**אינדוקציה מתמטית**

**רקע**

ראשית נברר לעצמנו מהי אינדוקציה בכלל, ומהי אינדוקציה מתמטית.

המילה אינדוקציה, לפי מילון אבן שושן, היא "שיטת לימוד מן הפרט אל הכלל". כלומר הוכחה של חוק מסוים מתוך בחינת מקרים פרטיים.

שיטת הלימוד ההפוכה – מתוך כלל ללמוד על הפרטים – נקראת דדוקציה.

באופן לוגי יש קושי לקבל הוכחות אינדוקטיביות. לדוגמה: אם אזרוק קובייה מאוזנת שלוש פעמים, ובכל פעם אראה 5, האם זה אומר שגם בפעם הרביעית היא תַּראה 5 ? מובן שלא. דוגמה נוספת: אם מצאתי מספר גברים ונשים בעלי עודף משקל הממתיקים את הקפה בסוכרזית, האם זה אומר שסוכרזית משמין ?...

לכן בדרך כלל אנו מוכיחים מקרים פרטיים על ידי חוק כללי. כך בנויה כל הוכחה בגיאומטריה. אנו מכירים משפטים כלליים ומיישמים אותם על מקרה פרטי המונח לפנינו. כך אנו גם מנסים ליישם חוקים פיזיקאליים. לדוגמה: אנו יודעים שתאוצת המשיכה אינה תלויה במסה, ולכן כל הגופים ייפלו מאותו גובה באותה מהירות. אם נבדוק מקרה פרטי של נפילת כדור עופרת וכדור עץ, אכן נוכל לראות את החוק הזה פועל.

(למתעניינים במדעים ובפילוסופיה: כיוון שכל חוקי המדע הכלליים החלו מתצפיות על מקרים פרטיים, לכאורה הם נתונים לכֶשֶל לוגי. כדי להתמודד עם קושי זה התפתח ענף מחקרי בפילוסופיה של המדע המנסה להתמודד עם כשלים אלו. שניים מהמובילים בתחום זה הם: קרל פופר ותומאס קון. כל אחד מהם מצא פתרון אחר לבעייתיות זו. מאמרו של קרל פופר - "מדע השערות והפרכות" - תורגם ונמצא במקורות של האונ. הפתוחה. ספרו של תומאס קון - "המבנה של מהפכות מדעיות" - תורגם אף הוא. מומלץ לקריאה!)

האינדוקציה המתמטית באה לפתור כֶּשֶל לוגי זה, והיא מצאה את הדרך לשלב מקרה פרטי בהוכחה כללית כך שיהיה ניתן להוכיח חוק כללי על אף שהוא נבדק רק על מקרה פרטי.

**אינדוקציה של סדרות**

האינדוקציה המתמטית מקובלת כשיטת הוכחה יעילה עבור קבוצות של מספרים.

עיקרי האינדוקציה המתמטית הם שניים:

1. כאשר נתון חוק כללי, בוחנים אותו על מקרה פרטי ספציפי. חשוב לבחון אותו על האיבר הנמוך ביותר שמקיים את החוק.

2. א. אנו מניחים כי החוק הכללי נכון עבור k כלשהו.

2. ב. אנו מוכיחים על בסיס ההנחה (בסעיף 2 א.) שאם החוק אכן מתקיים לאותו איבר, הוא

חייב להתקיים גם עבור האיבר הבא אחריו בקבוצה, כלומר עבור (k+1).

כדי להבהיר את השיטה אביא דוגמה מעשית. נניח שאנו מעוניינים להוציא פלייר. אנו מתיישבים מול המחשב ומקלידים אותו ומאיירים ומגיהים... בסוף התהליך אנו "שולחים" את המסמך להדפסה. אנו יודעים שהמדפסת תוציא את המסמך בדיוק כפי שהוא נכתב. אולם עדיין אנו נותנים הוראת הדפסה לעותק אחד, בוחנים אותו (שהוא יצא בדיוק כפי שתכננו), ומכאן והלאה נותנים לו פעולת ביצוע "עד להודעה חדשה". המדפסת מתחילה להדפיס עותק אחרי עותק, בדיוק כפי שהדפיסה את הראשון. האם הפלייר המאה יתאים לפלייר הראשון ? האם הפלייר האלף עדיין יתאים לציור הראשון ? ברור לנו שכן (בהנחה שהמדפסת מוזנת כל הזמן בדיו ובדפים ואינה מתקלקלת).

מה גורם לנו להיות משוכנעים ?

1. בדקנו את שביעות רצוננו מהדפסת הפלייר הראשון.

2. אנו מניחים שיש פלייר כלשהו שיֵצא לשביעות רצוננו.

3. על בסיס ההנחה שהמדפסת אינה יכולה להתקלקל, והיא מוזנת בדיו ובדפים באופן אוטומטי, אנו מוכיחים שגם הפלייר הבא יֵצא בדיוק כמו הקודם ויהיה כפי שתכננו.

זה למעשה רעיון האינדוקציה המתמטית. כך אנו משיגים הוכחה הנכונה לאין סוף האיברים בסדרה.

נתחיל בדוגמה פשוטה:

א. הוכיחו באינדוקציה כי הטענה: 1+2+3…+n = ½(n2+n) מתקיימת לכל n טבעי.

פתרון:

1. נבדוק עבור מקרה פרטי.

נבדוק את הטענה עבור המקרה: n = 1 (האיבר הקטן ביותר)

הצבה בטענה במקרה זה מראה כי הטור באגף שמאל מתחיל ומסתיים ב- 1.

והבדיקה: 1 = ½(12+1)

1 = 1

כלומר הבדיקה מראה שאכן החוקיות מתקיימת.

הפעם נרחיב את הבדיקה גם עבור מספרים אחרים כדי להוכיח שגם מקרים פרטיים אחרים מקיימים את הטענה.

נציב: n = 5

במקרה זה הטור המתקבל באגף שמאל הוא: 1+2+3+4+5

והבדיקה: 1+2+3+4+5 = ½(52+5)



15 = 15

2. הנחה: הטענה נכונה עבור איבר כלשהו k.

כלומר: על ידי הצבת n = k מקבלים: 1+2+3…+k = ½(k2+k)

3. צריך להוכיח שהטענה מתקיימת גם עבור האיבר הבא אחריו, כלומר עבור: k+1

על ידי הצבת n = k+1 מקבלים: 1+2+3…+k+(k+1) = ½[(k+1)2+(k+1)]

שימו לב! מכיוון שהוספנו עוד איבר בטור משמאל (k+1), חובה עלינו להתאים את אגף ימין. כדי לשמור על השקילות יש להציב את האיבר האחרון שהוא עכשיו (k+1) בביטוי הסכום.

הוכחה:

נעתיק שוב את השוויון: 1+2+3…+k+(k+1) = ½[(k+1)2+(k+1)]

כדי להוכיח זהות בין האגפים מותר לנו לבצע כל פעולה אלגברית חוקית,

כמו: הצבה, העברת אגפים, הכפלה/חילוק במספר וכדומה, עד לקבלת זהות נראית בין האגפים.

תחילה נבצע הצבה של ההנחה האומרת: 1+2+3…+k = ½(k2+k)

הביטוי המתקבל הוא: ½[(k+1)2+(k+1)] ½(k2+k)+(k+1) =

נכפיל ב- 2 ונפתח סוגריים: k2+k+2k+2 = k2+2k+1+k+1

כינוס: k2+3k+2 = k2+3k+2

עתה אנו רואים את הזהות בין האגפים, כלומר הוכחנו את השוויון.

מתוך שני העקרונות: א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההנחה וההוכחה שאם החוק מתקיים עבור k כלשהו, הוא יתקיים גם עבור k+1 - הוכחנו את נכוֹנוּת הטענה עבור כל n טבעי.

***בדיקת הבנה***

1. א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: 

ב. בדקו האם הטענה נכונה גם עבור: n = 5

כמו שכבר ראינו בגיאומטריה, יש חשיבות רבה למבנה ההוכחה ולאופן הכתיבה. לכן אני ממליץ בכל דוגמה ותרגול לא להסתפק רק בכתיבה המתמטית אלא גם במבנה ההוכחה ובשפה.

בכל הוכחה באינדוקציה:

א. נבדוק נכוֹנוּת הטענה עבור מקרה פרטי – בדרך כלל n=1

ב. נניח כי הטענה נכונה עבור: n=k

ג. נוכיח נכוֹנוּת הטענה עבור: n=k+1

וסיום ההוכחה: על פי שני העקרונות: א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההנחה וההוכחה שאם החוק מתקיים עבור k כלשהו, הוא יתקיים גם עבור k+1 - הוכחנו את נכוֹנוּת הטענה עבור כל n טבעי.

ב. הוכיחו על ידי אינדוקציה מתמטית כי לכל n טבעי מתקיים: 4+9+14+…+(5n-1) = ½(5n2+3n)

פתרון:

1. בדיקה למקרה פרטי: n = 1



4 = ½(5+3)

4 = 4

2. הנחה – עבור n = k טבעי כלשהו מתקיים: 4+9+14+…+(5k-1) = ½(5k2+3k)

3. צ"ל: הזהות תתקיים גם עבור: n = (k+1)

כלומר צריך להוכיח את הזהות:

4+9+14+…+(5k-1)+[5(k+1)-1] =½[5(k+1)2+3(k+1)]

הוכחה:

לפי ההנחה: 4+9+14+…+(5k-1) = ½(5k2+3k)

על ידי הצבה: ½[5(k+1)2+3(k+1)] (5k2+3k)+[5(k+1)-1] =½

נכפיל ב- 2: (5k2+3k)+2[5(k+1)-1] = [5(k+1)2+3(k+1)]

פתיחת סוגריים: 5k2+3k+10k+8 = 5k2+10k+5+3k+3

כינוס: 5k2+13k+8 = 5k2+13k+8

על פי שני העקרונות: א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההנחה וההוכחה שאם הטענה מתקיימת עבור k טבעי כלשהו, היא תתקיים גם עבור k+1 - הוכחנו שהזהות מתקיימת עבור כל n טבעי.

ג. א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:



ב. מצאו את סכום 15 האיברים הראשונים.

פתרון:

1. בדיקה למקרה פרטי: n = 1

איבר אחרון לחיבור:  , גם האיבר הראשון הוא: 

לכן: 

 20 =



2. הנחה – עבור n = k טבעי כלשהו מתקיים:



3. צריך להוכיח: הטענה תתקיים גם עבור: n = k+1

כלומר צריך להוכיח את הזהות:



הוכחה:

על ידי הצבה של ההנחה מקבלים:

+ [(k+1)+3] [2(k+1)+3] = 

הכפלה ב- 6 ופתיחת סוגריים מרובעים:

k(4k2+33k+83)+6(k+4)(2k+5) = (k+1)(4k2+8k+4+33k+33+83)

4k3+33k2+83k+6(2k2+5k+8k+20) = (k+1)(4k2+41k+120)

4k3+33k2+83k+12k2+78k+120 = 4k3+41k2+120k+4k2+41k+120

4k3+45k2+161k+120 = 4k3+45k2+161k+120

על פי שני העקרונות: א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההנחה וההוכחה שאם הטענה מתקיימת עבור k טבעי כלשהו, היא תתקיים גם עבור (k+1) - הוכחנו שהזהות מתקיימת עבור כל n טבעי.

ב. על ידי הצבה של n = 15 לאגף ימין אנו מוצאים, למעשה, את סכום 15 האיברים הראשונים הנתונים בטור. לכן: 

תשובה: 

***בדיקת הבנה***

2. א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:



ב. מצאו את סכום עשרת האיברים הראשונים.

יש החוששים מכל תרגיל שיש בו שברים. לטובתם נבחן את הדוגמה הבאה ונראה כי אין כל שינוי בגישה או בהוכחת הזהויות גם אם מעורבים בהם שברים. כבר הזכרנו שכדי להוכיח זהות ניתן להשתמש בכל הכלים המתמטיים המוכרים בטכניקה האלגברית, ולכן כל השינוי הוא שעתה עלינו להכפיל במכנה משותף.

ד. הוכיחו באינדוקציה כי הזהות: 

מתקיימת לכל n טבעי.

פתרון:

1. בדיקה למקרה פרטי: הצבה: n = 1



2. הנחה – עבור n = k טבעי כלשהו מתקיים:



3. צריך להוכיח: הטענה תתקיים גם עבור: n = k+1

כלומר צריך להוכיח את הזהות:



הוכחה:

על ידי הצבה של ההנחה מקבלים:



אחרי פתיחת סוגריים חיצוניים:



שימו לב!

כמו תמיד, רצוי לא למהר לפתוח סוגריים פנימיים כדי שקל יהיה לזהות מהו המכנה המשותף הנמוך ביותר!!

הכפלה במכנה משותף: k(3k+7)+4=(k+1)(3k+4)

3k2+7k+4=3k2+4k+3k+4

וכפי שאנו רואים: 3k2+7k+4=3k2+7k+4

על פי שני העקרונות: א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההנחה וההוכחה שאם הטענה מתקיימת עבור k טבעי כלשהו, היא תתקיים גם עבור (k+1) - הוכחנו שהזהות מתקיימת עבור כל n טבעי.

אחרי שהוכחנו את הביטוי לסכום בטור, אנו יכולים לחשב את סכומם של טורים כאלה יחסית במהירות.

לדוגמה:

מה יהיה סכום הטור ? 

כדי לחשב סכום זה כל שעלינו לעשות הוא לזהות מהו ה- k הסופי. מתוך האיבר האחרון אנו רואים:

61 = 3k+1

כלומר: k = 20

הצבה בנוסחת הסכום: 



דוגמה נוספת:

מה יהיה סכום הטור ? 

הפעם עלינו לזכור שסכום הטור כפי שהוא מופיע בנוסחה, נכון עבור טור שמתחיל ב- k=1 (כלומר סכום האיברים הראשונים), אבל הטור שלנו איננו מתחיל בו. לכן עלינו לבדוק לא רק מהו ה-k של האיבר האחרון אלא גם של הראשון ולחסר את הערכים המתאימים.

אנו רואים שהטור מסתיים במכנה: 

כלומר: 67=3k+1

k=22

עתה נבחן מהו ה- k המתאים לאיבר ראשון.

כלומר: 31=3k+1

k=10

כדי למצוא את סכום הטור המבוקש עלינו לבצע: sk=22 – sk=9

שימו לב שעלינו לחסר את סכום **תשעת** האיברים הראשונים כי **האיבר העשירי** כבר נכלל בסכום המבוקש!

מקבלים: 

***בדיקת הבנה***

3. א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: 

ב. באיזה מקום נמצא האיבר:  ?

ג. מצאו את סכום הטור: 

הדוגמה הבאה מתייחסת לטורים הכוללים חזקות. אין שינוי בדרך הפתרון, אלא שיש לעשות שימוש בחוקי החזקות הבסיסיים.

ה. הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים: 

פתרון:

1. בדיקה למקרה פרטי: n=1

תזכורת לחוקי חזקות:





2. הנחה – עבור n = k טבעי כלשהו מתקיים:



3. צריך להוכיח: הטענה תתקיים גם עבור: n = k+1

כלומר צריך להוכיח את הזהות:



הוכחה:

על ידי הצבה של ההנחה מקבלים:



הכפלה ב- 4 ופתיחת סוגריים: 

הוספת המספר 3 לשני האגפים: 

חלוקה ב: 3k+1 (שימו לב:  ) 

עתה נותרה משוואה נוחה. פתיחת סוגריים וסידור: 

על פי שני העקרונות: א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההנחה וההוכחה שאם הטענה מתקיימת עבור k טבעי כלשהו, היא תתקיים גם עבור (k+1) - הוכחנו שהזהות מתקיימת עבור כל n טבעי.

***בדיקת הבנה***

4. א. הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים:



ב. מצאו את סכום הטור: 

בתקווה שאת מושג העצרת כבר הפנמתם בלימודי קומבינטוריקה והסתברות, נפתור דוגמה שתמחיש איך מתמודדים עם חלוקות ומכפלות של עצרת.

ו. הוכיחו כי לכל nטבעי מתקיים: 

פתרון (לפי אותו מבנה שכבר הכרנו):

1. בדיקה למקרה פרטי: n = 1



2. הנחה – עבור n = k טבעי כלשהו מתקיים:



3. צריך להוכיח: הטענה תתקיים גם עבור n = k+1

כלומר צריך להוכיח את הזהות:



הוכחה:

על ידי הצבה של ההנחה מקבלים: 

הוספת  ופתיחת סוגריים: 

תזכורת לחוקי עצרת



הכפלה ב- : 3+(k+1) = (k+4)

k+4 = k+4

על פי שני העקרונות: א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההנחה וההוכחה שאם הטענה מתקיימת עבור k טבעי כלשהו, היא תתקיים גם עבור: (k+1) - הוכחנו שהזהות מתקיימת עבור כל n טבעי.

***בדיקת הבנה***

5. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: **

***תרגול עצמי***

6. א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: 

ב. בדקו האם הטענה נכונה גם עבור: n = 5

7. א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:



ב. מצאו את סכום עשרת האיברים הראשונים.

8. א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:



ב. באיזה מקום נמצא האיבר:  ?

ג. מצאו את סכום הטור: 

9. א. הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים: 

ב. מצאו את סכום הטור: 

10. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: 

11. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: 

***אינדוקציה עם הוספת מספר איברים***

עד עתה למדנו להכיר את האינדוקציה של סדרות בעלות n או (n+c) איברים. בכל המקרים שראינו, לא היו סדרות שהסתיימו בכפולות של n. זו הסיבה שבשלב המעבר מההנחה עבור: n = k להוכחה עבור: n = k+1 היה עלינו תמיד להוסיף רק איבר אחד לביטוי מצד שמאל ולא יותר. עתה נפנה לטפל בסדרות שמסתיימות ב- 2n או 3n וכדומה. המיוחד בסדרות אלה הוא שיכולים להיתוסף אליהם יותר מאיבר אחד. איך נדע כמה איברים יש להוסיף ?

ראשית נציב את n = k+1 בביטוי המקורי ונמצא מהו האיבר האחרון שמתקבל.

שנית נבדוק את התקדמות הסדרה לפי האיברים הנתונים, ובהתאם לאותם מרווחים בהם מתקדמת הסדרה, נוסיף כמה איברים שיידרשו.

כדי להבין את התוספת הזו נברר כמה איברים יש להוסיף במעבר מ-n = k ל-n = k+1 בדוגמאות הבאות:

1. 1+2+3+…+3n

פתרון:

עבור n = k הסדרה נראית דומה: 1+2+3+…+3k

עבור n = k+1 האיבר האחרון הוא: 3(k+1)=3k+3

כפי שאנו רואים, בראשית הסדרה מדרגת העלייה היא 1, כלומר המספרים הם עוקבים. מכאן אנו למדים שכדי להשלים את הסדרה עד 3k+3 עלינו להוסיף 3 איברים ואז תֵּיראה הסדרה: 1+2+3+…+3k+(3k+1)+(3k+2)+(3k+3)

תוספת נדרשת

2. 3+5+7+9+11+…+(8n+3)

פתרון:

עבור n = k הסדרה היא: 3+5+7+9+11+…+(8k+3)

עבור n = k+1 האיבר האחרון הוא: 8(k+1)+3=8k+11

מכיוון שההתקדמות היא בפסיעה של 2, לכן:

3+5+7+9+11+…+(8k+3)+( 8k+5)+( 8k+7)+( 8k+9)+(8k+11)

תוספת נדרשת

כלומר נוספו עוד 4 איברים לטור.

3. 

פתרון:

עבור n = k הסדרה היא: 

עבור n = k+1 האיבר האחרון הוא: 

והסדרה היא:



כלומר נוספו עוד 5 איברים.

**בכל הוכחה באינדוקציה:**

א. נבדוק נכוֹנוּת הטענה עבור מקרה פרטי – בדרך כלל n = 1.

ב. נניח כי הטענה נכונה עבור: n = k

ג. נוכיח נכוֹנוּת הטענה עבור: n = k+1

וסיום ההוכחה: מתוך שני העקרונות: א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההוכחה שאם החוק מתקיים עבור k כלשהו, הוא יתקיים גם עבור k+1 - הוכחנו את נכונות הטענה עבור כל n טבעי.

**כאשר האיבר האחרון הוא כפולה של n, יש לבדוק כמה איברים נוספו, אם בכלל.**

***בדיקת הבנה***

12. כמה איברים יש להוסיף במעבר מ- n = k ל-n = k+1 בתרגילים הבאים:

א. 

ב. 

עתה נעבור לשילוב הצבת טורים מסוג זה והוכחות באינדוקציה:

ז. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:



פתרון:

1. בדיקה עבור מקרה פרטי: n = 1

הצבה באיבר אחרון: 

אבל הטור מתחיל ב- 3, לכן:



2. הנחה : עבור n = k טבעי כלשהו מתקיים:



3. צריך להוכיח: הטענה תתקיים גם עבור: n = k+1

כלומר צריך להוכיח את הזהות:



על ידי הצבת ההנחה:



הכפלה ב-6 וסידור המשוואה:



על פי שני העקרונות: א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההנחה וההוכחה שאם הטענה מתקיימת עבור k טבעי כלשהו, היא תתקיים גם עבור (k+1) - הוכחנו שהזהות מתקיימת עבור כל n טבעי.

***בדיקת הבנה***

13. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: 

ח. 1. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: 1-4+7-10+13…+(12n+1)=6n+1

2. מצאו את סכום הטור: 13-16+19…+25

3. מצאו את סכום הטור: 43-46+49...+151

פתרון סעיף 1:

1. בדיקה עבור מקרה פרטי: n = 1

הצבה באיבר אחרון:

אבל הטור מתחיל ב- 1, לכן: 

7=7

2. הנחה - עבור n = k טבעי כלשהו מתקיים: 1-4+7-10+13…+(12k+1)=6k+1

3. צריך להוכיח: הטענה תתקיים גם עבור: n = k+1

כלומר צריך להוכיח את הזהות:

1-4+7-10+13…+(12k+1) -(12k+4) +(12k+7) -(12k+10) +(12k+13)=6(k+1)+1

על ידי הצבת ההנחה: 6k+1-(12k+4) +(12k+7) -(12k+10) +(12k+13)=6(k+1)+1

6k+1-12k-4 +12k+7 -12k-10 +12k+13=6k+7

6k+7=6k+7

על פי שני העקרונות: א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההנחה וההוכחה שאם הטענה מתקיימת עבור k טבעי כלשהו, היא תתקיים גם עבור (k+1) - הוכחנו שהזהות מתקיימת עבור כל n טבעי.

פתרון סעיף 2:

לכאורה כבר ראינו שהביצוע הוא פשוט. נמצא את n תחילי:

13 = 12n+1

n = 1

נמצא את n סופי:

25 = 12n+1

n = 2

עתה נבצע חיסור של s(n=2) – s(n=0): 

חישוב מפורט לעומת זאת יראה לנו: 13-16+19-22+25 = 19

היכן הכֶּשֶל?

ובכן בסדרות מסוג של "הוספת איברים" עלינו לזכור **שבמעבר מ- n = 0 ל- n = 1 אנו מוסיפים דבוקה של מספר איברים** .

בשאלה שלנו נלקח בחשבון רק האיבר הרביעי מתוך דבוקה של ארבעה איברים.

לכן בסדרות כאלה יש לבדוק אילו איברים נלקחו בחשבון ולא רק איבר **בודד**.

כדי שנבין למה אנו קוראים **דבוקה**, הבה נבחן את הטור:

1-4+7-10+13-16+19-22+25-28+31-34+37-……

n=3 n=2 n=1

כמו שאנו רואים, מכל הדבוקה של n=1 נלקח בשאלה שלנו רק האיבר 13. לכן יש צורך להוסיף באופן ידני את הגודל הזה. הדרך הנכונה אם כן לפתור את התרגיל היא:

13-7+13=19 13-16+19…+25=sn=2 – sn=1+13=

כך מקבלים את התשובה הנכונה.

פתרון סעיף 3:

על בסיס הניתוח שערכנו בסעיף 2, נוכל לחשב את סעיף זה.

נרשום תחילה את הטור: 43-46+49...+151

אחר כך נמצא את ה- n המתאים להתחלה ולסוף:

151 = 12n+1

n = 12.5

מכאן אנו מבינים שאנו מגיעים עד סוף הדבוקה של n = 12, ועלינו להוסיף עוד שני איברים השייכים לדבוקה של n = 13. בקלות ניתן לראות שאלו הם האיברים: -148+151

באותו אופן: 43 = 12n+1

n = 3.5

מכאן אנו למדים שתחילת הטור הוא בשני האיברים האחרונים של דבוקה n = 4; הלא הם האיברים: 43-46

אולם ביניהם נמצאים כל הדבוקות של 5<n<12

לכן הפתרון: 43-46+49...+151 = sn=12 –sn=4+(-148+151)+(43-46)



***בדיקת הבנה***

14. א.הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:



ב. מצאו את סכום הטור: 

ג. מצאו את סכום הטור: 

***תרגול עצמי***

15 א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:



ב. מצאו את סכום הטור: 

16. א.הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: 

ב. מצאו את סכום הטור: 

17. א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: 

ב. מה ה- n המתאים למספר 63- ?

ג. האם המספר 61- נמצא בטור ? נמקו.

18. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: 

**אינדוקציה עם איבר ראשון משתנה**

עד כה הכרנו טורים שהתחילו במספר. באופן בלתי תלוי ב- n תמיד התחיל הטור באותו איבר. עתה נפנה לטפל בטורים המתחילים אף הם ב- n. השינוי העיקרי הוא בכך שכל n שנבחר ישפיע על תחילת הטור.

לדוגמה נתבונן בטור: n+(n+1)+(n+2)…+5n

עבור n = 1 נקבל את הטור: 1+2+3+4+5

אבל עבור n = 2 נקבל את הטור: 2+3+4+5+6+7+8+9+10

כלומר במעבר מ – n = 1 ל- n = 2 נוספו 5 איברים (כפי שכבר הכרנו) אולם **ירד איבר** אחד מתחילת הטור!

לכן כאשר אנו עוסקים בטורים שמתחילים עם n, עלינו לבדוק היטב ולהתחשב באיברים שירדו ולא רק באיברים שנוספו.

**בכל הוכחה באינדוקציה:**

א. נבדוק נכוֹנוּת הטענה עבור מקרה פרטי – בדרך כלל n=1

ב. נניח כי הטענה נכונה עבור: n = k

ג. נוכיח נכוֹנוּת הטענה עבור: n = k+1

וסיום ההוכחה: מתוך שני העקרונות: א. הבדיקה למקרה פרטי, ב.ההוכחה שאם החוק מתקיים עבור k כלשהו, הוא יתקיים גם עבור k+1 - הוכחנו את נכונות הטענה עבור כל n טבעי.

**כאשר האיבר האחרון הוא כפולה של n, יש לבדוק כמה איברים נוספו, אם בכלל.**

**כאשר הטור מתחיל ב-n , יש לבדוק אילו איברים ראשונים "נפלו".**

ט. הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים: 2n+(2n+2)+(2n+4)…+(6n)=4n(2n+1)

פתרון:

בתרגילים מסוג זה כדאי להציב לפחות שני ערכים מספריים כדי לראות את התנהגות הטור

(כמה איברים יורדים וכמה נוספים).

1. נציב למקרים פרטיים: n = 1



12 = 12

נציב עבור n = 2:





40 = 40

למדנו מהצבות אלה שבמעבר מ- k ל- (k+1) נופל איבר אחד בהתחלה, ונוספים שלושה איברים חדשים. כדאי לזכור זאת להמשך.

2. הנחה – עבור n = k טבעי כלשהו מתקיים: 2k+(2k+2)+(2k+4)…+(6k)=4k(2k+1)

3. צ"ל: הטענה תתקיים גם עבור: n = k+1,

כלומר צריך להוכיח את הזהות:

2(k+1)+[2(k+1)+2]+[2(k+1)+4]…+(6k)+(6k+2)+(6k+4)+(6k+6) = 4(k+1)[2(k+1)+1]

כלומר: (2k+2)+(2k+4)+(2k+6)+…+( 6k)+(6k+2)+(6k+4)+(6k+6) = 4(k+1)(2k+3)

עתה כשאנו באים להציב את ההנחה, עלינו לזכור שבמעבר ירד איבר ראשון, כי הסכום בהנחה כלל

את האיבר (2k) שעתה איננו. לכן עלינו להציב את השוויון:

**שימו לב:** האיבר הראשון עבר אגף

כי הוא יורד מהסכום לפי ההנחה.

(2k+2)+(2k+4)…+(6k)=4k(2k+1)-2k

על ידי הצבה נקבל: 4k(2k+1)-2k+ (6k+2)+(6k+4)+(6k+6) = 4(k+1)[2(k+1)+1]

8k2+4k-2k+18k+12 = 4(k+1)(2k+3)

8k2+20k+12 = 4(2k2+2k+3k+3)

8k2+20k+12 = 8k2+20k+12

על פי שני העקרונות: א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההנחה וההוכחה שאם הטענה מתקיימת עבור k טבעי כלשהו, היא תתקיים גם עבור (k+1) - הוכחנו שהזהות מתקיימת עבור כל n טבעי.

***בדיקת הבנה***

19. הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים: n+(n+1)+(n+2)+…+(3n) = 2n(2n+1)

י. הוכיחו באינדוקציה שלכל n>1 טבעי מתקיים:



פתרון:

1. נציב למקרים פרטיים:

בשאלה זו איננו יכולים להציב ב- n = 1 כי כבר מוכתב לנו התנאי n > 1. לכן ההצבה הראשונה שלנו תהיה: n = 2



הצבה שנייה: n = 3



אנו רואים שבמעבר מ- n=2 ל- n=3 ירד איבר ראשון, ונוספו שני איברים.

2. הנחה – עבור n = k k>1 טבעי כלשהו מתקיים:



3. . צריך להוכיח: הטענה תתקיים גם עבור: n = k+1

כלומר צריך להוכיח את הזהות:



על ידי הצבת ההנחה וקיזוז איבר ראשון:



נכפיל במכנה משותף ונארגן את השוויון:



על פי שני העקרונות: א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההנחה וההוכחה שאם הטענה מתקיימת עבור  טבעי כלשהו, היא תתקיים גם עבור (k+1) - הוכחנו שהזהות מתקיימת עבור כל  טבעי.

***בדיקת הבנה***

20. הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים:



21. הוכיחו באינדוקציה שלכל n >3 טבעי מתקיים:



***תרגול עצמי***

22. הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים:



23. הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים:



24. הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים:



**אינדוקציה של איברים זוגיים או אי זוגיים**

בדוגמה האחרונה שפתרנו ראינו שיש לקרוא היטב את התנאים עבור n כי אם היינו מציבים n=1, לא היינו מקבלים זהות של הטור. באותו אופן יש לשים לב לתנאֵי n כאשר מבקשים למצוא זהות לטור שבו יש לבחור n זוגי או אי זוגי. במקרים אלה צריך לשים לב לשני דברים: ראשית ההצבה למקרה פרטי צריכה לקיים את התנאי, ושנית כאשר אנו עוברים להוכחה, אנו נדרשים להוכיח כי אם החוק מתקיים עבור n=k כלשהו, הוא צריך להתקיים גם עבור **n=k+2** בין אם אנו נדרשים ל- n זוגי, ובין אם אנו נדרשים ל- n אי זוגי. בשני המקרים ה- n הבא לא יהיה ה- n העוקב אלא זה שאחריו.

**בכל הוכחה באינדוקציה:**

א. נבדוק נכוֹנוּת הטענה עבור מקרה פרטי – בדרך כלל n=1

ב. נניח כי הטענה נכונה עבור: n = k

ג. נוכיח נכוֹנוּת הטענה עבור: n = k+1

וסיום ההוכחה: מתוך שני העקרונות: א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההוכחה שאם החוק מתקיים עבור k כלשהו, הוא יתקיים גם עבור k+1 - הוכחנו את נכונות הטענה עבור כל n טבעי.

**כאשר האיבר האחרון הוא כפולה של n, יש לבדוק כמה איברים נוספו, אם בכלל.**

**כאשר הטור מתחיל ב-n, יש לבדוק אילו איברים ראשונים "נפלו".**

**עבור n זוגי או אי זוגי צריך להוכיח עבור: n=k+2**

יא. הוכיחו כי לכל n טבעי זוגי מתקיים: 

פתרון:

1. בדיקה למקרה פרטי: n = 2



2 = 2

2. הנחה – עבור n = k טבעי זוגי כלשהו מתקיים: 

3. צריך להוכיח: הטענה תתקיים גם עבור: n = k+2

 כלומר צריך להוכיח את הזהות: 

על ידי הצבה של ההנחה:

הסבר:

לפי חוקי חזקות



על פי שני העקרונות: א. הבדיקה למקרה פרטי זוגי, ב. ההוכחה שאם הטענה מתקיימת עבור k טבעי זוגי כלשהו, היא תתקיים גם עבור (k+2) - הוכחנו שהזהות מתקיימת עבור כל n טבעי זוגי.

***בדיקת הבנה***

25. הוכיחו כי לכל n טבעי זוגי מתקיים:



יב. הוכיחו כי לכל n טבעי אי זוגי מתקיים:



פתרון:

1. בדיקה למקרה פרטי: n = 1



2. . הנחה – עבור n = k טבעי אי זוגי כלשהו מתקיים:



3. צריך להוכיח: הטענה תתקיים גם עבור: n = k+2

כלומר צריך להוכיח את הזהות:



הכפלה ב :

 על ידי הצבה של ההנחה:

על פי שני העקרונות: א. הבדיקה למקרה פרטי אי זוגי, ב. ההוכחה שאם הטענה מתקיימת עבור k טבעי אי זוגי כלשהו, היא תתקיים גם עבור (k+2) - הוכחנו שהזהות מתקיימת עבור כל n טבעי אי זוגי.

 ***בדיקת הבנה***

26. הוכיחו כי לכל n טבעי אי זוגי מתקיים:

***תרגול עצמי***

27. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n>2 מתקיים: 

28. הוכיחו כי לכל n טבעי זוגי מתקיים: 

29. הוכיחו כי לכל n טבעי אי זוגי מתקיים: 

**אינדוקציה של התלכדות סדרות**

כדי להשלים את סוגי האינדוקציה של הזהויות נתבונן בזהויות של סדרות. כפי שכבר ראינו, ניתן לאפיין סדרה על ידי שני ניסוחים: ניסוח אחד הוא באמצעות "כלל לפי מקום", והניסוח השני הוא באמצעות "כלל נסיגה". האמת היא שניתן לעבור מניסוח אחד לשני או להוכיח ששני ניסוחים שנראים שונים, מהווים, למעשה, את אותה סדרה. גם הוכחות מסוג זה נוחות לביצוע על ידי אינדוקציה מתמטית.

יג. הוכיחו באינדוקציה כי הסדרה: bn = 3n2-3n+5

והסדרה: an+1 = an+6n כאשר a1 = 5 מתלכדות.

בהתאם לכללי האינדוקציה, כדי להוכיח ששתי סדרות: an ו- bn מתלכדות, עלינו:

1. לבדוק למקרה פרטי שמתקיים a1 = b1

2. מניחים ש: ak = bk עבור k כלשהו

3. מוכיחים כי אם 2. נכון, מתקיים גם: a(k+1) = b(k+1)

פתרון:

1. בדיקה למקרה פרטי: n = 1



5 = 5

2. הנחה – עבור n = k טבעי כלשהו מתקיים: bk = ak

כלומר: 3k2-3k+5 = ak

3. צ"ל: bk+1 = ak+1

כלומר: 3(k+1)2-3(k+1)+5 = ak+1

הוכחה:

תחילה נפתח סוגריים: 3k2+6k+3-3k-3+5 = ak+1

שימוש בחוקיות הסדרה a: 3k2+3k+5 = ak+6k

שימו לב לשימוש שנעשה כאן בחוקיות הסדרה a עצמה. עליה אין עוררין, ואין צורך להוכיח את נכונותה.

הצבת ההנחה: 3k2+3k+5 = 3k2-3k+5+6k

3k2+3k+5 = 3k2+3k+5

על פי שני העקרונות: א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההנחה וההוכחה שאם הטענה מתקיימת עבור k טבעי כלשהו, היא תתקיים גם עבור (k+1) - הוכחנו שהסדרות מתלכדות.

יד. נתונות הסדרות:  ו-  כאשר 

הוכיחו באינדוקציה כי הסדרות מתלכדות.

פתרון:

1. בדיקה למקרה פרטי: n = 1



2. הנחה – עבור n = k טבעי כלשהו מתקיים: bk=ak

כלומר: 

3. צ"ל: bk+1 = ak+1

כלומר: 

הצבת ההנחה:

חיבור שברים:

צמצום:

לפי חוקיות הסדרה b : 

על פי שני העקרונות: א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההנחה וההוכחה שאם הטענה מתקיימת עבור k טבעי כלשהו, היא תתקיים גם עבור (k+1) - הוכחנו שהסדרות מתלכדות.

***בדיקת הבנה***

30. נתונות הסדרות: an = 2n2-2n+1 ו- bn+1 = bn+4n כאשר b1 = 1. הוכיחו באינדוקציה כי הסדרות מתלכדות.

31. נתונות הסדרות:  ו-  כאשר 

הוכיחו באינדוקציה כי הסדרות מתלכדות.

***תרגול עצמי***

*32*. הוכיחו באינדוקציה כי לכל  טבעי הסדרה: 

מתלכדת עם הסדרה:  כאשר 

33. הוכיחו באינדוקציה כי לכל  טבעי הסדרה: 

מתלכדת עם הסדרה:  כאשר 

34. נתונות הסדרות:  ו-  כאשר 

הוכיחו כי לכל  טבעי הסדרות מתלכדות.

35. נתונות הסדרות:  ו-  כאשר 

הוכיחו כי לכל  טבעי הסדרות מתלכדות.

**אינדוקציה של אי שוויון**

עד כה ראינו וריאציות שונות של אינדוקציה של זהויות, כלומר של שוויונות. עתה נעבור לטפל באינדוקציה של אי שוויונות. אין בדבר זה כדי לשנות מאומה מתבנית הוכחת האינדוקציה, אלא שכאן יש תוספת של הבנה לוגית להוכחה. נתחיל במצב של סכום סדרה הגדול או קטן מביטוי.

האות היוונית  מציינת סכום:

 מציין: סכום אברי הסדרה 

 מציין: סכום אברי הסדרה 

כלומר:



כאן אנו עובדים לפי הרעיון הבא:

הנחה :  לכל k טבעי (1)

צ"ל: אם ההנחה מתקיימת, אז מתקיים גם: 

דרך ההוכחה:

אנו מוכיחים ש:  (2)

משורות (1) ו- (2) נובע בהכרח ש:  לכל k טבעי

כלומר: 

וזה מה שנדרשנו להוכיח (אם הכתיבה נראית מסובכת, הרי שהדוגמה הבאה תבהיר את העניין).

טו. הוכיחו שלכל n>1 טבעי מתקיים: 

פתרון:

1. בדיקה למקרה פרטי: n = 2

2. הנחה – עבור n = k>1 טבעי כלשהו מתקיים:



3. צ"ל: הטענה תתקיים גם עבור: n = k+1 (k>1)

כלומר צריך להוכיח: 

הצבת ההנחה: 



על פי שני העקרונות: א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההוכחה שאם הטענה מתקיימת עבור k>2 טבעי כלשהו, היא תתקיים גם עבור (k+1) - הוכחנו שהטענה מתקיימת עבור כל n>2 טבעי .

טז. הוכיחו שלכל n טבעי מתקיים:





פתרון:

1. בדיקה למקרה פרטי: n = 1

2. הנחה – עבור n = k טבעי כלשהו מתקיים:



3. צ"ל: הטענה תתקיים גם עבור: n = k+1

כלומר צריך להוכיח:





הצבת ההנחה:

על פי שני העקרונות: א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההוכחה שאם הטענה מתקיימת עבור k>2 טבעי כלשהו, היא תתקיים גם עבור (k+1) - הוכחנו שהטענה מתקיימת עבור כל n>2 טבעי .

***בדיקת הבנה***

36. הוכיחו שלכל n> 3 טבעי מתקיים: **

בדוגמה הבאה נראה חשיבה לוגית קצת שונה.

אם ההנחה היא: a ≥ b

ואנו יודעים כי גם: c ≥ d

סכומם חייב לקיים: a+c ≥ b+d

אותו היגיון חל גם עבור הסימן ≤.

טז. הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים: 2n ≤ 2n

פתרון:

1. בדיקה למקרה פרטי: n = 1



2 ≤ 2

2. הנחה – עבור n = k טבעי כלשהו מתקיים:2k ≤ 2k

3. צ"ל: הטענה תתקיים גם עבור: n = k+1

כלומר צריך להוכיח: 2(k+1) ≤ 2k +1

הפעם נתחיל בפתיחת הסוגריים והחזקה (אנו רואים שאין בביטוי שאנו רוצים להוכיח, את התבנית של ההנחה): 

כלומר: 2k+2 ≤ 2k+2k

הוכחה:

לפי ההנחה: 2k ≤ 2k

ברור לנו ש: 2 ≤ 2k  (k טבעי)

לכן סכומם גם כן מקיים: 2k+2 ≤ 2k+2k

על פי שני העקרונות: א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההוכחה שאם הטענה מתקיימת עבור k טבעי כלשהו, היא תתקיים גם עבור (k+1) - הוכחנו שהטענה מתקיימת עבור כל n טבעי .

***בדיקת הבנה***

37. הוכיחו שלכל n טבעי מתקיים: **

נביא עוד דוגמה בה נִראה חשיבה לוגית אחרת.

אם ההנחה היא : a > b

ואנו מוכיחים ש: b > c

חייב להתקיים: a > b > c

כלומר : a > c

אותו היגיון חל גם עבור הסימן <.

יז. הוכיחו שלכל n > 3 טבעי מתקיים: 

פתרון:

1. בדיקה למקרה פרטי: n = 4

2. הנחה – עבור n = k טבעי כלשהו מתקיים: 

3. צ"ל: הטענה תתקיים גם עבור: n = k+1

כלומר צריך להוכיח: 

הוכחה: 

לפי ההנחה: 

ומכאן שמספיק להוכיח ש: 

על ידי פתיחת סוגריים וסידור:

פתרון אי השוויון הריבועי נותן: k > 1.36 או k < -0.36

ולכן עבור k > 3 וודאי אי השוויון מתקיים .

על פי שני העקרונות: א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההוכחה שאם הטענה מתקיימת עבור k>3 טבעי כלשהו, היא תתקיים גם עבור (k+1) - הוכחנו שהטענה מתקיימת עבור כל n>3 טבעי .

**בכל הוכחה באינדוקציה:**

א. נבדוק נכוֹנוּת הטענה עבור מקרה פרטי – בדרך כלל n=1

ב. נניח כי הטענה נכונה עבור: n=k

ג. נוכיח נכוֹנוּת הטענה עבור: n=k+1

וסיום ההוכחה: מתוך שני העקרונות: א.הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההוכחה שאם החוק מתקיים עבור k כלשהו, הוא יתקיים גם עבור k+1 - הוכחנו את נכונות הטענה עבור כל n טבעי.

**כאשר האיבר האחרון הוא כפולה של n, יש לבדוק כמה איברים נוספו, אם בכלל.**

**כאשר הטור מתחיל ב-n, יש לבדוק אילו איברים ראשונים "נפלו".**

**עבור n זוגי או אי זוגי צריך להוכיח עבור: n=k+2**

**באי שוויונים:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| לוגי א' | לוגי ב' | לוגי ג' |
| Σa(k)<b(k) | a≥b | a>b |
| Σa(k+1)<b(k+!) | c≥d | b>c |
| b(k)+a(k+1)<b(k+1) | a+c≥b+d | a>b>c |
| Σa(k)+ a(k+1)<b(k+1) |  | a>c |
| Σa(k+1)<b(k+1) |  |  |

***בדיקת הבנה***

38. הוכיחו שלכל n >4 טבעי מתקיים: **

***תרגול עצמי***

39. הוכיחו באינדוקציה שלכל n > 1 טבעי מתקיים: 

40. הוכיחו באינדוקציה שלכל n > 3 טבעי מתקיים: 

41. הוכיחו באינדוקציה שלכל n > 1 טבעי מתקיים: 

42. הוכיחו באינדוקציה שלכל n > 2 טבעי מתקיים: 

**אינדוקציה של תכונות התחלקות**

עד כאן עסקנו בהוכחות של סכום טורים. עתה נעבור לעוד סוג של הוכחות שנוח להוכיחן באינדוקציה, והן תכונות התחלקות של ביטויים אלגבריים. תבנית ההוכחה אינה משתנה בנסיבות אלה אלא רק דרך ההוכחה.

יח. הוכיחו כי הביטוי: n3-n מתחלק ב- 6 ללא שארית לכל n טבעי.

פתרון:

1. בדיקה למקרה פרטי: n = 1

13-1 = 0

אם איננו מסתפקים בכך (כי 0 נראה לנו חשוד), נבצע בדיקה גם עבור: n = 2

23-2 = 6 וודאי מתחלק ב- 6 ללא שארית.

2. הנחה: k3-k מתחלק ב- 6 ללא שארית לכל n = k טבעי.

3. צ"ל: גם (k+1)3-(k+1) מתחלק ב- 6 ללא שארית.

הוכחה: (k+1)3-(k+1)=

לפי הנוסחה: 

k3+3k2+3k+1-k-1=

הסידור נועד לזיהוי קל יותר של ההנחה בתוך הביטוי.

k3-k+3k2+3k=

לפי ההנחה, k3-k מתחלק ב- 6 ללא שארית, לכן נותר רק להראות שגם 3k2+3k מתחלק ב- 6 ללא שארית. 3k2+3k = 3k(k+1)

הביטוי: k(k+1) מייצג שני מספרים עוקבים, לכן אחד מהם חייב להיות זוגי. נובע מכך שהמכפלה חייבת אף היא להיות מספר זוגי, כלומר הוא כפולה של 2.

לכן 3k(k+1) הוא כפולה של מספר זוגי ב- 3, ולכן הוא חייב להתחלק ב- 6 כי הוא כפולה של .

סיכום: מכיוון ש: k3-k מתחלק ב- 6 ללא שארית מתוך ההנחה.

ו-: 3k(k+1) מתחלק ב- 6 ללא שארית.

לכן: k3-k+3k2+3k סכומם חייב אף הוא להתחלק ב- 6.

על פי שני העקרונות: א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההוכחה שאם הטענה מתקיימת עבור k טבעי כלשהו, היא תתקיים גם עבור (k+1) - הוכחנו שהטענה מתקיימת עבור כל n טבעי .

**בכל הוכחה באינדוקציה:**

א. נבדוק נכוֹנוּת הטענה עבור מקרה פרטי – בדרך כלל n=1

ב. נניח כי הטענה נכונה עבור: n=k

ג. נוכיח נכוֹנוּת הטענה עבור: n=k+1

וסיום ההוכחה: מתוך שני העקרונות: א.הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההוכחה שאם החוק מתקיים עבור k כלשהו, הוא יתקיים גם עבור k+1 - הוכחנו את נכונות הטענה עבור כל n טבעי.

**כאשר האיבר האחרון הוא כפולה של n, יש לבדוק כמה איברים נוספו, אם בכלל.**

**כאשר הטור מתחיל ב-n, יש לבדוק אילו איברים ראשונים "נפלו".**

**עבור n זוגי או אי זוגי צריך להוכיח עבור n=k+2**

**באי שוויונים:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| לוגי א' | לוגי ב' | לוגי ג' |
| Σa(k)<b(k) | a≥b | a>b |
| Σa(k+1)<b(k+!) | c≥d | b>c |
| b(k)+a(k+1)<b(k+1) | a+c≥b+d | a>b>c |
| Σa(k)+ a(k+1)<b(k+1) |  | a>c |
| Σa(k+1)<b(k+1) |  |  |

**בתכונות חלוקה**

אם איברים מסוימים מתחלקים במספר, גם סכומם מתחלק באותו מספר.

***בדיקת הבנה***

43. הוכיחו כי הביטוי: 3n2+21n+36 מתחלק ב- 6 ללא שארית לכל n טבעי.

יט. הוכיחו כי הביטוי: 23n-1 מתחלק ב- 7 ללא שארית לכל n טבעי.

פתרון:

1. בדיקה למקרה פרטי: n=1

23-1=7

וודאי מתחלק ב- 7 ללא שארית.

2. הנחה: 23k-1 מתחלק ב-7 ללא שארית לכל n=k טבעי.

3. צ"ל: גם23(k+1)-1 מתחלק ב-7 ללא שארית

הוכחה: 23(k+1)-1 = 23k+3-1 =



המהלך האחרון נועד כדי לחלץ את ההנחה. מכיוון שההנחה שלנו מבוססת על הביטוי , (23k-1)אנו חייבים לחלץ מהביטוי שעלינו להוכיח, בדיוק את הביטוי הזה ללא מעורבות של מכפלות נוספות.

מכאן והלאה: נבחן את הביטוי:

 מתחלק ב- 7 ללא שארית לפי ההנחה.

 מתחלק ב- 7 כי הוא כפולה של 7.

לכן סכומם מתחלק ב- 7, ובצעדי רגרסיה (צעידה לאחור) נקבל:

23(k+1)-1 מתחלק ב- 7 ללא שארית.

על פי שני העקרונות: א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההוכחה שאם הטענה מתקיימת עבור k טבעי כלשהו, היא תתקיים גם עבור (k+1) - הוכחנו שהטענה מתקיימת עבור כל n טבעי.

***בדיקת הבנה***

44. הוכיחו כי הביטוי: 24n-1 מתחלק ב- 15 ללא שארית לכל n טבעי.

כמו בזהויות גם בתכונות חלוקה אנו יכולים למצוא ביטוי המתקיים רק למספרים זוגיים או אי זוגיים. דרך הפתרון לא משתנה אלא מתחשבת בתנאי זה.

כ. הוכיחו כי הביטוי: 7n+4n מתחלק ב- 11 ללא שארית לכל n טבעי אי זוגי.

פתרון:

1. בדיקה למקרה פרטי: n = 1

71+41=11 וודאי מתחלק ב- 11 ללא שארית.

2. הנחה: 7k+4k מתחלק ב- 11 ללא שארית לכל n=k טבעי אי זוגי.

3. צ"ל: גם7k+2+4k+2 מתחלק ב- 11 ללא שארית.

הוכחה: 7k+2+4k+ 2 = (1)

  **\*\***

 (3)

16(7k+4k) מתחלק ב- 11 ללא שארית כי הוא כפולה שלמה של ההנחה.

 מתחלק ב- 11 ללא שארית כי הוא כפולה של 11.

לכן גם סכומם מתחלק ב- 11 ללא שארית.

ובצעדי רגרסיה נקבל: 7k+2+4k+2 מתחלק ב- 11 ללא שארית.

**\*\* הבחירה לחלק את המכפלה  ל- איננה שרירותית. היא מתבססת על העובדה שההנחה כוללת שני איברים: 4kו- 7k. בשורה מס' (1) אנו מוצאים את האיבר4k  מופיע 16 פעמים (מוכפל ב – 16) ואת האיבר7k  מופיע 49 פעמים (מוכפל ב- 49). מספר הפעמים שאנו יכולים למצוא כחיבור של שני האיברים, הוא לפי המספר הנמוך שהוא המספר המגביל. ולכן אנו מפרקים את ה- 49 ל- 16 פעמים של האיבר 7k שיצטרפו לאיבר 4k, וביחד הם ישלימו את הביטוי בהנחה 16 פעמים, והנותר הוא 49-16 = 33, כפי שאנו רואים בשורה מס' (3).**

על פי שני העקרונות: א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההוכחה שאם הטענה מתקיימת עבור k טבעי אי זוגי כלשהו, היא תתקיים גם עבור (k+2) - הוכחנו שהטענה מתקיימת עבור כל n טבעי אי זוגי.

***בדיקת הבנה***

45. הוכיחו כי הביטוי: ** מתחלק ב- 120 ללא שארית לכל n טבעי זוגי.

כא.הוכיחו כי הביטוי:  מתחלק ב- 9 ללא שארית לכל n טבעי.

פתרון:

1. בדיקה למקרה פרטי: n = 1

 וודאי מתחלק ב- 9 ללא שארית.

2. הנחה:  מתחלק ב- 9 ללא שארית לכל n=k טבעי.

3. צ"ל: גם  מתחלק ב- 9 ללא שארית.

הוכחה: 

סידור של הביטוי: 

 מתחלק ב- 9 ללא שארית לפי ההנחה.

נותר להוכיח כי :  מתחלק ב- 9 ללא שארית.

במקרים שקשה להראות את ההוכחה באופן פשוט, ניתן, כמובן, לבנות אינדוקציה חדשה לביטוי שמתקבל. במקרה שלנו:

נוכיח כי:  מתחלק ב – 9 ללא שארית עבור כל k טבעי.

בדיקה למקרה פרטי: k = 1

 מתחלק ב- 9 ללא שארית.

הנחה:  מתחלק ב- 9 ללא שארית לכל k = z טבעי

צ"ל: 

הוכחה: 



 מתחלק ב- 9 ללא שארית לפי ההנחה.

 מתחלק ב- 9 ללא שארית כי הוא כפולה של 9.

לכן סכומם מתחלק ב- 9 ללא שארית. ובצעדי רגרסיה נקבל:

 מתחלק ב- 9 ללא שארית.

לסיכום:  מתחלק ב- 9 ללא שארית.

 מתחלק ב- 9 ללא שארית לפי ההנחה הראשונה.

לכן סכומם מתחלק ב- 9 ללא שארית. ובצעדי רגרסיה שנייה נקבל:

 מתחלק ב- 9 ללא שארית.

על פי שני העקרונות: א. הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההוכחה שאם הטענה מתקיימת עבור k טבעי כלשהו, היא תתקיים גם עבור (k+1) - הוכחנו שהטענה מתקיימת עבור כל n טבעי.

**בכל הוכחה באינדוקציה:**

א. נבדוק נכוֹנוּת הטענה עבור מקרה פרטי – בדרך כלל n=1

ב. נניח כי הטענה נכונה עבור n=k

ג. נוכיח נכוֹנוּת הטענה עבור: n=k+1

וסיום ההוכחה: מתוך שני העקרונות: א.הבדיקה למקרה פרטי, ב. ההוכחה שאם החוק מתקיים עבור k כלשהו, הוא יתקיים גם עבור k+1 - הוכחנו את נכונות הטענה עבור כל n טבעי.

**כאשר האיבר האחרון הוא כפולה של n, יש לבדוק כמה איברים נוספו, אם בכלל.**

**כאשר הטור מתחיל ב-n, יש לבדוק אילו איברים ראשונים "נפלו".**

**עבור n זוגי או אי זוגי צריך להוכיח עבור n=k+2**

**באי שוויונים:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| לוגי א' | לוגי ב' | לוגי ג' |
| Σa(k)<b(k) | a≥b | a>b |
| Σa(k+1)<b(k+!) | c≥d | b>c |
| b(k)+a(k+1)<b(k+1) | a+c≥b+d | a>b>c |
| Σa(k)+ a(k+1)<b(k+1) |  | a>c |
| Σa(k+1)<b(k+1) |  |  |

**בתכונות חלוקה**

אם איברים מסוימים מתחלקים במספר, גם סכומם מתחלק באותו מספר.

במקרים שקשה להוכיח תכונות בעזרת האריתמטיקה, קל להוכיח בעזרת אינדוקציה נוספת.

***בדיקת הבנה***

*46.* הוכיחו כי הביטוי:  מתחלק ב- 18 ללא שארית לכל n טבעי.

***תרגול עצמי***

47. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי לכל n טבעי גדול מ- 1 מתקיים:



48. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי לכל n טבעי מתקיים:

13-23+33-43+…+(2n-1)3 = 4n3-3n2

49 . נתון אי השוויון: 

א. החל מאיזה n טבעי מתקיים אי השוויון ?

ב. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי אי השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מאותוn שמצאתם בסעיף א'.

50. נתון הטור : 

א. מהו המחובר ה- n בטור ?

ב. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי סכום n האיברים בטור הוא: 

51. א. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי לכל n טבעי מתקיים:



ב. חשבו את הסכום: 

52. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי לכל n טבעי מתחלק הביטוי:  ב- *6* ללא

שארית.

53. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי לכל n טבעי מתקיים: > n2+1

54. א. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי לכל n טבעי גדול מ-*4* מתקיים:



ב. הוכיחו על סמך סעיף א' כי: 

55. א. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי לכל n טבעי מתקיים:



ב. חשבו את המכפלה: 

56. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי לכל n טבעי מתחלק הביטוי: 

ב- *8* ללא שארית.

57. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי לכל n טבעי מתקיים:

(2n+1)+(2n+3)+…+(4n-1) = 3n2

58. א. הוכיחו את הטענה: אם ל- n טבעי מסוים 3n+5n מתחלק ב- *16*, אזי גם הביטוי:

3n+2+5n+2 מתחלק ב- *16*.

ב. האם מהוכחת הטענה שבסעיף א' אכן נובע שהביטוי: 3n+5n  מתחלק ב- *16* לכל n טבעי ?

ג. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי לכל n טבעי אי זוגי מתחלק הביטוי:

3n+5n ב- *8* ללא שארית.

**פתרונים**

2. ב. 1430

3. ב. 7     ג. 1/15

4. ב. 29,568

7. ב. 495

8. ב. 6    ג. 50/39

9. ב. 4914

12. א. 2    ב.3

14 ב. 501 ג. 7105

15. ב. 445

16. ב. 100

17. ב. 16     ג. לא. האיבר בטור הוא 61+

49. א. 

50. א. 

51. ב. 

55. ב. 13/34

58. ב. לא