4. $3^{x+y-1}+2^{2x+y+1}=41$
$3^{x+y}-2^{2x+y+3}=-101$

5. $3^{x}\cdot 4^{y}=36$
$9^{x}\cdot 7^{y}=567$

6. $x^{y+1}=y^{3y}$
$y^{y}=x$

7. $x^{y}=y^{x}$
$x^{3}=y^{5}$

פתרון :

1. $3^{x}-4\cdot 3^{y}=-9$
$x+y=5$

בתרגילים שבהם נתון באופן מפורש הקשר בין x ל-y

קל לעבור להצבה על ידי בידוד משתנה : $y=5-x$

והצבה במשוואה הנגדית : $3^{x}-4\cdot 3^{5-x}=-9$

מכאן ההמשך הוא לפי פתרון פונקציה מעריכית בנעלם אחד : $t=3^{x}$

$$t-\frac{4\cdot 3^{5}}{t}=-9$$
$$t^{2}-972=-9t$$
$$t^{2}+9t-972=0$$
$$t_{1}=27 \qquad t_{2}=-36$$

$27=3^{x}$ לא מתאים

$\underline{x=3}$

ואחרי הצבה חוזרת : $\underline{y=5-x=2}$

והתשובה : (3,2)

2. $3^{2x-3y}=243$
$5^{x-y-1}=25$

כאן אנו מוצאים שכל משוואה היא בבסיס שווה –

הראשונה בבסיס 3 והשנייה בבסיס 5. לכן : $3^{2x-3y}=3^{5}$

$5^{x-y-1}=5^{2}$

ולפי שוויון מעריכים : $2x-3y=5$

$x-y-1=2$

ופתרון שתי משוואות אלו :

ממשוואה שנייה : $x=3+y$

הצבה במשוואה נגדית : $2(3+y)-3y=5$

$6-y=5$

$\underline{y=1}$

ואחרי הצבה חוזרת : $\underline{x=3+1=4}$

והתשובה (4,1)

3. $2^{x-1}+3^{y+2}=7$

$\underline{2^{x}+3^{3+y}=17}$

כאשר המשוואות בבסיסים מעורבים מתחילים

ב"הוצאת מספרים" כמו שראינו למעלה :

$\frac{2^{x}}{2}+9\cdot 3^{y}=7$

$\underline{2^{x}+27\cdot 3^{y}=17}$

עכשיו אנחנו מזהים שיש שני משתנים $3^{y},2^{x}$.

ניתן לכל אחד מהם שם אחר : $m=3^{y},k=2^{x}$ ונקבל :

$\frac{k}{2}+9m=7$

$\underline{k+27m=17}$

פתרון של המשוואות :

$k+18m=14$

$\underline{k+27m=17}$

ועל ידי חיסור :

$-9m=-3$

$m=\frac{1}{3}$

$3^{y}=\frac{1}{3}$

$\underline{y=-1}$

הצבה חוזרת :

$k+27\cdot\frac{1}{3}=17$

$k=8$

$2^{x}=8$

$\underline{x=3}$

והתשובה $(3,-1)$

דוגמה נוספת לאותו רעיון קיימת גם בתרגיל הבא :

4. $3^{x+y-1}+2^{2x+y+1}=41$

$\underline{3^{x+y}-2^{2x+y+3}=-101}$

$\frac{3^{x+y}}{3}+2\cdot 2^{2x+y}=41$

$\underline{3^{x+y}-8\cdot 2^{2x+y}=-101}$

והמשתנים : $m=2^{2x+y},k=3^{x+y}$ $\leftarrow$

$\frac{k}{3}+2m=41$

$\underline{k-8m=-101}$

$k+6m=123$

$\underline{k-8m=-101}$

ועל ידי חיסור :

$14m=224$

$m=16$

הצבה חוזרת:
$k+6\cdot16=123$
$k=27$

הצבה בהגדרת המשתנים: $m=2^{2x+y}$ $\quad 2^{2x+y}=16=2^4$
$k=3^{x+y}$ $\quad 3^{x+y}=27=3^3$

קיבלנו שתי משוואות בשני נעלמים: $(1)\ 2x+y=4$
$(2)\ x+y=3$

ועל ידי חיסור: $\underline{x=1}$

וכמובן $\underline{y=2}$

והתשובה: $(1,2)$

5. $3^x\cdot4^y=36$
$9^x\cdot7^y=567$

במשוואות אלה אנו רואים שאין קשר בין הבסיסים המעורבים 4,7.

אולם התבוננות חוזרת מראה את הקשר: $9^x=(3^2)^x$

כאן כדאי לבודד את 3^x ממשוואה ראשונה ולקבל: $3^x=\frac{36}{4^y}$

ועל ידי הצבה במשוואה הנגדית: $\left(\frac{36}{4^y}\right)^2\cdot7^y=567$

$$\frac{1296\cdot7^y}{4^{2y}}=567$$

העברת אגפים: $\frac{7^y}{16^y}=\frac{567}{1296}$

על ידי צמצום אגף ימין: $\frac{7^y}{16^y}=\frac{7}{16}$

טיפ:
סכום הספרות במונה ובמכנה מתחלק ב-9 ולכן כדאי להתחיל בצמצום 9

$$\left(\frac{7}{16}\right)^y=\frac{7}{16}$$

$\underline{y=1}$

הצבה חוזרת: $3^x=\frac{36}{4^y}=9$

$\underline{x=2}$

והתשובה $(2,1)$

6. $x^{y+1}=y^{3y}$
$y^y=x$

כאן אנו מוצאים שנתון x אולם בעזרת משתנה עם מעריך.
זה די מפחיד אבל אנחנו נבטח בעולם ונחזיק אצבעות.

נציב את x במשוואה הנגדית: $\left(y^y\right)^{y+1}=y^{3y}$

ולפי חוקי חזקות: $y^{y^2+y}=y^{3y}$

ולכן $y^2 + y = 3y$

$y^2 - 2y = 0$

$\underline{y_1 = 2}$ $\quad y_2 = 0$ - ($a > 0$) לא מתאים

הצבה חוזרת : $2^2 = x$

$\underline{x = 4}$

והתשובה : (4,2)

ובכן אל חשש – לפעמים תרגילים אלו הם דווקא יותר פשוטים.

אין לשכוח כמובן את הפתרון הפשוט ביותר שהוא (1,1) .

והתשובה הסופית : (1,1) (4,2) .

7. $x^y = y^x$

$x^3 = y^5$

פתרון :

כאן הפתרון קצת יותר מורכב אך גם הוא נשען על הצבות :

נבודד את x במשוואה הראשונה : $x = y^{\frac{x}{y}}$

נציב במשוואה הנגדית : $y^{\frac{3x}{y}} = y^5$

$$\frac{3x}{y} = 5$$

$$\frac{3}{5}x = y$$

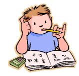
נציב שוב באותה משוואה : $x^3 = \left(\frac{3}{5}x\right)^5$

$$x^3 = \left(\frac{3}{5}\right)^5 \cdot x^5$$

אחרי צמצום $x^3 \neq 0$: $\left(\frac{5}{3}\right)^5 = x^2$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{2.5} = x = 3.586$$

$$y = \frac{3}{5} \cdot 3.586 = 2.151$$



<u>בדיקת הבנה:</u>

37. א. $5^x - 5^y = 500$, $x - y = 1$

ב. $3^{x+1} - 3^{y+1} = -72$, $x + y = 4$

ג. $2^{x+y} = 256$, $3^{x-y} = 9$

ד. $3^{x-2} + 5^y = 28$, $3^x - 5^{y-1} = 22$

ה. $x^{2y} = y^{y^2+2y}$, $x = y^{y+1}$

ו. $x^y = y^x$, $x^4 = y^5$

אי שוויונים מעריכיים

כבר הזכרנו שהפונקציה המעריכית היא חד-חד ערכית. עובדה זו מסייעת לנו בפתרון אי שוויונים, כי עבור $a>1$ אנו יודעים שמתקיים:

אם $a^x > a^y$

אז $x>y$

כלומר הפונקציה עולה. אבל...

עבור $0<a<1$ הפונקציה יורדת!

למשל $\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3$ למרות ש - $2<3$.

כלומר עבור $0<a<1$ מתקיים:

אם $a^x > a^y$

אז $\underline{x<y}$

ואת ההבדל הזה יש לזכור היטב בכל הנושא של אי שוויונים מעריכיים.

כל שאר הפעולות המתמטיות נשארות כפי שאנו מכירים.

ז. פתרו את אי השוויונים הבאים:

1. $3^x < 243$
2. $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 4$
3. $5^{4x+5} > 25^{4-2x}$
4. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+6} > \left(\frac{1}{9}\right)^{3.5x}$
5. $\sqrt{2}\cdot 2^{2x+1} < 2^x \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-x}$
6. $2\cdot 4^x - 4\cdot 2^x < 2^x - 2$

פתרון:

1. $3^x < 243$

$3^x < 3^5$ — לפי חוקי חזקות:

$\underline{x<5}$ — $a>1$ ולכן:

2. $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 4$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ — לפי חוקי חזקות:

$\underline{x<-2}$ — $a<1$ ולכן:

3. $5^{4x+5} > 25^{4-2x}$

$5^{4x+5} > 5^{8-4x}$

$4x+5 > 8-4x$ — $a>1$

$8x > 13$

$\underline{x > \frac{13}{8}}$

4. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+6} > \left(\frac{1}{9}\right)^{3.5x}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+6} > \left(\frac{1}{3}\right)^{7x}$

$a < 1$

$x^2 + 6 < 7x$

מעבר לפתרון אי שוויון ריבועי : $x^2 - 7x + 6 < 0$

הפתרון (פתרו באופן עצמאי) : $\underline{1 < x < 7}$

5. $\sqrt{2} \cdot 2^{2x+1} < 2^x \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-x}$

$2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{2x+1} < 2^x \cdot 2^{2x}$

$2^{2x+1.5} < 2^{3x}$

$a > 1$

$2x + 1.5 < 3x$

$\underline{x > 1.5}$

6. $2 \cdot 4^x - 4 \cdot 2^x < 2^x - 2$

נעבור לבסיס 2 : $2 \cdot 2^{2x} - 4 \cdot 2^x < 2^x - 2$

$2 \cdot 2^{2x} - 4 \cdot 2^x - 2^x + 2 < 0$

$2 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 2 < 0$

הצבה : $t = 2^x$

$2t^2 - 5t + 2 < 0$

גם כאן הגענו לאי שוויון ריבועי :

פתרון : $\frac{1}{2} < t < 2$

כלומר : $\frac{1}{2} < 2^x < 2$

$2^{-1} < 2^x < 2^1$

$a > 1$ ולכן : $\underline{-1 < x < 1}$

<u>בדיקת הבנה :</u>

38. א. $4^x \le 64$

ב. $\left(\frac{1}{9}\right)^x < \frac{1}{27}$

ג. $\left(\frac{1}{y}\right)^{2x+3} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x+7}$

ד. $2^{x^2-15} < 4^{10-x}$

ה. $5 \cdot 3^x - 9^x < 2 \cdot 3^x - 54$

כמו ששמתם בוודאי לב אין פה טכניקות מתוחכמות אלא רק תשומת לב.

כך גם כאשר הבסיס הוא נעלם.

עבור אי שוויון מהסוג $x^{2x+1} < x^{3x}$, יש לבדוק לא רק את המעריכים אלא גם את הבסיס כי עבור

$x > 1 \quad \rightarrow \quad 2x+1 < 3x$

אולם עבור $x < 1 \quad \rightarrow \quad 2x+1 > 3x$

ולכן במצבים כאלה יש לנו מערכת אי שוויונים:

$x > 1$	או	$0 < x < 1$
וגם $2x+1 < 3x$		וגם $2x+1 > 3x$

וההמשך:

$x > 1$	או	$0 < x < 1$
וגם $1 < x$		וגם $1 > x$
$\Downarrow$		$\Downarrow$
$x > 1$		$0 < x < 1$

והפתרון: $x > 1$ או $0 < x < 1$.

ח. פתרו את אי השוויונים הבאים:

1. $x^{x-1} < x^{2x-1}$
2. $(x-1)^{2x+1} \le (x-1)^{3x-4}$
3. $(7-x)^{x^2+3x-1} > (7-x)^{x+3}$
4. $(x^2-5x+7)^{x^2-3x-4} \ge 1$
5. $\left(\frac{x}{2x+2}\right)^{x^2} < \left(\frac{2x+2}{x}\right)^{1-2x}$

פתרון:

1. $x^{x-1} < x^{2x-1}$

כמו שלמדנו נפתח מערכת אי שוויונים:

$$\text{וגם}\left.\begin{matrix} \text{III} \;\; x>1 \\ \text{IV} \;\; x-1<2x-1 \end{matrix}\right\} \qquad \text{או} \qquad \left\{\begin{matrix} \text{I} \;\; 0<x<1 \\ \text{II} \;\; x-1>2x-1 \end{matrix}\right.\text{וגם}$$

$$\text{וגם}\left.\begin{matrix} \text{III} \;\; x>1 \\ \text{IV} \;\; 0<x \end{matrix}\right\} \qquad \text{או} \qquad \left\{\begin{matrix} \text{I} \;\; 0<x<1 \\ \text{II} \;\; 0>x \end{matrix}\right.\text{וגם}$$

$$x>1 \qquad \text{או} \qquad \phi$$

פתרון: $x > 1$

2. $(x-1)^{2x+1} \le (x-1)^{3x-4}$

נתחיל במערכת אי שוויונים :

וגם $\begin{cases} \text{III} & x-1>1 \\ \text{IV} & 2x+1 \le 3x-4 \end{cases}$ או וגם $\begin{cases} \text{I} & 0<(x-1)<1 \\ \text{II} & 2x+1 \ge 3x-4 \end{cases}$

וגם $\begin{cases} \text{III} & x>2 \\ \text{IV} & 5 \le x \end{cases}$ או וגם $\begin{cases} \text{I} & 1<x<2 \\ \text{II} & 5 \ge x \end{cases}$

$x \ge 5$ או $1<x<2$

לכאורה זהו הפתרון. <u>אולם יש לשים לב לסימן השווה!</u>

קיימת עוד אפשרות של שוויון ואז : $(x-1)^{2x+1} = (x-1)^{3x-4}$

תנאי זה מתקיים גם כאשר $x-1=1$ כי $1^n=1$ לכל n!

ולכן יש להוסיף פתרון : $x-1=1$

$x=2$

ומקבלים : $x \ge 5$ או $1<x \le 2$

3. $(7-x)^{x^2+3x-1} > (7-x)^{x+3}$

מערכת האי שוויונים :

וגם $\begin{cases} \text{III} & 7-x>1 \\ \text{IV} & x^2+3x-1>x+3 \end{cases}$ או וגם $\begin{cases} \text{I} & 0<7-x<1 \\ \text{II} & x^2+3x-1<x+3 \end{cases}$

וגם $\begin{cases} \text{III} & x<6 \\ \text{IV} & x^2+2x-4>0 \end{cases}$ או וגם $\begin{cases} \text{I} & 6<x<7 \\ \text{II} & x^2+2x-4<0 \end{cases}$

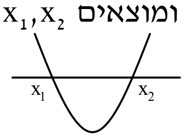
כפי שאנו רואים קיבלנו מערכת עם אי שוויון ריבועי.

נשתמש בידע קודם למציאת אי שוויון ריבועי :

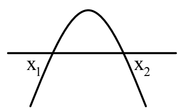
תזכורת :

א. משווים ל-0 ומוצאים x_1, x_2

ב. משרטטים



או

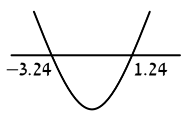


ג. מוצאים פתרון

וגם:

III $x<6$

IV



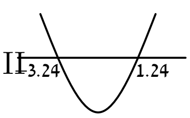
$x<-3.24$ או $x>1.24$

או

וגם:

I $6<x<7$

II



$-3.24<x<1.24$

$1.24<x<6$ או ϕ

והפתרון : $1.24<x<6$

4. $(x^2-5x+7)^{x^2-3x-4} \geq 1$

כפי שכבר ראינו נבדוק תחילה את המצב של: $x^2-5x+7=1$

$x^2-5x+6=0$

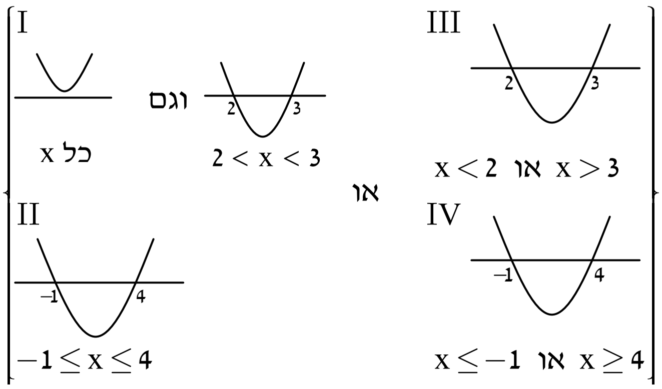
$x_1=2 \quad x_2=3$

אולם כבר למדנו שמתקיים גם: $(x^2-5x+7)^0=1$

ועל ידי הצבה מתקבל: $(x^2-5x+7)^{x^2-3x-4} \geq (x^2-5x+7)^0$

ומכאן:

וגם $\left.\begin{matrix} \text{III} \quad x^2-5x+7>1 \\ \text{IV} \quad x^2-3x-4 \geq 0 \end{matrix}\right\}$ או $\left\{\begin{matrix} \text{I} \quad 0<x^2-5x+7<1 \\ \text{II} \quad x^2-3x-4 \leq 0 \end{matrix}\right.$ וגם



$2<x<3$ או $x \leq -1$ או $x \geq 4$

פתרון: $x \geq 4$ או $x \leq -1$ או $2<x<3$ או $x=2,3$

והאיחוד: $x \leq -1$ או $2 \leq x \leq 3$ או $x \geq 4$

5. $\left(\dfrac{x}{2x+2}\right)^{x^2} < \left(\dfrac{2x+2}{x}\right)^{1-2x}$

תחילה נשווה בסיסים: $\left(\dfrac{x}{2x+2}\right)^{x^2} < \left(\dfrac{x}{2x+2}\right)^{2x-1}$

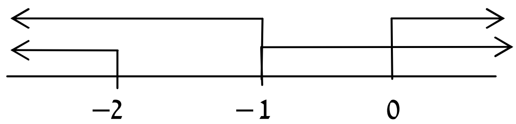
וכמו בתרגילים קודמים:

וגם $\left.\begin{matrix} \text{III} \quad \dfrac{x}{2x+2}>1 \\ \text{IV} \quad x^2<2x-1 \end{matrix}\right\}$ או $\left\{\begin{matrix} \text{I} \quad 0<\dfrac{x}{2x+2}<1 \\ \text{II} \quad x^2>2x-1 \end{matrix}\right.$ וגם

תרגיל זה יותר מורכב ולכן נפתור אותו בשלבים:

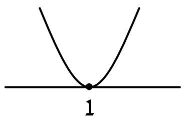
פתרון אי שוויון I: $\dfrac{x}{2x+2}<1$ וגם $0<\dfrac{x}{2x+2}$

$\{x<-2$ או $x>-1\}$ וגם $\{x<-1$ או $x>0\}$



והפתרון: $x>0$ או $x<-2$

פתרון אי שוויון II : $x^2-2x+1>0$



$x\neq 1$

חיתוך הפתרונות I+II : $x>0$ וגם $x\neq 1$, או $x<-2$

פתרון אי שוויון III : $\frac{x}{2x+2}>1$

$-2<x<-1$

פתרון אי שוויון IV : $x^2-2x+1<0$

ϕ

ולכן חיתוך הפתרונות III+IV הוא ϕ .

<u>והפתרון הכללי</u> : $x>0$ וגם $x\neq 1$, או $x<-2$.

<u>בדיקת הבנה:</u>

39. א. $x^{2x+1}\le x^{5-3x}$ ב. $(2x-3)^{4x-5}>(2x-3)^{x+4}$

ג. $\left(\frac{3x}{x+1}\right)^{3-4x}<\left(\frac{x+1}{3x}\right)^{x^2}$ ד. $\left(x^2-4x-11\right)^{x^2+2x-8}<1$

<u>תרגול עצמי:</u>

40. $\begin{cases}7^x-7^y=42\\ x+y=3\end{cases}$

41. $\begin{cases}2^{x-1}-2^{2y+1}=-24\\ x-2y=0\end{cases}$

42. $\begin{cases}2^{3x}\cdot 4^y=32\\ \left[\left(\frac{1}{3}\right)^x\right]^y=81\end{cases}$

43. $\begin{cases}4^x+3^y=13\\ 2^{2x}\cdot 3^y=36\end{cases}$

44. $\begin{cases}2^{x+1}-3^{y+1}=7\\ 2^{2x}-6\cdot 3^y=46\end{cases}$

45. $\begin{cases}x^y=9\\ \left(y^x\right)^y=64\end{cases}$

46. $\begin{cases}y^6=x^y\\ x^y-4y^3=96\end{cases}$

47. $\begin{cases}x^y=y^x\\ x^3=y^6\end{cases}$

48. $4^x<32$

49. $\left(\frac{3}{5}\right)^x<\frac{81}{625}$

50. $3^{x+4}>3^{2-6x}$

51. $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}^{\,x}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}>\left(\frac{1}{2}\right)^x$

52. $25^x+3\cdot 5^x<40$

53. $4^x-12\cdot 2^x+32>0$

54. $x^{x+1}<x^{2x-5}$

55. $(x-3)^{2x+7}\ge(x-3)^{3x+9}$

56. $(2x-5)^{x^2}<(2x-5)^{x+6}$

57. $\left(\frac{x}{2x-4}\right)^{x^2-4x}>\left(\frac{2x-4}{x}\right)^{-5}$ שימו לב- יש לפתור אי שוויון של שבר!