דוגמאות :

ס״ב. מצאו את המצב ההדדי בין המישורים :

I $x-2y+5z-1=0$

II $3x-6y+15z-3=0$

פתרון :

על ידי בידוד x במשוואה I : I $x=2y-5z+1$

הצבה ב- II : II $3(2y-5z+1)-6y+15z-3=0$

$6y-15z+3-6y+15z-3=0$

$\underline{0=0}$

מתקבלת זהות, ולכן המישורים מתלכדים .

האמת היא שבמקרה זה אין צורך ״לעבוד קשה מדי״ , מספיק לראות שמתקיים : $II=3\cdot I$, ולהבין שלמעשה, זוהי אותה משוואת מישור .

ולכן תמיד כשמתקיים : $II=t\cdot I$, נוכל להסיק בוודאות שהמישורים מתלכדים .

ס״ג. מצאו את המצב ההדדי בין המישורים :

I $\pi:\underline{x}=(1,2,3)+t(4,2,5)+s(-1,-2,7)$

II $24x-33y-6z+10=0$

פתרון :

כאן כדאי להשתמש בהצבה במשוואה I :

$x=1+4t-s$

$y=2+2t-2s$

$z=3+5t+7s$

הצבה ב- II : $24(1+4t-s)-33(2+2t-2s)-6(3+5t+7s)+10=0$

$24+96t-24s-66-66t+66s)-18-30t-42s+10=0$

$\underline{-50=0}$

אין פתרון, לכן המישורים מקבילים .

ס״ד. מצאו את המצב ההדדי בין המישורים :

I $\pi_1:\underline{x}=(-1,-2,4)+t(2,1,-2)+s(5,5,-7)$

II $\pi_2:\underline{x}=(1,3,1)+k(0,-4,1)+m(3,0,4)$

פתרון :

כאן נשווה את רכיבי x,y,z של המישורים :

I $-1+2t+5s=1+3m$

II $-2+t+5s=3-4k$

III $\underline{4-2t-7s=1+k+4m}$

ממשוואה II : $t=5-4k-5s$

הצבה ב- I : $-1+2(5-4k-5s)+5s=1+3m$

$-1+10-8k-10s+5s=1+3m$

$8-8k-5s=3m$

$\frac{8-8k-5s}{3}=m$

הצבה של m,t ב- III :

$$4-2(5-4k-5s)-7s=1+k+4\cdot\frac{8-8k-5s}{3} \quad / \cdot 3$$

$$4-10+8k+10s-7s=1+k+\frac{32-32k-20s}{3}$$

$$12-30+24k+30s-27s=3+3k+32-32k-20s$$

$$53k+23s=53$$

כלומר המישורים נחתכים, ויש דרגת חופש אחת !

אם נרצה למצוא את משוואת הישר החותך, נמצא שתי נקודות :

עבור $s=0 \rightarrow k=1 \rightarrow m=-1 \rightarrow t=1$

עבור $s=-53 \rightarrow k=24 \rightarrow m=27 \rightarrow t=174$

נציב את המשוואות במישור ונקבל :

$$A=(1,3,1)+1(0,-4,1)-1(3,0,4)$$

$$A=(4,-4,-2)$$

$$B=(1,3,1)+24(0,-4,1)+27(3,0,4)$$

$$B=(82,-93,121)$$

משתי נקודות אלה נמצא את ישר החיתוך : $\underline{l:\underline{x}=(4,-4,-2)+r(-78,89,-123)}$

מדוגמאות אלה אפשר ללמוד שני דברים :

האחד הוא שההצגה של המישורים מכתיבה את דרך הפתרון. לכל הצגה ניגשים באופן שונה קצת כדי שהפתרון יהיה פשוט יותר .

השני הוא מה שניתן ללמוד מהתוצאה.

אם יש זהות - המישורים מתלכדים .

אם אין פתרון - המישורים מקבילים .

אם יש פתרון אבל עם דרגת חופש - המישורים נחתכים , וניתן למצוא ישר חיתוך.

כדי להבהיר את הדברים נביא עוד דוגמה למציאת ישר חיתוך.

ס"ה. מצאו את משוואת ישר החיתוך של שני המישורים :

$$\begin{array}{ll} I & x-2y+4z-5=0 \\ II & -2x+6y+z+12=0 \end{array}$$

פתרון :

כמו קודם בהצגה כזו נבודד את x במשוואה I : $x=2y-4z+5$

ונציב במשוואה II : $-2(2y-4z+5)+6y+z+12=0$

$$-4y+8z-10+6y+z+12=0$$

$$2y+9z+2=0$$

עתה נבחר נקודות (כמו תמיד, כדאי לבחור נקודות קלות, אחרת מסתבכים בשברים) .

נבחר : $z=2$, ואז : $y=-10$, ו- $x=-23$

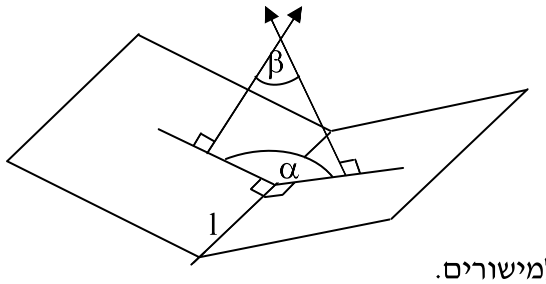
נבחר : $z=0$, ואז : $y=-1$, ו- $x=3$

משתי הנקודות : $A(-23,-10,2)$ $B(3,-1,0)$

בונים משוואת ישר : $\underline{l:\underline{x}=(3,-1,0)+t(-26,-9,-2)}$

זווית בין מישורים

אם כבר ראינו ששני מישורים נחתכים לאורך ישר, הרי שקיימת זווית ביניהן . איך מוגדרת זווית זו ?
כדי למצוא אותה עלינו למצוא את הזווית בין שני אנכים לישר החיתוך היוצאים מאותה נקודה !



בציור מתוארים המישורים : π_1 , π_2 .

l הוא ישר החיתוך בין המישורים .

הזווית α נמצאת בין שני ישרים היוצאים מאותה נקודה , מאונכים לישר החותך , ומוכלים במישורים בהתאמה .

הזווית β היא זווית בין שני הווקטורים הניצבים למישורים.

כפי שכבר ראינו, קל למצוא את ווקטורי הניצבים. ולפי המכפלה הסקלרית, מוצאים את זווית β .

אולם : $\cos\beta = -\cos\alpha$ כי : $\alpha + \beta = 180^0$

ולכן נבחר תמיד את הערך המוחלט של $\cos\beta$ כי בכל מקרה אנו מחפשים את הזווית <u>החדה</u> בין המישורים .

ולכן הזווית בין שני מישורים :

$$\cos\alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}$$

כאשר $\underline{u}$ - ווקטור ניצב למישור אחד.

$\underline{v}$ - ווקטור ניצב למישור השני.

דוגמה :

ס"ו. מצאו את הזווית בין המישורים :

I $\quad 2x + 3y - 4z + 12 = 0$

II $\quad -x - y + 6z - 7 = 0$

פתרון :

ממשוואה I : $\underline{u} = (A,B,C) = (2,3,-4)$

ממשוואה II : $\underline{v} = (A,B,C) = (-1,-1,6)$

$$\cos\alpha = \left|\frac{(2,3,-4)(-1,-1,6)}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+6^2}}\right| = \frac{29}{5.38 \cdot 6.16} = 0.875$$

$$\underline{\alpha = 28.9^0}$$

באותו אופן ניתן למצוא זווית בין מישורים הנתונים בהצגה פרמטרית, אלא שאז כדאי לעבור תחילה להצגה כללית.

ס"ז. נתונים שני מישורים. מצאו את הזווית ביניהם.

$$\pi_1 : \underline{x} = (1,2,-3) + t(1,-4,7) + s(9,-5,-1)$$

$$\pi_2 : \underline{x} = (3,11,-9) + k(4,2,-6) + m(8,-1,5)$$

פתרון :

נעבור להצגה כללית של מישור π_1 :

I $\quad (A,B,C)(1,-4,7) = 0$

II $\quad \underline{(A,B,C)(9,-5,-1) = 0}$

$$\text{I} \quad A-4B+7C=0$$

$$A=4B-7C$$

הצבה ב- II :

$$\text{II} \quad 9(4B-7C)-5B-C=0$$

$$36B-63C-5B-C=0$$

$$31B=64C$$

$$B=64 \qquad C=31$$

$$A=4\cdot 64-7\cdot 31=39$$

וקטור הניצב למישור π_1 : $\underline{u}=t(39,64,31)$

נעבור למישור π_2 :

$$\text{I} \quad (A,B,C)(4,2,-6)=0$$

$$\text{II} \quad (A,B,C)(8,-1,5)=0$$

$$4A+2B-6C=0$$

$$B=3C-2A$$

הצבה במשוואה II :

$$8A-3C+2A+5C=0$$

$$6A+2C=0$$

$$A=1 \qquad C=-3$$

$$B=3\cdot(-3)-2\cdot 1=-11$$

וקטור הניצב למישור π_2 : $\underline{v}=t(1,-11,3)$

והזווית בין המישורים:

$$\cos\alpha=\left|\frac{(39,64,31)(1,-11,3)}{\sqrt{39^2+64^2+31^2}\cdot\sqrt{1^2+11^2+3^2}}\right|=\frac{572}{81.1\cdot 11.4}=0.618$$

$$\underline{\alpha=51.8^0}$$

בדיקת הבנה

128. א. מצאו את המצב ההדדי בין המישורים הבאים, וקבעו אם הם נחתכים, מקבילים או מתלכדים .

ב. עבור המישורים הנחתכים מצאו את ישר החיתוך .

ג. עבור המישורים הנחתכים מצאו את הזווית ביניהם.

I	$2x+3y-4z+6=0$	$x-y+2z-1=0$
II	$-4x-3y+2z+9=0$	$8x+6y-4z+7=0$
III	$6x-10y+2z-12=0$	$9x-15y+3z-12=0$

IV $\pi_1:\underline{x}=(1,-1,3)+t(3,-1,4)+s(4,-7,3)$

$\pi_2:\underline{x}=(2,-3,7)+k(2,5,5)+m(1,11,6)$

V $\pi_1:\underline{x}=(4,2,-5)+t(1,1,-4)+s(-5,-5,12)$

$\pi_2:\underline{x}=(3,1,-1)+k(-4,-4,8)+m(-2,-2,8)$

VI $\pi_1:\underline{x}=(3,-5,-6)+t(2,-3,-13)+s(-1,13,3)$

$\pi_2 : \underline{x} = (-4,-1,5) + k(-5,1,-2) + m(-8,-9,14)$

VII

$5x + 17y - z + 100 = 0$

$\pi : \underline{x} = (3,-5,2) + t(4,-1,3) + s(-2,1,7)$

VIII

$x + 3y - 4z + 10 = 0$

$\pi : \underline{x} = (1,-2,3) + t(-10,3,4) + s(-21,4,-4)$

IX

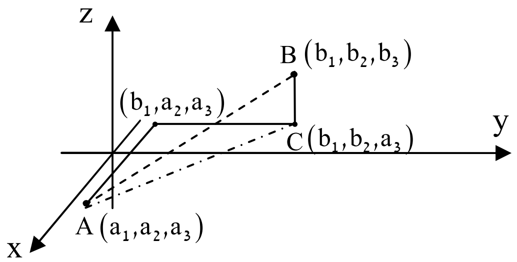
$89x + 3y + 32z - 924 = 0$

$\pi : \underline{x} = (8,-4,7) + t(-2,6,5) + s(3,7,-9)$

לאחר שראינו את המצב ההדדי בין נקודות, ישרים ומישורים, נפנה למציאת המרחקים ביניהם.
זהו הסעיף האחרון בנושא הווקטורים, אז נא לא להתייאש. אנחנו כמעט לפני סיום...

נתחיל ב<u>מרחק בין 2 נקודות</u> :

בין כל שתי נקודות במרחב ניתן להעביר ווקטורים הניצבים זה לזה , כמו בציור .



קל לראות שהמרחק AB ,ניתן למציאה מתוך

משפט פיתגורס : $AC^2 + BC^2 = AB^2$

כמו כן ניתן למצוא את AC^2 גם לפי פיתגורס : $AC^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2$

ואילו : $BC^2 = (b_3 - b_3)^2$

ולכן נוסחת מרחק בין 2 נקודות :

$$\boxed{AB = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (b_3 - b_3)^2}}$$

דוגמאות :

ס״ח. מצאו את המרחק בין הנקודות : $A(-3,2,5) \quad B(4,7,-9)$

פתרון :

$$AB = \sqrt{(-3-4)^2 + (2-7)^2 + (5+9)^2} = \sqrt{270} = 16.43$$

ס״ט. הוכיחו כי 4 הנקודות הבאות יוצרות מקבילית :

$A(3,4,-5) \quad B(4,-2,7) \quad C(11,1,3) \quad D(-1,7,2)$

פתרון :

$$AB = \sqrt{(3-4)^2 + (4+2)^2 + (-5-7)^2} = \sqrt{1+36+144} = \sqrt{181}$$

$$BC = \sqrt{(4-11)^2 + (-2-1)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{49+9+16} = \sqrt{74}$$

$$CD = \sqrt{(11+1)^2 + (1-7)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{144+36+1} = \sqrt{181}$$

$$DA = \sqrt{(3+1)^2 + (4-7)^2 + (-5-2)^2} = \sqrt{16+9+49} = \sqrt{74}$$

אם הצלעות הנגדיות שוות , הרי זו מקבילית .

אם רוצים גם להראות שאין זה מלבן , כמובן,

ניתן למצוא ווקטורים ולראות ש- : $\overline{AB}\cdot\overline{BD}\neq 0$

$$\overline{AB}=(1,-6,12)$$

$$\overline{BC}=(7,3,-4)$$

$$\overline{AB}\cdot\overline{BD}=(1,-6,12)\cdot(7,3,-4)=7-18-48\ \underline{\neq\ 0}$$

ע'. 1. מצאו נקודה על הישר : $(1,3,4)+t(2.1.-3)$ המרוחקת מרחק שווה מהראשית ומהנקודה : $(-1,2,-5)$.

2. מצאו מרחק זה.

פתרון :

1. כל נקודה על הישר מקיימת :

$$x=1+2t$$
$$y=3+t$$
$$z=4-3t$$

כדי לקבל מרחקים שווים של נקודה זו מהראשית ומהנקודה $(-1,2,-5)$ צריך להתקיים :

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2+(z+5)^2}$$

על ידי העלאה בריבוע : $x^2+y^2+z^2=(x+1)^2+(y-2)^2+(z+5)^2$

ובהצבת x,y,z :

$$(1+2t)^2+(3+t)^2+(4-3t)^2=(1+2t+1)^2+(3+t-2)^2+(4-3t+5)^2$$

ובפתיחת סוגריים :

$$1+4t+\cancel{4t^2}+9+6t+\cancel{t^2}+16-24t+\cancel{9t^2}=4+8t+\cancel{4t^2}+1+2t-\cancel{t^2}+81-54t+\cancel{9t^2}$$

$$26-14t=86-44t$$
$$30t=60$$
$$t=2$$

מציאת נקודה על הישר (על ידי הצבת t :

$$x=1+2\cdot 2=5$$
$$y=3+2=5$$
$$z=4-3\cdot 2=-2$$

והנקודה : $\underline{(5,5,-2)}$

2. כדי למצוא מרחק זה נציב בנוסחת המרחק : $d=\sqrt{(5-0)^2+(5-0)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{54}$

ע"א. מצאו נקודה על המישור : $x+2y-4z-5=0$ המרוחקת מרחק שווה מהנקודות : $A(-1,2,-3)$ $B(-1,4,0)$.

פתרון :

הפעם אנו מחפשים נקודה (x,y,z) כך שתקיים את משוואת המישור ,

כלומר : $$\text{I}\quad x+2y-4z-5=0$$

ותקיים את שוויון המרחקים , כלומר :

$$\text{II}\quad (x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=(x+1)^2+(y-4)^2+(z-0)^2$$

נפתח את משוואה II :

$$\cancel{x^2} - 2x + 1 + \cancel{y^2} - 4y + 4 + \cancel{z^2} + 6z + 9 = \cancel{x^2} + 2x + 1 + \cancel{y^2} - 8y + 16 + \cancel{z^2}$$

$$\text{III} \quad -4x + 4y + 6z - 3 = 0$$

ממשוואה I נקבל: $x = 5 - 2y - 4z$

הצבה ב- III : $-20 + 8y + 16z + 4y + 6z - 3 = 0$

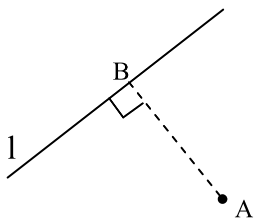
$$-23 + 12y + 16z = 0$$

עבור $y = 1$ $\leftarrow$ $z = \frac{1}{2}$ ואז : $x = 5 - 2 - 2 = 1$

והנקודה : $\underline{(1, 1, \frac{1}{2})}$

<u>מרחק נקודה מישר</u> :

מרחק נקודה מישר מוגדר כמרחק הקצר ביותר בין הנקודה והישר.
כדי להבטיח זאת עלינו להעביר אנך לישר העובר דרך הנקודה,
ואז לחפש את המרחק בין הנקודה הנתונה לבין נקודת החיתוך
של האנך עם הישר. בשרטוט אנו רואים כי המרחק
בין הנקודה A לישר l הוא, למעשה, המרחק AB .



דרך הפתרון :

כאשר נתונה הנקודה : $A(a_1 a_2 a_3)$ והישר : $l : \underline{x} = (u_1 u_2 u_3) + t(v_1 v_2 v_3)$,

נקודה : $B(b_1 b_2 b_3)$ צריכה לקיים 2 משוואות :

$$\text{I} \qquad B = (u_1 + tv_1, u_2 + tv_2, u_3 + tv_3)$$
$$\text{II} \qquad (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) \cdot (v_1 v_2 v_3) = 0$$

משוואה I מבטיחה שהנקודה על הישר.

משוואה II מבטיחה ש- AB : מאונך לישר הנתון.

כך מוצאים את נקודה B (t היא הנעלם היחיד) , ואז מוצאים את : $d = |AB|$.

ע״ב. מצאו את המרחק בין הנקודה : $(1, -2, 3)$ והישר : $l : \underline{x} = (5, 15, -3) + t(-9, -8, -3)$.

פתרון :

תחילה נציג את נקודה B : $B = (5 - 9t, 15 - 8t, -3 - 3t)$

עתה נמצא את הווקטור $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} = (5 - 9t - 1, 15 - 8t + 2, -3 - 3t - 3)$

$$\overrightarrow{AB} = (4 - 9t, 17 - 8t, -6 - 3t)$$

וכפי שראינו, צריך להתקיים : $\overrightarrow{AB} \cdot (-9, -8, -3) = 0$

ולכן : $(4 - 9t, 17 - 8t, -6 - 3t) \cdot (-9, -8, -3) = 0$

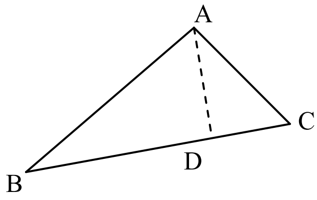
$$-36 + 81t - 136 + 64t + 18 + 9t = 0$$

$$154t = 154$$

$$t = 1$$

ונקודה B : $B(5 - 9, 15 - 8, -3 - 3) = (-4, 7, -6)$

והמרחק $|AB|$: $|AB| = \sqrt{(-4 - 1)^2 + (7 + 2)^2 + (-6 - 3)^2} = \sqrt{187}$



ע"ג. נתון משולש ABC : $A(3,4,-5)$ $B(-1-11,5)$ $C(9,-3,11)$

1. מצאו את אורך הגובה היורד מ- A .
2. מצאו את שטח המשולש .

פתרון :

1. כדי למצוא את המרחק מ- A לצלע BC עלינו למצוא תחילה את משוואת הישר BC .

כפי שכבר למדנו : $l:\underline{x}=(-1,-11,5)+t(9+1,-3+11,11-5)$

$l:\underline{x}=(-1,-11,5)+t(10,8,6)$

נציג את נקודה D : $D=(-1+10t,-11+8t,5+6t)$

נמצא את $\overrightarrow{AD}$: $\overrightarrow{AD}=(-1+10t-3,-11+8t-4,5+6t+5)$

$\overrightarrow{AD}=(-4+0t,-15+8t,10+6t)$

ואנו יודעים : $AD\perp BC$ ועל פי מכפלה סקלרית : $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

כלומר : $(-4+10t,-15+8t,10+6t)(10,8,6)=0$

$-40+100t-120+64t+60+36t+0$

$200t=100$

$\underline{t=\frac{1}{2}}$

לכן נקודה D : $D=(4+5,-15+4,10+3)=(9,-11,13)$

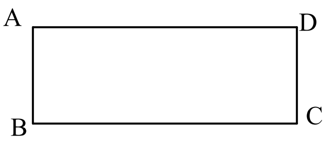
והגובה : $h=\sqrt{(9-3)^2+(-11-4)^2+(13+5)^2}=\sqrt{36+225+324}$

$h=\sqrt{585}=24.2$

הבסיס : $|BC|=\sqrt{(9+1)^2+(-3+11)^2+(1-5)^2}=\sqrt{100+64+36}$

$|BC|=\sqrt{200}=14.1$

והשטח : $S=\frac{24.2\cdot14.1}{2}=\underline{31.25}$



ע"ד. נתון מלבן ABCD : $C(1,-11,-2)$ $C(1,3,-7)$

הצלע BC מונחת על הישר : $l:\underline{x}=(1,-11,-2)+t(1,5,2)$

מצאו את שטח המלבן .

פתרון :

כדי לחשב את השטח עלינו למצוא את AB ואת BC .

נתחיל במציאת AB . כפי שלמדנו, אנו יכולים למצוא את נקודה B .

הצגת B : $B=(1+t,-11+5t,-2+2t)$

ולכן : $\overrightarrow{AB}=(1+t-1,-11+5t-3,-2+2t+7)$

$\overrightarrow{AB}=(t,-14+5t,5+2t)$

המכפלה הסקלרית: $(t,-14+5t,5+2t)(1,5,2)=0$

$t-70+25t+10+4t=0$

$30t=60$

$t=2$

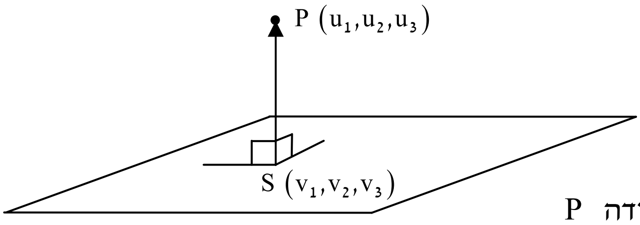
נקודה B: $B=(1+2,-11+10,-2+4)$

$B(3,-1,2)$

עתה קל לחשב: $|AB|=\sqrt{(3-1)^2+(-1-3)^2+(2+7)^2}=\sqrt{101}=10.05$

$|BC|=\sqrt{(3-1)^2+(-1+11)^2+(2+2)^2}=\sqrt{120}=10.95$

והשטח: $\underline{S=10.05\cdot 10.95=110.05}$



מרחק נקודה ממישור

נתון מישור: $Ax+By+Cz+D=0$

ונקודה: $P(u_1u_2u_3)$

מרחק הנקודה מהמישור מוגדר כמרחק בין הנקודה P לבין הנקודה במישור הנמצאת על ווקטור הניצב למישור העובר דרך נקודה זו, כלומר המרחק PS כאשר $S(v_1v_2v_3)$ כמו שנראה בציור.

והמרחק הוא: $\sqrt{(\overrightarrow{SP})^2}=d$

אבל כפי שאנו יודעים: $\overrightarrow{SP}=t(A,B,C)$

ולכן המרחק הוא: $d=\sqrt{(tA)^2+(tB)^2+(tC)^2}$

$$\text{I}\quad d=\sqrt{t^2(A^2+B^2+C^2)}=t\sqrt{A^2+B^2+C^2}$$

עכשיו נמצא את שיעורי הנקודה S.

מכיוון ש-: $\overrightarrow{SP}=t(A,B,C)$

$v_1-u_1=tA$

$v_2-u_2=tB$

$v_3-u_3=tC$

ועל ידי העברת אגפים: $v_1=tA+u_1$

$v_2=tB+u_2$

$v_3=tC+u_3$

ומכיוון ש-: $(v_1v_2v_3)$ נמצאת במישור, מתקיים: $Av_1+Bv_2+Cv_3+D=0$

$A(tA+u_1)+B(tB+u_2)+C(tC+u_3)+D=0$

$tA^2+Au_1+tB^2+Bu_2+tC^2+Cu_3+D=0$

$Au_1+Bu_2+Cu_3+D=-(tA^2+tB^2+tC^2)$

ועל ידי הוספת ערך מוחלט: $\text{II}\quad |Au_1+Bu_2+Cu_3+D|=t(A^2+B^2+C^2)$

אבל אנחנו מחפשים את הגודל : $t\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ כפי שראינו ב- I , לכן עלינו לחלק ב- : $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ את הביטוי ב- II .

ומתקבלת הנוסחה :

מרחק הנקודה : u_1,u_2,u_3

מישור : $Ax+By+Cz+D=0$

$$d=\frac{|Au_1+Bu_2+Cu_3+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

דוגמאות :

ע"ה. מצאו את מרחק הנקודה : $(3,-2,4)$ מהמישור : $2x-3y+4z+7=0$.

פתרון :

$$d=\frac{|2\cdot 3+[-3(-2)]+4\cdot 4+7|}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}}=\frac{35}{\sqrt{29}}=6.5$$

ע,ו : מצאו את מרחק הנקודה : $(-1,5,-7)$ מהמישור : $(1,2,3)+t(-2,7,5)+s(9,-4,8)$.

פתרון :

מכיוון שהנוסחה תקפה רק למצב שבו ההצגה היא כוללת ולא פרמטרית, לכן נעבור ממשוואת המישור הפרמטרית להצגה כללית.

מציאת ABC ווקטור המקדמים :

$$\text{I}\quad -2A+7B+5C=0$$
$$\text{II}\quad \underline{9A-4B+8C=0}$$

$$\text{I}\quad 2A=5C+7B$$
$$A=\frac{5C+7B}{2}$$

$$\text{II}\quad 22.5C+31.5B-4B+8C=0$$
$$18.5C+39.5B=0$$
$$C=39.5\qquad B=-18.5$$
$$A=34$$

ומשוואת המישור :

$$34x-18.5y+39.5z+D=0$$

נציב נקודה $(1,2,3)$:

$$34-37+118.5+D=0$$
$$D=-115.5$$

והמרחק :

$$d=\frac{|34\cdot(-1)-37\cdot 5+118.5\cdot(-7)-115.5|}{\sqrt{34^2+37^2+118.5^2}}$$

$$d=\frac{1164}{128.7}=9.04$$

ע"ז. מרחק הנקודה: $(1,2,k)$ מהמישור: $2x-2y+z-4=0$ היא 1. מצאו את k.

פתרון:

לפי הנוסחה:

$$d=\frac{\left|2\cdot1-2\cdot2+1\cdot k-41\right|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=1$$

$$\frac{12-4+k-41}{3}=3$$

$$\left|-6+k\right|=3$$

$$-6+k=3 \quad \text{או} \quad -6+k=-3$$

$$\underline{k_1=9} \qquad \underline{k_2=3}$$

ע"ח. מצאו נקודה על הישר: $(1,-4,5)+t(7,8,9)$ הנמצאת במרחק 5 מהמישור: $x+2y+2z+7=0$.

פתרון:

מתוך מה שכבר למדנו, נמצא ביטויים ל- x,y,z של הנקודה המבוקשת:

$$x=1+7t$$

$$y=-4+8t$$

$$z=5-9t$$

נציב בנוסחה:

$$d=\frac{\left|1(1+7t)+2(-4+8t)+2(5-9t)+71\right|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=5$$

$$\frac{\left|11+7t-8+16t+10-18t+7\right|}{3}=5$$

$$\left|10+5t\right|-15$$

$$10+5t=15 \quad \text{או} \quad 10+5t=-15$$

$$t=1 \qquad t=-5$$

נציב חזרה במשוואת הישר:

נקודה ראשונה: $(1,-4,5)+1(7,8,-9)=(8,4,-4)$

נקודה שנייה: $(1,-4,5)-5(7,8,-9)=(-34,-44,50)$

<u>בדיקת הבנה</u>

129. מצאו את המרחק בין הנקודות הבאות:

א. $B(7,8,-9) \quad A(3,-5,7)$

ב. $B(-7,-5,3) \quad A(1,6,4)$

130. נתונות הנקודות: $B(1,-3,k) \quad A(4,7,-5)$

מצאו את k אם נתון שהמרחק ביניהן הוא:

א. $\sqrt{110}$ ב. $\sqrt{209}$

131. הוכיחו כי המשולש ABC הוא שווה שוקיים אם נתון:

$A(12,-7,18) \quad B(7,-5,9) \quad C(13,-16,14)$

132. מצאו נקודה על הישר : $(3,-4,1)+t(1,2,-5)$ המרוחקת מרחק שווה מהנקודות :
$(-1,3,2)$; $(13,-10,2)$, ומצאו מרחק זה .

133. מצאו נקודה על המישור : $2x+3y-4z-19=0$ המרוחקת מרחק שווה מהנקודות :
$A(1,8,7)$ $B(8,5,3)$, ומצאו מרחק זה .

134. מצאו את המרחק בין הנקודה A והישר l בסעיפים הבאים :
א. $A(3,5,-7)$ $l: \underline{x}=(4,-6,-1)+t(-1,1,1)$
ב. $A(1,2,3)$ $l: \underline{x}=(1,13,2)+t(-1,4,2)$

135 : נתון משולש ABC : $A(4,2,-1)$ $B(113,-8)$ $C(8,9,-3)$
א. מצאו את הגובה היורד לצלע BC .
ב. מצאו את שטח המשולש .

136. נתונה מקבילית $ABCD$: $A(3,4,-1)$ $B(-1,-2,-5)$ $C(3,6,7)$
א. מצאו את נקודה D .
ב. מצאו את שטח המקבילית .

137. מצאו את מרחק הנקודה A מהמישור הנתון בסעיפים הבאים :
א. $A(-2,7,1)$ $-x+2y-4z+5=0$
ב. $A(-1,0,1)$ $3x-y+2z-15=0$
ג. $A(1,-1,3)$ $x-5y-6z+17=0$

138. מצאו את מרחק הנקודה A מהמישור הנתון בסעיפים הבאים :
א. $A(3,-4,6)$ $\pi: \underline{x}=(2,-5,7)+t(4,3,-2)+s(7,-1,5)$
ב. $A(1,-5,7)$ $\pi: \underline{x}=(-1,-2,4)+t(-5,6,-3)+s(2,-4,-5)$

139. מרחק הנקודה : $(-1,k,-9)$ מהמישור : $4x-4y+7z+5=0$ הוא : 10 .
מצאו את k .

140. מצאו נקודה על הישר : $l: \underline{x}=(0,-2,7)+t(1,-4,5)$ שמרחקה מהמישור :
$6x-3y-6z+6=0$ הוא 2 .

לאחר שלמדנו מרחקים שמעורבת בהם נקודה (נקודה מנקודה, נקודה מישר, נקודה ממישור) ,
נעבור למציאת מרחקים שמעורב בהם ישר.

<u>מרחק בין ישרים מקבילים</u>

מקרה זה הוא פשוט. מכיוון שבין מקבילים יש מרחק קבוע, הרי שכל מה שעלינו לעשות הוא למצוא נקודה על ישר אחד ולמדוד את המרחק בינה לבין הישר השני.