ואם בישרים אנו עוסקים, הרי שאי אפשר בלי מציאת זווית ביניהם.
אם הבנתם את מבנה הישר, הרי ברור שהזווית נקבעת רק על ידי ווקטורי הכיוון. ולכן כל שדרוש לנו הוא להשתמש בנוסחת מציאת הזווית בין ווקטורים.
ההבדל היחיד בין מה שעשינו כבר, לבין הזווית בין הישרים הוא בכך שבזוויות בין ישרים מוסכם עלינו שאנו מחפשים את הזווית החדה! ולכן עלינו לחפש אחר: $\cos\alpha > 0$.

מכאן מגיעים לנוסחת זווית בין ישרים: $\cos\alpha = \left|\frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}\right|$ כאשר $\underline{u},\underline{v}$ ווקטורי הכיוון של הישרים.
סימן הערך המוחלט בא כדי להבטיח שנקבל את הזווית החדה ולא את הכהה.

זוויות בין ישרים ניתן למצוא בין ישרים נחתכים או בין ישרים מצטלבים.
לדוגמה: (על הזווית בין ישרים מצטלבים נרחיב בהמשך.)

מ"ד. מצאו את הזווית בין הישרים: $l_1 : \underline{x} = (3,4,5) + t(-1,3,9)$

$l_2 : \underline{x} = (1,2,3) + s(1,5,-6)$

פתרון:

כדי למצוא את הזווית נציב את ווקטורי הכיוון בנוסחה:

$$\cos\alpha = \left|\frac{(-1,3,9)\cdot(1,5,-6)}{\sqrt{1^2+3^2+9^2}\cdot\sqrt{1^2+5^2+6^2}}\right| = \left|\frac{-40}{9.54\cdot 7.87}\right| = 0.53$$

$$\alpha = 57.8^0$$

שימוש נוסף ניתן למצוא לנוסחה זו כאשר מבקשים ליצור חוצה זווית במישור.

מ"ה. מצאו את משוואת חוצה הזווית בין הישרים: $l_1 : \underline{x} = (0,7) + t(3,4)$

$l_2 : \underline{x} = (3,0) + s(12,5)$

פתרון:

כאן אנו רואים שמבקשים משוואת ישר במישור. לכן עלינו למצוא: א. נקודה, ב. כיוון.
הנקודה המתבקשת היא נקודת החיתוך בין שני הישרים (ברור שחוצה הזווית עובר דרכה).

לכן: $\mathrm{I} \quad 0 + 3t = 3 + 12s$

$t = 1 + 4s$

$\mathrm{II} \quad 7 + 4t = 0 + 5s$

ואחרי הצבה: $7 + 4(1+4s) = 5s$

$7 + 4 + 165 = 5s$

$11s = -11$

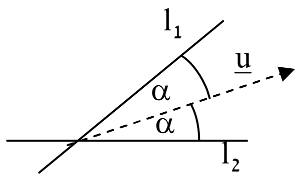
$\underline{s = -1}$

הצבה חוזרת: $t = 1 + 4\cdot(-1) = -3$

הצבה במשוואה II: $x,y = 3,0 + (-1)(12,5)$

$x,y = (-9,-5)$

זו נקודת החיתוך בין הישרים, וזו הנקודה דרכה עובר חוצה הזווית.



עתה נפנה למציאת ווקטור הכיוון.
נשרטט את הישרים ואת חוצה הזווית:
נתבונן בשרטוט ונראה שמה שדרוש, למעשה,
הוא השוואת הזווית בין חוצה הזווית וכל אחד מהישרים.

ואז ווקטור הכיוון הוא: $\underline{u} = (u,\ _{s}u_2)$

נציב בנוסחה ונקבל:

$$\cos\alpha = \frac{(3,4)(u_1 u_2)}{\sqrt{3^2+4^2}\cdot|\underline{u}|} = \frac{(12,5)(u_1 u_2)}{\sqrt{12^2+5^2}\cdot|\underline{u}|}$$

אחרי הכפלה ב- $|\underline{u}|$ נקבל:

$$\frac{3u_1+4u_2}{5} = \frac{12u_1+5u_2}{13}$$

$$39u_1+52u_2 = 60u_1+25u_2$$

$$27u_2 = 21u_1$$

או:

$$9u_2 = 7u_1$$

כאן נותרת לנו דרגת חופש אחת. האמת היא שזה אינו מפתיע. הווקטור שאנו מחפשים איננו יחיד כי לא הגדרנו את גודלו. אנו, למעשה, מחפשים רק את <u>כיוונו</u>. זה אומר את היחס בין u_1 ל- u_2.

(כי אין זה משנה אם גודלו הוא 7,5 או 39.5).

לכן אנו מקבלים אינסוף פתרונים, ואנו יכולים לבחור את הפתרון הנוח לנו.

נציב: $u_1 = 9$, ונקבל: $u_2 = 7$

ומכאן: $\underline{u} = (9,7)$

ומשוואת הישר היא: $l_3 : \underline{x} = (-4,-5) + r(9,7)$

כמובן, ניתן לחזור ולבדוק את נכונות היותו חוצה הזווית על ידי מציאת הזווית בין l_1 ל- l_2 ואחר כך מציאת זווית בין l_1 ל- l_3.

אשאיר זאת לכם לניסיון.

הזווית שאמורה להתקבל בין l_1 ל- l_2, היא: 30.51^0

הזווית שאמורה להתקבל בין l_1 ל- l_3, (אם מציגים ולא קוטעים או מעגלים תוצאות) היא: 15.255^0

מ"ו. מצאו את ווקטור היחידה היוצר זוויות שוות עם מערכת הצירים x, y, z.

פתרון:

כאן איננו מחפשים ישר אלא <u>ווקטור</u> בלבד, כלומר אנו מחפשים רק <u>כיוון</u>. לכן אין צורך במקרים כאלה לחפש נקודה או למצוא נקודות חיתוך (על אף שבמקרה ספציפי זה הנקודה $(0,0,0)$ היא ודאי נקודת החיתוך).

הפעם אנו נוקטים אותה גישה כמו בתרגיל הקודם, רק שכאן אנו עוסקים במרחב.

תחילה נייצג את הווקטורים על מערכת הצירים:

$$\underline{w}(0,0,1) \quad \underline{v}(0,1,0) \quad \underline{u}(1,0,0)$$

הווקטור שאנו מחפשים יהיה: $\underline{a}(a_1 a_2 a_3)$

הצבה בנוסחה:

$$\cos\alpha = \frac{(a_1 a_2 a_3)(1,0,0)}{|\underline{a}|\cdot 1} = \frac{(a_1 a_2 a_3)(0,1,0)}{|\underline{a}|\cdot 1} = \frac{(a_1 a_2 a_3)(0,0,1)}{|\underline{a}|\cdot 1}$$

הכפלה ב- $|\underline{a}|$: $\frac{a_1}{1}=\frac{a_2}{1}=\frac{a_3}{1}$

כלומר כל רכיבי הווקטור שווים ! $a_1=a_2=a_3$

אמנם ההצבה הנוחה היא : $a_1=a_2=a_3=1$,

אבל ביקשו ווקטור יחידה, כלומר אנו נדרשים ל - $\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}=1$

ומכיוון שהם שווים : $\sqrt{3{a_1}^2}=1$

$$a_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

והווקטור המבוקש : $\underline{a}\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

והזווית בין הווקטור לכל אחד מצירי המערכת :

(עבור ציר x.)

$$\cos\alpha=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(1,0,0)}{1\cdot 1}=\frac{1}{\sqrt{3}}=0.577$$

$$\underline{\alpha=54.7^0}$$

באותו אופן גם אם נתונים 3 ווקטורים שנראים מורכבים יותר (לא נוחים כל כך לטיפול). ניתן למצוא ווקטור שיהיה עם זווית שווה לכל אחד מהם.

מ״ז. מצאו ווקטור $\underline{u}$ היוצר זווית שווה עם הווקטורים הבאים : $(3,4,6)$, $(5,-2,7)$, $(1,6,-4)$

פתרון :

כבר ראינו שצריך למצוא את השוויון הבא :

$$\frac{(1,6,-4)(u_1u_2u_3)}{\sqrt{1^2+6^2+4^2}\cdot|\underline{u}|}=\frac{(5,-2,7)(u_1u_2u_3)}{\sqrt{5^2+2^2+7^2}\cdot|\underline{u}|}=\frac{(3,4,6)(u_1u_2u_3)}{\sqrt{3^2+4^2+6^2}\cdot|\underline{u}|}$$

נפתור תחילה את השוויון השמאלי : $\frac{u_1+6u_2-4u_3}{7.28\cdot\cancel{|\underline{u}|}}=\frac{5u_1-2u_2+7u_3}{8.83\cdot\cancel{|\underline{u}|}}$

$$8.83u_1+53u_2-35.32u_3=36.4u_1-14.56u_2+50.96u_3$$

$$-27.51u_1+67.56u_2-86.28u_3=0$$

ואחרי בידוד u_3 : $\underline{u_3=-0.32u_1+0.78u_2}$

נפנה לשוויון הימני : $\frac{5u_1-2u_2+7u_3}{8.83\cdot\cancel{|\underline{u}|}}=\frac{3u_1+4u_2+6u_3}{7.81\cdot\cancel{|\underline{u}|}}$

$$39.05u_1-15.62u_2+54.67u_3=26.5u_1+35.32u_2+53u_3$$

$$12.55u_1-50.94u_2+1.67u_3=0$$

הצבת u_3 שמצאנו קודם :

$$12.55u_1-50.94u_2+1.67(-0.32u_1+0.78u_2)=0$$

$$12.55u_1-50.94u_2-0.53u_1+1.3u_2=0$$

$$12.02u_1=49.64u_2$$

$$u_1=4.1u_2$$

כדי לבחור מספר נוח נעבור לכתיבת השבר העשרוני כשבר פשוט, ונקבל:

$$u_1 = \frac{41}{10} u_2$$

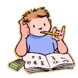
ולכן: $u_2 = 10 \quad u_1 = 41$

ואז מתקבל u_3: $u_3 = -0.32u_1 + 0.78u_2$

$$u_3 = -5.32$$

והווקטור הוא: $\underline{u} = (41, 10, -5.32)$

בדיקה תאה לנו שהזווית בין הווקטור $\underline{u}$ לשלושת הווקטורים האחרים היא לערך 66.7^0 , כלומר בעבודה שיטתית ומסודרת ניתן להתגבר גם על מספרים לא אידיאליים.



בדיקת הבנה

71. מצאו את הזווית בין הישרים:

א. $l_1 : \underline{x} = (2,7,8) + t(1,3,-4)$

$l_2 : \underline{x} = (1,-5,6) + s(-2,6,-7)$

ב. $l_1 : \underline{x} = (1,4,15) + t(-4,8,9)$

$l_2 : \underline{x} = (12,-14,16) + s(1,7,-5)$

72. מצאו את משוואת חוצה הזווית בין הישרים:

א. $l_1 : \underline{x} = (7,-15) + t(9,12)$

ב. $l_2 : \underline{x} = (2,21) + s(10,24)$

73. מצאו את הווקטור שיוצר זווית שווה עם הווקטורים: $(1,0,0)$ $(0,3,4)$ $(5,12,0)$
וחשבו את הזוויות האלה.

תרגול עצמי

74. נתון טטראדר $ABCS$: $A(3,-1,7)$ $B(-1,0,5)$ $C(3,8,-9)$ $S(9,-7,6)$
מצאו את ששת הישרים עליהם מונחים המקצועות.

75. אילו מהנקודות הבאות נמצאות על הישר AB שמצאתם בשאלה הקודמת?

א. $(11,-12,4)$ ב. $(33,-31,2)$ ג. $(3,-4,15)$

ד. $(-9,11,9)$ ה. $(42,39,7)$

76. מצאו את ההצגה הפרמטרית של הישר העובר דרך נקודה C ומקביל לישר העובר דרך נקודות AB.

א. $A(-2,7,5)$ $B(1,0,8)$ $C(9,-2,5)$

ב. $A(8,-5,1)$ $B(6,4,-3)$ $C(-5,2,-1)$

ג. $A(-7,15,8)$ $B(10,-11,13)$ $C(1,2,-1)$

77. מצאו אילו מבין 3 הנקודות ABC נמצאות על הישר אחד לפי הנתונים הבאים:

א. $A(-1,5,3)$ $B(1,10,10)$ $C(5,20,24)$

ב. $A(2,-3,9)$ $B(-8,7,6)$ $C(0,1,5)$

ג. $A(-5,8,-6)$ $B(1,-10,-6)$ $C(-4,5,-6)$

ד. $A(7,2,-1)$ $B(3,5,-2)$ $C(4,-6,9)$

78. מצאו את המצב ההדדי בין זוגות הישרים הבאים (מקבילים, מתלכדים, נחתכים או מצטלבים):

א. $l_1 : \underline{x} = (-4,-2,3) + t(3,-6,7)$
$l_2 : \underline{x} = (2,-4,17) + s(6,-12,14)$

ב. $l_1 : \underline{x} = (1,-2,7) + t(4,-2,6)$
$l_2 : \underline{x} = (4,-7,9) + s(2,-8,-2)$

ג. $l_1 : \underline{x} = (4,2,17) + t(5,1,3)$
$l_2 : \underline{x} = (1,1,8) + s(-1,4,7)$

ד. $l_1 : \underline{x} = (1,5,7) + t(3,-8,1)$
$l_2 : \underline{x} = (4,2,3) + s(6,-16,2)$

ה. $l_1 : \underline{x} = (3,8,-5) + t(1,-1,2)$
$l_2 : \underline{x} = (-7,-8,5) + s(4,9,-7)$

ו. $l_1 : \underline{x} = (2,7,5) + t(8,10,22)$
$l_2 : \underline{x} = (-3,9,-8) + s(4,5,11)$

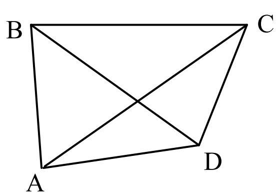
ז. $l_1 : \underline{x} = (1,3,-2) + t(9,11,-4)$
$l_2 : \underline{x} = (-10,7,11) + s(-2,3,-5)$

ח. $l_1 : \underline{x} = (7,9,-5) + t(1,3,-4)$
$l_2 : \underline{x} = (8,12,-9) + s(5,15,-20)$

ט. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הישרים שמצאתם נחתכים בסעיפים הקודמים.

י. מצאו את הזווית בין הישרים הנחתכים והמצטלבים שמצאתם בסעיפים א – ח.

79. נתון מרובע $ABCD$:



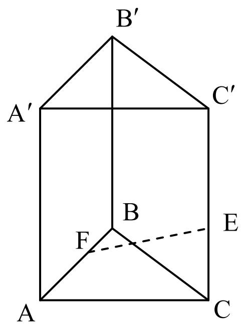
$A(1,2,-4)$ $B(0,3,8)$ $C(-1,5,9)$ $D(4,0,-3)$

א. מצאו את משוואת הישרים שעליהם מונחים האלכסונים.

ב. מצאו את נקודת פגישת האלכסונים.

ג. מצאו את הזווית החדה בין האלכסונים.

80. במנסרה $ABCA'B'C'$ נתון:



$A'(10,16,14)$ $C(-27,7,-31)$ $B(11,13,-35)$ $A(1,-2,5)$

ונתון: E מחלקת את המקצוע CC' ביחס של $1:2$.

E מחלקת את המקצוע AB ביחס של $3:2$.

א. מצאו את ההצגה הפרמטרית של הישר EF.

ב. הוכיחו כי BC ו- AC מצטלבים עם EF.

ג. מצאו את הזווית בין הישרים המצטלבים שהוכחתם בסעיף ב.

81. מצאו את חוצה הזווית בין הישרים :

א. $l_1 : \underline{x} = (14,11) + t(-4,3)$

$l_2 : \underline{x} = (2,4) + s(-24,10)$

ב. $l_1 : \underline{x} = (2,-6) + t(8,6)$

$l_2 : \underline{x} = (-10,6) + s(9,12)$

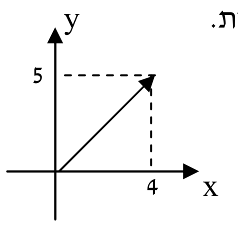
82. מצאו ווקטור היוצר זווית שווה עם שלושת הווקטורים הנתונים, ומצאו את הזווית השונה.

א. $(2,1,2)$ $(1,0,0)$ $(0,2,0)$

ב. $(1,3,5)$ $(2,3,4)$ $(3,1,6)$

<u>הצגה פרמטרית של מישור במרחב</u>

כדי להבין את ההצגה הפרמטרית של מישור במרחב נבחן תחילה את ההצגות המוכרות לנו, במישור x, y .
ידוע לנו שכאשר אנו רוצים להגדיר נקודה במישור זה, אנו מגדירים אותו על ידי שני ערכים : (x, y).
כבר ראינו שכל נקודה כזו ניתנת להתייחסות כאילו היא ווקטור היוצא מהראשית.



לדוגמה : הנקודה $(4,5)$ היא ווקטור היוצא מהראשית עד לנקודה זו.
ממה מורכב ווקטור זה ?
אם נפרק אותו לרכיביו, נקבל : $(4,5) = (4,0) + (0,5)$
ואם נפרק את רכיבי הווקטור לווקטורי יחידה, נוכל לייצג את הנקודה על ידי :

$\underline{u} = 4(1,0) + 5(0,1) = (4,5)$

באופן הסתכלות זה אנו יכולים לראות שכל נקודה במישור (x, y) מוגדרת על פי 2 ווקטורי יחידה :
$(1,0)$ ו- $(0,1)$, וכל נקודה ניתנת לתיאור על ידי ווקטורים אלה.

למשל :

$(2,7) = 2 \cdot (1,0) + 7(0,1)$

$(-5,12) = -5 \cdot (1,0) + 12(0,1)$

תהליך זה של הכפלה בסקלר וחיבור נקרא : <u>"קומבינציה לינארית"</u> .
אנו רואים שכל נקודה במישור שבחרנו, היא קומבינציה לינארית של הווקטורים : $(1,0)$ ו- $(0,1)$.
המשמעות היא שכל המישור (x, y) נפרש על ידי שני הווקטורים האלה, במילים אחרות, הווקטורים האלה הם הבסיס למישור (x, y) .
האם ניתן לבחור שני ווקטורים אחרים כדי לתאר את המישור הנ"ל ?
התשובה היא כן. כל שני ווקטורים שונים העוברים במישור, שנבחר, יוכלו לתאר את המישור .

למשל : $\underline{v} = (0,1)$ $\underline{u} = (1,1)$

אם אנו רוצים לתאר את הנקודה $(-2,3)$, עלינו לחפש את הסקלרים המתאימים לקומבינציה הלינארית : $-2,3 = t(1,1) + s(0,1)$

ומכאן נקבל שתי משוואות :

$-2 = t + 0$ I

$3 = t + 5$ II

ופתרונם: $s = 5 \quad t=-2$

ולכן: $(-2,3) = -2(1,1) + 5(0,1)$

מכיוון שגם (-2.3) הוא עצמו ווקטור במישור (היוצא מהראשית), אנו למדים שהווקטור (-2.3) הוא ווקטור במישור המוגדר על ידי הווקטורים: $(1,1)$ ו- $(0,1)$.

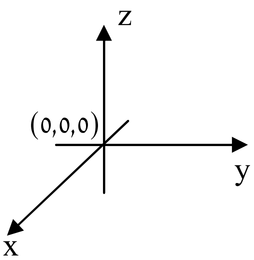
לסיכום אנו יכולים ללמוד:

1. כל שני ווקטורים שאינם תלויים (שכיוונם שונה) , הם בסיס למישור של ווקטורים תלויים ושאינם תלויים. (נרחיב בהמשך.)
2. כל ווקטור הניתן לכתיבה כקומבינציה לינארית של שני ווקטורים שאינם תלויים , מוכל (עובר) במישור המוגדר על ידי שני הווקטורים.

כאשר אנו עוברים מהמישור המוכר לנו, למרחב, עקרונות אלה אינם משתנים.

אם נבחן את המישור (x,y) במבט מרחבי, אנו רואים אותו כמישור אופקי העובר דרך הנקודה $(0,0,0)$.

ובכתיבה מתמטית:



אנו תמיד מתייחסים למישור (x,y)

לפי ההגדרה: $\pi : \underline{x} = (0,0,0) + t(1,0,0) + s(0,1,0)$

כאשר π מסמל מישור (כמו ש- l מסמל ישר) .

$(0,0,0)$ הוא הנקודה דרכה עובר המישור.

$(1,0,0)$ ו- $(0,1,0)$ הם ווקטורי הכיוון.

וכמו שכאשר אנו נדרשים לנקודה + כיוון כדי לייצג ישר יחיד,

כך גם ב<u>מישור אנו זקוקים לכיוון + נקודה</u> כדי לייצג מישור יחיד.

ההבדל הוא שעתה אנו זקוקים ל- 2 ווקטורי כיוון.

במקרה שלנו יש אינסוף מישורים מקבילים העוברים בנקודות z שונות.

למשל: $\pi : \underline{x} = (0,0,1) + t(1,0,0) + s(0,1,0)$ יהיה מישור מקביל למישור שהצגנו קודם,

והוא עובר ב- $(0,0,1)$, כלומר הוא בגובה <u>1</u> מעל המישור הקודם.

ומעתה:

המשוואה הפרמטרית של מישור היא:
$\pi : \underline{x} = A + t\underline{u} + s\underline{v}$
כאשר A - הנקודה (a_1, a_2, a_3) דרכה עובר המישור
$\underline{u},\underline{v}$ - ווקטורי כיוון המישור

כדי "לחוש" את המשמעות נביא מספר דוגמאות:

מ"ח. מהגיאומטריה למדנו שכל 3 נקודות מגדירות מישור.

מצאו את המישור המוגדר על ידי הנקודות: $A(3,1,-2) \quad B(-5,7,6) \quad C(4,-9,10)$

פתרון:

כדי למצוא את המשוואה הפרמטרית של המישור נמצא תחילה 2 ווקטורי כיוון:

$$\underline{u} = \overrightarrow{AB} = \left(-5-3, 7-1, 6-(-2)\right) = (-8,6,8)$$

כך גם: $\underline{v} = \overrightarrow{AC} = (1,-1,12)$

נבחר את הנקודה A כנקודה במישור ונקבל:

$\pi: \underline{x} = (3,1,-2) + t(-8,6,8) + s(1,-10,12)$

חשוב להבהיר שהבחירה ב-: $\underline{u} = \overrightarrow{AB}$ $\underline{v} = \overrightarrow{AC}$, היא שרירותית.

באותה מידה יכולנו לבחור: $\underline{u} = \overrightarrow{BC}$ $\underline{v} = \overrightarrow{BA}$.

כך גם לגבי בחירת הנקודה.

מ״ט. מי מבין הנקודות הבאות נמצא במישור שמצאנו בתרגיל הקודם, ומי לא?

1. $(-16,43,-22)$ 2. $(20,-17,41)$

פתרון:

נקודה תימצא במישור נתון אם קיימת קומבינציה לינארית כזו שתגדיר את הנקודה.

לכן נשווה את (x,y,z) של הנקודה ל- (x,y,z) של המישור.

המישור שמצאנו היה: $\pi: \underline{x} = (3,1,-2) + t(-8,6,8) + s(1,-10,12)$

ולכן:

$x = 3 - 8t + s$

$y = 1 + 6t - 10s$

$z = -2 + 8t + 12s$

1. נשווה את הביטויים שקיבלנו ל- (x,y,z) של הנקודה $(-16,43,-22)$,

ונקבל:

$\text{I} \quad -16 = 3 - 8t + s$

$\text{II} \quad 43 = 1 + 6t - 10s$

$\text{III} \quad -22 = -2 + 8t + 12s$

ממשוואה I: $\text{IV} \quad s = 8t - 19$

הצבה ב- II: $43 = 1 + 6t - 10(8t - 19)$

$43 = 1 + 6t - 80t + 190$

$74t = 148$

$t = 2$

הצבה ב- IV: $s = 8 \cdot 2 - 19 = -3$

בדיקה עבור משוואה III: $-22 = -2 + 8 \cdot 2 + 12 \cdot (-3)$

$-22 = -22$

כלומר מצאנו קומבינציה לינארית כך שהנקודה תיגזר מתוך משוואת המישור.

2. עבור הנקודה $(20,-17,41)$

המשוואות הן:

$\text{I} \quad 20 = 3 - 8t + s$

$\text{II} \quad -17 = 1 + 6t - 10s$

$\text{III} \quad 41 = -2 + 8t + 12s$

ממשוואה I: $\text{IV} \quad s = 17 + 8t$

הצבה ב- II: $-17 = 1 + 6t - 10(17 + 8t)$

$-17 = 1 + 6t - 170 - 80t$

$152 = -74t$

$2.05 = t$

הצבה ב- IV: $s = 17 + 8 \cdot 2.05 = 33.43$

בדיקה במשוואה III : $41 = -2 + 8 \cdot 2.05 + 12 \cdot 33.43$

$41 \neq 415.56$

ולכן נקודה זו לא נמצאת במישור.

נ'. נתון הישר : $l: \underline{x} = (1,-1,0) + t(4,-2,3)$ והנקודה : $A(5,2,3)$

בדקו אם הנקודה A נמצאת על הישר l .

אם לא, מצאו את משוואת המישור הנקבע עלי ידי הישר l והנקודה A .

פתרון :

תחילה נבדוק (כפי שכבר למדנו) אם A נמצאת על הישר l .

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 5 = 1 + 4t \\ \text{II} & 2 = -1 - 2t \\ \text{III} & 3 = 0 + 3t \\ \hline & t = 1 \end{array}$$

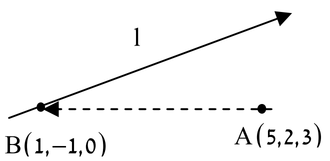
ממשוואה III : $t = 1$

הצבה ב- I : $5 = 1 + 4 \cdot 1$

הצבה ב- II : $2 \neq -1 - 2 \cdot 1$

ולכן הנקודה אינה נמצאת על הישר.

כדי למצוא את משוואת המישור נשרטט את הנתונים :



אנו רואים שחסר לנו ווקטור כיוון נוסף שמגדיר את המישור. ווקטור זה יכול להיות הווקטור $\overrightarrow{AB}$ (נוח לקחת נקודות ידועות כבר) .

ולכן : $\overrightarrow{AB} = (4,3,3)$

ומשוואת המישור : $\pi: \underline{x} = (1,-1,0) + t(4,-2,3) + s(4,3,3)$

בדיקת הבנה

83. נתונות 3 נקודות ABC .

א. הוכיחו כי הנקודות ABC אינן נמצאות על ישר אחר.

ב. מצאו את ההצגה הפרמטרית של המישור העובר דרך 3 נקודות אלה.

I $A(1,0,5)$ $B(1,2,-3)$ $C(1,1,1)$

II $A(-3,2,7)$ $B(3,2,-5)$ $C(4,-1,2)$

84. נתונה ההצגה הפרמטרית של המישור : $\pi: \underline{x} = (1,3,7) + t(1,-1,5) + s(2,3,-1)$

מי מבין הנקודות הבאות נמצאת במישור זה ?

א. $A(5,3,7)$ ב. $A(-1,8,24)$ ג. $A(7,-2,9)$ ד. $A(1,5.5,1.5)$

85. נתונה משוואת ישר : $l: \underline{x} = (-5,1,2) + t(4,-2,3)$

א. מי מבין הנקודות הבאות אינה נמצאת על הישר הנתון ?

$A(3,5,-2)$ $B(4,-2,5)$ $C(-1,-1,-1)$

ב. מצאו את משוואת המישור העובר בין הנקודה והישר, לכל אחת מהנקודות שמצאתם בסעיף א.

86. א. הוכיחו כי הישרים הנתונים מקבילים.
ב. מצאו את משוואת המישור העובר דרך ישרים אלה.
(הדרכה: מצאו נקודה על ישר l_1, ומצאו את המישור העובר בין הנקודה לישר l_2 כמו בתרגיל 84).

I $l_1: \underline{x} = (3,5,-7) + t(14,-2)$

$l_2: \underline{x} = (1,1,-3) + s(2,8,-4)$

II $l_1: \underline{x} = (0,5,3) + t(-2,8,12)$

$l_2: \underline{x} = (1,0,7) + s(-1,4,6)$

<u>ההצגה הכללית של מישור במרחב</u>

מישורים ניתנים לתיאור גם בצורת ההצגה הבאה:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

כך ש-: (A,B,C) הם ווקטור <u>הניצב</u> למישור,
ו-: (x,y,z) הם שיעורי נקודה במישור.

כלומר אם נתונה המשוואה: $3x - 5y + z - 7 = 0$, אנו יודעים שהווקטור $(3,-5,1)$ הוא <u>ווקטור הניצב למישור הנתון</u>.

המעבר מהצגה פרמטרית לכללית ולהפך היא יחסית פשוטה.

לדוגמה:

נ"א. נתונה המשוואה: $3x - 5y + z - 7 = 0$ מצאו את ההצגה הפרמטרית של מישור זה.

פתרון:

בקלות נוכל למצוא 3 נקודות המקיימות את המשוואה.

מציבים 2 רכיבים באופן שרירותי, ומקבלים את השלישי.

לנקודה ראשונה נציב: $x = 1$ $y = 1$

ונקבל: $3 \cdot 1 - 5 \cdot 1 + z - 7 = 0$

$z = 9$

והנקודה: $\underline{(1,1,9)}$

לנקודה שנייה נציב: $x = 1$ $z = -1$

ונקבל: $3 \cdot 1 - 5y - 1 - 7 = 0$

$y = -1$

כדאי לבחור "חכם" כדי ש- y יצא שלם

והנקודה: $\underline{(1,-1,-1)}$

לנקודה שלישית נציב: $y = 1$ $x = 2$

ונקבל: $3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 + z - 7 = 0$

$z = 6$

והנקודה: $\underline{(2,1,6)}$

מהנקודות נוכל לבנות את המישור:

$\underline{u} = (1,1,9) - (1,-1,-1) = (0,2,10)$

$\underline{v} = (1,1,9) - (2,1,6) = (-1,0,3)$

וההצגה הפרמטרית של המישור: $\pi: \underline{x} = (1,1,9) + t(0,2,10) + s(-1,0,3)$

<u>מעבר מהצגה פרמטרית להצגה כללית</u>

נ״ב. נתונה משוואת מישור : $\pi : \underline{x} = (3,2,4) + t(1,-2,5) + s(7,-1,2)$

מצאו את המשוואה הכללית של מישור זה.

פתרון :

הדרך הפשוטה במקרה זה היא למצוא את ווקטור המקדמים (A,B,C) שאמור להיות מאונך למישור,

כלומר הוא ניצב <u>ל- 2</u> ווקטורי הכיוון.

ומכאן בונים שתי משוואות :

$$\mathrm{I} \quad (ABC)\cdot(1,-2,5) = 0$$

$$\mathrm{II} \quad \underline{(ABC)\cdot(7,-1,2) = 0}$$

פתרון המשוואות :

$$\mathrm{I} \quad A - 2B + 5C = 0$$

$$\mathrm{II} \quad 7A - B + 2C = 0$$

ממשוואה I : $A = 2B - 5C$

הצבה ב- II : $7(2B - 5C) - B + 2C = 0$

$$14B - 35C - B + 2C = 0$$

$$13B = 33C$$

גם כאן אנו מוצאים דרגת חופש לבחירה. (ושוב כדאי לבחור ״חכם״.)

נבחר : $B = 33 \quad C = 13$

ואז מתקבל A : $A = 2\cdot 33 - 5\cdot 13 = 1$

קיבלנו את ווקטור המקדמים : $(A,B,C) = (1,33,13)$

למציאת D כל שעלינו לעשות הוא להציב את הנקודה הנתונה $(3,2,4)$ במשוואה הכללית :

$$D = 1\cdot 3 + 33\cdot 2 + 13\cdot 4 + D = 0$$

$$D = -121$$

והמשוואה הכללית : $\underline{x + 33y + 13z - 121 = 0}$

למה זה טוב ?

ובכן, כפי שנראה בהמשך, יש מצבים שבהם עדיף לעבוד דווקא עם המשוואה הפרמטרית, ויש שכדאי לעבור להצגה כללית. שתי ההצגות טובות, ואנו נלמד להשכיל לבחור את ההצגה המתאימה לכל בעיה.

נ״ג. מצאו את משוואת מישור הניצב לישר : $l_1 : \underline{x} = (1,4,7) + t(3,-5,2)$ ועובר דרך הנקודה : $A(1,1,1)$.

פתרון :

את ההצגה הכללית קל מאוד למצוא כי ידוע לנו ש- : $(A,B,C) = t(3,-5,2)$

אנו, כמובן, נבחר : $t = 1$

ולכן משוואת המישור : $3x - 5y + 2z + D = 0$

למציאת D נציב את הנקודה $(1,1,1)$: $3\cdot 1 - 5\cdot 1 + 2\cdot 1 + D = 0$

$$D = 0$$

ומשוואת המישור : $\underline{3x - 5y + 2z = 0}$

(אם נרצה את ההצגה הפרמטרית, אנחנו כבר יודעים איך לעשות זאת.)

נ"ד. נתונים 2 ישרים: $l_1 : \underline{x} = (1,-2,5) + t(-3,7,2)$

$l_2 : \underline{x} = (4,9,-6) + s(8,2,5)$

1. הוכיחו כי הישרים מאונכים זה לזה.
2. מצאו את משוואת המישור המיכל את ישר l_1 וניצב לישר l_2.

פתרון:

1. כבר למדנו שהתנאי לישרים מאונכים הוא שהמכפלה הסקלרית של ווקטורי הכיוון מתאפסת: $(-3,7,2)(8,2,5) = -24 + 14 + 10 = 0$
2. מישור הניצב לישר l_2 הוא זה שעבורו: $(A,B,C) = (8,2,5)$

לכן: $8x + 2y + 5z + D = 0$

למציאת D עלינו להציב נקודה. אולם מבקשים שהמישור יכיל גם את ישר l_1, כלומר הנקודה $(1,-2,5)$ צריכה להיות על המישור המבוקש.

לכן: $8 \cdot 1 + 2 \cdot -2 + 5 \cdot 5 + D = 0$

$D = -29$

והמישור המבוקש: $\underline{8x + 2y + 5z - 29 = 0}$

נ"ה. מצאו הצגה כללית של מישור העובר דרך הנקודות: $A(2,5,0)$ $B(5,1,3)$ $C(-4,9,-4)$

פתרון:

אפשרות ראשונה היא למצוא הצגה פרמטרית של המישור כפי שכבר למדנו, ולהעבירה להצגה כללית: $\pi : \underline{x} = (-4,9,-4) + t(5+4, 1-9, 3+4) + s(2+4, 5-9, 0+4)$

$\pi : \underline{x} = (-4,9,-4) + t(9,-8,7) + s(6,-4,4)$

מעבר להצגה כללית:

$$\begin{aligned} &\text{I} \quad (9,-8,7)(A,B,C) = 0 \\ &\text{II} \quad (6,-4,4)(A,B,C) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{I} \quad 9A - 8B + 7C = 0 \\ &\text{II} \quad 6A - 4B + 4C = 0 \end{aligned}$$

נבודד את B במשוואה II:

$$\text{III} \quad B = \frac{-6A - 4C}{-4}$$

נציב ב- I:

$$9A - \frac{8(-6A - 4C)}{-4} + 7C = 0$$

$$9A + 2(-6A - 4C) + 7C = 0$$

$$9A - 12A - 8C + 7C = 0$$

$$-3A = C$$

$$A = 1 \quad C = -3$$

הצבה ב- III:

$$B = \frac{-6 + 12}{-4} = -1.5$$

ומשוואת המישור: $x - 1.5y - 3z + D = 0$

למציאת D נציב $(-4,9,-4)$: $-4 - 13.5 + 12 + D = 0$

$D = 5.5$

ומשוואת המישור: $x - 1.5y - 3z + 5.5 = 0$

כמובן, אם איננו "אוהבים" שברים במשוואה, תמיד ניתן לכפול ב- 2 ולקבל: $\underline{2x - 3y - 6z + 11 = 0}$

ומכאן אנו למדים שגם אם לפעמים תוצאות התרגילים אינן "יוצאות" כמו בספר, אין זה אומר בהכרח שיש טעות, אלא צריך לבדוק אם הן כפולות של התוצאות.

אפשרות שנייה למציאת המישור היא על פי 3 משוואות והצבת הנקודות הנתונות ב- (x,y,z).
מתקבלות 3 המשוואות האלה:

$$\text{I}\quad A\cdot(-4)+B\cdot 9+C\cdot(-4)+D=0$$

$$\text{II}\quad A\cdot 5+B+C\cdot 3+D=0$$

$$\text{III}\quad \underline{A\cdot 2+B\cdot 5+D=0}$$

על ידי בידוד B במשוואה II:

$$\text{IV}\quad B=-3C-5A-D$$

הצבה ב- III:

$$2A+5(-3C-5A-D)+D=0$$

$$2A-15C-25A-5D+D=0$$

$$-23A-15C-25A-4D=0$$

נבודד את A:

$$-23A=15C+4D$$

$$\text{V}\quad A=\frac{15C+4D}{-23}$$

הצבה של A במשוואה IV:

$$B=-3C-5\cdot\frac{15C+4D}{-23}-D$$

$$23B=69C-75C-20D+23D$$

$$\text{VI}\quad B=\frac{-6C+3D}{-23}$$

כמו שאנו רואים, עבור A ו- B מתקבלים ביטויים "מגעילים", אבל אנחנו נקווה לטוב.

נציב במשוואה I:

$$-4\cdot\frac{15C+4D}{-23}+9\cdot\frac{-6C+3D}{-23}-4C+D=0$$

$$-60C-16D-54C+27D+92C-23D=0$$

$$-22C=12D$$

$$\underline{C=12\quad D=-22}$$

הצבה ב- V:

$$A=\frac{15\cdot 12+4\cdot(-22)}{-23}=-4$$

הצבה ב- VI:

$$B=\frac{-6\cdot 12+3\cdot(-22)}{-23}=6$$

והמשוואה: $\underline{-4x+6y+12z-22=0}$

לכאורה, קיבלנו משוואה שונה, אולם, למעשה, זהו אותו מישור. משוואה זו היא כפולה של המשוואה הקודמת.