כפי שאנו נוהגים, לאחר שלמדנו את הפעולות הנדרשות לפתרון משוואות בפונקציה זו נעבור לחקירת הפונקציה.

כבר ליקטנו מידע חשוב ראשון והוא שהבסיס חייב להיות חיובי, כלומר:

$a > 0$ לכל פונקציה מהסוג $y = a^x$ וממילא גם $y > 0$.

עתה נחפש את נגזרת הפונקציה. כידוע לנו הנגזרת היא תמיד:

עבור $h \to 0$

$$y' = \frac{y(x_0 + h) - y(x_0)}{h}$$

בפונקציה המעריכית:

$$y' = \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \frac{a^h \cdot a^x - a^x}{h}$$

$$y' = \frac{a^x(a^h - 1)}{h}$$

נכתוב את השוויון בדרך אחרת:

$$y' = a^x \cdot \frac{(a^h - 1)}{h} \quad (1)$$

אנו נתבונן בגורם הימני

$$\frac{a^h - 1}{h}$$

כבר ראינו ש- $a^0 = 1$ לכל a ולכן ניתן לכתוב:

$$\frac{a^h - 1}{h} = \frac{a^h - a^0}{h}$$

או:

$$\frac{a^h - 1}{h} = \frac{a^h - a^0}{h} = \frac{a^{h+0} - a^0}{h}$$

הביטוי הימני הוא בדיוק זהה לביטוי הנגזרת <u>בנקודה</u> $x_0 = 0$:

$$\frac{a^{h+0} - a^0}{h} = \frac{a^{h+x_0} - a^{x_0}}{h} = y'(0) \quad (2)$$

כלומר אנו מוצאים שבשילוב (1)+(2):

$$y' = a^x \cdot (a^0)'$$

ובמילים: נגזרת הפונקציה = לפונקציה · השיפוע בנקודה 0.

לכאורה במצב זה אין אפשרות למצוא את הנגזרת בדרך פשוטה, כי כדי לדעת את נגזרת הפונקציה צריך לדעת את השיפוע בנקודה $x = 0$ אולם כדי למצוא את השיפוע בנקודה $x = 0$ יש לדעת את הנגזרת של הפונקציה...

מה עושים? "ישבו החכמים שבעה ימים ושבעה לילות" ומצאו בסיס שעבורו שיפוע הפונקציה בנקודה $x = 0$ הוא 1.

כלומר נמצא a_0 כזה כך ש: $(a_0)' = \underline{\underline{1}}$.

בסיס זה הוא מספר אי רציונלי ולכן מציינים אותו באות e (בדיוק כמו ש- π מציין מספר). וערכו:

$e = 2.718281828.....$

ומעתה:

$$\boxed{(e^x)' = e^x \cdot 1 = e^x}$$

כלומר עבור הבסיס e – <u>הפונקציה = נגזרת הפונקציה</u>!

מאליו יובן שכל חוקי הנגזרת נותרים בעינם גם עבור נגזרת מיידית זו, כלומר:

כלל של מספר · פונקציה:

$$(2e^x)' = 2e^x$$

כלל הסכום:

$$(e^x + 4x)' = e^x + 4$$

כלל המכפלה : $(3xe^x)' = 3e^x + 3xe^x$

כלל המנה : $\dfrac{e^x + x}{e^x - x} = \dfrac{(e^x + 1)(e^x - x) - (e^x + x)(e^x - 1)}{(e^x - x)^2}$

ופונקציה מורכבת : $(e^{e^x - 2x^2})' = e^{e^x - 2x^2} \cdot (e^x - 4x)$

ומה לגבי בסיסים שאינם e?

ובכן כל מספר ניתן לכתוב עם בסיס שונה.

לדוגמא : $8 = 2^3$

$1.4142 = 2^{0.5}$

וכן הלאה. באופן כללי כדי לעבור מבסיס a כלשהו לבסיס e מתקיים השוויון : $e^{\ln a} = a$

(את הסיבה לשוויון זה נלמד בהמשך).

ולכן $y = 2^x = (e^{\ln 2})^x = e^{x\ln 2}$

וכדי לגזור פונקציה זו : (לפי פונקציה מורכבת) $y' = e^{x\ln 2} \cdot \ln 2$

$y' = e^{0.693x} \cdot 0.693$

ובצורה כללית :

$$\boxed{\begin{aligned} &y = a^x \\ &y' = e^{x\ln a} \cdot \ln a \end{aligned}}$$

ט. גזרו את הפונקציות הבאות :

1. $y = 4x^2 + 5x - 7e^x$

2. $y = \sqrt{x} \cdot e^x - \dfrac{1}{x}e^x$

3. $y = \dfrac{4x^3}{e^x}$

4. $y = e^{2x - e^x} + e^{2x + e^x}$

5. $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

פתרון :

1. $y = 4x^2 + 5x - 7e^x$

$y' = 8x + 5 - 7e^x$

2. $y = \sqrt{x} \cdot e^x - \dfrac{1}{x}e^x$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^x + \sqrt{x} \cdot e^x - \left(-\frac{1}{x^2}e^x + \frac{1}{x}e^x\right)$$

$$y' = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right)e^x + \frac{1}{x^2}e^x - \frac{1}{x}e^x$$

$$y' = e^x\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)$$

3. $y=\frac{4x^3}{e^x}$

$$y'=\frac{12x^2e^x-4x^3e^x}{e^{2x}}=\frac{e^x(12x^2-4x^3)}{e^{2x}}$$

4. $y=e^{2x-e^x}+e^{2x+e^x}$

$$y'=e^{2x-e^x}(2-e^x)+e^{2x+e^x}(2+e^x)$$

5. $y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

$$y'=\frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$y'=\frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}=1-\frac{(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$y'=1-\frac{(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}=\frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$y'=\frac{e^{2x}+2e^xe^{-x}+e^{-2x}-(e^{2x}-2e^xe^{-x}+e^{-2x})}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$y'=\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x}}{(e^x+e^{-x})^2}=\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2} \qquad (e^xe^{-x}=e^0=1)$$

<u>בדיקת הבנה:</u>

58. גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $y=2x^3-7x+5e^x$

ב. $y=xe^x-\sqrt{x}\cdot e^x$

ג. $y=\frac{e^x+4x}{3e^x}$

ד. $y=\frac{1}{e^{2x^2+5}}$

ה. $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2e^x-2e^{-x}}$

חקירת הפונקציה המעריכית אינה שונה מחקירות אחרות שלמדנו. גם כאן יש להתייחס לכל הפרמטרים שכבר הכרנו :

תחום הגדרה

נקודות קיצון

אסימפטוטות

תחומי עליה וירידה

חיתוך צירים

שרטוט

דוגמאות :

י. חקרו את הפונקציה $y = 3e^x + xe^x$.

פתרון :

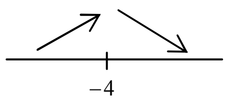
תחום הגדרה : כל x

נקודות קיצון : $(-4,-0.2)$ מינימום

אסימפטוטות : אנכית – אין

אופקית - $y = 0$ עבור $x \to -\infty$

תחומי עליה וירידה :



חיתוך צירים : $(0,3)$, $(-3,0)$

<u>תחום הגדרה :</u> בפונקציה המעריכית המעריך יכול לקבל כל ערך ולכן אין הגבלה על x כלומר כל x מוגדר בפונקציה זו.

<u>נקודות קיצון :</u>

$$y = 3e^x + xe^x$$

$$y' = 3e^x + 1\cdot e^x + xe^x$$

איבר ימני – נגזרת מכפלה

$$y' = e^x(4+x)$$

$$0 = e^x(4+x)$$

מכיוון ש : $e^x > 0$ לכל x ←

$$0 = 4 + x$$

$$\underline{x = -4}$$

מציאת ערך y :

$$y = 3e^{-4} - 4e^{-4}$$

$$y = -0.2$$

נקודות קיצון : $(-4,-0.2)$

<u>אסימפטוטות :</u>

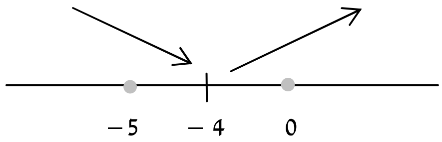
אנכית : מכיוון שהפונקציה מוגדרת לכל x אין אסימפטוטה אנכית.

אופקית : עבור $x \to \infty$, e^x מתבדר! אין אסימפטוטה

עבור $x \to -\infty$, e^x הוא מספר שהולך וקטן עד מאד : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

לכן $y = 0$ אסימפטוטה אופקית מצד שמאל.

תחומי עליה וירידה :



$y' = e^x(4+x)$

$y'(-5) < 0$

$y'(0) > 0$

והתחומים : עבור $x < -4$ הפונקציה יורדת

עבור $x > -4$ הפונקציה עולה

$(-4,-0.2)$ נקודת מינימום

<u>חיתוך צירים :</u>

עבור $x = 0$ $\leftarrow$ $y(0) = 3e^0 + 0e^0 = 3$

עבור $y = 0$ $\leftarrow$ $0 = 3e^x + xe^x$

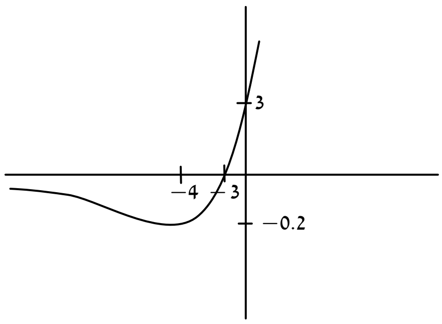
$0 = e^x(3+x)$

$e^x > 0$ $\leftarrow$ $0 = 3 + x$

$\underline{x = -3}$

נקודות החיתוך : $(0,3)$, $(-3,0)$

<u>שרטוט :</u>



יא. חקרו את הפונקציה $y = \frac{x^2 + 2x}{e^x}$.

פתרון :

תחום הגדרה : כל x

נקודות קיצון : $(-\sqrt{2},-3.4)$ מינימום

$(\sqrt{2},1.17)$ מקסימום

אסימפטוטות : אנכית – אין

אופקית - $y = 0$ עבור $x \to \infty$

תחומי עליה וירידה :

חיתוך צירים : $(0,0)$, $(-2,0)$

<u>תחום הגדרה</u>: אמנם זוהי פונקצית מנה אבל $e^x > 0$ לכל x ולכן <u>כל x</u> מוגדר בפונקציה זו.

<u>נקודות קיצון</u>: $y = \frac{x^2+2x}{e^x}$

לפי נגזרת מנה: $y' = \frac{(2x+2)e^x - e^x(x^2+2x)}{e^{2x}}$

$$y' = \frac{e^x(2-x^2)}{e^{2x}}$$

$$y' = \frac{2-x^2}{e^x}$$

$$0 = \frac{2-x^2}{e^x}$$

$$0 = 2-x^2$$

$$\underline{x = \pm\sqrt{2}}$$

מציאת ערכי y: $y(-\sqrt{2}) = \frac{2-2\sqrt{2}}{e^{-\sqrt{2}}} = -3.4$

$$y(\sqrt{2}) = \frac{2+2\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}} = 1.17$$

נקודות קיצון: $(-\sqrt{2},-3.4)$, $(\sqrt{2},1.17)$

<u>אסימפטוטות</u>:

אנכית: מכיוון שהפונקציה מוגדרת לכל x אין אסימפטוטה אנכית.

אופקית: עבור $x \to \infty$, e^x מתבדר אבל מכיוון שהוא מופיע בפונקציה <u>במכנה</u> ערכי הפונקציה הולכים וקטנים ושואפים לאפס כלומר $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x}{e^x} = 0$

ולכן $y = 0$ אסימפטוטה אופקית מצד ימין.

עבור $x \to -\infty$, e^x מתכנס לאפס ומכיוון שהוא מופיע במכנה ערכי הפונקציה גדלים לאינסוף <u>ואין גבול משמאל.</u>

יש לשים לב שהחזקה הדומיננטית בפונקציה היא של e^x ולא של x^2:

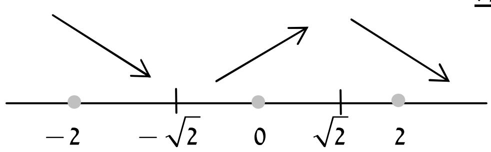
עבור $x = 2$ $\leftarrow$ $x^2 = 6$ $e^2 = 7.38$

עבור $x = 3$ $\leftarrow$ $x^2 = 9$ $e^2 = 20$

עבור $x = 10$ $\leftarrow$ $x^2 = 100$ $e^2 \approx 22,026$

לכן התמקדנו בהשפעת הגורם e^x ולא בגורם x^2.

<u>תחומי עליה וירידה :</u>



$$y'=\frac{2-x^2}{e^x}$$

$$y'(-2)=\frac{2-4}{e^2}<0$$

$$y'(0)=\frac{2}{1}>0$$

$$y'(2)=\frac{2-4}{e^2}<0$$

והתחומים : עבור $x<-\sqrt{2}$, $x>\sqrt{2}$ הפונקציה יורדת

עבור $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ הפונקציה עולה

נקודת מינימום $(-\sqrt{2},-3.4)$

נקודת מקסימום $(\sqrt{2},1.17)$

<u>חיתוך צירים :</u>

עבור $x=0$ ← $y(0)=\frac{0+0}{1}=0$

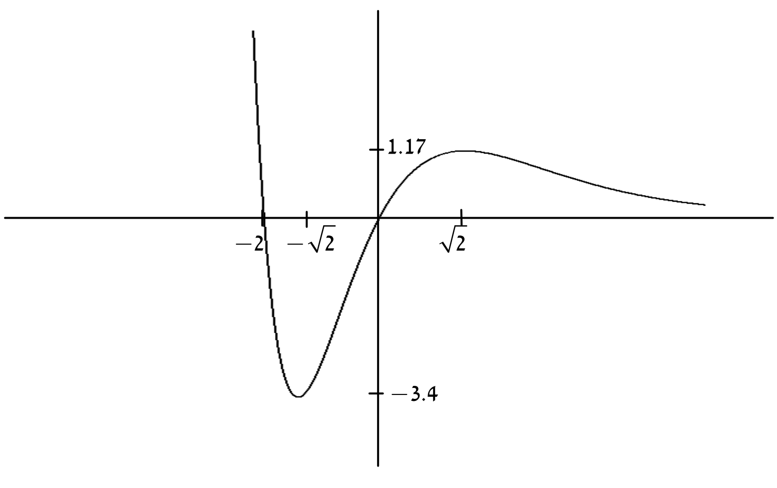
עבור $y=0$ ← $0=\frac{x^2+2x}{e^x}$

$0=x^2+2x$

$\underline{x_1=0}$ $\underline{x_2=-2}$

נקודות החיתוך : $(0,0)$, $(-2,0)$

<u>שרטוט :</u>



יב. חקרו את הפונקציה $y=\frac{2e^x}{x-2}$.

פתרון :

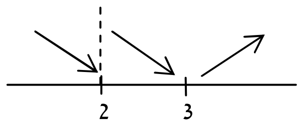
תחום הגדרה : $x \neq 2$

נקודות קיצון : $(3,40.2)$ מינימום

אסימפטוטות : אנכית – $x=2$

אופקית - $y=0$ משמאל

תחומי עליה וירידה :



חיתוך צירים : $(0,-1)$

<u>תחום הגדרה :</u>

$$x-2 \neq 0$$

$$x \neq 2$$

<u>נקודות קיצון :</u>

$$y=\frac{2e^x}{x-2}$$

$$y'=\frac{2e^x(x-2)-1\cdot 2e^x}{(x-2)^2}$$

$$y'=\frac{2xe^x-4e^x-2e^x}{(x-2)^2}=\frac{e^x(2x-6)}{(x-2)^2}$$

$$0=e^x(2x-6)$$

$$0=2x-6$$

$$\underline{x=3}$$

מציאת ערכי y :

$$y(3)=\frac{2e^3}{1}=40.2$$

$$y(\sqrt{2})=\frac{2+2\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}=1.17$$

נקודות קיצון : $(3,40.2)$

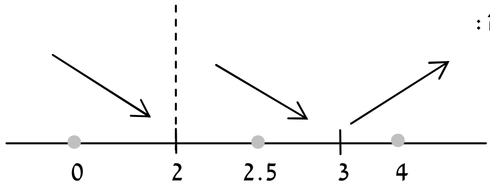
<u>אסימפטוטות :</u>

אנכית : $x=2$

אופקית : מתבדרת $\rightarrow$ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2e^x}{x-2}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2e^x}{x-2}=0$$

תחומי עליה וירידה :



$$y' = \frac{e^x(2x-6)}{(x-2)^2}$$

$$y'(0) = \frac{e^0 \cdot (-6)}{(-2)^2} < 0$$

$$y'(2.5) = \frac{e^{2.5} \cdot (5-6)}{(0.5)^2} < 0$$

$$y'(4) = \frac{e^4 \cdot (8-6)}{2^2} > 0$$

והתחומים : עבור $x < 2$, $2 < x < 3$ הפונקציה יורדת

עבור $x > 3$ הפונקציה עולה

$(3,40.2)$ נקודת מינימום

<u>חיתוך צירים :</u>

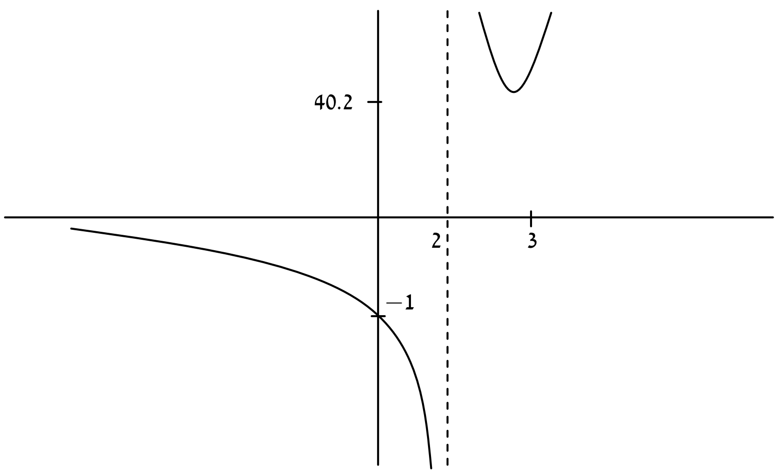
עבור $x = 0$ ← $y(0)\frac{2}{-2} = -1$

עבור $y = 0$ ← $0 = 2e^x$

$x = \phi$

נקודת החיתוך : $(0,-1)$

<u>שרטוט :</u>



<u>בדיקת הבנה</u>

59. חקרו את הפונקציות הבאות ושרטטו סקיצה :

א. $y = 2e^{-x} - 4$

ב. $y = 3xe^x$

ג. $y=\frac{e^x}{3x^2}$

ד. $y=\frac{x^2-4x}{e^x}$

ה. $y=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

וקצת פרמטרים...

יג. חקרו את הפונקציה $y=e^{x^3+ax^2+bx}$, אם ידוע שלפונקציה נקודת מקסימום $(1,e^{10})$

פתרון :

תחילה נגלה את הפרמטרים.

כפי שלמדנו בעבר נקודת המקסימום מגלה למעשה שני נתונים :

1. $y'=0$

2. $y(1)=e^{10}$

נתחיל במשוואת הנגזרת : $y=e^{x^3+ax^2+bx}$

$y'=e^{x^3+ax^2+bx}(3x^2+2ax+b)$

$0=e^{x^3+ax^2+bx}(3x^2+2ax+b)$

$e^{x^3+ax^2+bx}\neq 0$ ולכן : $0=3x^2+2ax+b$

הצבה $x=1$: $0=3+2a+b$

$(1)\quad 2a+b=-3$

משוואת הנקודה : $e^{10}=e^{1+a+b}$

$10=1+a+b$

$(2)\quad a+b=9$

פתרון שתי המשוואות : $a=-12$

$b=21$

ומכאן עוברים לחקירה רגילה. בסופה צריך להתקבל :

תחום הגדרה : כל x

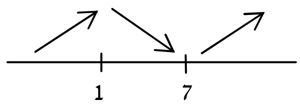
נקודות קיצון : $(7,e^{-98})$ מינימום

$(1,e^{10})$ מקסימום

אסימפטוטות : אנכית – אין

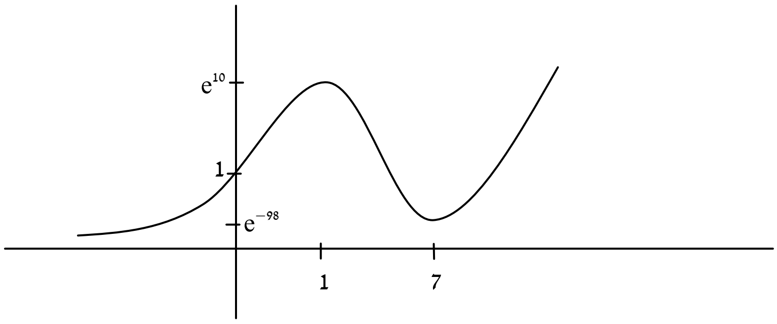
אופקית - $y=0$ משמאל

תחומי עליה וירידה :



חיתוך צירים : $(0,1)$

<u>שרטוט</u> :



יד. חקרו את הפונקציה $y=\dfrac{e^x}{x^2-ax+b}$, אם נתון שלפונקציה אסימפטוטה אנכית $x=2$ ונקודה קיצון במקום שבו $x=4$.

פתרון :

גם כאן נמצא תחילה את הפרמטרים.

מהנתון בדבר האסימפטוטה אנו למדים : $x^2-ax+b=0$

הצבה $x=2$: $(1)\quad 4-2a+b=0$

מהנתון בדבר נקודת הקיצון : $y=\dfrac{e^x}{x^2-ax+b}$

$$y'=\frac{e^x(x^2-ax+b)-e^x(2x-a)}{(x^2-ax+b)^2}$$

$$0=\frac{e^x(x^2-ax+b-2x+a)}{(x^2-ax+b)^2}$$

$$0=x^2-ax-2x+a+b$$

הצבה $x=4$: $0=16-4a-8+a+b$

$(2)\quad 3a-b=-8$

פתרון שתי המשוואות : $a=4$

$b=4$

מכאן והלאה מבצעים חקירה ומקבלים :

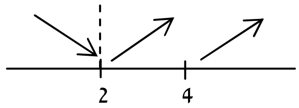
תחום הגדרה : $x\neq 2$

נקודות קיצון : $(4,\dfrac{e^4}{4})$ מינימום

אסימפטוטות : אנכית – $x=2$

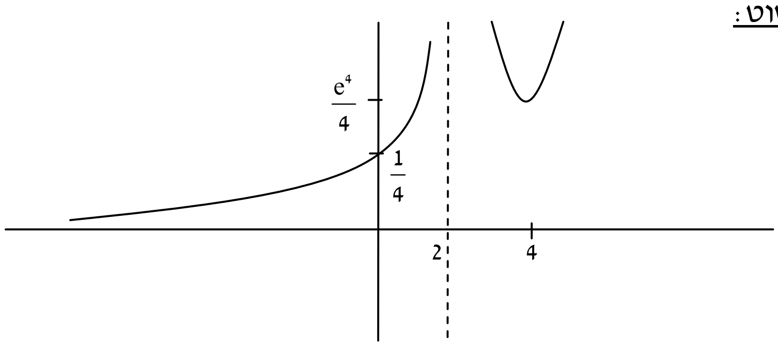
אופקית - $y=0$ משמאל

תחומי עליה וירידה :



חיתוך צירים : $(0,\dfrac{1}{4})$

<u>שרטוט:</u>



<u>בדיקת הבנה</u>

60. נתונה הפונקציה $y=\frac{x^2-3x+a}{2e^x}$.

א. נתון שלפונקציה נקודת קיצון כאשר $x=1$. מצאו את הפרמטר a.

ב. הציבו את הפרמטר בפונקציה וחקרו את הפונקציה.

61. לפונקציה $y=e^{x^3-ax^2+bx}$ יש נקודת קיצון $\left(2,e^{20}\right)$.

א. מצאו את הפרמטרים a ו-b.

ב. חקרו את הפונקציה ושרטטו סקיצה.

62. הישר $x=1$ הוא אסימפטוטה אנכית לפונקציה $y=\frac{e^{2x}}{x^2-ax+b}$. אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה מתקבלת עבור $x=-2$.

א. מצאו את הפרמטרים a ו-b.

ב. חקרו את הפונקציה ושרטטו סקיצה.

נעבור ליישומים במציאת משיקים ונורמלים.
כל מה שנלמד בנושא זה תקף גם בפונקציה המעריכית, בהתאם לנגזרת של פונקציה זו.
לדוגמה:

טו. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y=2e^x+4e^{-x}$ המקביל לישר $y-2x=5$.

פתרון:

תחילה נגזור את הפונקציה: $y'=2e^x-4e^{-x}$

השיפוע המבוקש: $y-2x=5$

$y=2x+5$

$m=2$

$2e^x-4e^{-x}=2$

$e^x-2e^{-x}-1=0$

$e^x-\frac{2}{e^x}-1=0$

נציב $e^x = t$:

$$t - \frac{2}{t} - 1 = 0$$

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$t_1 = 1 \qquad t_2 = -2$$

$$e^x = 1 \qquad e^x = -2$$

$$x = 0 \qquad x = \phi$$

מציאת y :

$$y(0) = 2e^0 + 4e^0 = 6$$

השיפוע $m = 2$ והנקודה $(0,6)$

והמשוואה :

$$y - 6 = 2(x - 0)$$

$$\underline{y = 2x + 6}$$

טז. נתונה הפונקציה $y = e^x + e^{-2x}$.

א. מצאו את משוואת המשיקים בנקודות $x = 1$, $x = -1$.

ב. מצאו את נקודת החיתוך של המשיקים.

פתרון :

א. עבור $x = 1$

השיפוע :

$$y' = e^x - 2e^{-2x}$$

$$y'(1) = e - 2e^{-2} = 2.45$$

מציאת y :

$$y(1) = e + e^{-2} = 2.85$$

והמשוואה :

$$y - 2.85 = 2.45(x - 1)$$

$$y = 2.45x + 0.4$$

עבור $x = -1$

השיפוע :

$$y' = e^x - 2e^{-2x}$$

$$y'(-1) = e^{-1} - 2e^2 = -14.41$$

מציאת y :

$$y(-1) = e^{-1} + e^2 = 7.76$$

והמשוואה :

$$y - 7.76 = -14.41(x + 1)$$

$$y = -14.41x - 6.65$$

ב. נקודת החיתוך :

$$2.45x + 0.4 = -14.41x - 6.65$$

$$16.86x = -7.05$$

$$x = -0.42$$

$$y = -0.63$$

נקודת החיתוך : $(-0.42, -0.63)$

יז. מהי משוואת הנורמל לגרף הפונקציה $y=\frac{e^x}{2x+5}$ בנקודה $x=1$?

פתרון :

מציאת שיפוע המשיק : $y'=\frac{e^x(2x+5)-2e^x}{(2x+5)^2}$

$y'(1)=\frac{e\cdot7-2e}{7^2}=\frac{5e}{49}=0.28$

שיפוע הנורמל : $m=-\frac{1}{0.28}=-3.57$

מציאת y של הנקודה : $y(1)=\frac{e}{7}=0.39$

ומשוואת הנורמל : $y-0.39=-3.57(x-1)$

$y=-3.57x+3.96$

<u>בדיקת הבנה</u>

63. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y=e^x+7e^{-x}$ המקביל לישר $2y+12x+5=0$.

64. נתונה הפונקציה $y=e^{2x}-2e^x$.

א. מצאו את משוואות המשיקים לפונקציה בנקודות $x=1$, $x=-1$.

ב. מצאו את נקודת החיתוך של המשיקים.

65. מצאו את משוואות המשיק והנורמל לפונקציה $y=\frac{e^x}{x}$ בנקודה $x=2$.

<u>תרגול עצמי</u>

66. חקרו את הפונקציה $y=e^{x^2-4x}$ ושרטטו סקיצה.

67. חקרו את הפונקציה $y=\frac{x-3}{e^x}$ ושרטטו סקיצה.

68. חקרו את הפונקציה $y=\frac{e^x}{x^2-4x-12}$ ושרטטו סקיצה.

69. נתונה הפונקציה $y=e^{ax+1}+e^{-ax}$ ונתון שבנקודה $x=1$ יש לפונקציה נקודת קיצון.

א. מצאו את הפרמטר a.

ב. האם לפונקציה יש נקודת קיצון נוספת? אם כן חשבו אותה.

70. לפונקציה $y=\frac{x^2+a}{e^{2x}}$ יש נקודת קיצון כאשר $x=1$.

א. מצאו את הפרמטר a.

ב. חקרו את הפונקציה.

71. $\left(3,-2e^3\right)$ היא נקודת קיצון של הפונקציה $y=\left(ax^2-bx+1\right)e^x$.

א. מצאו את הפרמטרים a ו-b.

ב. הציבו את הפרמטרים בפונקציה, חקרו אותה ושרטטו סקיצה.

72. מצאו את המשיק לפונקציה $y=\frac{e^{2x}}{2x}$ המקביל לציר x.

73. דרך הראשית העבירו משיק לגרף הפונקציה $y=e^{2x}$ יש נקודת קיצון כאשר $x=1$.

א. מצאו את משוואת המשיק.

ב. מצאו את משוואת הנורמל בנקודת ההשקה.

74. נתונה הפונקציה $y=ax\cdot e^{bx}$. שיפוע המשיק בנקודה $x=1$ הוא $8e^2$.

א. מצאו את הפרמטרים a ו-b.

ב. מצאו את משוואת המשיק בנקודה זו.

ג. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגה.

ונסיים באינטגרלים.

גם בפעולה זו אין שינוי למעט העובדה ש- $\int e^x dx = e^x + C$

כלומר כמו שהנגזרת = לפונקציה, כך גם האינטגרל = לפונקציה.

לכן נסתפק במס' דוגמאות מצומצם:

יח. מצאו את האינטגרלים הבאים:

א. $\int\left(e^x+3x-5\right)dx$

ב. $\int\left(e^{2x+5}-3e^x\right)dx$

ג. $\int\left(e^{x+3}\right)^2dx$

ד. $\int\left[\left(3x^2-4x+2\right)e^{\left(x^3-2x^2+2x-3\right)}\right]dx$

פתרון:

א. לפי חוק הסכום של אינטגרלים:

$$\int\left(e^x+3x-5\right)dx=e^x+\frac{3x^2}{2}-5x+C$$

ב. כאן צריך להקפיד על חלוקה במקדם של x:

$$\int\left(e^{2x+5}-3e^x\right)dx=\frac{e^{2x+5}}{2}-3e^x+C$$

ג. בתרגילים מסוג זה כדאי קודם לפתוח סוגריים:

$$\int\left(e^{x+3}\right)^2dx=\int e^{2x+6}dx=\frac{e^{2x+6}}{2}+C$$

ד. לכאורה זהו תרגיל מאד מורכב. למעשה לאחר התבוננות שנייה אנו מוצאים שהמקדם של e הוא הנגזרת של המעריך.

כלומר זהו אינטגרל המביא לידי פונקציה מורכבת! ולכן :

$$\int\left[\left(3x^2-4x+2\right)e^{\left(x^3-2x^2+2x-3\right)}\right]dx=e^{\left(x^3-2x^2+2x-3\right)}+C$$

יט. א. גזרו את הפונקציה $y=2xe^{2x}$.

ב. מצאו את האינטגרל $\int\left(4e^{2x}+2xe^{2x}\right)dx$.

פתרון :

כבר ראינו שבשאלות מסוג זה יש קשר בין הסעיפים.

א.

$$y=2xe^{2x}$$

$$y'=2e^{2x}+\frac{2xe^{2x}}{2}$$

$$y'=2e^{2x}+xe^{2x}=e^{2x}\left(2+x\right)$$

ב.

$$\int\left(4e^{2x}+2xe^{2x}\right)dx=\int\left[e^{2x}\left(4+2x\right)\right]dx$$

כלומר זוהי בדיוק כפולה של התוצאה מסעיף א. ולכן :

$$\int\left[e^{2x}\left(4+2x\right)\right]dx=4xe^{2x}+C$$

<u>בדיקת הבנה</u>

75. פתרו את האינטגרלים הבאים :

א. $\int\left(e^x-e^{-x}\right)dx$

ב. $\int\left(3e^{3x-2}\right)dx$

ג. $\int\left(\frac{2e}{e^{x+1}}\right)dx$

ד. $\int\left(\frac{e^x}{2\sqrt{e^x}}\right)dx$

ה. $\int\left[\left(2x-1\right)e^{x^2-x+5}\right]dx$

ו. $\int\left(-\frac{e^x}{\left(e^x-3\right)^2}\right)dx$

76. א. גזרו את הפונקציה $y=\left(x-1\right)e^x$.

ב. מצאו את האינטגרל : $y=\int\left(xe^x\right)dx$.

ישום במציאת פונקציה קדימה

כ. מצאו את הפונקציה $f(x)$ אם נתון כי נגזרת הפונקציה היא $f'(x)=e^x+6x-5$ והיא עוברת דרך הנקודה $(1,2.718)$.

פתרון:

כפי שלמדנו בעבר: $f(x)=\int f'(x)dx+C$

כלומר: $f(x)=\int (e^x+6x-5)dx=e^x+\frac{6x^2}{2}-5x+C$

$f(x)=e^x+3x^2-5x+C$

והצבת הנקודה: $2.718=e^1+3\cdot 1^2-5\cdot 1+C$

$2.718=0.718+C$

$C=2$

והפונקציה $f(x)=e^x+3x^2-5x+2$

כא. נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x)=9e^{3x}-6x$, ונתון שיש לה נקודת קיצון $(-2,13)$. מצאו את הפונקציה $f(x)$.

פתרון:

מהעובדה שזו נקודת קיצון אנו למדים: $f'(-2)=0$

ומהעובדה שזו נקודה על הפונקציה: $f(-2)=13$

לכן: $f'(x)=\int f''(x)dx=\int (9e^{3x}-6x)dx=\frac{9e^{3x}}{3}-\frac{6x^2}{2}+C$

והצבה של $x=-2$: $0=3e^{-6}-3\cdot 4+C$

$C=12$

מציאת $f(x)$: $f(x)=\int f'(x)dx=\int (3e^{3x}-3x^2+12)dx=$

$=e^{3x}-x^3+12x+C$

והצבת הנקודה: $13=e^{-6}+8-24+C$

$C=29$

והפונקציה: $f(x)=e^{3x}-x^3+12x+29$

כב. מצאו את הפונקציה $f(x)$ החותכת את ציר ה-y בנקודה $y=1$ ונגזרתה: $f'(x)=e^{3x^2+5x}\cdot(6x+5)$.

פתרון:

גם כאן קל לראות שזהו אינטגרל המביא לפונקציה מורכבת.

הסוגריים $(6x+5)$ הם בדיוק נגזרת המעריך $(3x^2+5x)$, ולכן:

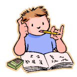
$f(x)=\int e^{3x^2+5x}\cdot(6x+5)dx=e^{3x^2+5x}+C$

ובהצבת הנקודה: $1=e^{3\cdot 0+5\cdot 0}+C$

$1=1+C$

$C=0$

והפונקציה: $f(x)=e^{3x^2+5x}$



בדיקת הבנה

77. הפונקציה $f(x)$ חותכת את ציר ה-y בנקודה $(0,5)$ ונגזרתה $f'(x)=e^x+2$. מצאו את $f(x)$.

78. ערך המינימום של הפונקציה $f(x)$ הוא $2e$. נגזרת הפונקציה היא $f'(x)=e^{x^2-6x+10}$. מצאו את $f(x)$.

79. הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$ מקיימת: $f''(x)=e^x+2$. לפונקציה נקודת קיצון $(1,e+4)$. מצאו את $f(x)$.

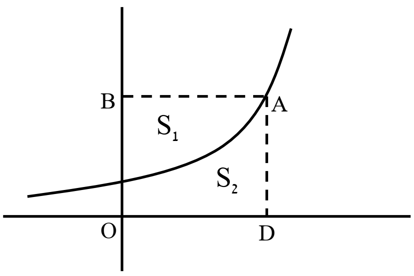
היישום במציאת שטחים:

כג. נתונה הפונקציה $y=e^x$.

דרך הנקודה A שבה $x=2$ העבירו שני ישרים:

AB מקביל לציר x

AD מקביל לציר y (ראו ציור).



הפונקציה מחלקת את המלבן $ABOD$ לשני שטחים.

מהו יחס השטחים?

פתרון:

חישוב S_2 הוא פשוט כי זהו אינטגרל של שטח בין פונקציה לציר x, עם גבולות ידועים.

$$S_2=\int_0^2 e^x dx=e^x\Big|_0^2=e^2-e^0=e^2-1=6.39$$

S_2 הוא השטח שבין הישר AB לפונקציה, גם הוא בגבולות ידועים.

נמצא תחילה את משוואת הישר AB: $y(2)=e^2$

ולכן משוואת הישר האופקי: $y=e^2$

והאינטגרל בין הפונקציות: $S_1=\int_0^2 (e^2-e^x)dx=$

$$=(e^2\cdot x-e^x)\Big|_0^2=(2e^2-e^2)-(0-e^0)=e^2+1=8.39$$

והיחס: $\frac{S_1}{S_2}=\frac{e^2+1}{e^2-1}=0.76$

כד. דרך הנקודה $(1,0)$ העבירו משיק לגרף הפונקציה $y=e^x$.

א. מצאו את נקודת ההשקה.

ב. מצאו את השטח המוגבל בין הפונקציה, המשיק וציר ה-x.

פתרון:

א. הצבה פשוטה בפונקציה תלמד אותנו

שהנקודה הנתונה אינה נמצאת על הפונקציה: $y(1)=e^1\neq 0$

ולכן מציאת המשיק היא לפי מה שלמדנו במציאת משיק עם נקודה מחוץ לפונקציה:

נקודת ההשקה: (x,e^x)

נקודה נתונה: $(1,0)$

נגזרת הפונקציה: $y'=e^x$

ולכן: $m=e^x=\dfrac{e^x-0}{x-1}$

$e^x(x-1)=e^x$

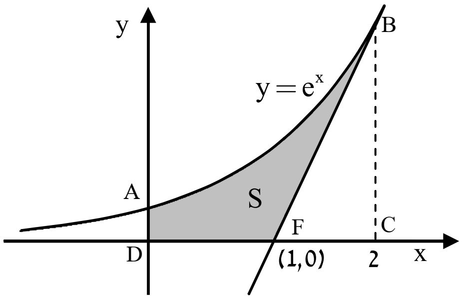
$x-1=1$

$\underline{x=2}$

ומציאת y: $y=e^2$

נקודת ההשקה: $(2,e^2)$

ב. נוח לשרטט קודם את השטח על פי הידוע לנו:



S הוא השטח המבוקש.
גם אותו נחשב לפי מה שכבר למדנו על
מציאת שטחים:

נמצאת תחילה את S_{ABCD}: $S_{ABCD}=\int_0^2 e^x dx=e^x\Big|_0^2=e^2-e^0=e^2-1$

לפי שטח משולש: $S_{CBF}=\dfrac{1\cdot e^2}{2}=\dfrac{e^2}{2}$

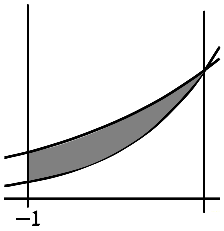
והשטח המבוקש: $S=e^2-1-\dfrac{e^2}{2}=2.7$

בדיקת הבנה

. נתונה הפונקציה $y=e^x+n$. מצאו את n אם נתון
כי השטח בין גרף הפונקציה, הישרים $x=0$, $x=2$
וציר ה-x הוא e^2+3.

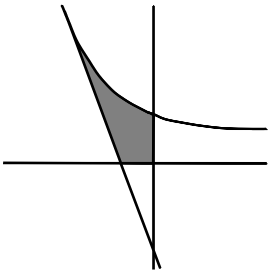
81. חשבו את השטח הכלוא בין הגרפים

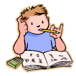
$y=e^{x}$, $y=e^{2x}$ והישר $x=-1$.



82. א. מצאו את המשיק לפונקציה $y=e^{-x}+2$ בנקודה $x=-2$.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין המשיק, הפונקציה והצירים.





תרגול עצמי

. הפונקציה $f(x)$ מקיימת: $f'(x)=e^{2x}+2x$, $f(0)=1$. מצאו את $f(1)$.

84. לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון $(0,4)$. הנגזרת השנייה היא $f''(x)=e^{x}-3e^{-x}$. מצאו את $f(x)$.

85. ערך המינימום של נקודת הקיצון בפונקציה $f(x)$ הוא -1 . מהי הפונקציה $f(x)$ אם נתון:

$f'(x)=(2x-2)e^{x^2-2x+1}$.

86. א. גזרו את הפונקציה $y=2xe^{-x}$.

ב. פונקציה מקיימת $f''(x)=-e^{-x}+e^{-x}(x+1)$ ו- $f(1)=\frac{1}{e}$. מצאו את $f(3)$.

87. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $y=e^{x}+1$, הישר $x=2$ וצירי השעורים.

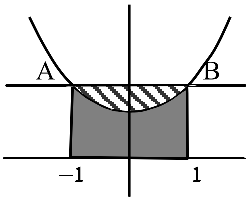
88. בשרטוט מתוארת הפונקציה $f(x)=e^{x}+e^{-x}$.

שיעור ה-x של הנקודה A הוא -1 ושל הנקודה B הוא 1 .

א. מצאו את משוואת הישר AB.

ב. מצאו את השטח הכלוא בין הישר שמצאתם בסעיף א' לבין גרף הפונקציה (השטח המנוקד).

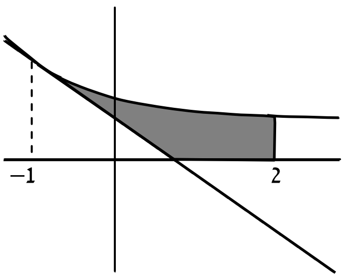
ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה-x והישרים $x=1$, $x=-1$.

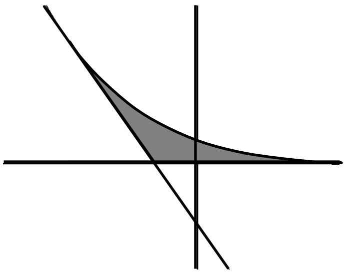


89. לפונקציה $y=e^{-x}+2$ העבירו משיק בנקודה $x=-1$.

א. מצאו את משוואת המשיק.

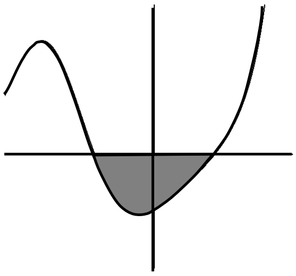
ב. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה-x והישר $x=2$.





90. א. גזרו את הפונקציה $y = \frac{x}{e^x}$.

ב. בשרטוט מתוארים גרף הפונקציה $y = \frac{1-x}{e^x}$
והמשיק לפונקציה בנקודה $x = -1$. מצאו את השטח
המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק וציר ה-x.



91. מצאו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $y = \left(3x^2 - 1\right)e^{x^3 - x + 1}$
לבין ציר ה-x.