשר בין הדרכים שבסיפורים שלנו. המשוואה תהיה: $s_1 + s_2 = 18$ (3)

בדיקת מְמַדים תֵּראה: ק"מ = ק"מ+ ק"מ כלומר מְמַדי האגפים במשוואה (3) שווים.
תהליך הפתרון של משוואות אלה נהיה פשוט אם מציבים את משוואות (1) ו- (2) במשוואה (3) .

מקבלים אז: $2v + 2(v+1) = 18$ (4)

ולאחר פתיחת סוגריים: $2v + 2v + 2 = 18$

נעביר אגפים ונקבל: $4v = 16$

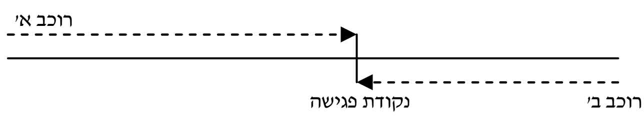
ולבסוף: $v = 4$

והתשובה היא: מהירותו ההתחלתית של המטייל הייתה 4 קמ"ש.

י. משני מקומות שהמרחק ביניהם 61 ק"מ, יצאו שני רוכבי אופניים זה לקראת זה. הראשון יצא בשעה 5.30 ובמהירות 10 קמ"ש, והשני יצא בשעה 7.00 ובמהירות 13 קמ"ש. מצאו את זמן פגישתם.

פתרון:

בשאלה זו יש לשים לב שקיים הבדל בין מועדי הנסיעה. אם אנו מחשבים את הזמן בבעיות תנועה כזמן נטו של התנועה, הרי שהרוכב שיצא מאוחר יותר, נסע פחות שעות.
גם בשאלה זו קל לראות שהנעלם המִיָּדִי הוא הזמן. לכן נציין בפנינו:
t - זמן הרכיבה של הרוכב הראשון
גם פה נוסיף נעלמים בכל מקום שיידרשו.
שִׂרטוט:



שוב אנו מוצאים שני סיפורים ונציג אותם בדרך זהה לבעיה הקודמת :

	רוכב א'	רוכב ב'
מהירות	10	13
זמן	t	$t - 1.5$
דרך	s_1	s_2

הצבת המשוואות תהיה :

$(1)\ 10t = s_1$

$(2)\ 13(t - 1.5) = s_2$

$(3)\ s_1 + s_2 = 61$

לפני המשך הפתרון כדאי לכם להסביר לעצמכם : א. מהיכן נובעת כל משוואה ?   ב. האם המְמַדים מתאימים ?

עתה יש לפתור את המשוואות (כמו בדוגמה הקודמת).

התשובה צריכה להיות : $t = 3.5$

והתשובה הסופית : הפגישה בין הרוכבים הייתה בשעה 9.00.

<u>בדיקת הבנה</u>

9. שתי רכבות יוצאות בו זמנית זו לקראת זו משתי תחנות. התחנות מרוחקות 600 ק"מ זו מזו. אחת הרכבות מגיעה למטרתה 3 שעות לפני השנייה. ידוע כי אחת הרכבות עוברת מרחק של 200 ק"מ באותו זמן שהרכבת השנייה עוברת 250 ק"מ. מהן מהירויות הרכבות ?

נעבור עתה <u>לבעיות קנייה ומכירה</u>.

גם כאן "ניתקל" בשאלות שיכללו כמה סיפורים. לכן דרכי הפתרון יהיו על פי אותה מתכונת כמו בבעיות תנועה.

יא. תלמיד קנה כמות של מחברות ושילם תמורתן 140 ₪. אם מחיר כל מחברת היה נמוך ב- 30 אגורות, היה התלמיד מקבל עבור אותו סכום 6 מחברות יותר.

כמה מחברות קנה התלמיד, ומה מחיר כל מחברת ?

פתרון :

תחילה נקרא את השאלה כולה.

בבעיות כאלו יש לשים לב שלעִתים המחירים נקובים בשני מְמַדים שונים : שקלים ואגורות. לכן יש תחילה להמיר את כל המחירים למֱמַד שווה. אנו נבחר להמיר את האגורות לשקלים, ולכן 30 אגורות יהפכו ל- 0.3 ₪.

עתה עלינו לברור נעלמים מדויקים. כמו תמיד הנעלם יימצא בסופה של השאלה.

עתה נגדיר את הנעלמים :

מס' המחברות שקנה התלמיד – x

מחיר כל מחברת – y

עתה נקרא שוב את הבעיה ונברר כמה סיפורים יש בבעיה.

נמצא שישנם 2 סיפורים : הראשון מתאר את המקרה "האמיתי", והשני מקרה של "הוזלת המחיר".

נציג את הסיפורים באופן מפורט (אין לחשוש להציב נעלם בכל מקום שלא נתון לנו ערך מספרי) :

	המקרה האמיתי	הוזלת מחיר
מחיר מחברת	y	y - 0.3
מס' מחברות	x	x + 6
תשלום	140	140

לאחר הצבת הערכים בכל סיפור אנו מגיעים לבניית המשוואה.

משוואה ראשונה תהיה (בהתאם לדרך המוכרת לנו כבר): $(1)\quad xy = 140$

משוואה שנייה תהיה (כנ"ל) $(2)\ (y-0.3)\cdot(x+6) = 140$

במשוואות שהצבנו, מתקיימת ההתאמה, ובשני האגפים מתקבל מֵמַד של שקלים:
בימין מופיע מחיר, ובשמאל מופיע כפולה של מחיר (מחברת) במספר חסר מֵמַד (מס' מחברות), כלומר גם הוא מֵמַד של שקלים. כך בשתי המשוואות. לכן כדאי להשקיע זמן גם בפתרון.

והפתרון המלא: פתיחת סוגריים במשוואה (2): $xy-0.3x+6y-1.8=140$

הצבה של (1) בתוך (2): $140-0.3x+6y-1.8=140$

העברת אגפים ובידוד של x: $-0.3x=-6y+1.8 / \div -0.3$

אחרי חילוק המשוואה ב- 0.3 - : $x=20y-6$

הצבה חוזרת של x במשוואה (1): $(20y-6)\cdot y=140$

שוב פתיחת סוגריים: $20y^2-6y=140$

וסידור המשוואה הריבועית: $20y^2-6y-140=0$

פתרון המשוואה הריבועית נותן: $y_1=2.8 \quad y_2=-2.5$

מכיוון שהנעלם y מייצג מחיר, אין הוא יכול להיות שלילי (אין ערך שלילי לחפצים). לכן התשובה המתאימה לבעיה שלנו היא: $y = 2.8$, ואותה עלינו להציב שוב כדי לקבל את מספר המחברות (x).

נציב שוב במשוואה (1) (או (2) אם אתם מעדיפים): $x\cdot 2.8 = 140$

וע"י העברת אגפים: $x=\frac{140}{2.8}$

מקבלים: $x=50$

כמובן, אין לשכוח לתת תשובה מילולית לשאלה מילולית:

תשובה: התלמיד קנה 50 מחברות במחיר 2.8 שקלים למחברת.

יב. בי"ס קנה מחשבים ומדפסות בסכום כולל של 105,000 ₪. מחיר מחשב גבוה ב- 2500 ₪ ממחיר מדפסת. הסכום ששולם עבור מחשבים היה גבוה פי 2 מהסכום ששולם עבור מדפסות. מה מחיר מדפסת, ומה מחיר מחשב אם ידוע שנִקנו סה"כ 55 פריטים ?

פתרון:

גם כאן נבחר נעלמים אחר קריאה ראשונה של השאלה. גם כאן הנעלמים ייבחרו לפי השאלה המופיעה במשפט האחרון.

מחיר מחשב – x

מהיר מדפסת – y

קריאה חוזרת תַראה לנו שגם פה ישנם שני סיפורים : קניית המחשבים וקניית המדפסות. והצגתם :

	מחשבים	מדפסות
מחיר יחידה	x	y
מס׳ יחידות	n	$55 - n$
עלות כוללת	$2z$	z

כפי שניתן לראות, הוספנו (עוד) שני נעלמים : מספר מחשבים שנקנו – n ועלות כל המדפסות – z, ואין לחשוש מכך. פשוט עלינו לזכור שכל הנדרש הוא לבנות מערכת משוואות עם מס׳ משוואות זהה למס׳ הנעלמים. את הנתונים הנוספים נמצא בתוך השאלה.

משוואת מחיר המחשבים : $x \cdot n = 2z \quad (1)$

משוואת מחיר המדפסות : $y(55-n) = z \quad (2)$

סה״כ עלות הקנייה : $z + 2z = 105000 \quad (3)$

הקשר בין מחיר מחשב למחיר מדפסת : $x - y = 2500 \quad (4)$

לכאורה נראה שכדי לפתור את כל המשוואות האלה יש צורך בתחכום מיוחד . האמת היא שלא. בדרך כלל הן מתנוונות מהר מאוד לשתי משוואות בשני נעלמים :

ממשוואה (3) מקבלים מיד : $(5)\quad 3z = 105000 \quad \Rightarrow \quad z = 35000$

ממשוואה (4) מתקבל : $(6)\quad x = 2500 + y$

הצבתם של משוואות (5,6) במשוואה (1) : $(2500 + y) \cdot n = 70000$

$(7)\quad 2500n + yn = 70000$

הצבתם של משוואות (5,6) במשוואה (2) : $y(55-n) = 35000$

$(8)\quad 55y - yn = 35000$

ועתה עלינו לפתור שתי משוואות : (7) ו- (8) :

חיבור המשוואות (7,8) נותן : $2500n + 55y = 105000$

$2500n = 105000 - 55y$

ובידוד n מוביל ל: $n = \dfrac{105000 - 55y}{2500}$

הצבה של n במשוואה (7) : $\dfrac{2500(105000-55y)}{2500} + \dfrac{y(105000-55y)}{2500} = 70000$

הכפלה ב- 2500 : $2.625 \cdot 10^8 - 137500y + 105000y - 55y^2 = 1.75 \cdot 10^8$

סידור משוואה ריבועית : $-55y^2 - 32500y + 87500000 = 0$

והפתרון: $y_1 = 1000 \qquad y_2 = -1590...$

לא מתאים

וע"י הצבת y במשוואה (6): $x = 2500 + 1000 = 3500$

והתשובה המילולית:

מחיר מחשב 3500 ₪, ומחיר מדפסת 1000 ₪.

יג. מוצר מסוים הוזל ב- x אחוזים. לאחר תקופה מסוימת התייקר אותו מוצר שוב ב- x אחוזים.

א. האם מחירו הסופי של המוצר היה שווה למחירו הראשוני, יקר יותר או זול יותר?

ב. אם ידוע ש- $x = 12$, ומחירו הסופי היה 9856 ₪, מה היה מחירו ההתחלתי?

פתרון:

לפתרון סעיף א' ניתן להסתפק בהסבר מילולי. מתוך מה שלמדנו עד כה, אנו יכולים להבין שאחוז ממחיר גבוה גדול בערכו הכספי מאחוז ממחיר נמוך. לכן ההוזלה תהיה גדולה יותר בערכה הכספי מאשר ההתייקרות. ומכאן שערכו הסופי של המוצר יהיה נמוך יותר מאשר ערכו הראשוני, ואין הדבר תלוי כלל בערכו הראשוני של המוצר.

אנו נוכיח זאת גם בדרך חישובית.

כדי להקל על ההוכחה נניח כי מחיר הבסיס של המוצר היה 100 ₪, ולמחיר הסופי נקרא m.

עתה נבנה את הטבלה:

	הוזלה	התייקרות
מחיר מקורי	100	$100(1-\frac{x}{100})$
אחוז השינוי	x	x
מחיר סופי	$100(1-\frac{x}{100})$	$100(1-\frac{x}{100})(1+\frac{x}{100})$

כלומר מחיר המוצר הסופי יהיה: $[100(1-\frac{x}{100})]\cdot(1-\frac{x}{100}) = m$

(מבחינה מתמטית אין משמעות לסוגריים המרובעים, והם נועדו רק להבהיר איך הגענו לביטוי זה).

עתה אנו יכולים לבצע את ההכפלה: $100(1-\frac{x}{100})(1+\frac{x}{100}) = m$

ולפי נוסחת כפל מקוצר, מקבלים: $100(1-\frac{x^2}{100^2}) = m$

בלי כל קשר לגודל x הסוגריים תמיד יהיו קטנים מ- 1, ולכן המחיר הסופי יהיה קטן מ- 100.

נשים לב שמחיר הבסיס לא בא כלל לידי ביטוי בחישוב שערכנו, ובקלות היינו יכולים להחליפו

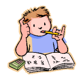
בפרמטר כלשהו - נניח a - ואז היינו מקבלים מחיר סופי: $a(1-\frac{x^2}{100^2}) = m$

כדי לחשב את סעיף ב' קל להיעזר בביטוי שקיבלנו.

נציב את הערכים הידועים לנו: $a(1-\frac{12^2}{10000}) = 9856$

וע"י העברת אגפים פשוטה נקבל: $a = 10000$.

תשובה: מחירו הראשוני של המוצר היה 10000 ₪.



<u>בדיקת הבנה</u>

10. סוחר קנה נעלי ספורט ב- 6000 ₪. 20 זוגות הוא מכר ברווח של 20% לעומת המחיר ששילם. 15 זוגות נוספים מכר ברווח של 30% לעומת המחיר ששילם, ואילו את הזוגות הנותרים מכר בהפסד של 25% לעומת המחיר ששילם תמורתם. הסוחר הרוויח בעסקה זו 570 ₪. כמה זוגות נעלי ספורט קנה הסוחר ?

באותה מתכונת נטפל גם בנושא <u>בעיות הֶספק</u>.

יד. פועל יכול לבצע עבודה מסוימת ב- 6 שעות. פועל אחר יכול לסיים את אותה עבודה ב- 9 שעות.

בכמה זמן תושלם העבודה אם יעבדו בצוותא ?

פתרון :

בחירת הנעלם המִיָדי היא : t – זמן העבודה המשותף.

פועל א' משלים עבודתו ב- 6 שעות, לכן קֶצֶב עבודתו : $\frac{1}{6}$ מהעבודה בכל שעה.

פועל ב' משלים עבודתו ב- 9 שעות, לכן קֶצֶב עבודתו : $\frac{1}{9}$ מהעבודה בכל שעה.

עתה נרשום לנו את נתוני השאלה לפי הטבלה :

	פועל א'	פועל ב'
הֶספק	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$
זמן	t	t
כמות העבודה	s_1	s_2

לכן משוואת המודל של הבעיה היא :

$$1)\quad \frac{1}{6}t = s_1$$

$$2)\quad \frac{1}{9}t = s_2$$

$$3)\quad s_1 + s_2 = 1$$

ועל ידי הצבה של (1) ו- (2) בתוך (3) :

$$\frac{1}{6}t + \frac{1}{9}t = 1$$

$$t(\frac{1}{6} + \frac{1}{9}) = 1$$

למשוואות מסוג זה אין מְמַדים כי אנו מחברים חלקי עבודה ומקבלים שלם.

(שימו לב! תמיד הסכום =1 כי תמיד מחברים לשם קבלת העבודה כולה, כלומר השלם.)

הפתרון :

$$t(\frac{3+2}{18}) = 1$$

$$t \cdot \frac{5}{18} = 1$$

$$t = \frac{18}{5} = 3.6$$

תשובה : הם יסיימו את העבודה במשך שלוש שעות ו- 36 דקות.

טו. כדי לרוקן מְכָל יש לפתוח שני ברזי ניקוז במשך 8 שעות. יום אחד היה המְכָל מלא, ופתחו רק ברז אחד לפרק הזמן שהברז השני יכול לנקז את המְכָל לבד. סגרו ברז זה ופתחו את הברז השני לפרק זמן שבו יכול הברז הראשון לנקז $\frac{1}{8}$ מהמְכָל לבדו. בסוף התהליך נמצא רבע מהמְכָל מלא.

כמה שעות היה פתוח כל ברז ?

פתרון :

נבחר : x - זמן ניקוז של ברז א' (ראשון) לבדו

y - זמן ניקוז של ברז ב' (שני) לבדו

והטבלה :

	ניקוז רגיל		ניקוז של "יום אחד"	
	ברז א'	ברז ב'	ברז א'	ברז ב'
הֶספק	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{y}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{y}$
זמן	8	8	y	$\frac{1}{8}x$
כמות מנוקזת	1		$\frac{3}{4}$	

(כדאי לבדוק ולהסביר איך הגענו לזה.)

המשוואות המתקבלות :

$$(1)\quad 8\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1$$

$$(2)\quad y\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{8}x\cdot\frac{1}{y}=\frac{3}{4}$$

הפתרון הוא :

ממשוואה (1) : $8y+8x=xy$

ממשוואה (2) : $8y^2+x^2=6xy$

ע"י בידוד y במשוואה (1) מקבלים : $y=\frac{-8x}{(8-x)}$

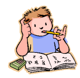
והצבה במשוואה (2) : $8\cdot\frac{64x^2}{(8-x)^2}+x^2=6x\cdot\frac{-8x}{(8-x)}$

אם מכפילים את כל המשוואה

ב : $\frac{(8-x)^2}{x^2}$ (יש לזכור ש : x^2 לא אפס)

מקבלים : $512+(8-x)^2=-48(8-x)$

והתשובה הסופית : ברז א' מנקז את המכל ב- 40 שעות, וברז ב' ב- 10 שעות.



<u>בדיקת הבנה</u>

11. שני צינורות מובילים מים לברֵכה. דרך הצינור השני נכנסים 18 מ"ק מים בדקה. יום אחד, כשהברֵכה הייתה ריקה, פתחו את הצינור הראשון. 20 דקות אחר כך פתחו את הצינור השני. כמות המים שנכנסה דרך הצינור הראשון הייתה גדולה פי 2 מהכמות שנכנסה דרך הצינור השני. למחרת, כשהברֵכה הייתה שוב ריקה, פתחו את שני הצינורות יחד, והברֵכה התמלאה ב- 12 דקות פחות מאשר ביום הקודם (החל מפתיחת הראשון). מה נפח הברֵכה ?

באותה מתכונת נטפל גם <u>בבעיות תמיסה ותערובת</u>.

טז. 50 ליטר תמיסת כוהל עורבבה עם 30 ליטר תמיסת כוהל אחרת שהייתה בריכוז של 60% . לאחר פעולה זו התקבלה תמיסה בריכוז 40% . מה היה ריכוז התמיסה של 50 הליטר?

תזכורת:
ריכוז $= 100 * \frac{\text{כמות חומר}}{\text{כמות כוללת}}$

פתרון:

	מצב א' (לפני הערבוב)		מצב ב' (לאחר ערבוב)
	תמיסה א	תמיסה ב	
ריכוז	x	60	40
כמות כוללת (ליטרים)	50	30	80
כמות מומס (ליטרים)	$50 \cdot \frac{x}{100} = \frac{x}{2}$	$30 \cdot \frac{60}{100} = 18$	$18 + \frac{x}{2}$

עכשיו אנו יכולים לבנות משוואה: $80 \cdot \frac{40}{100} = 18 + \frac{x}{2}$

$$32 = 18 + \frac{x}{2}$$

ועל ידי הכפלה וסידור המשוואה מקבלים: $64 - 36 = x$

$$x = 28$$

תשובה: ריכוז התמיסה היה 28%.

יז. ערבבו שתי תמיסות מלח. אחת בריכוז 40%, והשנייה בריכוז 30% . מהתמיסה המעורבת איידו 20 ליטר וקיבלו 30 ליטר תמיסה בריכוז 60 אחוז. כמה ליטר הכילה כל תמיסה ?

פתרון:

הפעם מתאים לבחור כנעלמים:

x - כמות תמיסה אחת

y - כמות תמיסה שנייה

	מצב א'		מצב ב'	מצב ג'
	תמיסה א'	תמיסה ב'	לאחר ערבוב	לאחר אידוי
ריכוז	40	30	$\frac{0.4x + 0.3y}{x + y} \cdot 100$	60
כמות כוללת	x	y	$x+y$	30
כמות מומס	$0.4x$	$0.3y$	$0.4x+0.3y$	$0.4x+0.3y$

עתה ניתן לבנות שתי משוואות :

$$(1)\quad x+y-20=30$$

$$(2)\quad \frac{0.4x+0.3y}{30}\cdot 100=60$$

והפתרון : ממשוואה (1) מקבלים :

$$x+y=50$$
$$y=50-x$$

בהצבה במשוואה (2) מקבלים :

$$\frac{0.4x+0.3(50-x)}{30}\cdot 100=60$$

$$0.4x+15-0.3x=18$$

ואחרי הכפלה וסידור :

$$0.1x=3$$
$$x=30$$

הצבה חוזרת במשוואה מס׳ (1) :

$$30+y=50$$
$$y=20$$

תשובה : ערבבו 30 ליטר תמיסה בריכוז 40% עם 20 ליטר תמיסה בריכוז 30%.

<u>בדיקת הבנה</u>

12. בחבית נמצאת תמיסת כוהל. כמות המים בחבית גדולה ב- 24 ליטרים מכמות הכוהל. אם יוציאו מהחבית 2 ליטרים מן הכוהל ו- 8 ליטרים מים, ירד ריכוז הכוהל ב- 5%. מהי כמות הכוהל, ומהי כמות המים בחבית ?

דוגמאות נוספות (מומלץ לנסות ולענות על שאלות אלה באופן עצמאי) :

יח. משאית עוברת דרך מסוימת במהירות קבועה. אם מהירותה תקטן ב- 20 קמ״ש, יתארך זמן נסיעתה בשעה וחצי. אם תגדיל את מהירותה ב- 10 קמ״ש, יתקצר זמן נסיעתה ב- 30 דקות. מה מהירות נסיעתה של המשאית, ומה המרחק שהיא עוברת ?

לפני תחילת הפתרון יש לתת את הדעת על כך ש- <u>30 דקות הן חצי שעה</u> !!

כמו כן יש לשים לב שבשאלה זו ישנם שלושה סיפורים!

פתרון :

הנעלמים המְיָדיים :

v – מהירות הנסיעה של המשאית

s – הדרך שהמשאית עוברת

	נסיעת המשאית	הקטנת מהירות	הגדלת מהירות
מהירות	v	$v-20$	$v+10$
זמן	t	$t+1.5$	$t-0.5$
דרך	s	s	s

המשוואות :

(1) $vt = s$

(2) $(v-20)(t+1.5) = s$

(3) $(v+10)(t-0.5) = s$

הצבת משוואה (1) בשתי האחרות ופתיחת סוגריים תביא למשוואות אלה : (בדקו.)

(4) $-20t + 1.5v = 30$

(5) $10t - 0.5v = 5$

פתירת שתי משוואות אלה מגלה : $4.5 = t$ $80 = v$

כדי למצוא את הדרך נכפיל ביניהם ונקבל : $80 \cdot 4.5 = 360$

והתשובה : מהירות המשאית 80 קמ״ש, והיא עוברת 360 ק״מ.

יט. רכבת עושה מסלול של 360 ק״מ במהירות קבועה. יום אחד אירעה תקלה במנוע, ולאחר שעתיים של נסיעה במהירות הקבועה נאלצה הרכבת להאט את מהירותה ב- 30 קמ״ש. לכן איחרה הרכבת להגיע ליעדה, וחצי שעה לאחר המועד המתוכנן לה, עדיין הייתה במרחק 30 ק״מ מהתחנה. מהי המהירות הרגילה של הרכבת ?

פתרון :

עקרונות הפתרון אינם שונים מאלו שבעזרתם פתרנו דוגמאות קודמות.

v – המהירות הרגילה של הרכבת

מבנה השאלה מורכב משני סיפורים עיקריים :המסלול הרגיל והמסלול של התקלה. הסיפור השני מכיל בתוכו גם כן שני סיפורים : שעתיים ראשונות וההמשך.

לכן הצגת הנתונים תקבל את המבנה הבא :

	בדרך כלל	יום של תקלה	
		שעתיים ראשונות	המשך הדרך
מהירות	v	v	$v-30$
זמן	t	2	* $t-1.5$
דרך	360	s_1	s_2

*הזמן חושב לפי : $t-2+0.5$ (שזה זמן הנסיעה הרגיל פחות שעתיים שהרכבת נסעה במהירות רגילה ועוד מחצית שעת נסיעה בשל האיחור).

המשוואות המתאימות יהיו :

(1) $vt = 360$

(2) $2v = s_1$

(3) $(v-30)(t-1.5) = s_2$

(4) $s_1 + s_2 = 330$

ע״י הצבה של משוואות (2)+(3) בתוך (4) מקבלים : (5) $2v + (v-30)(t-1.5) = 330$

מפתרונות (1) +(5) מקבלים : $4 = t$ $90 = v$

והתשובה היא : המהירות הרגילה של הרכבת היא 90 קמ״ש.

כ. סוחר קנה מספר מַחשבונים ושילם תמורתם 4500 ₪. 8 מהם ניזוקו קלות, ולכן מכר אותם בהנחה של 14%. עוד 4 העביר לילדיו. את שאר המַחשבונים מכר במחיר גבוה ב- 15 שקלים ממחיר הקנייה. סה"כ הרוויח הסוחר 336 ₪ בעסקה זו. מה היה מחיר הקנייה של מַחשבון, וכמה מַחשבונים קנה ?

פתרון :

הגדרת נעלמים :

x – מחיר קנייה של מַחשבון

y – מס' מַחשבונים שנִקנו

הצגת הבעיה :

	קנייה	מכירה	
		פגומים	שלמים
מס' מַחשבונים	y	8	$y-12$
מחיר מַחשבון	x	$x(1-\frac{14}{100})$	$x+15$
סה"כ מחיר	$4,500$	m_1	m_2

והמשוואות :

$$(1)\quad xy = 4500$$

$$(2)\quad 8x\cdot 0.86 = m_1$$

$$(3)\quad (y-12)(x+15) = m_2$$

$$(4)\quad m_1 + m_2 = 4500 + 336$$

לאחר הצבה של (3) + (2) במשוואה (4) מקבלים מערכת :

$$(1)\quad xy = 4500$$

$$(4)\quad 8\cdot 0.86x + (y-12)(x+15) = 4836$$

פתרון המשוואות הללו מגלה : $x=75$ $\quad y=60$

(בדקו את הפתרון והשלימו תשובה מילולית.)

כא. שני פועלים מבצעים יחד מחצית עבודה ב- 3 שעות. באחד המקרים עבדו שני הפועלים במשך שעתיים ביחד. אחר כך עזב פועל א', ופועל ב' המשיך בעבודתו עוד חמש שעות. בסה"כ הם ביצעו $\frac{2}{3}$ מהעבודה.

בכמה שעות היה מבצע כל פועל את העבודה כולה ?

פתרון :

הנעלמים :

x - מס' השעות שפועל א' מסיים לבדו את העבודה

y - מס' השעות שפועל ב' מסיים לבדו את העבודה

מתוך הבחירה הזו, אנו כבר יכולים להציג את הֶספק של הפועלים :

הֶספק של פועל א' - $\frac{1}{x}$ מהעבודה בשעה

הֶספק של פועל ב' - $\frac{1}{y}$ מהעבודה בשעה

ונציב בטבלה:

	פועל א'	פועל ב'	פועל א'	פועל ב'
	מצב א' (רגיל)		מצב ב' (יום אחד..)	
הֶספק	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{y}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{y}$
זמן	3	3	2	7
כמות עבודה	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$	

ממילא יובן שאם יש לנו שני נעלמים, עלינו למצוא גם שתי משוואות:

משוואת הקֶצֶב המשותף של הפועלים: $(1)\quad 3(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})=\frac{1}{2}$

משוואת התיאור של המקרה המיוחד: $(2)\quad 2\cdot\frac{1}{x}+7\cdot\frac{1}{y}=\frac{2}{3}$

הכפלה במכנה המשותף של המשוואה הראשונה: $(3)\quad 6y+6x=xy$

סידור המשוואה השנייה: $\frac{2}{x}+\frac{7}{y}=\frac{2}{3}$

והכפלה במכנה משותף: $(4)\quad 6y+21x=2xy$

הצבת משוואה (3) בתוך (4):

$$6y+21x=2(6y+6x)$$

$$6y+21x=12y+12x$$

$$9x=6y$$

$$(5)\quad y=1.5x$$

הצבת משוואה (5) במשוואה (3):

$$6\cdot 1.5x+6x=x\cdot 1.5x$$

$$9x+6x=1.5x^2$$

$$0=1.5x^2-15x$$

והפתרון: $x_1 = 0$ (תוצאה זו לא רלוונטית למקרה זה) $(6)\ 10=x_2$

הצבה של (6) בתוך (5):

$$y=1.5\cdot 10$$

$$y = 15$$

תשובה: פועל א' מסיים את העבודה לבדו במשך 10 שעות, ופועל ב' – במשך 15 שעות.

כב. שני רוכבים יוצאים זה לקראת זה. הראשון יצא מנקודה A ל- B במהירות 15 קמ"ש בשעה 4.40 בבוקר, והשני יצא מ- B ל- A במהירות 13 קמ"ש בשעה 6.00 בבוקר. הם נפגשו והמשיכו בדרכם. הראשון הגיע לנקודה B שעתיים ו- 24 דקות לפני שהשני הגיע לנקודה A. מהו המרחק בין A ל- B ?

פתרון :

	רוכב א'		רוכב ב'	
	עד המפגש	אחרי המפגש	עד המפגש	אחרי המפגש
מהירות	15	15	13	13
זמן	t_1	t_2	$t-\frac{4}{3}$ *	$t_2+\frac{144}{60}$ **
דרך	s_1	s_2	s_2	s_1

מכאן נובעות 4 משוואות :

$$(1)\quad 15t_1 = s_1$$

$$(2)\quad 15t_2 = s_2$$

$$(3)\quad 13(t_1-\frac{4}{3}) = s_2$$

$$(4)\quad 13(t_2+\frac{144}{60}) = s_1$$

הצבת המשוואות (1) ב-4 ו2 ב-3) :

$$(5)\quad 15t_1 = 13(t_2+\frac{144}{60})$$

$$(6)\quad 15t_2 = 13(t_1+\frac{4}{3})$$

תשובה סופית : t_1 = 4 שעות ועשרים דקות, t_2 = שעתיים ושלושים ושש דקות,

והמרחק הוא : 104 ק"מ.

ההסבר למקרה הצורך :

* הרוכב הראשון יצא שעה ועשרים דקות לפני הרוכב השני, לכן זמן התנועה של הרוכב השני קצר בשעה ועשרים דקות. בתרגום לשעות הזמן קצר בשעה ושליש, אך מכיוון שאנו כותבים נתונים אלה כדי להכניס למשוואה, כדאי לכתוב אותם בשבר מדומה ולא כשבר עשרוני.

**הרוכב הראשון הגיע לסוף המסלול לפני השני, לכן יש להוסיף את זמן התנועה של שעתיים ו- 24 דקות לרוכב השני. כדי לתרגם את הדקות לשעות יש לחלק ב 60. וכמו קודם מכיוון שעדיף לעבוד בפתרון משוואות עם שברים מדומים ולא עם שברים עשרוניים (כדי שלא ליפול על שגיאות קיטוע ועיגול), מקבלים את המספר הזה.

s_1 – מוגדר כמרחק בין A למפגש.

s_2 – מוגדר כמרחק בין B למפגש.

<u>תרגול עצמי - בעיות מכל הסוגים</u>

13. המרחק מרחובות לירושלים הוא 54 ק"מ. בשעה 7 : 00 בבוקר יצא רוכב אופניים מרחובות לירושלים, ובשעה 8 : 00 בבוקר יצא רוכב אופניים מירושלים לרחובות. רוכבי האופניים נפגשו בשעה 11 : 00 , וכל אחד מהם המשיך בדרכו. רוכב האופניים מרחובות הגיע לירושלים שעתיים וחצי לפני שהרוכב מירושלים הגיע לרחובות. שני רוכבי האופניים נסעו באותה דרך, ומהירותם לא השתנתה בעת הנסיעה. מה הייתה מהירותו של כל אחד מרוכבי האופניים ?

14. המרחק מנתניה לנצרת הוא 72 ק"מ. בשעה 7:00 בבוקר יצא רוכב אופניים מנתניה ורכב במהירות קבועה על מנת להגיע לנצרת במועד שנקבע מראש. כעבור שלוש שעות האט את מהירותו ב- 2 קמ"ש. כתוצאה מזה התאחר, ושעה אחת לאחר המועד שנקבע, נמצא עדיין במרחק של 6 ק"מ מנצרת. מה הייתה מהירותו של רוכב האופניים במשך שלוש השעות הראשונות לנסיעתו ?

15. כמות מסוימת של חומצת מלח בריכוז של 90% עורבבה בכמות חומצת מלח הקטנה ממנה ב- 20 ליטר ובריכוז של 30%. לאחר מכן אוידו מהתערובת 15 ליטר של מים טהורים ונתקבלה חומצת מלח בריכוז של 72%. כמה ליטרים חומצת מלח בריכוז 72% נתקבלו ?

16. רוקח ערבב כמות מסוימת של כוהל בריכוז של 60% עם כמות אחרת של כוהל בריכוז של 45%, הוסיף לתמיסה 50 גרם מים וקיבל 750 גרם כוהל בריכוז של 50%. כמה גרם כוהל בריכוז של 60% הכניס הרוקח לתמיסה זו ? (הערה: כוהל בריכוז של 60%, הכוונה לתמיסה המכילה 60% כוהל טהור ו- 40% מים.)

17. שתי כתבניות קיבלו להדפסה כתב יד ובו 115 עמודים. ביום הראשון לעבודתן התחילה כתבנית אחת בעבודתה שעה אחת אחרי חברתה. שתיהן הפסיקו יחד את עבודתן כשכל אחת הספיקה להדפיס 30 עמודים. למחרת התחילו שתי הכתבניות יחד בעבודתן, ולאחר 5 שעות הדפיסו יחד את 55 העמודים הנותרים של כתב היד. בהנחה כי קֶצֶב עבודתן לא השתנה במשך כל זמן העבודה, חַשבו כמה עמודים לשעה הדפיסה כל אחת מהן.

18. קבוצת פועלים התחייבה לייצר 216 פריטים תוך זמן קבוע, מתוך ידיעה שהיא מסוגלת לייצר בכל יום מכסה קבועה של פריטים. הפועלים ייצרו ב- 3 הימים הראשונים לפי המכסה הקבועה, ולאחר מכן הגדילו את תפוקתם ב- 8 פריטים ליום. כתוצאה מכך סיימו הפועלים לייצר 232 פריטים יום אחד לפני המועד שנקבע. כמה פריטים ליום הייתה המכסה המתוכננת ?

19. לדוד שנפחו 900 ליטר, מחוברים שני צינורות: האחד למילוי הדוד, והשני להֲרָקתו. הֲרָקת הדוד כשהוא מלא, נמשכת 6 דקות פחות ממילוי הדוד כשהוא ריק. במקרה מסוים כשהיה הדוד מלא, פתחו בטעות את שני הצינורות, והדוד התרוקן ב- 36 דקות. מהי כמות המים הנכנסת לדוד בדקה דרך הצינור הראשון, ומהי הכמות היוצאת ממנו בדקה דרך הצינור השני ?

20. שני פועלים מסוגלים לחפור תעלה ב- 3 שעות ו- 36 דקות כשהם עובדים כל הזמן ביחד. אך בשל תקלה ניגש פועל אחד לעבודה כשהשני חפר כבר את מחצית התעלה ועזב את העבודה. בשל כך נחפרה התעלה בשבע וחצי שעות. הֶספק העבודה של הפועלים לא השתנה לאורך העבודה. בכמה שעות מסוגל כל אחד מהפועלים לחפור את התעלה לבדו ?

21. על שפת נהר נמצאות 3 תחנות של ספינות דיג: A, B ו- C. B נמצאת בין A ל- C במרחק 12 ק"מ מ- C. כיוון הזרם הוא מ- A ל- C. ספינת דיג ללא מנוע עוברת את הדרך מ- A ל- C בארבע שעות, ואת הדרך מ- C ל- A בשש שעות. ספינת מנוע שמהירותה גדולה פי 3 ממהירות הספינה ללא מנוע, עוברת את הדרך מ- B ל- C ב- 45 דקות. כל אחת משתי הספינות חותרת במים במהירות קבועה. מצאו את מהירות זרם הנהר.

22. סוחר קנה שקיות אורז ושילם עבורן 960 ₪ (לכל שקית אותו מחיר). הסוחר ארז את האורז בשקיות קטנות יותר, כך שמספר השקיות שברשותו היה גדול ב- 300 ממספר השקיות שקנה. הוא מכר כל אחת מן השקיות הללו במחיר גבוה ב- 12 אגורות מן המחיר ששילם עבור כל שקית שקנה. בסך הכול הרוויח בעסקה 420 ₪. כמה שקיות קנה הסוחר ? (מצאו את כל התשובות האפשריות.)

23. מחירו המקורי של מוצר בתחילת העונה היה 200 ₪. באמצע העונה הוזילו את המחיר המקורי ב- x% . הביעו באמצעות x את מחיר המוצר באמצע העונה.
בסוף העונה הוזילו את המחיר של אמצע העונה ב- (x + 5) אחוזים. הביעו באמצעות x את מחיר המוצר בסוף העונה. חַשבו את x אם נתון שבסוף העונה היה מחיר המוצר 105 ₪.
24. מנמל A יצאה סירת משוטים עם הזרם לנמל B. מאותו נמל (A) יצאה בעקבותיה לאחר שעה סירת מנוע. היא הגיעה אל סירת המשוטים וחזרה אל נמל A. סירת המנוע הגיעה חזרה לנמל A בדיוק כאשר סירת המשוטים הגיעה לנמל B. ידוע כי מהירות סירת המשוטים (במים עומדים) גדולה פי 3 ממהירות הזרם, ומהירות סירת המנוע (במים עומדים) גדולה פי 5 ממהירות הזרם. מצאו את משך התנועה של סירת המשוטים מנמל A לנמל B.
25. מחירו של מוצר א׳ הוא 90,000 ₪. מחיר זה עלה באחוז מסוים, ולאחר העלאה זו העלו את המחיר החדש שוב באותו אחוז. מחירו של מוצר ב׳ הוא 250,000 ₪. מחיר זה הוזל באותו אחוז שבו הועלה מחירו של מוצר א׳. לאחר הוזלה זו הוזילו את מחירו החדש של מוצר ב׳ שוב באותו אחוז. לאחר שינויים אלה היה המחיר הסופי של שני המוצרים שווה. מהו המחיר הסופי ?
26. בכלי יש 90 ליטר כוהל נקי. מוציאים מהכלי מספר ליטרים של כוהל, מכניסים במקומו מספר ליטרים זהה של מים מזוקקים, ומערבבים. מהתמיסה שהתקבלה מוציאים שוב מספר ליטרים זהה כמו קודם, ומכניסים במקומם מספר ליטרים זהה של מים מזוקקים, ומערבבים. ידוע כי בתמיסה החדשה נמצא כוהל בריכוז של 64% (לפי נפח). מצאו את מספר הליטרים שהוצאו בכל פעם.
27. מונית הנוסעת במהירות קבועה של 80 קמ״ש, ואוטובוס הנוסע במהירות של v קמ״ש, יוצאים בו זמנית מנקודה A לנקודה B. כשהמונית הייתה באמצע הדרך, לאוטובוס נותרו עוד 15 ק״מ כדי להגיע לנקודה B. כשהאוטובוס היה באמצע הדרך, למונית נותרו עוד 8 ק״מ כדי להגיע לנקודה B. א. חשבו את המרחק בין A ל- B. ב. חשבו את מהירות האוטובוס v .
28. סוחר קנה כיסאות בסכום כולל של 50,000 ₪. 5 כיסאות נפגמו, לכן מכר אותם הסוחר בהפסד. הוא מכר את כל אחד מ- 5 הכיסאות הפגומים ב- 90% מן המחיר ששילם לכיסא. את יתר הכיסאות מכר ברווח של 10% לכיסא. הסוחר הרוויח בעסקה כולה 4,500 ₪. כמה כיסאות קנה ?
29. כמות מסוימת של חומצת מלח בריכוז של 90% ערבבו בכמות חומצת מלח קטנה ממנה ב- 20 ליטר ובריכוז של 30% . לאחר מכן איידו מהתערובת 15 ליטר של מים טהורים, ונתקבלה חומצת מלח בריכוז של 75% . כמה ליטרים חומצה בריכוז של 75% נתקבלה ?

פתרונות

.1

	הקנייה בפועל	הקנייה במקרה של מחיר מופחת
מחיר יחידה	x	$x-5$
כמות	y	$y + 12$
סה"כ תשלום	10000	10000

.2

	פועל א'	פועל ב'
הֶספק	$\frac{1}{t}$	$\frac{1}{t+40}$
זמן	¼	¼
סה"כ	s_1	s_2

.3

	עבודה משותפת		עבודה אישית	
	פועל א	פועל ב	פועל א	פועל ב
הֶספק	x	y	x	y
זמן	2	2	3	$\frac{1}{2}$
סה"כ	40		40	

.4

	כלי א'	כלי ב'	כלי ג'
יחס ריכוז	x	$x+0.1$	0.46
כמות כוללת	10	15	25
כמות מומס	$10x$	$15(x+10)$	11.5

.5

	תנועת המכונית כל יום	תנועת המכונית ביום המיוחד	
		חצי שעה ראשונה	המשך הנסיעה
מהירות	v	v	$v-30$
זמן	t_1	0.5	$t_1-0.5$
דרך	150	s_1	$145-s_1$

.6

	הולך א'		הולך ב'	
	לפני פגישה	אחרי פגישה	לפני פגישה	אחרי פגישה
מהירות	4	4	5	5
זמן	t_1	t_2	$t_1 -1$	$t_2+0.5$
דרך	S_1	s_2	s_2	s_1

.7

	משאית		מונית	
	לפני פגישה	אחרי פגישה	לפני פגישה	אחרי פגישה
מהירות	60	60	v	V
זמן	t_1	t_2	$t_1 -0.5$	T_2
דרך	S_1	s_2	s_2	s_1

.8

	קנייה	מכירה
מחיר יחידה	x	$x+1$
כמות	y	$y + 300$
סה"כ תשלום	10000	10000

9. 50 קמ״ש, 40 קמ״ש
10. 50 זוגות
11. 540 מ״ק
12. 3 ליטרים כוהל ו- 27 ליטרים מים
13. 12 קמ״ש , 9 קמ״ש
14. 8 קמ״ש
15. 125 ליטר
16. 400 גרם
17. 5 ו- 6
18. 24 פריטים
19. 50 ליטר, 75 ליטר
20. 6 שעות ו- 9 שעות
21. 1 קמ״ש
22. 1200 שקיות או 2000 שקיות
23. $x = 25$
24. 6 שעות
25. 140,625 ₪
26. 18 ליטרים
27. א. 24 ק״מ, ב. $v = 60$ קמ״ש
28. 100 כיסאות
29. 100 ליטר

<u>אינדוקציה מתמטית</u>

<u>רקע</u>

ראשית נברר לעצמנו מהי אינדוקציה בכלל, ומהי אינדוקציה מתמטית.

המילה <u>אינדוקציה</u>, לפי מילון אבן שושן, היא "שיטת לימוד מן הפרט אל הכלל". כלומר הוכחה של חוק מסוים מתוך בחינת מקרים פרטיים.

שיטת הלימוד ההפוכה – מתוך כלל ללמוד על הפרטים – נקראת <u>דדוקציה</u>.

באופן לוגי יש קושי לקבל הוכחות אינדוקטיביות. לדוגמה: אם אזרוק קובייה מאוזנת שלוש פעמים, ובכל פעם אראה 5, האם זה אומר שגם בפעם הרביעית היא תֵּראה 5 ? מובן שלא. דוגמה נוספת: אם מצאתי מספר גברים ונשים בעלי עודף משקל הממתיקים את הקפה בסוכרזית, האם זה אומר שסוכרזית משמין ?... לכן בדרך כלל אנו מוכיחים מקרים פרטיים על ידי חוק כללי. כך בנויה כל הוכחה בגיאומטריה. אנו מכירים משפטים כלליים ומיישמים אותם על מקרה פרטי המונח לפנינו. כך אנו גם מנסים ליישם חוקים פיזיקאליים. לדוגמה: אנו יודעים שתאוצת המשיכה אינה תלויה במסה, ולכן כל הגופים ייפלו מאותו גובה באותה מהירות. אם נבדוק מקרה פרטי של נפילת כדור עופרת וכדור עץ, אכן נוכל לראות את החוק הזה פועל.

(למתעניינים במדעים ובפילוסופיה: כיוון שכל חוקי המדע הכלליים החלו מתצפיות על מקרים פרטיים, לכאורה הם נתונים לכֶשֶל לוגי. כדי להתמודד עם קושי זה התפתח ענף מחקרי בפילוסופיה של המדע המנסה להתמודד עם כשלים אלו. שניים מהמובילים בתחום זה הם: קרל פופר ותומאס קון. כל אחד מהם מצא פתרון אחר לבעייתיות זו. מאמרו של קרל פופר - "מדע השערות והפרכות" - תורגם ונמצא במקורות של האונ. הפתוחה. ספרו של תומאס קון - "המבנה של מהפכות מדעיות" - תורגם אף הוא. מומלץ לקריאה!)

האינדוקציה המתמטית באה לפתור כֶּשֶל לוגי זה, והיא מצאה את הדרך לשלב מקרה פרטי בהוכחה כללית כך שיהיה ניתן להוכיח חוק כללי על אף שהוא נבדק רק על מקרה פרטי.

<u>אינדוקציה של סדרות</u>

האינדוקציה המתמטית מקובלת כשיטת הוכחה יעילה עבור קבוצות של מספרים.

עיקרי האינדוקציה המתמטית הם שניים:

1. כאשר נתון חוק כללי, בוחנים אותו על מקרה פרטי ספציפי. חשוב לבחון אותו על האיבר הנמוך ביותר שמקיים את החוק.

2. א. אנו מניחים כי החוק הכללי נכון עבור k כלשהו.

2. ב. אנו מוכיחים על בסיס ההנחה (בסעיף 2 א.) שאם החוק אכן מתקיים לאותו איבר, הוא חייב להתקיים גם עבור האיבר הבא אחריו בקבוצה, כלומר עבור $(k+1)$.

כדי להבהיר את השיטה אביא דוגמה מעשית. נניח שאנו מעוניינים להוציא פלייר. אנו מתיישבים מול המחשב ומקלידים אותו ומאיירים ומגיהים... בסוף התהליך אנו "שולחים" את המסמך להדפסה. אנו יודעים שהמדפסת תוציא את המסמך בדיוק כפי שהוא נכתב. אולם עדיין אנו נותנים הוראת הדפסה לעותק אחד, בוחנים אותו (שהוא יצא בדיוק כפי שתכננו), ומכאן והלאה נותנים לו פעולת ביצוע "עד להודעה חדשה". המדפסת מתחילה להדפיס עותק אחרי עותק, בדיוק כפי שהדפיסה את הראשון. האם הפלייר המאה יתאים לפלייר הראשון? האם הפלייר האלף עדיין יתאים לציור הראשון? ברור לנו שכן (בהנחה שהמדפסת מוזנת כל הזמן בדיו ובדפים ואינה מתקלקלת).

מה גורם לנו להיות משוכנעים?

1. בדקנו את שביעות רצוננו מהדפסת הפלייר הראשון.
2. אנו מניחים שיש פלייר כלשהו שיָצא לשביעות רצוננו.
3. על בסיס ההנחה שהמדפסת אינה יכולה להתקלקל, והיא מוזנת בדיו ובדפים באופן אוטומטי, <u>אנו מוכיחים שגם הפלייר הבא יָצא בדיוק כמו הקודם ויהיה כפי שתכננו.</u>

זה למעשה רעיון האינדוקציה המתמטית. כך אנו משיגים הוכחה הנכונה לאין סוף האיברים בסדרה.

נתחיל בדוגמה פשוטה:

א. הוכיחו באינדוקציה כי הטענה: $1+2+3...+n = ½(n^2+n)$ מתקיימת לכל n טבעי.

פתרון:

1. נבדוק עבור מקרה פרטי.

נבדוק את הטענה עבור המקרה: $n = 1$ (האיבר הקטן ביותר)

הצבה בטענה במקרה זה מראה כי הטור באגף שמאל מתחיל ומסתיים ב- 1.

והבדיקה: $1 = ½(1^2+1)$

$1 = 1$

כלומר הבדיקה מראה שאכן החוקיות מתקיימת.

הפעם נרחיב את הבדיקה גם עבור מספרים אחרים כדי להוכיח שגם מקרים פרטיים אחרים מקיימים את הטענה.

נציב: $n = 5$

במקרה זה הטור המתקבל באגף שמאל הוא: $1+2+3+4+5$

והבדיקה: $1+2+3+4+5 = ½(5^2+5)$

$$15 = \tfrac{1}{2} \cdot 30$$

$$15 = 15$$

2. הנחה: הטענה נכונה עבור איבר כלשהו k.

כלומר: על ידי הצבת $n = k$ מקבלים: $1+2+3\ldots+k = \tfrac{1}{2}(k^2+k)$

3. צריך להוכיח שהטענה מתקיימת גם עבור האיבר הבא אחריו, כלומר עבור: $k+1$

על ידי הצבת $n = k+1$ מקבלים: $1+2+3\ldots+k+(k+1) = \tfrac{1}{2}[(k+1)^2+(k+1)]$

<u>שימו לב! מכיוון שהוספנו עוד איבר בטור משמאל $(k+1)$, חובה עלינו להתאים את אגף ימין. כדי לשמור על השקילות יש להציב את האיבר האחרון שהוא עכשיו $(k+1)$ בביטוי הסכום.</u>

הוכחה:

נעתיק שוב את השוויון: $1+2+3\ldots+k+(k+1) = \tfrac{1}{2}[(k+1)^2+(k+1)]$

כדי להוכיח זהות בין האגפים מותר לנו לבצע כל פעולה אלגברית חוקית,

כמו: הצבה, העברת אגפים, הכפלה/חילוק במספר וכדומה, עד לקבלת זהות נראית בין האגפים.

תחילה נבצע הצבה של ההנחה האומרת: $1+2+3\ldots+k = \tfrac{1}{2}(k^2+k)$

הביטוי המתקבל הוא: $\tfrac{1}{2}(k^2+k)+(k+1) = \tfrac{1}{2}[(k+1)^2+(k+1)]$

נכפיל ב- 2 ונפתח סוגריים: $k^2+k+2k+2 = k^2+2k+1+k+1$

כינוס: $k^2+3k+2 = k^2+3k+2$

עתה אנו רואים את הזהות בין האגפים, כלומר הוכחנו את השוויון.

מתוך שני העקרונות: א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההנחה וההוכחה שאם החוק מתקיים עבור k כלשהו, הוא יתקיים גם עבור $k+1$ - הוכחנו את נכונות הטענה עבור כל n טבעי.

<u>בדיקת הבנה</u>

1. א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $2+6+10+\ldots+(4n-2) = 2n^2$

ב. בדקו האם הטענה נכונה גם עבור: $n = 5$

כמו שכבר ראינו בגיאומטריה, יש חשיבות רבה למבנה ההוכחה ולאופן הכתיבה. לכן אני ממליץ בכל דוגמה ותרגול לא להסתפק רק בכתיבה המתמטית אלא גם במבנה ההוכחה ובשפה.

<u>בכל הוכחה באינדוקציה:</u>

א. נבדוק נכונות הטענה עבור מקרה פרטי – בדרך כלל $n=1$

ב. נניח כי הטענה נכונה עבור: $n=k$

ג. נוכיח נכונות הטענה עבור: $n=k+1$

וסיום ההוכחה: על פי שני העקרונות: א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההנחה וההוכחה שאם החוק מתקיים עבור k כלשהו, הוא יתקיים גם עבור $k+1$ - הוכחנו את נכונות הטענה עבור כל n טבעי.

ב. הוכיחו על ידי אינדוקציה מתמטית כי לכל n טבעי מתקיים: $4+9+14+\ldots+(5n-1) = ½(5n^2+3n)$

פתרון:

1. בדיקה למקרה פרטי: $n = 1$

$$4 = ½(5\cdot 1^2+3\cdot 1)$$
$$4 = ½(5+3)$$
$$4 = 4$$

2. הנחה – עבור $n = k$ טבעי כלשהו מתקיים: $4+9+14+\ldots+(5k-1) = ½(5k^2+3k)$

3. צ"ל: הזהות תתקיים גם עבור: $n = (k+1)$

כלומר צריך להוכיח את הזהות:

$$4+9+14+\ldots+(5k-1)+[5(k+1)-1] =½[5(k+1)^2+3(k+1)]$$

הוכחה:

לפי ההנחה: $4+9+14+\ldots+(5k-1) = ½(5k^2+3k)$

על ידי הצבה: $½(5k^2+3k)+[5(k+1)-1] = ½[5(k+1)^2+3(k+1)]$

נכפיל ב- 2: $(5k^2+3k)+2[5(k+1)-1] = [5(k+1)^2+3(k+1)]$

פתיחת סוגריים: $5k^2+3k+10k+8 = 5k^2+10k+5+3k+3$

כינוס: $5k^2+13k+8 = 5k^2+13k+8$

על פי שני העקרונות: א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההנחה וההוכחה שאם הטענה מתקיימת עבור k טבעי כלשהו, היא תתקיים גם עבור $k+1$ - הוכחנו שהזהות מתקיימת עבור כל n טבעי.

ג. א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$4\cdot 5+5\cdot 7+6\cdot 9+\ldots+(n+3)(2n+3) = \frac{n(4n^2+33n+83)}{6}$$

ב. מצאו את סכום 15 האיברים הראשונים.

פתרון:

1. בדיקה למקרה פרטי: $n = 1$

איבר אחרון לחיבור: $4\cdot 5$, גם האיבר הראשון הוא: $4\cdot 5$

לכן:

$$4\cdot 5 = \frac{1(4\cdot 1^2+33\cdot 1+83)}{6}$$
$$20 = \frac{(4+33+83)}{6}$$
$$20 = \frac{120}{6}$$

2. הנחה – עבור $n = k$ טבעי כלשהו מתקיים:

$$4\cdot 5+5\cdot 7+6\cdot 9+\ldots+(k+3)(2k+3) = \frac{k(4k^2+33k+83)}{6}$$

3. צריך להוכיח: הטענה תתקיים גם עבור: $n = k+1$

כלומר צריך להוכיח את הזהות:

$$4\cdot 5+5\cdot 7+6\cdot 9+\ldots+[(k+1)+3]\,[2(k+1)+3] = \frac{(k+1)[4(k+1)^2+33(k+1)+83]}{6}$$

הוכחה :

על ידי הצבה של ההנחה מקבלים :

$$\frac{k(4k^2+33k+83)}{6} + [(k+1)+3]\ [2(k+1)+3] = \frac{(k+1)[4(k+1)^2+33(k+1)+83]}{6}$$

הכפלה ב- 6 ופתיחת סוגריים מרובעים :

$$k(4k^2+33k+83)+6(k+4)(2k+5) = (k+1)(4k^2+8k+4+33k+33+83)$$
$$4k^3+33k^2+83k+6(2k^2+5k+8k+20) = (k+1)(4k^2+41k+120)$$
$$4k^3+33k^2+83k+12k^2+78k+120 = 4k^3+41k^2+120k+4k^2+41k+120$$
$$4k^3+45k^2+161k+120 = 4k^3+45k^2+161k+120$$

על פי שני העקרונות : א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההנחה וההוכחה שאם הטענה מתקיימת עבור k טבעי כלשהו, היא תתקיים גם עבור $(k+1)$ - הוכחנו שהזהות מתקיימת עבור כל n טבעי.

ב. על ידי הצבה של $n = 15$ לאגף ימין אנו מוצאים, למעשה, את סכום 15 האיברים הראשונים הנתונים בטור. לכן : $\frac{15(4\cdot 15^2+33\cdot 15+83)}{6} = 3695$

תשובה : $S_{15} = 3695$

<u>בדיקת הבנה</u>

2. א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים :

$$1\cdot 2+3\cdot 4+5\cdot 6+....+(2n-1)\cdot 2n = \frac{1}{3}n(n+1)(4n-1)$$

ב. מצאו את סכום עשרת האיברים הראשונים.

יש החוששים מכל תרגיל שיש בו שברים. לטובתם נבחן את הדוגמה הבאה ונראה כי אין כל שינוי בגישה או בהוכחת הזהויות גם אם מעורבים בהם שברים. כבר הזכרנו שכדי להוכיח זהות ניתן להשתמש בכל הכלים המתמטיים המוכרים בטכניקה האלגברית, ולכן כל השינוי הוא שעתה עלינו להכפיל במכנה משותף.

ד. הוכיחו באינדוקציה כי הזהות : $\frac{4}{4\cdot 7}+\frac{4}{7\cdot 10}+\frac{4}{10\cdot 13}+...+\frac{4}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{n}{3n+4}$

מתקיימת לכל n טבעי.

פתרון :

1. בדיקה למקרה פרטי : הצבה : $n = 1$

$$\frac{4}{4\cdot 7} = \frac{1}{3\cdot 1+4}$$
$$\frac{1}{7} = \frac{1}{7}$$

2. הנחה – עבור $n = k$ טבעי כלשהו מתקיים :

$$\frac{4}{4\cdot 7}+\frac{4}{7\cdot 10}+\frac{4}{10\cdot 13}+...+\frac{4}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{k}{3k+4}$$

3. צריך להוכיח : הטענה תתקיים גם עבור : $n = k+1$

כלומר צריך להוכיח את הזהות :

$$\frac{4}{4\cdot7}+\frac{4}{7\cdot10}+\frac{4}{10\cdot13}+...+\frac{4}{(3k+1)(3k+4)}+\frac{4}{[3(k+1)+1][3(k+1)+4]}=\frac{k+1}{3(k+1)+4}$$

הוכחה :

על ידי הצבה של ההנחה מקבלים :

$$\frac{k}{3k+4}+\frac{4}{[3(k+1)+1][3(k+1)+4]}=\frac{k+1}{3(k+1)+4}$$

אחרי פתיחת סוגריים חיצוניים :

$$\frac{k}{3k+4}+\frac{4}{(3k+4)(3k+7)}=\frac{k+1}{3k+7}$$

<u>שימו לב!</u>
כמו תמיד, רצוי לא למהר לפתוח סוגריים פנימיים כדי שקל יהיה לזהות מהו המכנה המשותף הנמוך ביותר!!

הכפלה במכנה משותף : $k(3k+7)+4=(k+1)(3k+4)$

$3k^2+7k+4=3k^2+4k+3k+4$

וכפי שאנו רואים : $3k^2+7k+4=3k^2+7k+4$

על פי שני העקרונות : א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההנחה וההוכחה שאם הטענה מתקיימת עבור k טבעי כלשהו, היא תתקיים גם עבור $(k+1)$ - הוכחנו שהזהות מתקיימת עבור כל n טבעי.

אחרי שהוכחנו את הביטוי לסכום בטור, אנו יכולים לחשב את סכומם של טורים כאלה יחסית במהירות. לדוגמה :

מה יהיה סכום הטור ? $\frac{4}{4\cdot7}+\frac{4}{7\cdot10}+\frac{4}{10\cdot13}+...+\frac{4}{61\cdot64}$

כדי לחשב סכום זה כל שעלינו לעשות הוא לזהות מהו ה- k הסופי. מתוך האיבר האחרון אנו רואים :

$61 = 3k+1$

כלומר : $k = 20$

הצבה בנוסחת הסכום : $\frac{4}{4\cdot7}+\frac{4}{7\cdot10}+\frac{4}{10\cdot13}+...+\frac{4}{(3k+1)(3k+4)}=\frac{k}{3k+4}$

$$\frac{4}{4\cdot7}+\frac{4}{7\cdot10}+\frac{4}{10\cdot13}+...+\frac{4}{(3\cdot20+1)(3\cdot20+4)}=\frac{20}{3\cdot20+4}=\frac{20}{64}=\frac{5}{16}$$

דוגמה נוספת :

מה יהיה סכום הטור ? $\frac{4}{31\cdot34}+\frac{4}{34\cdot37}+\frac{4}{37\cdot40}+...+\frac{4}{67\cdot70}$

הפעם עלינו לזכור שסכום הטור כפי שהוא מופיע בנוסחה, נכון עבור טור שמתחיל ב- $k=1$ (כלומר סכום האיברים הראשונים), אבל הטור שלנו איננו מתחיל בו. לכן עלינו לבדוק לא רק מהו ה- k של האיבר האחרון אלא גם של הראשון ולחסר את הערכים המתאימים.

אנו רואים שהטור מסתיים במכנה : $67\cdot70$

כלומר : $67=3k+1$

$k=22$

עתה נבחן מהו ה- k המתאים לאיבר ראשון.

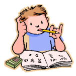
כלומר: $31=3k+1$

$k=10$

כדי למצוא את סכום הטור המבוקש עלינו לבצע: $S_{k=22}-S_{k=9}$

שימו לב שעלינו לחסר את סכום **<u>תשעת</u>** האיברים הראשונים כי **<u>האיבר העשירי</u>** כבר נכלל בסכום המבוקש!

מקבלים: $$\frac{22}{3\cdot 22+4}-\frac{9}{3\cdot 9+4}=\frac{22}{70}-\frac{9}{31}=\frac{26}{1085}$$



<u>בדיקת הבנה</u>

3. א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+....+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n}{(2n+1)}$$

ב. באיזה מקום נמצא האיבר: $\frac{1}{13\cdot 15}$?

ג. מצאו את סכום הטור: $\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+...+\frac{1}{13\cdot 15}$

הדוגמה הבאה מתייחסת לטורים הכוללים חזקות. אין שינוי בדרך הפתרון, אלא שיש לעשות שימוש בחוקי החזקות הבסיסיים.

ה. הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים: $2\cdot 3+3\cdot 9+4\cdot 27+...+(n+1)\cdot 3^n=\frac{3^{n+1}(2n+1)-3}{4}$

פתרון:

1. בדיקה למקרה פרטי: $n=1$

$$2\cdot 3=\frac{3^2\cdot(3)-3}{4}$$

$$6=\frac{24}{4}$$

$$6=6$$

<u>תזכורת לחוקי חזקות:</u>

$a^n\cdot a^m=a^{n+m}$

$\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$

$(a^n)^m=a^{n\cdot m}$

2. הנחה – עבור $n=k$ טבעי כלשהו מתקיים:

$$2\cdot 3+3\cdot 9+4\cdot 27+...+(k+1)\cdot 3^k=\frac{3^{k+1}(2k+1)-3}{4}$$

3. צריך להוכיח: הטענה תתקיים גם עבור: $n=k+1$

כלומר צריך להוכיח את הזהות:

$$2\cdot 3+3\cdot 9+4\cdot 27+...+(k+1)\cdot 3^k+[(k+1)+1]\cdot 3^{k+1}=\frac{3^{(k+1)+1}(2(k+1)+1)-3}{4}$$

הוכחה:

על ידי הצבה של ההנחה מקבלים:

$$\frac{3^{k+1}(2k+1)-3}{4}+[(k+1)+1]\cdot 3^{k+1}=\frac{3^{(k+1)+1}(2(k+1)+1)-3}{4}$$

הכפלה ב- 4 ופתיחת סוגריים : $3^{k+1}(2k+1)-3+4(k+2)\cdot 3^{k+1}=3^{k+2}(2k+3)-3$

הוספת המספר 3 לשני האגפים : $3^{k+1}(2k+1)+4(k+2)\cdot 3^{k+1}=3^{k+2}(2k+3)$

חלוקה ב : 3^{k+1} (שימו לב : $\frac{3^{k+2}}{3^{k+1}}=3$) $(2k+1)+4(k+2)=3(2k+3)$

עתה נותרה משוואה נוחה. פתיחת סוגריים וסידור :

$$2k+1+4k+8=6k+9$$
$$6k+9=6k+9$$

על פי שני העקרונות : א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההנחה וההוכחה שאם הטענה מתקיימת עבור k טבעי כלשהו, היא תתקיים גם עבור (k+1) - הוכחנו שהזהות מתקיימת עבור כל n טבעי.

<u>בדיקת הבנה</u>

4. א. הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים :

$$2\cdot 2+6\cdot 2^2+12\cdot 2^3+\ldots+(n^2+n)\cdot 2^n=2^{n+1}(n^2-n+2)-4$$

ב. מצאו את סכום הטור : $20\cdot 2^4+30\cdot 2^5+\ldots+72\cdot 2^8$

בתקווה שאת מושג העצרת כבר הפנמתם בלימודי קומבינטוריקה והסתברות, נפתור דוגמה שתמחיש איך מתמודדים עם חלוקות ומכפלות של עצרת.

ו. הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים :

$$\frac{1\cdot 3!}{3^3}+\frac{2\cdot 4!}{3^4}+\frac{3\cdot 5!}{3^5}+\ldots+\frac{n\cdot(n+2)!}{3^{n+2}}=\frac{(n+3)!}{3^{n+2}}-\frac{2}{3}$$

פתרון (לפי אותו מבנה שכבר הכרנו) :

1. בדיקה למקרה פרטי : $n=1$

$$\frac{1\cdot 3!}{3^3}=\frac{4!}{3^3}-\frac{2}{3}$$
$$\frac{6}{27}=\frac{24}{27}-\frac{2}{3}$$
$$\frac{6}{27}=\frac{6}{27}$$

2. הנחה – עבור $n=k$ טבעי כלשהו מתקיים :

$$\frac{1\cdot 3!}{3^3}+\frac{2\cdot 4!}{3^4}+\frac{3\cdot 5!}{3^5}+\ldots+\frac{k\cdot(k+2)!}{3^{k+2}}=\frac{(k+3)!}{3^{k+2}}-\frac{2}{3}$$

3. צריך להוכיח : הטענה תתקיים גם עבור $n=k+1$

כלומר צריך להוכיח את הזהות :

$$\frac{1\cdot 3!}{3^3}+\frac{2\cdot 4!}{3^4}+\frac{3\cdot 5!}{3^5}+\ldots+\frac{k\cdot(k+2)!}{3^{k+2}}+\frac{(k+1)\cdot[(k+1)+2]!}{3^{(k+1)+2}}=\frac{[(k+1)+3]!}{3^{(k+1)+2}}-\frac{2}{3}$$

הוכחה :

על ידי הצבה של ההנחה מקבלים : $\frac{(k+3)!}{3^{k+2}}-\frac{2}{3}+\frac{(k+1)\cdot[(k+1)+2]!}{3^{(k+1)+2}}=\frac{[(k+1)+3]!}{3^{(k+1)+2}}-\frac{2}{3}$

תזכורת לחוקי עצרת

$3!=1\cdot 2\cdot 3$

$0!=1$

$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots n$

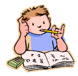
$n!\cdot (n+1)=(n+1)!$

הוספת $\frac{2}{3}$ ופתיחת סוגריים:
$$\frac{(k+3)!}{3^{k+2}}+\frac{(k+1)\cdot (k+3)!}{3^{k+3}}=\frac{(k+4)!}{3^{k+3}}$$

הכפלה ב- $\frac{3^{k+3}}{(k+3)!}$:
$$3+(k+1)=(k+4)$$

$$k+4=k+4$$

על פי שני העקרונות: א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההנחה וההוכחה שאם הטענה מתקיימת עבור k טבעי כלשהו, היא תתקיים גם עבור: $(k+1)$ - הוכחנו שהזהות מתקיימת עבור כל n טבעי.



בדיקת הבנה

5. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:
$$\frac{1}{3!}+\frac{5}{4!}+\frac{11}{5!}+\ldots+\frac{n^2+n-1}{(n+2)!}=\frac{1}{2}-\frac{n+1}{(n+2)!}$$

תרגול עצמי

6. א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $30+28+26+\ldots+(32-2n)=n(31-n)$

ב. בדקו האם הטענה נכונה גם עבור: $n=5$

7. א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:
$$1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+\ldots.+n(n+2)=\frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$

ב. מצאו את סכום עשרת האיברים הראשונים.

8. א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:
$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\frac{3^2}{5\cdot 7}+\ldots.+\frac{n^2}{(2n-1)\cdot (2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

ב. באיזה מקום נמצא האיבר: $\frac{36}{11\cdot 13}$?

ג. מצאו את סכום הטור: $\frac{4}{3\cdot 5}+\frac{9}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{36}{11\cdot 13}$

9. א. הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים: $1-3+9-\ldots.+(-3)^{n-1}=\frac{1-(-3)^n}{4}$

ב. מצאו את סכום הטור: $-27+81-\ldots+6561$

10. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $\frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}=1-\frac{1}{n!}$

11. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $4!+\frac{5!}{1!}+\frac{6!}{2!}+\ldots+\frac{(3+n)!}{(n-1)!}=\frac{(4+n)!}{5(n-1)!}$

אינדוקציה עם הוספת מספר איברים

עד עתה למדנו להכיר את האינדוקציה של סדרות בעלות n או $(n+c)$ איברים. בכל המקרים שראינו, לא היו סדרות שהסתיימו בכפולות של n. זו הסיבה שבשלב המעבר מההנחה עבור: $n=k$ להוכחה עבור: $n=k+1$ היה עלינו תמיד להוסיף רק איבר אחד לביטוי מצד שמאל ולא יותר. עתה נפנה לטפל בסדרות שמסתיימות ב- $2n$ או $3n$ וכדומה. המיוחד בסדרות אלה הוא שיכולים להיתוסף אליהם יותר מאיבר אחד. איך נדע כמה איברים יש להוסיף?

ראשית נציב את $n=k+1$ בביטוי המקורי ונמצא מהו האיבר האחרון שמתקבל.

שנית נבדוק את התקדמות הסדרה לפי האיברים הנתונים, ובהתאם לאותם מרווחים בהם מתקדמת הסדרה, נוסיף כמה איברים שיידרשו.

כדי להבין את התוספת הזו נברר כמה איברים יש להוסיף במעבר מ- $n=k$ ל- $n=k+1$ בדוגמאות הבאות:

1. $1+2+3+\ldots+3n$

פתרון:

עבור $n=k$ הסדרה נראית דומה: $1+2+3+\ldots+3k$

עבור $n=k+1$ האיבר האחרון הוא: $3(k+1)=3k+3$

כפי שאנו רואים, בראשית הסדרה מדרגת העלייה היא 1, כלומר המספרים הם עוקבים. מכאן אנו למדים שכדי להשלים את הסדרה עד $3k+3$ עלינו להוסיף 3 איברים ואז תֵּיראה הסדרה:

$$1+2+3+\ldots+3k+\underbrace{(3k+1)+(3k+2)+(3k+3)}_{\boxed{\text{תוספת נדרשת}}}$$

2. $3+5+7+9+11+\ldots+(8n+3)$

פתרון:

עבור $n=k$ הסדרה היא: $3+5+7+9+11+\ldots+(8k+3)$

עבור $n=k+1$ האיבר האחרון הוא: $8(k+1)+3=8k+11$

מכיוון שההתקדמות היא בפסיעה של 2, לכן:

$$3+5+7+9+11+\ldots+(8k+3)+\underbrace{(8k+5)+(8k+7)+(8k+9)+(8k+11)}_{\boxed{\text{תוספת נדרשת}}}$$

כלומר נוספו עוד 4 איברים לטור.

3. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{5n\cdot(5n+1)}$

פתרון:

עבור $n=k$ הסדרה היא: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{5k\cdot(5k+1)}$

עבור $n=k+1$ האיבר האחרון הוא: $\frac{1}{(5k+5)\cdot(5k+6)}$

והסדרה היא :

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{5k(5k+1)}+\frac{1}{(5k+1)(5k+2)}+\frac{1}{(5k+2)(5k+3)}+\frac{1}{(5k+3)(5k+4)}+\frac{1}{(5k+4)(5k+5)}+\frac{1}{(5k+5)(5k+6)}$$

כלומר נוספו עוד 5 איברים.

<u>בכל הוכחה באינדוקציה :</u>
א. נבדוק נכונות הטענה עבור מקרה פרטי – בדרך כלל $n = 1$.
ב. נניח כי הטענה נכונה עבור : $n = k$
ג. נוכיח נכונות הטענה עבור : $n = k+1$
וסיום ההוכחה : מתוך שני העקרונות : א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההוכחה שאם החוק מתקיים עבור k כלשהו, הוא יתקיים גם עבור k+1 - הוכחנו את נכונות הטענה עבור כל n טבעי.
כאשר האיבר האחרון הוא כפולה של n, יש לבדוק כמה איברים נוספו, אם בכלל.

<u>בדיקת הבנה</u>

12. כמה איברים יש להוסיף במעבר מ- $n = k$ ל- $n = k+1$ בתרגילים הבאים :

א. $7+11+15+\ldots+(8n-1)$

ב. $3\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot 6+\ldots+3k(3k+1)$

עתה נעבור לשילוב הצבת טורים מסוג זה והוכחות באינדוקציה :

ז. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים :

$$3+8+16+24+\ldots+2n(2n+2)=\frac{n}{6}[16n^2+36n+14]$$

פתרון :

1. בדיקה עבור מקרה פרטי : $n = 1$

הצבה באיבר אחרון : $2\cdot 1(2\cdot 1+2) = 8$

אבל הטור מתחיל ב- 3, לכן :

$$3+8=\frac{1}{6}[16\cdot 1^2+36\cdot 1+14]$$
$$11=\frac{1}{6}\cdot 66$$
$$11=11$$

2. הנחה : עבור $n = k$ טבעי כלשהו מתקיים :

$$3+8+15+24+\ldots+2k(2k+2)=\frac{k}{6}[16k^2+36k+14]$$

3. צריך להוכיח : הטענה תתקיים גם עבור : $n = k+1$

כלומר צריך להוכיח את הזהות :

$$3+8+15+24+\ldots+2k(2k+2)+(2k+1)(2k+3)+(2k+2)(2k+4)=\frac{k+1}{6}[16(k+1)^2+36(k+1)+14]$$

על ידי הצבת ההנחה :

$$\frac{k}{6}[16k^2+36k+14]+(2k+1)(2k+3)+(2k+2)(2k+4)=\frac{k+1}{6}[16(k+1)^2+36(k+1)+14]$$

הכפלה ב-6 וסידור המשוואה :

$$k[16k^2+36k+14]+6(2k+1)(2k+3)+6(2k+2)(2k+4)=(k+1)[16(k+1)^2+36(k+1)+14]$$

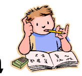
$$16k^3+36k^2+14k+6(4k^2+8k+3)+6(4k^2+12k+8)=(k+1)(16k^2+32k+16+36k+36+14)$$

$$16k^3+36k^2+14k+24k^2+48k+18+24k^2+72k+48=(k+1)(16k^2+68k+66)$$

$$16k^3+84k^2+134k+66=16k^3+68k^2+66k+16k^2+68k+66$$

$$16k^3+84k^2+134k+66=16k^3+84k^2+134k+66$$

על פי שני העקרונות : א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההנחה וההוכחה שאם הטענה מתקיימת עבור k טבעי כלשהו, היא תתקיים גם עבור $(k+1)$ - הוכחנו שהזהות מתקיימת עבור כל n טבעי.



<u>בדיקת הבנה</u>

13. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים : $2\cdot2+3\cdot2^2+4\cdot2^3+....+3n\cdot2^{3n-1}=(3n-1)\cdot2^{3n}$

ח. 1. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים : $1-4+7-10+13...+(12n+1)=6n+1$

2. מצאו את סכום הטור : $13-16+19...+25$

3. מצאו את סכום הטור : $43-46+49...+151$

פתרון סעיף 1 :

1. בדיקה עבור מקרה פרטי : $n = 1$

הצבה באיבר אחרון : $12\cdot1+1=13$

אבל הטור מתחיל ב- 1, לכן : $1-4+7-10+13=6\cdot1+1$

$7=7$

2. הנחה - עבור $n = k$ טבעי כלשהו מתקיים : $1-4+7-10+13...+(12k+1)=6k+1$

3. צריך להוכיח : הטענה תתקיים גם עבור : $n = k+1$

כלומר צריך להוכיח את הזהות :

$$1-4+7-10+13...+(12k+1)-(12k+4)+(12k+7)-(12k+10)+(12k+13)=6(k+1)+1$$

על ידי הצבת ההנחה : $6k+1-(12k+4)+(12k+7)-(12k+10)+(12k+13)=6(k+1)+1$

$$6k+1-12k-4+12k+7-12k-10+12k+13=6k+7$$

$$6k+7=6k+7$$

על פי שני העקרונות : א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההנחה וההוכחה שאם הטענה מתקיימת עבור k טבעי כלשהו, היא תתקיים גם עבור $(k+1)$ - הוכחנו שהזהות מתקיימת עבור כל n טבעי.

פתרון סעיף 2 :

לכאורה כבר ראינו שהביצוע הוא פשוט. נמצא את n תחילי :

$$13 = 12n+1$$

$$n = 1$$

נמצא את n סופי :

$$25 = 12n+1$$

$$n = 2$$

עתה נבצע חיסור של $S_{(n=2)}-S_{(n=0)}$: $6\cdot2+1-(6\cdot0+1) = \underline{12}$

חישוב מפורט לעומת זאת יראה לנו : $13-16+19-22+25 = \underline{19}$

היכן הכֶּשֶׁל?

ובכן בסדרות מסוג של "הוספת איברים" עלינו לזכור **<u>שבמעבר מ- $n = 0$ ל- $n = 1$ אנו מוסיפים</u>** **<u>דבוקה של מספר איברים</u>**.

בשאלה שלנו נלקח בחשבון רק האיבר <u>הרביעי</u> מתוך דבוקה של ארבעה איברים.

לכן בסדרות כאלה יש לבדוק אילו איברים נלקחו בחשבון ולא רק איבר **<u>בודד</u>**.

כדי שנבין למה אנו קוראים **דבוקה**, הבה נבחן את הטור:

$$\underbrace{1-4+7-10}_{n=1}+\underbrace{13-16+19-22}_{n=2}+\underbrace{25-28+31-34}_{n=3}+37-\ldots\ldots$$

כמו שאנו רואים, מכל הדבוקה של $n=1$ נלקח בשאלה שלנו רק האיבר 13. לכן יש צורך להוסיף באופן ידני את הגודל הזה. הדרך הנכונה אם כן לפתור את התרגיל היא:

$$13-16+19\ldots+25=S_{n=2}-S_{n=1}+13=\ 6\cdot 2+1-(6\cdot 1+1)=13-7+13=19$$

כך מקבלים את התשובה הנכונה.

פתרון סעיף 3:

על בסיס הניתוח שערכנו בסעיף 2, נוכל לחשב את סעיף זה.

נרשום תחילה את הטור: $43-46+49\ldots+151$

אחר כך נמצא את ה- n המתאים להתחלה ולסוף:

$$151 = 12n+1$$
$$n = 12.5$$

מכאן אנו מבינים שאנו מגיעים עד סוף הדבוקה של $n = 12$, ועלינו להוסיף עוד שני איברים השייכים לדבוקה של $n = 13$. בקלות ניתן לראות שאלו הם האיברים: $-148+151$

באותו אופן: $43 = 12n+1$

$$n = 3.5$$

מכאן אנו למדים שתחילת הטור הוא בשני האיברים האחרונים של דבוקה $n = 4$; הלא הם האיברים: $43-46$

אולם ביניהם נמצאים כל הדבוקות של $5<n<12$

לכן הפתרון: $43-46+49\ldots+151 = S_{n=12} - S_{n=4}+(-148+151)+(43-46)$

$$43-46+49\ldots+151 = 6\cdot 12+1-(6\cdot 4+1)+3-3 = 48$$

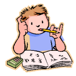
<u>בדיקת הבנה</u>

14. א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots.+(3n)^2=\frac{1}{2}n(3n+1)(6n+1)$$

ב. מצאו את סכום הטור: $3^2+4^2+5^2+\ldots+11^2$

ג. מצאו את סכום הטור: $22^2+23^2+24^2+\ldots+31^2$



תרגול עצמי

15 א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים :

$$1^2+3^2+5^2+....+(2n-1)^2=\frac{(2n+1)(2n-1)n}{3}$$

ב. מצאו את סכום הטור : $5^2+7^2+...+13^2$

16. א.הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים : $3+7+11+....+(12n-1)=18n^2+3n$

ב. מצאו את סכום הטור : $19+23+...+31$

17. א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים : $1-3+5-7+....-(4n-1)=-2n$

ב. מה ה- n המתאים למספר 63- ?

ג. האם המספר 61- נמצא בטור ? נמקו.

18. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים : $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+....+\frac{1}{4n^2+2n}=\frac{n}{n+\frac{1}{2}}$

אינדוקציה עם איבר ראשון משתנה

עד כה הכרנו טורים שהתחילו במספר. באופן בלתי תלוי ב- n תמיד התחיל הטור באותו איבר. עתה נפנה לטפל בטורים המתחילים אף הם ב- n. השינוי העיקרי הוא בכך שכל n שנבחר ישפיע על תחילת הטור.

לדוגמה נתבונן בטור: $n+(n+1)+(n+2)\ldots+5n$

עבור $n = 1$ נקבל את הטור: $1+2+3+4+5$

אבל עבור $n = 2$ נקבל את הטור: $2+3+4+5+6+7+8+9+10$

כלומר במעבר מ $n = 1$ ל- $n = 2$ נוספו 5 איברים (כפי שכבר הכרנו) אולם **<u>ירד איבר</u>** אחד מתחילת הטור!
לכן כאשר אנו עוסקים בטורים שמתחילים עם n, עלינו לבדוק היטב ולהתחשב באיברים שירדו ולא רק באיברים שנוספו.

<u>בכל הוכחה באינדוקציה:</u> א. נבדוק נכונות הטענה עבור מקרה פרטי – בדרך כלל $n=1$ ב. נניח כי הטענה נכונה עבור: $n = k$ ג. נוכיח נכונות הטענה עבור: $n = k+1$ וסיום ההוכחה: מתוך שני העקרונות: א. הבדיקה למקרה פרטי, ב.ההוכחה שאם החוק מתקיים עבור k כלשהו, הוא יתקיים גם עבור k+1 - הוכחנו את נכונות הטענה עבור כל n טבעי. **כאשר האיבר האחרון הוא כפולה של n, יש לבדוק כמה איברים נוספו, אם בכלל.** **כאשר הטור מתחיל ב- n, יש לבדוק אילו איברים ראשונים "נפלו".**

ט. הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים: $2n+(2n+2)+(2n+4)\ldots+(6n)=4n(2n+1)$

פתרון:

בתרגילים מסוג זה כדאי להציב לפחות שני ערכים מספריים כדי לראות את התנהגות הטור (כמה איברים יורדים וכמה נוספים).

1. נציב למקרים פרטיים: $n = 1$

$$2+4+6 = 4\cdot1\cdot3$$
$$12 = 12$$

נציב עבור $n = 2$:

$$4+6+8+10+12 = 4\cdot2(2\cdot2+1)$$
$$40 = 8\cdot5$$
$$40 = 40$$

למדנו מהצבות אלה שבמעבר מ- k ל- (k+1) נופל איבר אחד בהתחלה, ונוספים שלושה איברים חדשים. כדאי לזכור זאת להמשך.

2. הנחה – עבור $n = k$ טבעי כלשהו מתקיים: $2k+(2k+2)+(2k+4)\ldots+(6k)=4k(2k+1)$

3. צ"ל: הטענה תתקיים גם עבור: $n = k+1$,

כלומר צריך להוכיח את הזהות:

$$2(k+1)+[2(k+1)+2]+[2(k+1)+4]\ldots+(6k)+(6k+2)+(6k+4)+(6k+6) = 4(k+1)[2(k+1)+1]$$

כלומר: $(2k+2)+(2k+4)+(2k+6)+\ldots+(6k)+(6k+2)+(6k+4)+(6k+6) = 4(k+1)(2k+3)$

עתה כשאנו באים להציב את ההנחה, עלינו לזכור שבמעבר ירד איבר ראשון, כי הסכום בהנחה כלל את האיבר (2k) שעתה איננו. לכן עלינו להציב את השוויון:

$$(2k+2)+(2k+4)\ldots+(6k)=4k(2k+1)\underline{-2k}$$

שימו לב: האיבר הראשון עבר אגף כי הוא יורד מהסכום לפי ההנחה.

על ידי הצבה נקבל: $4k(2k+1)-2k+ (6k+2)+(6k+4)+(6k+6) = 4(k+1)[2(k+1)+1]$

$$8k^2+4k-2k+18k+12 = 4(k+1)(2k+3)$$

$$8k^2+20k+12 = 4(2k^2+2k+3k+3)$$
$$8k^2+20k+12 = 8k^2+20k+12$$

על פי שני העקרונות: א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההנחה וההוכחה שאם הטענה מתקיימת עבור k טבעי כלשהו, היא תתקיים גם עבור $(k+1)$ - הוכחנו שהזהות מתקיימת עבור כל n טבעי.

<u>בדיקת הבנה</u>

19. הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים: $n+(n+1)+(n+2)+\ldots+(3n) = 2n(2n+1)$

י. הוכיחו באינדוקציה שלכל $n>1$ טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\frac{1}{(n+3)(n+4)}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)2n}=\frac{n-1}{2n(n+1)}$$

פתרון:

1. נציב למקרים פרטיים:

בשאלה זו איננו יכולים להציב ב- $n = 1$ כי כבר מוכתב לנו התנאי $n > 1$. לכן ההצבה הראשונה שלנו תהיה: $n = 2$

$$\frac{1}{(2+1)(2+2)}=\frac{2-1}{2\cdot 2(2+1)}$$
$$\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{4\cdot 3}$$

הצבה שנייה: $n = 3$

$$\frac{1}{(3+1)(3+2)}+\frac{1}{(3+2)(3+3)}=\frac{3-1}{2\cdot 3(3+1)}$$
$$\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}=\frac{2}{6\cdot 4}$$
$$\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=\frac{2}{24}$$
$$\frac{2+3}{60}=\frac{2}{24}$$
$$\frac{1}{12}=\frac{1}{12}$$

אנו רואים שבמעבר מ- $n=2$ ל- $n=3$ ירד איבר ראשון, ונוספו שני איברים.

2. הנחה – עבור $n = k$ <u>$k>1$</u> טבעי כלשהו מתקיים:

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+2)(k+3)}+\frac{1}{(k+3)(k+4)}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)2k}=\frac{k-1}{2k(k+1)}$$

3. . צריך להוכיח: הטענה תתקיים גם עבור: $n = k+1$

כלומר צריך להוכיח את הזהות:

$$\frac{1}{(k+2)(k+3)}+\frac{1}{(k+3)(k+4)}+\frac{1}{(k+4)(k+5)}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)2k}+\frac{1}{2k(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}=\frac{k}{2(k+1)(k+2)}$$

על ידי הצבת ההנחה <u>וקיזוז</u> איבר ראשון:

$$\frac{k-1}{2k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\frac{1}{2k(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}=\frac{k}{2(k+1)(k+2)}$$

נכפיל במכנה משותף ונארגן את השוויון :

$$\frac{k-1}{2k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\frac{1}{2k(2k+1)}+\frac{1}{2(2k+1)(k+1)}=\frac{k}{2(k+1)(k+2)}$$

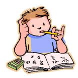
$$(k-1)(k+2)(2k+1)-2k(2k+1)+(k+1)(k+2)+k(k+2)=k^2(2k+1)$$

$$(k^2+k-2)(2k+1)-4k^2-2k+k^2+3k+2+k^2+2k=2k^3+k^2$$

$$2k^3+3k^2-3k-2-4k^2-2k+k^2+3k+2+k^2+2k=2k^3+k^2$$

$$2k^3+k^2=2k^3+k^2$$

על פי שני העקרונות : א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההנחה וההוכחה שאם הטענה מתקיימת עבור $k>1$ טבעי כלשהו, היא תתקיים גם עבור (k+1) - הוכחנו שהזהות מתקיימת עבור כל $n>1$ טבעי.



<u>בדיקת הבנה</u>

20. הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים :

$$\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+...+\frac{1}{(2n-1)2n}=\frac{1}{2n}$$

21. הוכיחו באינדוקציה שלכל $n>3$ טבעי מתקיים :

$$10+13+16+...+(3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2}-12$$

<u>תרגול עצמי</u>

22. הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים :

$$2n+(2n+1)+(2n+2).....+4n=3n(2n+1)$$

23. הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים :

$$(3n+1)+(3n+2)+(3n+3)+(3n+4)+...+4n=\frac{n+7n^2}{2}$$

24. הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים :

$$4^n+4^{n+1}+4^{n+2}+...+4^{4n}=\frac{4^{4n+1}-4^n}{3}$$

אינדוקציה של איברים זוגיים או אי זוגיים

בדוגמה האחרונה שפתרנו ראינו שיש לקרוא היטב את התנאים עבור n כי אם היינו מציבים n=1, לא היינו מקבלים זהות של הטור. באותו אופן יש לשים לב לתנאֵי n כאשר מבקשים למצוא זהות לטור שבו יש לבחור n זוגי או אי זוגי. במקרים אלה צריך לשים לב לשני דברים: ראשית ההצבה למקרה פרטי צריכה לקיים את התנאי, ושנית כאשר אנו עוברים להוכחה, אנו נדרשים להוכיח כי אם החוק מתקיים עבור n=k כלשהו, הוא צריך להתקיים גם עבור **n=k+2** בין אם אנו נדרשים ל- n זוגי, ובין אם אנו נדרשים ל- n אי זוגי. בשני המקרים ה- n הבא לא יהיה ה- n העוקב אלא זה שאחריו.

בכל הוכחה באינדוקציה:
א. נבדוק נכונות הטענה עבור מקרה פרטי – בדרך כלל n=1
ב. נניח כי הטענה נכונה עבור: n = k
ג. נוכיח נכונות הטענה עבור: n = k+1
וסיום ההוכחה: מתוך שני העקרונות: א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההוכחה שאם החוק מתקיים עבור k כלשהו, הוא יתקיים גם עבור k+1 - הוכחנו את נכונות הטענה עבור כל n טבעי.
כאשר האיבר האחרון הוא כפולה של n, יש לבדוק כמה איברים נוספו, אם בכלל.
כאשר הטור מתחיל ב-n, יש לבדוק אילו איברים ראשונים "נפלו".
עבור n זוגי או אי זוגי צריך להוכיח עבור: n=k+2

יא. הוכיחו כי לכל n טבעי זוגי מתקיים: $2+4+8+\ldots+2^{\frac{n}{2}} = 2(2^{\frac{n}{2}}-1)$

פתרון:

1. בדיקה למקרה פרטי: n = 2

$$2 = 2(2^{\frac{2}{2}}-1)$$
$$2 = 2$$

2. הנחה – עבור n = k טבעי זוגי כלשהו מתקיים: $2+4+8+\ldots+2^{\frac{k}{2}} = 2(2^{\frac{k}{2}}-1)$

3. צריך להוכיח: הטענה תתקיים גם עבור: n = k+2

כלומר צריך להוכיח את הזהות: $2+4+8+\ldots+2^{\frac{k}{2}}+2^{\frac{k+2}{2}} = 2(2^{\frac{k+2}{2}}-1)$

על ידי הצבה של ההנחה:

$$2(2^{\frac{k}{2}}-1)+2^{\frac{k+2}{2}} = 2(2^{\frac{k+2}{2}}-1)$$
$$2\cdot 2^{\frac{k}{2}}-2+2\cdot 2^{\frac{k}{2}} = 2(2\cdot 2^{\frac{k}{2}}-1)$$
$$4\cdot 2^{\frac{k}{2}}-2 = 4\cdot 2^{\frac{k}{2}}-2$$

הסבר:
לפי חוקי חזקות
$2^{\frac{k+2}{2}} = 2^{\frac{k}{2}+1} = 2\cdot 2^{\frac{k}{2}}$

על פי שני העקרונות: א. הבדיקה למקרה פרטי זוגי, ב. ההוכחה שאם הטענה מתקיימת עבור k טבעי זוגי כלשהו, היא תתקיים גם עבור (k+2) - הוכחנו שהזהות מתקיימת עבור כל n טבעי זוגי.

בדיקת הבנה

25. הוכיחו כי לכל n טבעי זוגי מתקיים:

$$1\cdot 2-2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+(n-1)n-n(n+1) = -\frac{1}{2}n^2-n$$

יב. הוכיחו כי לכל n טבעי <u>אי זוגי</u> מתקיים :

$$2\cdot3-2\cdot1+4\cdot5-4\cdot3+6\cdot7-6\cdot5...+(n+1)(n+2)-(n+1)n=(3+n)\frac{n+1}{2}$$

פתרון :

1. בדיקה למקרה פרטי : $n = 1$

$$2\cdot3-2\cdot1=(3+1)\frac{1+1}{2}$$
$$6-2=4\cdot1$$
$$4=4$$

2. . הנחה – עבור $n = k$ טבעי אי זוגי כלשהו מתקיים :

$$2\cdot3-2\cdot1+4\cdot5-4\cdot3+6\cdot7-6\cdot5...+(k+1)(k+2)-(k+1)k=(3+k)\frac{k+1}{2}$$

3. צריך להוכיח : הטענה תתקיים גם עבור : <u>$n = k+2$</u>

כלומר צריך להוכיח את הזהות :

$$2\cdot3-2\cdot1+4\cdot5-4\cdot3+6\cdot7-6\cdot5...+(k+1)(k+2)-(k+1)k+(k+3)(k+4)-(k+3)(k+2)=(3+k+2)\frac{k+3}{2}$$

על ידי הצבה של ההנחה :

$$(3+k)\frac{k+1}{2}+(k+3)(k+4)-(k+3)(k+2)=(3+k+2)\frac{k+3}{2}$$

הכפלה ב : $\frac{2}{k+3}$

$$k+1+2(k+4)-2(k+2)=5+k$$
$$k+1+2k+8-2k-4=5+k$$
$$k+5=5+k$$

על פי שני העקרונות : א. הבדיקה למקרה פרטי <u>אי זוגי</u>, ב. ההוכחה שאם הטענה מתקיימת עבור k טבעי <u>אי זוגי</u> כלשהו, היא תתקיים גם עבור <u>($k+2$)</u> - הוכחנו שהזהות מתקיימת עבור כל n טבעי <u>אי זוגי</u>.

<u>בדיקת הבנה</u>

26. הוכיחו כי לכל n טבעי אי זוגי מתקיים : $2+4+6+...+(3n-1)=\frac{9n^2-1}{4}$

<u>תרגול עצמי</u>

27. הוכיחו באינדוקציה כי לכל $n>2$ מתקיים : $(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})....(1-\frac{1}{n})=\frac{1}{n}$

28. הוכיחו כי לכל n טבעי <u>זוגי</u> מתקיים : $2+8+41+...+(3n-4)=\frac{3}{4}n^2-\frac{1}{2}n$

29. הוכיחו כי לכל n טבעי <u>אי זוגי</u> מתקיים : $1^2-2^2+3^2-...-(n-1)^2+n^2=\frac{n(n+1)}{2}$

<u>אינדוקציה של התלכדות סדרות</u>

כדי להשלים את סוגי האינדוקציה של הזהויות נתבונן בזהויות של סדרות. כפי שכבר ראינו, ניתן לאפיין סדרה על ידי שני ניסוחים: ניסוח אחד הוא באמצעות "כלל לפי מקום", והניסוח השני הוא באמצעות "כלל נסיגה". האמת היא שניתן לעבור מניסוח אחד לשני או להוכיח ששני ניסוחים שנראים שונים, מהווים, למעשה, את אותה סדרה. גם הוכחות מסוג זה נוחות לביצוע על ידי אינדוקציה מתמטית.

יג. הוכיחו באינדוקציה כי הסדרה: $b_n = 3n^2-3n+5$

והסדרה: $a_{n+1} = a_n+6n$ כאשר $a_1 = 5$ מתלכדות.

בהתאם לכללי האינדוקציה, כדי להוכיח ששתי סדרות: a_n ו- b_n מתלכדות, עלינו:

1. לבדוק למקרה פרטי שמתקיים $a_1 = b_1$
2. מניחים ש: $a_k = b_k$ עבור k כלשהו
3. מוכיחים כי אם 2. נכון, מתקיים גם: $a_{(k+1)} = b_{(k+1)}$

פתרון:

1. בדיקה למקרה פרטי: $n = 1$

$$3\cdot1^2-3\cdot1+5 = 5$$
$$5 = 5$$

2. הנחה – עבור $n = k$ טבעי כלשהו מתקיים: $b_k = a_k$

כלומר: $3k^2-3k+5 = a_k$

3. צ"ל: $b_{k+1} = a_{k+1}$

כלומר: $3(k+1)^2-3(k+1)+5 = a_{k+1}$

הוכחה:

תחילה נפתח סוגריים: $3k^2+6k+3-3k-3+5 = a_{k+1}$

<u>שימוש בחוקיות הסדרה a</u>: $3k^2+3k+5 = a_k+6k$

הצבת ההנחה: $3k^2+3k+5 = 3k^2-3k+5+6k$

$$3k^2+3k+5 = 3k^2+3k+5$$

שימו לב לשימוש שנעשה כאן בחוקיות הסדרה a עצמה. עליה אין עוררין, ואין צורך להוכיח את נכונותה.

על פי שני העקרונות: א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההנחה וההוכחה שאם הטענה מתקיימת עבור k טבעי כלשהו, היא תתקיים גם עבור <u>(k+1)</u> - הוכחנו שהסדרות מתלכדות.

יד. נתונות הסדרות: $a_n = 1-\frac{1}{n}$ ו- $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{n^2+n}$ כאשר $b_1 = 0$

הוכיחו באינדוקציה כי הסדרות מתלכדות.

פתרון:

1. בדיקה למקרה פרטי: $n = 1$

$$0 = 1-\frac{1}{1}$$
$$0 = 0$$

2. הנחה – עבור $n = k$ טבעי כלשהו מתקיים: $b_k=a_k$

כלומר: $b_k = 1-\frac{1}{k}$

3. צ"ל: $b_{k+1} = a_{k+1}$

כלומר: $b_{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1}$

לפי חוקיות הסדרה b: $b_k + \frac{1}{k^2+k} = 1 - \frac{1}{k+1}$

הצבת ההנחה: $1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2+k} = 1 - \frac{1}{k+1}$

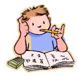
$$-\frac{1}{k} + \frac{1}{k(k+1)} = -\frac{1}{k+1}$$

חיבור שברים: $\frac{-(k+1)+1}{k(k+1)} = -\frac{1}{k+1}$

$$\frac{-k}{k(k+1)} = -\frac{1}{k+1}$$

צמצום: $-\frac{1}{k+1} = -\frac{1}{k+1}$

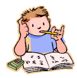
על פי שני העקרונות: א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההנחה וההוכחה שאם הטענה מתקיימת עבור k טבעי כלשהו, היא תתקיים גם עבור (k+1) - הוכחנו שהסדרות מתלכדות.



בדיקת הבנה

30. נתונות הסדרות: $a_n = 2n^2-2n+1$ ו- $b_{n+1} = b_n+4n$ כאשר $b_1 = 1$. הוכיחו באינדוקציה כי הסדרות מתלכדות.

31. נתונות הסדרות: $a_n = \frac{n}{n+1}$ ו- $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ כאשר $b_1 = \frac{1}{2}$
הוכיחו באינדוקציה כי הסדרות מתלכדות.



תרגול עצמי

32. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי הסדרה: $a_n = (n-2)^2$
מתלכדת עם הסדרה: $b_{n+1} = b_n + 2n - 1$ כאשר $b_1 = -1$

33. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי הסדרה: $a_n = n^2(n-1)$
מתלכדת עם הסדרה: $b_{n+1} = b_n + 3n^2 + n$ כאשר $b_1 = 0$

34. נתונות הסדרות: $a_n = 2^n + 5n$ ו- $b_{n+1} = b_n + 2^n + 5$ כאשר $b_1 = 7$
הוכיחו כי לכל n טבעי הסדרות מתלכדות.

35. נתונות הסדרות: $a_n = \frac{n-2}{n+3}$ ו- $b_{n+1} = b_n + \frac{5}{(n+3)(n+4)}$ כאשר $b_1 = -\frac{1}{4}$
הוכיחו כי לכל n טבעי הסדרות מתלכדות.

אינדוקציה של אי שוויון

עד כה ראינו וריאציות שונות של אינדוקציה של זהויות, כלומר של שוויונות. עתה נעבור לטפל באינדוקציה של אי שוויונות. אין בדבר זה כדי לשנות מאומה מתבנית הוכחת האינדוקציה, אלא שכאן יש תוספת של הבנה לוגית להוכחה. נתחיל במצב של סכום סדרה הגדול או קטן מביטוי.

האות היוונית Σ מציינת סכום:
Σa_k מציין: סכום אברי הסדרה a
Σb_k מציין: סכום אברי הסדרה b
כלומר:
$\Sigma a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$
$\Sigma b_k = b_1 + b_2 + \ldots + b_k$

כאן אנו עובדים לפי הרעיון הבא:

הנחה: $\sum a_k < b_k$ לכל k טבעי (1)

צ"ל: אם ההנחה מתקיימת, אז מתקיים גם: $\sum a_{k+1} < b_{k+1}$

דרך ההוכחה:

אנו מוכיחים ש: $b_k + a_{k+1} < b_{k+1}$ (2)

משורות (1) ו- (2) נובע בהכרח ש: $\sum a_k + a_{k+1} < b_{k+1}$ לכל k טבעי

כלומר: $\sum a_{k+1} < b_{k+1}$

וזה מה שנדרשנו להוכיח (אם הכתיבה נראית מסובכת, הרי שהדוגמה הבאה תבהיר את העניין).

טו. הוכיחו שלכל $n>1$ טבעי מתקיים: $1+2+3+\ldots+n < \frac{(n+1)^2}{2}$

פתרון:

1. בדיקה למקרה פרטי: $n = 2$

$$1+2 < \frac{(2+1)^2}{2}$$
$$3 < 4.5$$

2. הנחה – עבור $n = k>1$ טבעי כלשהו מתקיים:

$$1+2+3+\ldots+k < \frac{(k+1)^2}{2}$$

3. צ"ל: הטענה תתקיים גם עבור: $n = k+1$ $(k>1)$

כלומר צריך להוכיח: $1+2+3+\ldots+k+(k+1) < \frac{(k+2)^2}{2}$

הצבת ההנחה: $\frac{(k+1)^2}{2} + (k+1) < \frac{(k+2)^2}{2}$

$$(k+1)^2 + 2(k+1) < (k+2)^2$$
$$k^2+2k+1+2k+2 < k^2+4k+4$$
$$k^2+4k+3 < k^2+4k+4$$

על פי שני העקרונות: א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההוכחה שאם הטענה מתקיימת עבור $k>2$ טבעי כלשהו, היא תתקיים גם עבור $(k+1)$ - הוכחנו שהטענה מתקיימת עבור כל $n>2$ טבעי.

טז. הוכיחו שלכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} \geq 1 - \frac{n}{(n+1)}$$

פתרון:

1. בדיקה למקרה פרטי: $n = 1$

$$\frac{1}{1\cdot 2} \geq 1 - \frac{1}{(1+1)}$$
$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

2. הנחה – עבור $n = k$ טבעי כלשהו מתקיים :

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{k(k+1)}\geq 1-\frac{k}{(k+1)}$$

3. צ"ל : הטענה תתקיים גם עבור : $n = k+1$

כלומר צריך להוכיח :

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}\geq 1-\frac{k+1}{(k+2)}$$

הצבת ההנחה :

$$1-\frac{k}{(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}\geq 1-\frac{k+1}{(k+2)}$$

$$-k(k+2)+1\geq -(k+1)^2$$

$$-k^2-2k+1\geq -k^2-2k-1$$

$$1\geq -1$$

על פי שני העקרונות : א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההוכחה שאם הטענה מתקיימת עבור $k>2$ טבעי כלשהו, היא תתקיים גם עבור $(k+1)$ - הוכחנו שהטענה מתקיימת עבור כל $n>2$ טבעי .

<u>בדיקת הבנה</u>

36. הוכיחו שלכל $n > 3$ טבעי מתקיים : $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}<2-\frac{1}{n}$

בדוגמה הבאה נראה חשיבה לוגית קצת שונה.

אם ההנחה היא : $a\geq b$

ואנו יודעים כי גם : $c\geq d$

סכומם חייב לקיים : $a+c\geq b+d$

אותו היגיון חל גם עבור הסימן $\leq$.

טז. הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים : $2n\leq 2^n$

פתרון :

1. בדיקה למקרה פרטי : $n = 1$

$$2\cdot 1\ \leq 2^1$$

$$2\leq 2$$

2. הנחה – עבור $n = k$ טבעי כלשהו מתקיים : $2k\leq 2^k$

3. צ"ל : הטענה תתקיים גם עבור : $n = k+1$

כלומר צריך להוכיח : $2(k+1)\leq 2^{k+1}$

הפעם נתחיל בפתיחת הסוגריים והחזקה (אנו רואים שאין בביטוי שאנו רוצים להוכיח, את

התבנית של ההנחה) : $2k+2\leq\ 2\cdot 2^k$

כלומר : $2k+2\leq 2^k+2^k$

הוכחה :

לפי ההנחה : $2k \le 2^k$

ברור לנו ש : $2 \le 2^k$ (k טבעי)

לכן סכומם גם כן מקיים : $2k+2 \le 2^k+2^k$

על פי שני העקרונות : א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההוכחה שאם הטענה מתקיימת עבור k טבעי כלשהו, היא תתקיים גם עבור (k+1) - הוכחנו שהטענה מתקיימת עבור כל n טבעי .

<u>בדיקת הבנה</u>

37. הוכיחו שלכל n טבעי מתקיים : $3n - 1 \le 3^n$

נביא עוד דוגמה בה נִראה חשיבה לוגית אחרת.

אם ההנחה היא : $a > b$

ואנו מוכיחים ש : $b > c$

חייב להתקיים : $a > b > c$

כלומר : $a > c$

אותו היגיון חל גם עבור הסימן >.

יז. הוכיחו שלכל $n > 3$ טבעי מתקיים : $3^n > (2n)^2$

פתרון :

1. בדיקה למקרה פרטי : $n = 4$ $\quad 3^4 > (2 \cdot 4)^2$

$81 > 8^2 = 64$

2. הנחה – עבור $n = k$ טבעי כלשהו מתקיים : $3^k > (2k)^2$

3. צ״ל : הטענה תתקיים גם עבור : $n = k+1$

כלומר צריך להוכיח : $3^{k+1} > (2(k+1))^2$

הוכחה : $3^{k+1} = 3 \cdot 3^k > (2(k+1))^2$

לפי ההנחה : $3 \cdot 3^k > 3 \cdot (2k)^2$

ומכאן שמספיק להוכיח ש : $3 \cdot (2k)^2 > (2(k+1))^2$

על ידי פתיחת סוגריים וסידור : $3 \cdot (2k)^2 > (2(k+1))^2 = (2k+2)^2$

$12k^2 > 4k^2 + 8k + 4$

$8k^2 - 8k - 4 > 0$

$2k^2 - 2k - 1 > 0$

פתרון אי השוויון הריבועי נותן : $k > 1.36$ או $k < -0.36$

ולכן עבור $k > 3$ וודאי אי השוויון מתקיים .

על פי שני העקרונות : א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההוכחה שאם הטענה מתקיימת עבור k>3 טבעי כלשהו, היא תתקיים גם עבור (k+1) - הוכחנו שהטענה מתקיימת עבור כל n>3 טבעי .

<u>בכל הוכחה באינדוקציה:</u>

א. נבדוק נכונות הטענה עבור מקרה פרטי – בדרך כלל $n=1$

ב. נניח כי הטענה נכונה עבור: $n=k$

ג. נוכיח נכונות הטענה עבור: $n=k+1$

וסיום ההוכחה: מתוך שני העקרונות: א.הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההוכחה שאם החוק מתקיים עבור k כלשהו, הוא יתקיים גם עבור $k+1$ - הוכחנו את נכונות הטענה עבור כל n טבעי.

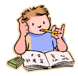
כאשר האיבר האחרון הוא כפולה של n, יש לבדוק <u>כמה</u> איברים נוספו, אם בכלל.

כאשר הטור מתחיל ב-n, יש לבדוק אילו איברים <u>ראשונים</u> "נפלו".

עבור n זוגי או אי זוגי צריך להוכיח עבור: <u>$n=k+2$</u>

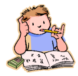
<u>באי שוויונים:</u>

<u>לוגי א'</u>	<u>לוגי ב'</u>	<u>לוגי ג'</u>
$\Sigma a_{(k)}<b_{(k)}$	$a\geq b$	$a>b$
$\Sigma a_{(k+1)}<b_{(k+!)}$	$c\geq d$	$b>c$
$b_{(k)}+a_{(k+1)}<b_{(k+1)}$	$a+c\geq b+d$	$a>b>c$
$\Sigma a_{(k)}+a_{(k+1)}<b_{(k+1)}$		$a>c$
$\Sigma a_{(k+1)}<b_{(k+1)}$		



<u>בדיקת הבנה</u>

38. הוכיחו שלכל $n > 4$ טבעי מתקיים: $2^n > n^2$



<u>תרגול עצמי</u>

39. הוכיחו באינדוקציה שלכל $n > 1$ טבעי מתקיים: $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}....+\frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$

40. הוכיחו באינדוקציה שלכל $n > 3$ טבעי מתקיים: $3^n > 3n+4$

41. הוכיחו באינדוקציה שלכל $n > 1$ טבעי מתקיים: $1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot\ldots\cdot n^n < n^{\frac{n^2+n}{2}}$

42. הוכיחו באינדוקציה שלכל $n > 2$ טבעי מתקיים: $2^n > 2n+1$

אינדוקציה של תכונות התחלקות

עד כאן עסקנו בהוכחות של סכום טורים. עתה נעבור לעוד סוג של הוכחות שנוח להוכיחן באינדוקציה, והן תכונות התחלקות של ביטויים אלגבריים. תבנית ההוכחה אינה משתנה בנסיבות אלה אלא רק דרך ההוכחה.

יח. הוכיחו כי הביטוי : n^3-n מתחלק ב- 6 ללא שארית לכל n טבעי.

פתרון :

1. בדיקה למקרה פרטי : $n = 1$

$1^3-1 = 0$

אם איננו מסתפקים בכך (כי 0 נראה לנו חשוד), נבצע בדיקה גם עבור : $n = 2$

$2^3-2 = 6$ וודאי מתחלק ב- 6 ללא שארית.

2. הנחה : k^3-k מתחלק ב- 6 ללא שארית לכל $n = k$ טבעי.

3. צ״ל : גם $(k+1)^3-(k+1)$ מתחלק ב- 6 ללא שארית.

הוכחה : $(k+1)^3-(k+1)=$

$k^3+3k^2+3k+1-k-1=$

$k^3-k+3k^2+3k=$

הסידור נועד לזיהוי קל יותר של ההנחה בתוך הביטוי.

לפי הנוסחה : $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

לפי ההנחה, k^3-k מתחלק ב- 6 ללא שארית, לכן נותר רק להראות שגם $3k^2+3k$ מתחלק ב- 6 ללא שארית.

$3k^2+3k = 3k(k+1)$

הביטוי : $k(k+1)$ מייצג שני מספרים עוקבים, לכן אחד מהם חייב להיות זוגי. נובע מכך שהמכפלה חייבת אף היא להיות מספר זוגי, כלומר הוא כפולה של 2.

לכן $3k(k+1)$ הוא כפולה של מספר זוגי ב- 3, ולכן הוא חייב להתחלק ב- 6 כי הוא כפולה של $3\cdot2$.

סיכום : מכיוון ש : k^3-k מתחלק ב- 6 ללא שארית מתוך ההנחה.

ו- : $3k(k+1)$ מתחלק ב- 6 ללא שארית.

לכן : k^3-k+3k^2+3k סכומם חייב אף הוא להתחלק ב- 6.

על פי שני העקרונות : א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההוכחה שאם הטענה מתקיימת עבור k טבעי כלשהו, היא תתקיים גם עבור $(k+1)$ - הוכחנו שהטענה מתקיימת עבור כל n טבעי .

<u>בכל הוכחה באינדוקציה:</u>

א. נבדוק נכֹונוּת הטענה עבור מקרה פרטי – בדרך כלל $n=1$

ב. נניח כי הטענה נכונה עבור : $n=k$

ג. נוכיח נכֹונוּת הטענה עבור : $n=k+1$

וסיום ההוכחה : מתוך שני העקרונות : א.הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההוכחה שאם החוק מתקיים עבור k כלשהו, הוא יתקיים גם עבור $k+1$ - הוכחנו את נכונות הטענה עבור כל n טבעי.

כאשר האיבר האחרון הוא כפולה של n, יש לבדוק <u>כמה</u> איברים נוספו, אם בכלל.

כאשר הטור מתחיל ב-n, יש לבדוק אילו איברים <u>ראשונים</u> ״נפלו״.

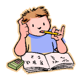
עבור n זוגי או אי זוגי צריך להוכיח עבור <u>n=k+2</u>

<u>באי שוויונים:</u>

<u>לוגי א׳</u>	<u>לוגי ב׳</u>	<u>לוגי ג׳</u>
$\Sigma a_{(k)}<b_{(k)}$	$a\geq b$	$a>b$
$\Sigma a_{(k+1)}<b_{(k+!)}$	$c\geq d$	$b>c$
$b_{(k)}+a_{(k+1)}<b_{(k+1)}$	$a+c\geq b+d$	$a>b>c$
$\Sigma a_{(k)}+ a_{(k+1)}<b_{(k+1)}$		$a>c$
$\Sigma a_{(k+1)}<b_{(k+1)}$		

<u>בתכונות חלוקה</u>

אם איברים מסוימים מתחלקים במספר, גם סכומם מתחלק באותו מספר.



בדיקת הבנה

43. הוכיחו כי הביטוי : $3n^2+21n+36$ מתחלק ב- 6 ללא שארית לכל n טבעי.

יט. הוכיחו כי הביטוי : $2^{3n}-1$ מתחלק ב- 7 ללא שארית לכל n טבעי.

פתרון :

1. בדיקה למקרה פרטי : $n=1$

$2^3-1=7$

וודאי מתחלק ב- 7 ללא שארית.

2. הנחה : $2^{3k}-1$ מתחלק ב-7 ללא שארית לכל $n=k$ טבעי.

3. צ״ל : גם $2^{3(k+1)}-1$ מתחלק ב-7 ללא שארית

הוכחה : $2^{3(k+1)}-1 = 2^{3k+3}-1 =$

$8\cdot 2^{3k}-1 = 7\cdot 2^{3k}+1\cdot 2^{3k}-1$

המהלך האחרון נועד כדי לחלץ את ההנחה. מכיוון שההנחה שלנו מבוססת על הביטוי $(2^{3k}-1)$, אנו חייבים לחלץ מהביטוי שעלינו להוכיח, בדיוק את הביטוי הזה ללא מעורבות של מכפלות נוספות.

מכאן והלאה : נבחן את הביטוי : $7\cdot 2^{3k}+1\cdot(2^{3k}-1)$

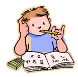
$1\cdot 2^{3k}-1$ מתחלק ב- 7 ללא שארית לפי ההנחה.

$7\cdot 2^{3k}$ מתחלק ב- 7 כי הוא כפולה של 7.

לכן סכומם מתחלק ב- 7, ובצעדי רגרסיה (צעידה לאחור) נקבל :

$2^{3(k+1)}-1$ מתחלק ב- 7 ללא שארית.

על פי שני העקרונות : א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההוכחה שאם הטענה מתקיימת עבור k טבעי כלשהו, היא תתקיים גם עבור (k+1) - הוכחנו שהטענה מתקיימת עבור כל n טבעי.



בדיקת הבנה

44. הוכיחו כי הביטוי : $2^{4n}-1$ מתחלק ב- 15 ללא שארית לכל n טבעי.

כמו בזהויות גם בתכונות חלוקה אנו יכולים למצוא ביטוי המתקיים רק למספרים זוגיים או אי זוגיים. דרך הפתרון לא משתנה אלא מתחשבת בתנאי זה.

כ. הוכיחו כי הביטוי : 7^n+4^n מתחלק ב- 11 ללא שארית לכל n טבעי אי זוגי.

פתרון :

1. בדיקה למקרה פרטי : $n = 1$

$7^1+4^1=11$ וודאי מתחלק ב- 11 ללא שארית.

2. הנחה : 7^k+4^k מתחלק ב- 11 ללא שארית לכל $n=k$ טבעי אי זוגי.

3. צ״ל : גם $7^{k+2}+4^{k+2}$ מתחלק ב- 11 ללא שארית.

הוכחה : $7^{k+2}+4^{k+2} = 49\cdot 7^k+16\cdot 4^k =$ (1)

$33\cdot 7^k+16\cdot 7^k+16\cdot 4^k=$ **

$33\cdot 7^k+16(7^k+4^k)$ (3)

$16(7^k+4^k)$ מתחלק ב- 11 ללא שארית כי הוא כפולה שלמה של ההנחה.

$33\cdot7^k$ מתחלק ב- 11 ללא שארית כי הוא כפולה של 11.

לכן גם סכומם מתחלק ב- 11 ללא שארית.

ובצעדי רגרסיה נקבל: $7^{k+2}+4^{k+2}$ מתחלק ב- 11 ללא שארית.

**** הבחירה לחלק את המכפלה $49\cdot7^k$ ל- $33\cdot7^k+16\cdot7^k$ איננה שרירותית. היא מתבססת על העובדה שההנחה כוללת שני איברים: 4^k ו- 7^k. בשורה מס' (1) אנו מוצאים את האיבר 4^k מופיע 16 פעמים (מוכפל ב – 16) ואת האיבר 7^k מופיע 49 פעמים (מוכפל ב- 49). מספר הפעמים שאנו יכולים למצוא כחיבור של שני האיברים, הוא לפי המספר הנמוך שהוא המספר המגביל. ולכן אנו מפרקים את ה- 49 ל- 16 פעמים של האיבר 7^k שיצטרפו לאיבר 4^k, וביחד הם ישלימו את הביטוי בהנחה 16 פעמים, והנותר הוא 33 = 49-16, כפי שאנו רואים בשורה מס' (3).**

על פי שני העקרונות: א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההוכחה שאם הטענה מתקיימת עבור k טבעי אי זוגי כלשהו, היא תתקיים גם עבור $(k+2)$ - הוכחנו שהטענה מתקיימת עבור כל n טבעי אי זוגי.


<u>בדיקת הבנה</u>

45. הוכיחו כי הביטוי: 13^n-7^n מתחלק ב- 120 ללא שארית לכל n טבעי זוגי.

כא. הוכיחו כי הביטוי: $4\cdot4^n-3n-4$ מתחלק ב- 9 ללא שארית לכל n טבעי.

פתרון:

1. בדיקה למקרה פרטי: $n = 1$

$4\cdot4^1-3\cdot1-4 = 16-3-4 = 9$ וודאי מתחלק ב- 9 ללא שארית.

2. הנחה: $4\cdot4^k-3k-4$ מתחלק ב- 9 ללא שארית לכל $n=k$ טבעי.

3. צ"ל: גם $4\cdot4^{k+1}-3(k+1)-4$ מתחלק ב- 9 ללא שארית.

הוכחה: $4\cdot4^{k+1}-3(k+1)-4=4\cdot(4\cdot4^k)-3k-3-4$

סידור של הביטוי: $3\cdot(4\cdot4^k)+(4\cdot4^k)-3k-4-3$

$4\cdot4^k-3k-4$ מתחלק ב- 9 ללא שארית לפי ההנחה.

נותר להוכיח כי: $3\cdot(4\cdot4^k)-3$ מתחלק ב- 9 ללא שארית.

במקרים שקשה להראות את ההוכחה באופן פשוט, ניתן, כמובן, לבנות אינדוקציה חדשה לביטוי שמתקבל. במקרה שלנו:

נוכיח כי: $12\cdot4^k-3$ מתחלק ב – 9 ללא שארית עבור כל k טבעי.

בדיקה למקרה פרטי: $k = 1$

$12\cdot4^1-3 = 45$ מתחלק ב- 9 ללא שארית.

הנחה: $12\cdot4^z-3$ מתחלק ב- 9 ללא שארית לכל $k = z$ טבעי

צ"ל: $12\cdot4^{z+1}-3$

הוכחה: $12\cdot4^{z+1}-3 = 12(4\cdot4^z)-3 = 4(12\cdot4^z)-3 =$

$3(12\cdot4^z)+1\cdot(12\cdot4^z)-3 = 36\cdot4^z+12\cdot4^z-3$

$12\cdot4^{z}-3$ מתחלק ב- 9 ללא שארית לפי ההנחה.

$36\cdot4^{z}$ מתחלק ב- 9 ללא שארית כי הוא כפולה של 9.

לכן סכומם מתחלק ב- 9 ללא שארית. ובצעדי רגרסיה נקבל:

$3\cdot(4\cdot4^{k})-3$ מתחלק ב- 9 ללא שארית.

לסיכום: $3\cdot(4\cdot4^{k})-3$ מתחלק ב- 9 ללא שארית.

$4\cdot4^{k}-3k-4$ מתחלק ב- 9 ללא שארית לפי ההנחה הראשונה.

לכן סכומם מתחלק ב- 9 ללא שארית. ובצעדי רגרסיה שנייה נקבל:

$4\cdot4^{k+1}-3(k+1)-4$ מתחלק ב- 9 ללא שארית.

על פי שני העקרונות: א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההוכחה שאם הטענה מתקיימת עבור k טבעי כלשהו, היא תתקיים גם עבור $(k+1)$ - הוכחנו שהטענה מתקיימת עבור כל n טבעי.

<u>בכל הוכחה באינדוקציה:</u>

א. נבדוק נכונות הטענה עבור מקרה פרטי – בדרך כלל $n=1$

ב. נניח כי הטענה נכונה עבור $n=k$

ג. נוכיח נכונות הטענה עבור: $n=k+1$

וסיום ההוכחה: מתוך שני העקרונות: א.הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההוכחה שאם החוק מתקיים עבור k כלשהו, הוא יתקיים גם עבור $k+1$ - הוכחנו את נכונות הטענה עבור כל n טבעי.

כאשר האיבר האחרון הוא כפולה של n, יש לבדוק <u>כמה</u> איברים נוספו, אם בכלל.

כאשר הטור מתחיל ב-n, יש לבדוק אילו איברים <u>ראשונים</u> "נפלו".

עבור n זוגי או אי זוגי צריך להוכיח עבור <u>n=k+2</u>

<u>באי שוויונים:</u>

<u>לוגי א'</u>	<u>לוגי ב'</u>	<u>לוגי ג'</u>
$\Sigma a_{(k)}<b_{(k)}$	$a\geq b$	$a>b$
$\Sigma a_{(k+1)}<b_{(k+!)}$	$c\geq d$	$b>c$
$b_{(k)}+a_{(k+1)}<b_{(k+1)}$	$a+c\geq b+d$	$a>b>c$
$\Sigma a_{(k)}+a_{(k+1)}<b_{(k+1)}$		$a>c$
$\Sigma a_{(k+1)}<b_{(k+1)}$		

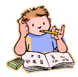
<u>בתכונות חלוקה</u>

אם איברים מסוימים מתחלקים במספר, גם סכומם מתחלק באותו מספר.

במקרים שקשה להוכיח תכונות בעזרת האריתמטיקה, קל להוכיח בעזרת אינדוקציה נוספת.

<u>בדיקת הבנה</u>

46. הוכיחו כי הביטוי: $8^{n}-2\cdot5^{n}+2^{n}$ מתחלק ב- 18 ללא שארית לכל n טבעי.



<u>תרגול עצמי</u>

47. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי לכל n טבעי גדול מ- 1 מתקיים:

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n-2}>1$$

48. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1^{3}-2^{3}+3^{3}-4^{3}+\ldots+(2n-1)^{3}=4n^{3}-3n^{2}$$

49. נתון אי השוויון: $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{3}{5}+\frac{1}{n}$

א. החל מאיזה n טבעי מתקיים אי השוויון?

ב. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי אי השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מאותו n שמצאתם בסעיף א'.

50. נתון הטור: $\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6}+\ldots$

א. מהו המחובר ה- n בטור?

ב. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי סכום n האיברים בטור הוא: $\frac{n}{3(n+3)}$

51. א. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{2}{2\cdot5}+\frac{2}{5\cdot8}+\frac{2}{8\cdot11}+\ldots+\frac{2}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{n}{3n+2}$$

ב. חשבו את הסכום: $\frac{2}{2\cdot5}+\frac{2}{5\cdot8}+\ldots+\frac{2}{29\cdot32}$

52. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי לכל n טבעי מתחלק הביטוי: 10^n-4 ב- 6 ללא שארית.

53. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי לכל n טבעי מתקיים: $3^n>n^2+1$

54. א. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי לכל n טבעי גדול מ-4 מתקיים:

$$\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}+\ldots+\frac{1}{2n}>0.4$$

ב. הוכיחו על סמך סעיף א' כי: $\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\ldots+\frac{1}{198}>0.41$

55. א. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\left(\frac{2^2}{2^2-1}\right)\cdot\left(\frac{3^2}{3^2-1}\right)\cdot\left(\frac{4^2}{4^2-1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2-1}\right)=\left(\frac{2(n+1)}{n+2}\right)$$

ב. חשבו את המכפלה: $\frac{16}{15}\cdot\frac{25}{24}\cdot\ldots\cdot\frac{256}{255}$

56. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי לכל n טבעי מתחלק הביטוי: $9\cdot13^n-17\cdot5^n$ ב- 8 ללא שארית.

57. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי לכל n טבעי מתקיים:

$$(2n+1)+(2n+3)+\ldots+(4n-1)=3n^2$$

58. א. הוכיחו את הטענה: אם ל- n טבעי מסוים 3^n+5^n מתחלק ב- 16, אזי גם הביטוי: $3^{n+2}+5^{n+2}$ מתחלק ב- 16.

ב. האם מהוכחת הטענה שבסעיף א' אכן נובע שהביטוי: 3^n+5^n מתחלק ב- 16 לכל n טבעי?

ג. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי לכל n טבעי אי זוגי מתחלק הביטוי: 3^n+5^n ב- 8 ללא שארית.

פתרונים

2. ב. 1430
3. ב. 7 ג. 1/15
4. ב. 29,568
7. ב. 495
8. ב. 6 ג. 50/39
9. ב. 4914
12. א. 2 ב.3
14 ב. 501 ג. 7105
15. ב. 445
16. ב. 100
17. ב. 16 ג. לא. האיבר בטור הוא 61+
49. א. $n > 2$
50. א. $\frac{1}{(n+2)(n+3)}$
51. ב. $\frac{5}{16}$
55. ב. 13/34
58. ב. לא