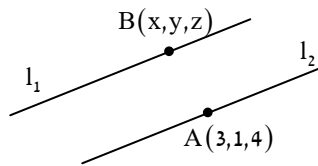


דוגמה :

ע"ט. נתונים הישרים : $l_1 : \underline{x} = (1, -1, 3) + t(4, 2, -5)$ $l_2 : \underline{x} = (5, 1, 4) + s(4, 2, -5)$

מצאו את המרחק ביניהם .

פתרון :

כרגיל נתחיל בשרטוט השאלה :

ברור לנו כי הנקודה : $(5, 1, 4)$ נמצאת על l_2 .וכמו שראינו במציאת מרחק נקודה מישר , עלינו למצוא את הנקודה : $B(x, y, z)$.לשם כך ביטאנו את הווקטור \overrightarrow{AB} בעזרת הישר l_1 : $B = (1 + 4t, -1 + 2t, 3 - 5t)$ הווקטור \overrightarrow{AB} : $\overrightarrow{AB} = (1 + 4t - 5, -1 + 2t - 1, 3 - 5t - 4)$ וכדי להבטיח ש- $l_1 \perp \overrightarrow{AB}$, צריך להתקיים : $(4t - 4, 2t - 2, 5t - 1) \cdot (4, 2, -5) = 0$

$$16t - 16 + 4t - 4 + 25t + 5 = 0$$

$$45t = 15$$

$$t = \frac{1}{3}$$

$$B = \left(1 + \frac{4}{3}, -1 + \frac{2}{3}, 3 - \frac{5}{3}\right) = \left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) \quad \text{והנקודה B :}$$

$$|AB| = \sqrt{\left(\frac{7}{3} - 5\right)^2 + \left(-\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 4\right)^2} = 4 \quad \text{והמרחק AB :}$$

כלומר המרחק בין הישרים הוא 4 .

פ. נתונים קדקודי טרפז : $A(-1, 4, 3)$ $B(-8, -1, -2)$ $C(1, 16, 10)$ $D(2, -1, 7)$

מצאו את שטח הטרפז .

פתרון :

כדי למצוא את שטח הטרפז עלינו למצוא תחילה את קדקודי הבסיסים המקבילים .

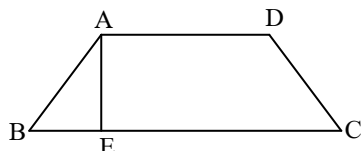
לכן נתחיל במציאת הווקטורים בין הקדקודים ונזהה את הווקטורים המקבילים :

$$\overrightarrow{AB} = (-7, -5, -5)$$

$$\overrightarrow{BC} = (9, -15, 12)$$

$$\overrightarrow{CD} = (1, 15, -3)$$

$$\overrightarrow{AD} = (3, -5, 4)$$



$$|AD| = \sqrt{9 + 25 + 16} = 7.07$$

$$|BC| = \sqrt{81 + 225 + 144} = 21.21$$

עתה נמצא את הגובה h על פי מרחק בין ישרים מקבילים :

$$BC : \underline{x} = (-8, -1, -2) + t(9, -15, 12)$$

אנו יודעים שכאשר BC הוא :

$$\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{AD} \quad \text{קל לראות שמתקיים :}$$

עתה נוכל לשרטט את הטרפז :

כדי למצוא את שטח הטרפז עלינו למצוא

את אורכי הבסיסים ואת הגובה .

נמצא את הבסיסים :

$$E = (-8 + 9t, -1 - 15t, -2 + 12t) \quad \text{ביטוי הנקודה E} :$$

$$\overrightarrow{AE} = (-8 + 9t + 1, -1 - 15t - 4, -2 + 12t - 3)$$

$$(-7 + 9t, -5 - 15t, -5 + 12t)(9, -15, 12)$$

$$-63 + 81t + 75 + 225t - 60 + 144t = 0$$

$$450t = -48$$

$$t = 0.107$$

$$E = (7.04, -2.61, -0.72) \quad \text{ובנקודה E} :$$

$$h = |EA| = \sqrt{(7.04 + 1)^2 + (-2.61 - 4)^2 + (-0.72 - 3)^2} = 11.05$$

$$S = \frac{7.07 + 21.21}{2} \cdot 11.05 = 156.25 \quad \text{ושטח הטרפז} :$$

מרחק ישר ממישור

ראשית עלינו לזכור שמציאת מרחק בין ישר למישור מתאים רק לישרים המקבילים למישור.

אם הישר אינו מקביל, הרי שיש לו נקודת חיתוך משותפת עם המישור, וממילא המרחק משתנה. ($0 \leq d \leq \infty$)

לאחר שהבהרנו נקודה זו, הרי שמציאת המרחק עצמו היא טכניקה קלה מאוד. כל שעלינו לעשות הוא למצוא נקודה כלשהי על הישר ולחפש את מרחקה מהמישור, כפי שכבר למדנו,

$$d = \frac{|ax_1 + bx_1 + cz_1 + D|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \text{בעזרת הנוסחה} :$$

לדוגמה :

פ"א. מצאו את המרחק בין המישור: $-3x + 2y + 4z + 15 = 0$ לבין הישר: $l: \underline{x} = (4, -9, 7) + t(2, 5, -1)$.
פתרון :

כדי לבדוק אם הישר אכן מקביל למישור, נמצא את מכפלת ווקטור המקדמים של

$$(-3, 2, 4)(2, 5, -1) = -6 + 10 - 4 = 0 \quad \text{המישור בווקטור הכיוון של הישר} :$$

ולכן הישר מקביל למישור.

למציאת המרחק נבחר נקודה על הישר: $(4, -9, 7)$ ונציב בנוסחה :

$$d = \frac{|1 - 3 \cdot 4 + 2 \cdot (-9) + 4 \cdot 7 + 15|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 4^2}} = \frac{13}{5.38} = 2.42$$

כאשר המישור נתון בצורה פרמטרית, כדאי למצוא את המשוואה הכללית של המישור ומכאן להמשיך כמו שלמדנו.

לדוגמה :

פ"ב. נתון הישר: $l: \underline{x} = (1, -1, 5) + t(4, 2, -3)$ והמישור: $\pi: \underline{x} = (4, -3, 2) + s(4, 2, -3) + r(7, -1, 5)$. מצאו את מרחקו של הישר מן המישור.

פתרון :

נחילה נעבור להצגה כללית של המישור :

I $(ABC)(4, 2, -3)$ כפי שידוע לנו, ווקטור המקדמים ABC מקיים :

II $(ABC)(7, -1, 5)$

$$\text{I} \quad 4A + 2B - 3C = 0$$

$$\text{II} \quad \underline{7A - B + 5C = 0}$$

$$\text{II} \quad B = 7A + 5C$$

$$\text{I} \quad 4A + 2(7A + 5C) - 3C = 0$$

$$4A + 14A + 10C - 3C = 0$$

$$18A = -7C$$

$$A = -7 \quad C = 18$$

$$B = 7 \cdot (-7) + 5 \cdot 18 = 41$$

$$-7 \cdot 4 - 41 \cdot 3 + 18 \cdot 2 + D = 0 \quad : (4, -3, 2) \text{ ובהצבת הנקודה}$$

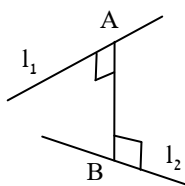
$$D = -131$$

$$-7x - 41y + 18z - 131 = 0 \quad \text{ומשוואת המישור} :$$

ולפי מרחק נקודה ממישור [נקודה על הישר : $(1, -1, 5)$:

$$d = \frac{|-7 \cdot 1 - 41 \cdot (-1) + 18 \cdot 5 - 131|}{\sqrt{7^2 + 41^2 + 18^2}} = \frac{7}{45.32} = 0.15$$

עתה נוכל לעבור למציאת מרחק בין ישרים מצטלבים .



מרחק זה מוגדר כמרחק הקצר ביותר, כלומר אם נתונים l_1 ו- l_2 הנקודה B ,

היא נקודת ההיטל של ישר l_1 על l_2 .

AB מוגדר כמרחק ביניהם .

כדי למצוא מרחק זה יש למצוא מישור המקיים שני תנאים :

א. הוא מכיל את ישר l_1 .

ב. הוא מקביל לישר l_2 .

המרחק בין ישר l_2 למישור שמצאנו , הוא המרחק בין הישרים המצטלבים .

דוגמה :

$$l_1 : \underline{x} = (3, 4, -5) + t(1, 3, 7) \quad \text{פ"ג. נתונים הישרים המצטלבים} :$$

$$l_2 : \underline{x} = (-1, 4, -7) + s(3, -2, 1)$$

מצאו את המרחק ביניהם .

פתרון :

תחילה נמצא מישור המכיל את הישר l_2 ומקביל לישר l_1 .

כדי להבטיח שהוא אכן מקביל לישר l_1 , יש לוודא שהמישור שאנו מחפשים , יכיל גם את

ווקטור הכיוון של ישר l_1 . וכדי שנדע שהוא מכיל ווקטור כיוון זה , כל שעלינו לעשות הוא לבנות

אותו עם ווקטור הכיוון הנדרש .

$$\pi : \underline{x} = (-1, 4, -7) + s(3, -2, 1) + t(1, 3, 7) \quad \text{לכן המישור המבוקש הוא} :$$

ווקטור זה וודאי מקביל לישר l_1 .

לבדיקה:

נמצא את המצב ההדדי בין ישר l_1 והמישור שמצאנו, לפי מה שכבר למדנו.

$$\text{I} \quad 3 + t = -1 + 3s + r \quad \text{נציב את המשוואות:}$$

$$\text{II} \quad 4 + 3t = 4 - 2s + 3r$$

$$\text{III} \quad \frac{-5 + 7t = -7 + s + 7r}{t = -4 + 3s + r}$$

$$\text{I} \quad t = -4 + 3s + r \quad \text{ממשוואה ראשונה:}$$

$$\text{II} \quad \cancel{4} + 3(-4 + 3s + r) = \cancel{4} - 2s + 3r \quad \text{הצבה ב-II:}$$

$$-12 + 9s + \cancel{3r} = -2s + \cancel{3r}$$

$$-12 = -11s$$

$$\frac{11}{12} = s$$

$$t = -4 + \frac{33}{12} + r = -\frac{5}{4} \quad \text{הצבה חוזרת ב-I:}$$

$$\text{III} \quad -5 + 7\left(-\frac{5}{4} + r\right) = -7 + \frac{11}{12} + 7r \quad \text{וממשוואה שלישית:}$$

$$-7\frac{2}{3} = 0$$

כלומר אין פתרון, והוא אכן מקביל למישור.

מכאן והלאה פועלים לפי מרחק ישר ממישור:

$$l_1: \underline{x} = (3, 4, -5) + t(1, 3, 7) \quad \text{הישר:}$$

$$\pi: \underline{x} = (-1, 4, -7) + s(3, -2, 1) + r(1, 3, 7) \quad \text{המישור:}$$

כפי שראינו, עוברים למציאת משוואה כללית של המישור:

$$\text{I} \quad (ABC) \cdot (3, -2, 1) = 3A - 2B + C = 0$$

$$\text{II} \quad (ABC) \cdot (1, 3, 7) = A + 3B + 7C = 0$$

$$\text{I} \quad C = 2B - 3A \quad \text{ממשוואה ראשונה:}$$

$$\text{II} \quad A + 3B + 7(2B - 3A) = 0 \quad \text{הצבה במשוואה II:}$$

$$17B = 20A$$

$$A = 17 \quad B = 20$$

$$\text{I} \quad C = 2 \cdot 20 - 3 \cdot 17 = -11 \quad \text{הצבה חוזרת במשוואה I:}$$

$$17 \cdot (-1) + 20 \cdot 4 - 11(-7) + D = 0 \quad \text{הצבת הנקודה ומציאת משוואת המישור:}$$

$$-17 + 80 + 77 + D = 0$$

$$D = -140$$

$$17x + 20y - 11z - 140 = 0 \quad \text{ומשוואת המישור:}$$

מרחק הנקודה $(3, 4, -5)$ שעל ישר l_1 מהמישור שמצאנו:

$$d = \frac{|17 \cdot 3 + 20 \cdot 4 - 11 \cdot (-5) - 140|}{\sqrt{17^2 + 20^2 + 11^2}} = \frac{46}{28.46} = 1.62$$

וזהו המרחק בין הישרים המצטלבים.



בדיקת הבנה

131. מצאו את המרחק בין הישרים :
 $l_1 : \underline{x} = (7, -4, 5) + t(-1, 3, 2)$
 $l_2 : \underline{x} = (8, -5, 7) + s(1, 6, -5)$
132. נתונים 3 קדקודי מקבילית :
 $A(-4, 7, 3) \quad B(5, 3, -7) \quad D(11, 9, -4)$
 מצאו את שטח המקבילית .
133. מצאו את המרחק בין הישר :
 $l : \underline{x} = (1, -1, 4) + t(2, 3, -5)$
 והמישור :
 $x + 2y - z - 30 = 0$
134. מצאו את המרחק בין הישר :
 $l : \underline{x} = (2, 4, -3) + t(1, -5, 7)$
 לבין המישור :
 $\pi : \underline{x} = (1, -1, 0) + t(3, 3, 1) + s(-1, -3, 2)$
135. מצאו את המרחק בין הישרים המצטלבים :
 $l_1 : \underline{x} = (1, 0, 3) + t(3, -2, 7)$
 $l_2 : \underline{x} = (-1, 1, 5) + s(1, 3, 2)$

ואחרון חביב (אולי לא... אבל בכל זאת אחרון) –

מרחק בין מישורים מקבילים :

הדרך הפשוטה והקלה למצוא מרחק בין מישורים מקבילים הוא על ידי מציאת נקודה במישור אחד והצבת הנקודה בנוסחת המרחק בין נקודה למישור .
 לדוגמה :

פ"ד. מצאו את המרחק בין המישורים :

$$I \quad x + 2y - 3z + 5 = 0 \quad II \quad x + 2y - 3z - 20 = 0$$

פתרון :

תחילה נמצא נקודה במישור I :

$$x + 2y - 3z + 5 = 0$$

$$x = -5 + 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = -4$$

$$\text{עבור } y=1 \quad z=1$$

$$\text{והנקודה : } (-4, 1, 1)$$

$$d = \frac{|-4 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 - 20|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{25}{\sqrt{14}} = 6.68$$

ומרחק ממישור II :

כמובן, אם המישורים נתונים בהצגה פרמטרית, נעביר אותם להצגה כללית ונפתור באותה דרך .

פ"ה. מצאו את המרחק בין המישורים :

$$\pi_2 : \underline{x} = (-3, 5, 7) + t(-1, -2, 5) + s(7, -1, 8) \quad \vee \quad \pi_1 : \underline{x} = (1, -2, 1) + t(-1, -2, 5) + s(7, -1, 8)$$

פתרון :

I $(ABC)(-1, -2, 5) = 0$: נמצא את ווקטור המקדמים של המישור π_2

$$II \quad (ABC)(7, -1, 8) = 0$$

$$I \quad -A - 2B + 5C = 0$$

$$A = 5C - 2B$$

$$II \quad 7A - B + 8C = 0$$

$$7(5C - 2B) - B + 8C = 0$$

$$35C - 14B - B + 8C = 0$$

$$43C - 15B = 0$$

$$C = 15 \quad B = 43$$

$$A = 5 \cdot 15 - 2 \cdot 43 = -11$$

$$-11x + 43y + 15z + D = 0 \quad \text{ווקטור המקדמים:}$$

$$-11 \cdot 1 + 43 \cdot (-2) + 15 \cdot 1 + D = 0 \quad \text{הצבת הנקודה } (1, -2, 1) \text{ ומציאת } D:$$

$$D = 82$$

$$-11x + 43y + 15z + 82 = 0 \quad \text{ומשוואת המישור:}$$

עתה נותר להציב את הנקודה $(-3, 5, 7)$ ממישור π_2

$$d = \frac{|-11 \cdot (-3) + 43 \cdot 5 + 15 \cdot 71|}{\sqrt{11^2 + 43^2 + 15^2}} = \frac{353}{46.85} = 7.53 \quad \text{ולמצוא את המרחק:}$$

פ"ו. מצאו את משוואת המישור המקביל למישור: $x + y - z + 5 = 0$, ונמצא במרחק $\frac{10}{\sqrt{3}}$ ממנו.

פתרון:

מכיוון שאנחנו מחפשים מישור מקביל, הרי שהוא צריך להיות מהתבנית: $x + y - z + D = 0$.

נמצא נקודה על המישור הנתון:

$$\text{עבור } x=1 \quad y=1 \quad \text{נקבל: } z=7$$

ולכן הנקודה היא: $(1, 1, 7)$

ומרחקה מהמישור המבוקש:

$$d = \frac{|1 + 1 - 7 + D|}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{|-5 + D|}{\sqrt{3}} \quad \text{ולפי הנתון: } d = \frac{10}{\sqrt{3}}, \text{ ולכן:}$$

$$10 = |-5 + D|$$

$$10 = -5 + D \quad \text{או} \quad 10 = 5 - D \quad \text{ומכאן:}$$

$$15 = D$$

$$D = -5$$

$$\text{והתשובה: } \underline{x + y - z - 5 = 0} \quad \text{ו} \quad \underline{x + y - z + 15 = 0}$$

פ"ז. נתונים שני מישורים מקבילים: $3x + 2y - z - 10 = 0$ ו- $3x + 2y - z + 10 = 0$

מצאו מישור מקביל לשניהם המרוחק מרחק שווה משניהם.

פתרון:

בדומה לפתרון הקודם נמצא תחילה נקודה על כל אחד מהמישורים:

$$3x + 2y - z + 10 = 0 \quad \text{עבור המישור:}$$

$$z = 3 + 2 + 10 = 15 \quad \text{הצבה של } x=1 \quad y=1 \text{ נותנת:}$$

והנקודה: $(1, 1, 15)$

$$3x + 2y - z - 10 = 0 \quad \text{עבור המישור:}$$

$$z = 3 + 2 - 10 = -5 \quad \text{הצבה של } x=1 \quad y=1 \text{ נותנת:}$$

והנקודה: $(1, 1, -5)$

מרחק הנקודות האלה מהמישור המבוקש : $3x + 2y - z + D$

$$d = \frac{|3+2-15+D|}{\sqrt{9+4+1}} = \frac{|3+2+5+D|}{\sqrt{9+4+1}}$$

$$|-10+D| = |10+D| \quad \text{אחרי סידור המשוואה:}$$

$$-10+D = 10+D$$

אין פתרון

$$-10+D = -10-D$$

$$2D = 0$$

$$D = 0$$

$$\underline{3x + 2y - z = 0} \quad \text{והמישור המבוקש:}$$



בדיקת הבנה

136. מצאו את המרחק בין המישורים : I $3x - y + 4z - 7 = 0$

II $3x - y + 4z + 15 = 0$

137. מצאו את המרחק בין המישורים : $\pi_1 : \underline{x} = (3, -1, 7) + t(1, -2, 3) + s(-4, 2, 8)$

$\pi_2 : \underline{x} = (2, -4, 6) + t(-1, -5, 7) + s(2, 3, -5)$

138. מצא משוואת מישור המקביל למישור : $3x - 4y + 3z - 20 = 0$, ונמצא במרחק $\frac{10}{\sqrt{26}}$ ממנו.

139. נתונים המישורים המקבילים : $4x - y + 3z - 2 = 0$ ו- $4x - y + 3z - 20 = 0$

מצאו מישור המקביל לשני המישורים הנתונים, ומרחקו שווה משניהם.

נעבור למספר דוגמאות המשלבות את נושאי המצבים ההדדיים בין ישרים ומישורים ובין מציאת מרחקים.

פ"ח. נתונים המישורים : I $-x + y + z + 2 = 0$ II $17x - 19y - 11z - 28 = 0$

1. מצאו את ישר החיתוך של המישורים והראו כי הוא מקביל לישר : $l_1 : \underline{x} = (-1, 5, 3) + t(4, 3, 1)$

2. מצאו את המרחק בין ישר החיתוך לישר l_1 .

פתרון :

1. מציאת ישר חיתוך :

I $-x + y + z + 2 = 0$ ממישור I : $x = y + z + 2$

II $17(y + z + 2) - 19y - 11z - 28 = 0$ הצבה במישור II :

$$17y + 17z + 34 - 19y - 11z - 28 = 0$$

$$-2y + 6z + 6 = 0$$

עבור $z = 0 \Leftarrow y = 3 \Leftarrow x = 3 + 0 + 2 = 5$
והנקודה : $(5, 3, 0)$

עבור $z = 1 \Leftarrow y = 6 \Leftarrow x = 6 + 1 + 2 = 9$
והנקודה : $(9, 6, 1)$

ולמציאת ישר החיתוך : $(5, 3, 0) + s(9 - 5, 6 - 3, 1 - 0)$

$$l_2 : \underline{x} = (5, 3, 0) + s(4, 3, 1)$$

וישר זה, כמובן, בכיוון הישר l_1 כי וקטור הכיוון שווה!

$$\text{I} \quad 5 + 4s = -1 + 4t \quad \text{נבדוק האם יש להם נקודת חיתוך משותפת:}$$

$$\text{II} \quad 3 - 5s = 5 + 3t$$

$$\text{III} \quad 0 + s = 3 + t$$

$$5 + 4(3 + t) = -1 + 4t \quad \text{הצבה של I ב- III:}$$

$$5 + 12 + 4t = -1 + 4t$$

$$18 = 0$$

אין נקודה משותפת, לכן הישרים מקבילים!

2. המרחק בין הישרים:

$$B = (-1 + 4t, 5 + 3t, 3t) \quad \text{מציאת נקודה B בעזרת t:}$$

$$\overrightarrow{AB} = (-1 + 4t - 5, 5 + 3t - 3, 3t - 0) = (4t - 6, 2 + 3t, 3t)$$

$$(4t - 6, 2 + 3t, 3t) \cdot (4, 3, 1) = 0 \quad \text{ומתקיים:}$$

$$16t - 24 + 6 + 9t + 3 + t = 0$$

$$26t = 15$$

$$t = \frac{15}{26}$$

$$B = \left(4 \cdot \frac{15}{26} - 1, 5 + \frac{3 \cdot 15}{26}, 3 + \frac{15}{26} \right) = \left(\frac{34}{26}, \frac{175}{26}, \frac{93}{26} \right) \quad \text{והנקודה B:}$$

$$d = \sqrt{\left(\frac{34}{26} - 5 \right)^2 + \left(\frac{175}{26} - 3 \right)^2 + \left(\frac{93}{26} - 0 \right)^2} = 6.35 \quad \text{והמרחק:}$$

$$\text{פ"ט. נתון המישור: } 2x + 3y - 4z + 10 = 0$$

$$1. \text{ מצאו את נקודת החיתוך של הישר: } \underline{x} = (1, 2, -1) + t(2, -1, 3) \quad \text{והמישור.}$$

$$3. \text{ מצאו את הזווית בין הישר הנתון למישור.}$$

$$3. \text{ מצאו נקודה על הישר הנתון שמרחקה 3 מהמישור.}$$

פתרון:

$$1. \text{ למציאת נקודת החיתוך:}$$

$$x = 1 + 2t$$

$$y = 2 - t$$

$$z = -1 + 3t$$

$$2(1 + 2t) + 3(2 - t) - 4(-1 + 3t) + 10 = 0 \quad \text{הצבה במשוואת המישור:}$$

$$2 + 4t + 6 - 3t + 4 - 12t + 10 = 0$$

$$-11t + 22 = 0$$

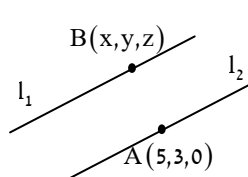
$$\underline{t = 2}$$

$$A = (1 + 2 \cdot 2, 2 - 2, -1 + 3 \cdot 2) \Rightarrow A(5, 0, 5) \quad \text{והנקודה:}$$

$$2. \text{ הזווית בין הישר למישור - לפי הנוסחה:}$$

$$\sin \alpha = \frac{\left| \frac{a}{|a|} \cdot \frac{b}{|b|} \right|}{\sqrt{4 + 9 + 16} \sqrt{4 + 1 + 9}} = \frac{-11}{5.38 \cdot 3.74} = 0.546$$

$$\underline{\alpha = 33.12^\circ}$$



3. הנקודה המבוקשת: $B(1+2t, 2-t, -1+3t)$

$$3 = \frac{|2(1+2t) + 3(2-t) - 4(-1+3t) + 10|}{\sqrt{4+9+16}} \quad \text{ועל פי מרחק נקודה ממישור:}$$

$$3 \cdot 5.38 = |2 + 4t + 6 - 3t + 4 - 12t + 10|$$

$$16.14 = |22 - 11t|$$

$$16.14 = 22 - 11t \quad \text{או} \quad 16.14 = -22 + 11t$$

$$0.53 = t \quad 3.47 = t$$

$$B(0.06, 2.53, -2.59) \quad B(7.94, -1.47, 9.41)$$

צ. בטראדר ABCS נתונות הנקודות הבאות:

$$\Delta ABS \Rightarrow x + 19y + 4z + 33 = 0$$

$$\Delta ACS \Rightarrow 39x + 30y - 2z + 23 = 0$$

ונתון: BC נמצא על הישר: $l: \underline{x} = (4, -3, 5) + t(3, 9, -7)$

1. מצאו את משוואת הישר עליו מונח מקצוע AS.

2. מצאו את הזווית בין AC ל- CB.

3. מצאו את המרחק בין AS ל- CB.

פתרון:

1. AS מונח על ישר החיתוך של שני המישורים הנתונים,

$$\text{I} \quad x + 19y + 4z + 33 = 0 \quad \text{לכן:}$$

$$\text{II} \quad 39x + 30y - 2z + 23 = 0 \quad / \cdot 2$$

$$\text{I} \quad x + 19y + 4z + 33 = 0$$

$$\text{II} \quad 78x + 60y - 4z + 46 = 0$$

$$\text{I} + \text{II} \quad 79x + 79y + 79 = 0$$

$$y = 2 \quad \Leftarrow \quad x = 1$$

$$1 + 19 \cdot (-2) + 4 \cdot z + 33 = 0 \quad \text{הצבה ב- I:}$$

$$z = \frac{4}{4} = 1$$

והנקודה: $(1, -2, 1)$

$$y = -1 \quad \Leftarrow \quad x = 0$$

$$0 - 19 + 4 \cdot z + 33 = 0 \quad \text{הצבה ב- I:}$$

$$z = -3.5$$

והנקודה: $(0, -1, -3.5)$

ומשוואת הישר AS:

או (אם לא אוהבים שברים): $l_{AC}: \underline{x} = (1, -2, 1) + s(-2, 2, -9)$

2. בכל טטראדר ABCS חייב להתקיים ש- AC מצטלב עם BC (אחרת אין לגוף נפח!).

וכדי לחשב את המרחק בין הישרים המצטלבים נמצא תחילה את המישור המכיל את AS

$$\pi: \underline{x} = (1, -2, 1) + s(-2, 2, -9) + t(3, 9, -7) \quad \text{BC : ומקביל ל-}$$

$$\text{I} \quad -2A + 2B - 9C = 0 \quad \text{נעבור להצגה כללית:}$$

$$\text{II} \quad \underline{3A + 9B - 7C = 0}$$

$$\text{והפתרון (נסו בעצמכם): } A = -67 \quad B = 41 \quad C = 24$$

$$\text{הצבת הנקודה } (1, -2, 1) \text{ ומציאת המישור: } D = 125$$

$$-67x + 41y + 24z + 125 = 0 \quad \text{ומשוואת המישור:}$$

עתה נמצא את מרחק הנקודה $(4, -3, 5)$ הנמצאת על הישר המכיל את BC

$$d = \frac{|-67 \cdot 4 + 41 \cdot (-3) + 24 \cdot 5 + 125|}{\sqrt{67^2 + 41^2 + 24^2}} = \frac{|-146|}{82.13} = 1.78 \quad \text{מהמישור שמצאנו:}$$

כפי שבוודאי הבחנתם בדוגמאות האחרונות, גם כאשר השאלות משלבות כמה נושאים, אין הן משנות את טכניקות הפתרון.

תרגול עצמי



140. במנסרה משולשת וישרה נתונים קדקודי הבסיס התחתון:

$$A(1, -1, 2) \quad B(5, -3, 4) \quad C(1, 6, -4) \quad \text{וגובה } 5.$$

א. מצאו את משוואת המישור של הבסיס התחתון.

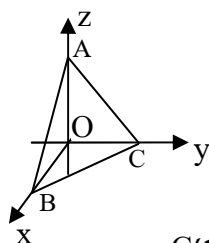
ב. מצאו את מישור הבסיס העליון.

ג. מצא את נפח המנסרה.

141. בטטראדר OABC (המוראה בציר) נתון: $OA = 7$

$$\text{נפח הטטראדר הוא: } 81\frac{2}{3}$$

מצאו את משוואת המישור ABC.



142. נתונות שלוש נקודות ABC: $A(-1, 5, 2)$ $B(2, 0, -3)$ $C(1, -2, 7)$

א. מצאו את משוואת הישר הניצב למישור ABC ועובר דרך הנקודה A.

ב. מצאו את המרחק מנקודה A לראשית.

ג. על הישר שמצאתם בסעיף א', מצאו שתי נקודות שמרחקן מהנקודה A שווה למרחק שמצאתם בסעיף ב'.

143. הנקודה: $O(4, -2, 1)$ היא מרכז כדור שרדיוסו 9.

א. הראו כי הנקודה: $B(10, -4, -5)$ נמצאת על שפת הכדור.

ב. דרך הנקודה B העבירו מישור α משיק לכדור. מצאו את משוואת המישור α .

ג. מצאו שני מישורים: β , λ המאונכים למישור α , ומשיקים גם הם לכדור.

ד. מצאו את נקודות ההשקה של הכדור עם מישורים β , λ .

144. בטראדר נתון: $C(4,7,-1)$ $B(3,-2,5)$ $A(-1,2,4)$ $S(1,1,7)$
 א. מצאו את משוואת הישר עליו מונח הגובה של הטראדר היורד מ- S .

ב. חשבו את נפח הטראדר.

ג. דרך נקודה S עובר מישור מקביל למישור ABC .

מצאו את הנקודות: $C'B'A'$ כך שהמנסרה $ABCA'B'C'$ תחסום את הטראדר.

145. נתון הישר: $(1, -2, 7) + t(4, -5, 3)$, ונתונה הנקודה: $(1, 1, 1)$.

מצאו נקודות על צירי השיעורים שמרחקן מהישר ומהנקודה הנתונה, שווה.

146. נתון מישור π : $\underline{x} = (1, -2, 1) + t(2, 3, -1) + s(1, 0, -1)$

א. מצאו את ישר החיתוך של מישור זה והמישור: xy .

ב. מצאו את הזווית בין ישר החיתוך שמצאתם ב-א', לבין הציר: z .

147. הישר: $\underline{x} = (1, -1, 2) + t(3, 1, -2)$ חותך את המישור: $x - y + 4z + 10 = 0$

בנקודה A וניצב למישור העובר דרך הנקודה: $B(13, 3, -6)$.

א. מצאו את משוואת ישר החיתוך בין המישורים.

ב. מצאו נקודה C הנמצאת על ישר החיתוך הקרובה ביותר לנקודה B .

ג. מצאו את זוויות המשולש ABC .

ד. מצאו את מרחק הישר AB מישור החיתוך בין המישורים.

148. נתונים הישרים: $l_1: \underline{x} = (1, -2, 7) + t(4, 2, 1)$

$l_2: \underline{x} = (-1, -5, 3) + s(-1, 2, 0)$

א. הוכיחו כי הישרים מצטלבים ומאונכים זה לזה.

ב. דרך הישר l_1 מעבירים מישור מקביל לישר l_2 .

אלכסוני הריבוע $ABCD$ שצלעו $\frac{7}{\sqrt{2}}$, נחתכים בנקודת

החיתוך של הישר l_1 והיטלו של l_2 על המישור. על ריבוע זה בונים פירמידה ישרה

שקדקודה נמצא על הישר l_2 .

מצאו את קדקודי הפירמידה ואת נפחה.

149. נתון הישר: $\underline{x} = (8, 7, 9) + t(2, 2, 1)$

ונתון המישור: $7x + 9y + 6z - 7 = 0$

מצאו משוואת מישור הניצב למישור הנתון, ומרחקו מהישר l_1 הוא: $\frac{7}{\sqrt{2}}$.

