פונקציה מעריכית ולוגריתמית

מבוא

עד כה למדנו על מספר פונקציות: פונקצית פולינום, הפונקציה הרציונלית והפונקציה הטריגונומטרית.
עתה ניגש להרחיב את היכרותנו עם פונקציות ונלמד על הפונקציה המעריכית.
פונקציה זו עוזרת לנו בין השאר לתאר מצבים פשוטים של גידול ודעיכה.
נבחר כדוגמא גידול ביולוגי של תאים במעבדה. הבה נניח שכל תא עובר התפצלות בכל 1 שעה. כמו כן לשם ניסוי מסוים דרושים לנו לפחות 100,000 תאים. כמה זמן עלינו להמתין אם הדגימה מכילה כעת 10,000 תאים בריאים?
מתוך נתונים אלו אנו יכולים כבר לחשב:

זמן נוכחי: 10,000

לאחר שעה: $10,000\cdot2=20,000$

לאחר שעתיים: $20,000\cdot2=40,000$

לאחר שלוש שעות: $40,000\cdot2=80,000$

לאחר ארבע שעות ברור לנו שאנו יכולים לבצע כבר את הניסוי כי הוא יכיל 160,000 תאים.

באותו אופן נניח כי חומר רדיואקטיבי מסוים מתפרק כך שבכל חודש הוא מאבד 1/3 מכמותו ונשאר רק 2/3 ממנו. אם מצאנו 100 גרם של חומר כזה מתי הוא יתפרק לחלוטין?
כמו מקודם:

זמן נוכחי: 100

בעוד חודש: $2/3\cdot100=66.666$

בעוד חודשיים: $2/3\cdot66.666=44.439$

שלושה חודשים: $2/3\cdot44.439=29.626$

ארבעה חודשים: $2/3\cdot29.626=19.751$

חמישה חודשים: $2/3\cdot19.751=13.167$

שישה חודשים: $2/3\cdot13.167=8.778$

שבעה חודשים: $2/3\cdot8.778=5.852$

שמונה חודשים: $2/3\cdot5.852=3.901$

תשעה חודשים: $2/3\cdot3.901=2.600$

עשרה חודשים: $2/3\cdot2.600=1.733$

אחד-עשר חודשים: $2/3\cdot1.733=1.155$

שניים-עשר חודשים: $2/3\cdot1.155=0.770$

מטבע הדברים (בגלל הכפלה בשבר) לא נגיע ל-0, לכן עלינו לקבוע מה יחשב בעיננו התפרקות מוחלטת של החומר. אנו רואים שכעבור שנה יוותר מחומר זה פחות מ-1 גרם. עבורנו זו יכולה להיחשב כמות אפסית ונחליט שזהו זמן ההתפרקות של חומר זה.

חדי העין שמו לב בוודאי שחישוב זה כבר מזכיר את הנוסחה לחישוב סדרה הנדסית שגם שם המכפיל הוא קבוע. ואכן נוסחת חישוב הפונקציה המעריכית הוא מקרה פרטי של סדרה ההנדסית .
בפרק זה נלמד לחקור פונקציה מעריכית ולוגריתמית (שהיא הפונקציה ההפוכה למעריכית).

<u>הפונקציה המעריכית</u>

כדי שנוכל לדבר ב"שפה" אחת עלינו תחילה להגדיר כמה מושגים שבדרך כלל מתבלבלים ביניהם.

אנו מגדירים פונקציה מעריכית כל פונקציה שיש לה איבר מהצורה: $y = a^x$.

שמות הגורמים: y – הוא <u>החזקה</u>

a – הוא <u>הבסיס</u>

x – הוא <u>המעריך</u>! (הוא לא החזקה!)

עד היום נהגנו לקרוא למספר 3 בביטוי x^3 'חזקה'. למעשה זו שגיאה: 3 הוא המעריך, x^3 היא החזקה! מכאן גם שמה של הפונקציה. זוהי משפחה של פונקציות שבהן x הוא <u>המעריך</u> ולכן הן נקראות פונקציות מעריכיות.

כדי שנוכל "לטפל" בפונקציות אלו עלינו להגדיר עוד גודל אחד. אנו יודעים שכאשר x זוגי החזקה- $y > 0$ לכל a. אולם כאשר x אי זוגי החזקה y "מקפצת" לכל $a < 0$.

לדוגמא $(-3)^2 = 9$ $(-3)^3 = -27$.

אם נבחן את הדברים הרי שהפונקציה $y = a^x$ עבור $a < 0$ היא מאד בעייתית בהגדרה שלה ולכן אנו נעסוק רק במצב שבו $a > 0$, ומעתה: <u>**תחום ההגדרה הוא שהבסיס > 0**</u>.

עוד נשוב לנושא זה. כדרכנו, לפני שנתחיל בחקירה נלמד תחילה לפתור משוואות שונות של פונקציה זו.

<u>תזכורת לחוקי חזקות</u>:

1. כפל של חזקות עם בסיס שווה מתבצע על ידי חיבור מעריכים: $\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$

הוכחה:

חזקה היא כתיבה מקוצרת של כפל ולכן:

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}_{\text{פעמים } n} \cdot \underbrace{a \cdot a \ldots}_{\text{פעמים } m} = a^{m+n}$$

2. חילוק חזקות עם בסיס שווה מתבצע על ידי חיסור המעריכים: $\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$

הוכחה:

כמו קודם

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \ldots}^{\text{פעמים } m}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots}_{\text{פעמים } n}}$$

ואחרי צמצום נופלים כל n ה-a-ים (כאשר m>n) ונקבל במונה a^{m-n}.

תוצאה חשובה ראשונה:

עבור m = n מקבלים $a^0 = a^{m-m} = \frac{a^m}{a^m} = 1 \leftarrow$ $\underline{a^0 = 1}$ לכל a!

תוצאה חשובה שנייה:

כאשר $m < n$ נופלים כל ה-a-ים במונה ואנו נשארים רק עם a במכנה

ואז ההפרש $m\text{-}n < 0$.

מכאן נוכל ללמוד שעבור $n > m$ $\quad \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$

ובהצבה $n-m=t$ $\quad \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^t} = a^{-t}$

זוהי הסיבה שלמדנו $\quad \frac{1}{x^3} = x^{-3}$

אולם גם : $\quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{x}$

ובזה נעשה שימוש נרחב.

3. העלאת חזקה במעריך חדש מתבצעת על ידי כפל המעריכים : $\boxed{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$

הוכחה :

פירוק למכפלות יראה :

$$\overbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots\ldots}_{} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots\ldots}_{} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots\ldots}_{} \ldots}^{n\text{ פעמים}}$$

$$\overbrace{a \cdot a \cdot a \ldots\ldots}^{m\text{ פעמים}} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot a \ldots\ldots}^{m\text{ פעמים}} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot a \ldots\ldots}^{m\text{ פעמים}} \ldots$$

ולכן $\quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$

הוצאת שורש היא למעשה חזקה של שבר : $\boxed{\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}}$

הוכחה :

אנחנו יודעים ש-(1) $\quad \sqrt[m]{a} = k$

(2) $\quad a = k^m$

אם נרצה לבטא את k בעזרת a עלינו למצוא את המעריך המתאים שמקיים $k = a^x$

ועל ידי הצבה ב-(1) $\quad a = (a^x)^m$

ומכלל (3) $\quad a^1 = a^{xm}$

כלומר : $\quad 1 = xm$

$$\frac{1}{m} = x$$

ולכן : $\quad k = a^{\frac{1}{m}}$

ואם נחזור למשוואה (1) $\quad \sqrt[m]{a} = k = a^{\frac{1}{m}}$

הרחבה של כלל זה היא : $\boxed{\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{m}{n}}}$

מכאן נוכל גם להבין מדוע כל חזקה שהינה מספר שברי לא מוגדרת עבור $a<0$.

לדוגמא : $\sqrt{(-3)^3} = (-3)^{\frac{3}{2}} = (-3)^{1.5}$ ואין שורש ממשי למספר שלילי!

מכיוון ש- $\sqrt[m]{a^n} = (\sqrt[m]{a})^n = a^{\frac{m}{n}}$

לכן אין זה משנה גם לגבי הדוגמא : לא מוגדר $\Rightarrow (\sqrt[5]{-2})^4 = \sqrt[5]{(-2)^4}$

עתה נבין טוב יותר מדוע כל הפונקציה המעריכית מוגדרת רק עבור $a>0$.

כדי שנוכל למצוא חזקות באופן קל מומלץ מאד ללמוד את הטבלאות הבאות עד שיהיו שגורות כמו לוח הכפל:

חזקות של 2 מ-1 עד 20

1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2	11^2	12^2	13^2	14^2	15^2	16^2	17^2	18^2	19^2	20^2
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289	224	361	400

חזקות של 3 מ-1 עד 10

1^3	2^3	3^3	4^3	5^3	6^3	7^3	8^3	9^3	10^3
1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

חזקות של בסיס 2 עד מעריך 10

2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

כדי לחזק את מיומנות השימוש בכללי החזקות נביא כמה דוגמאות.

א. חשבו את התרגילים הבאים <u>בלי שימוש במחשבון</u>:

1. $a^4\cdot a^5+a^3\cdot a^6$

2. $\dfrac{a^7\cdot a^8}{a^3\cdot a^4}$

3. $\dfrac{a^{-5}\cdot(a^7)^2}{a^4\cdot a^5}$

4. $\dfrac{\sqrt[4]{a^3}\cdot a^3}{\sqrt[9]{a^{27}}\cdot\sqrt{a}}$

5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-7}\cdot\left(\dfrac{b}{a}\right)^3$

6. $\dfrac{a^7\cdot b^3\cdot b^6\cdot a^9}{a^{10}\cdot b^3}$

7. $\dfrac{(3^5)^4\cdot(2^7\cdot 2^3)^2}{(6^4)^5}$

8. $\dfrac{(2\cdot 5^3)^3-(3\cdot 5^3)^3}{3\cdot(-5^2)^4-(2^2\cdot 5^4)^2}$

9. $\dfrac{21^4\cdot 63^5}{9\cdot 49^5\cdot 27^4}$

10. $\sqrt{2^3}\cdot\sqrt[4]{12}\cdot 3^{\frac{6}{8}}$

פתרון:

1. $a^4\cdot a^5+a^3\cdot a^6=$

$a^9+a^9=$ לפי כלל (1)

$\underline{2a^9}$ ועל ידי כינוס רגיל

2. $\dfrac{a^7\cdot a^8}{a^3\cdot a^4}=$

$\dfrac{a^{15}}{a^7}=$ לפי כלל (1)

$\underline{a^8}$ לפי כלל (2)

3. $\frac{a^{-5}\cdot(a^7)^2}{a^4\cdot a^5}=$

$\frac{a^{-5}\cdot a^{14}}{a^4\cdot a^5}=$ לפי כלל (3)

$\frac{a^9}{a^9}=\underline{1}$ לפי כלל (1)

4. $\frac{\sqrt[4]{a^3}\cdot a^3}{\sqrt[9]{a^{27}}\cdot\sqrt{a}}=$

$\frac{a^{\frac{3}{4}}\cdot a^3}{a^{\frac{27}{9}}\cdot a^{\frac{1}{2}}}=$ לפי כלל (4)

$\frac{a^{\frac{3}{4}}\cdot a^3}{a^3\cdot a^{\frac{1}{2}}}=$

$\frac{a^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}}=$ אחרי צמצום a^3

$a^{\frac{1}{4}}=$ לפי כלל (2)

$\underline{\sqrt[4]{a}}$ ולפי כלל (4)

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-7}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^3=$

$\left(\frac{b}{a}\right)^7\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^3=$ לפי כלל (2)

$\underline{\left(\frac{b}{a}\right)^{10}}$ לפי כלל (1)

6. $\frac{a^7\cdot b^3\cdot b^6\cdot a^9}{a^{10}\cdot b^3}=$

$\frac{a^{16}\cdot b^9}{a^{10}\cdot b^3}=$ לפי כלל (1)

$a^6\cdot b^6=$ לפי כלל (2)

$\underline{(ab)^6}$ לפי כלל (5)

בפתרונות הבאים נסו למצוא לבד לפי אילו כללים אנו עוברים משוויון לשוויון.

7. $\frac{\left(3^5\right)^4\cdot\left(2^7\cdot2^3\right)^2}{\left(6^4\right)^5}=\frac{3^{20}\cdot\left(2^{10}\right)^2}{6^{20}}=\frac{3^{20}\cdot2^{20}}{6^{20}}=\frac{6^{20}}{6^{20}}=1$

8. $\frac{\left(2\cdot5^3\right)^3-\left(3\cdot5^3\right)^3}{-3\cdot\left(-5^2\right)^4-\left(2^2\cdot5^4\right)^2}=\frac{2^3\cdot5^9-3^3\cdot5^9}{-3\cdot5^8-2^4\cdot5^8}=$

על ידי הוצאת גורם משותף: $=\frac{5^9\left(2^3-3^3\right)}{5^8\left(-3-2^4\right)}=\frac{5^9\left(-19\right)}{5^8\left(-19\right)}=5$

9. $\frac{21^4\cdot63^5}{9\cdot49^5\cdot27^4}=\frac{\left(7\cdot3\right)^4\cdot\left(7\cdot9\right)^5}{9\cdot\left(7^2\right)^5\cdot\left(3^3\right)^4}=$

במקרים כאלה יש למצוא את הבסיס המשותף לכמה שיותר מכפלות. בד"כ נוח לחפש את הבסיס הנמוך ביותר. בתרגיל זה הבסיסים יהיו 7,3 ולכן:

$$=\frac{7^4\cdot3^4\cdot7^5\cdot\left(3^2\right)^5}{3^2\cdot7^{10}\cdot3^{12}}=\frac{7^9\cdot3^{14}}{7^{10}\cdot3^{14}}=\frac{1}{7}$$

10. $\sqrt{2^3}\cdot\sqrt[4]{12}\cdot3^{\frac{6}{8}}=2^{\frac{3}{2}}\cdot12^{\frac{1}{4}}\cdot3^{\frac{3}{4}}=2^{\frac{3}{2}}\cdot\left(3\cdot4\right)^{\frac{1}{4}}\cdot3^{\frac{3}{4}}=$

$$=2^{\frac{3}{2}}\cdot3^{\frac{1}{4}}\cdot\left(2^2\right)^{\frac{1}{4}}\cdot3^{\frac{3}{4}}=2^{\frac{3}{2}+\frac{2}{4}}\cdot3=2^2\cdot3=12$$

בדיקת הבנה

1. חשבו את הביטויים הבאים:

א. $\frac{a^3b^2\cdot\left(ab\right)^5}{a^4b^6}$

ב. $\frac{\left(2a\right)^5\cdot b^4}{\left(a^2\right)^3\cdot b^3}$

ג. $\frac{\left(3^5\right)^3\cdot6^{-10}}{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]^4\cdot9^2}$

ד. $\frac{\sqrt{27}\cdot5^3\cdot3^{\frac{1}{2}}}{15^2}$

משוואות מעריכיות

חקירת הפונקציה $y = a^x$ (כפי שנלמד בעתיד) מראה כי הפונקציה היא חד-חד-ערכית. כלומר, לכל ערך של x יש y יחיד, ולהיפך - לכל ערך של y יש רק x יחיד. תכונה זו מסייעת לנו בפתרון משוואות מעריכיות. אם נדאג לבסיסים שווים בשני האגפים נוכל להשוות את המעריכים שלהם.

לדוגמה : אם $3^x = 3^5$

חייב להתקיים : $x=5$.

או : אם $6^{x^2-7x+3} = 6^{-7}$

חייב להתקיים $x^2 - 7x + 3 = -7$

ואז $x^2 - 7x + 10 = 0$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = 5$.

לכן במהלך הפתרון תחילה יש לקבוע <u>מהו הבסיס המשותף.</u> אחר כך תוך שימוש בחוקי חזקות, מפשטים את הביטויים במשוואות כדי להשוות בין בסיסים .

דוגמאות

ב. פתרו את המשוואות הבאות :

1. $9^x = 3$
2. $16^x = 8$
3. $\left(\frac{9}{4}\right)^x = \frac{16}{81}$
4. $216^{x+5} = 36^{x-7}$
5. $9^{x+3} \cdot 27^{x-5} = 243$
6. $(4^{x+1})^x = \frac{1}{16^{x+1}}$
7. $\sqrt{5^{x+2}} = \sqrt{5} \cdot 5^x$

פתרון :

1. $9^x = 3$

כאן גלוי שהבסיס הוא 3 ולפי כלל (3)

$(3^2)^x = 3$

$3^{2x} = 3^1$

ועל ידי השוואת מעריכים

$2x = 1$

$\underline{x = \frac{1}{2}}$

2. $16^x = 8$

הבסיס השווה הוא 2 ולכן :

$(2^4)^x = 2^3$

$2^{4x} = 2^3$

$4x = 3$

$\underline{x = \frac{3}{4}}$

3. $\left(\frac{9}{4}\right)^x = \frac{16}{81}$

מהתבוננות בבסיסים (אם למדתם בעל פה את החזקות) רואים שהבסיס הוא $\frac{3}{2}$ או $\frac{2}{3}$ ואז:

$\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]^x = \frac{2^4}{3^4}$

לפי כלל (6)

$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{3}\right)^4$

לפי כלל (2)

$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-4}$

$2x = -4$

$\underline{x = -2}$

4. $216^{x+5} = 36^{x-7}$

כאן הבסיס הוא 6.

$(6^3)^{x+5} = (6^2)^{x-7}$

$6^{3x+15} = 6^{2x-14}$

$3x + 15 = 2x - 14$

$\underline{x = -29}$

5. $9^{x+3} \cdot 27^{x-5} = 243$

הבסיס הנבחר הוא 3.

$(3^2)^{x+3} \cdot (3^3)^{x-5} = 3^5$

$3^{2x+6} \cdot 3^{3x-15} = 3^5$

ולפי כלל (1)

$3^{5x-9} = 3^5$

$5x - 9 = 5$

$5x = 14$

$\underline{x = 2.8}$

6. $(4^{x+1})^x = \frac{1}{16^{x+1}}$

כאן הבסיס הנוח הוא 4. מכלל (3)

$4^{x^2+x} = \frac{1}{4^{2x+2}}$

לפי כלל (2)

$4^{x^2+x} = 4^{-2x-2}$

$x^2 + x = -2x - 2$

$x^2 + 3x + 2 = 0$

ופתרון משוואה ריבועית:

$x_1 = -1 \qquad x_2 = -2$

(תזכורת: $a > 0$ אבל x יכול לקבל כל ערך.)

$$7.\ \sqrt{5^{x+2}}=\sqrt{5}\cdot5^{x}$$

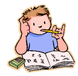
$$5^{\frac{x+2}{2}}=5^{\frac{1}{2}}\cdot5^{x}$$ הבסיס כמובן הוא 5. לפי כלל (6)

$$5^{\frac{x+2}{2}}=5^{x+\frac{1}{2}}$$

$$\frac{x+2}{2}=x+\frac{1}{2}$$

$$x+2=2x+1$$ הכפלה במכנה משותף :

$$\underline{x=1}$$



<u>בדיקת הבנה</u>

2. פתרו את המשוואות הבאות :

א. $4^{x}=64$

ב. $49^{x}=343$

ג. $2^{5x}=16^{x+\frac{1}{2}}$

ד. $\left(\frac{2}{3}\right)^{10+x}=\left(\frac{3}{2}\right)^{x-4}$

ה. $\left(\frac{1}{36}\right)^{2x-12}=\sqrt[3]{216^{2x}}$

עד כה עסקנו בשוויון חד איברים. כאשר עוברים לשוויון של רב איבר אין הבדל גדול בפתרון.

ג. פתרו את המשוואות הבאות :

1. $5^{x+3}-5^{x}=620$
2. $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2}+1.5^{2-x}=\frac{18}{4}$
3. $3^{x+\frac{1}{2}}+3^{x-\frac{1}{2}}=12$
4. $8\cdot2^{x}\cdot4^{2x-2}+5\cdot32^{x}=22\cdot8^{2x-1}$
5. $9^{x}+7\cdot3^{x}=30$
6. $5^{x}-55\cdot5^{-x}+6=0$
7. $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}+1=2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{x}$

פתרון :

בפתרון רב איבר אנו משתדלים "להיפטר" ממספרים ידועים המעורבים עם המשתנה. למשל : כבר בשאלה הראשונה אנו רואים איבר 5^{x+3}. קל לפרק אותו ל- $5^{x}\cdot5^{3}$ ולקבל $125\cdot5^{x}$. כדאי מאד להתרגל להתייחס לכל הגורם 5^{x} כאל המשתנה במהלך הפתרון ואל המספר הידוע כמקדם שלו.

נראה איך תהליך זה בא לידי ביטוי בפתרונות:

1. $5^{x+3} - 5^{x} = 620$

$125 \cdot 5^{x} - 5^{x} = 620$ לפי כלל (1)

$5^{x} \cdot (125-1) = 620$ ועל ידי הוצאת גורם משותף:

$5^{x} \cdot 124 = 620$

$5^{x} = 5$ ואחרי חלוקה ב-124:

$\underline{x = 1}$

2. $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + 1.5^{2-x} = \frac{18}{4}$

כדי לגלות את הבסיס יש צורך לעבור משבר עשרוני לשבר פשוט ולקבל:

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{2-x} = \frac{18}{4}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x} = \frac{18}{4}$ שילוב כללים (1) ו-(2)

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x} \cdot \frac{9}{4} + \frac{9}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x} = \frac{18}{4}$ ופתרון מספרים ידועים:

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x} \left[\frac{9}{4} + \frac{9}{4}\right] = \left(\frac{2}{3}\right)^{x} \cdot \frac{18}{4} = \frac{18}{4}$ ועל ידי הוצאת גורם משותף:

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x} = 1$

תזכורת: $a^{0} = 1$

$\underline{x = 0}$

3. $3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}} = 12$

$3^{x} \cdot \sqrt{3} + \frac{3^{x}}{\sqrt{3}} = 12$

$3^{x} \cdot 3 + 3^{x} = 12\sqrt{3}$ נכפיל ב- $\sqrt{3}$:

$4 \cdot 3^{x} = 12\sqrt{3}$ חיבור:

$3^{x} = 3\sqrt{3}$ חילוק:

$3^{x} = 3^{1} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{1.5}$ לפי כלל (1)

$\underline{x = 1.5}$

4. $8 \cdot 2^{x} \cdot 4^{2x-2} + 5 \cdot 32^{x} = 22 \cdot 8^{2x-1}$

$\frac{8 \cdot 2^{x} \cdot 4^{2x}}{16} + 5 \cdot 32^{x} = \frac{22 \cdot 8^{2x}}{8}$

$8 \cdot 2^{x} \cdot 4^{2x} + 80 \cdot 32^{x} = 44 \cdot 8^{2x}$ הכפלה ב-16

$8 \cdot 2^{x} \cdot 2^{4x} + 80 \cdot 2^{5x} = 44 \cdot 2^{6x}$

$8 \cdot 2^{5x} + 80 \cdot 2^{5x} = 44 \cdot 2^{6x}$

$88 \cdot 2^{5x} = 44 \cdot 2^{6x}$

$2 \cdot 2^{5x} = 2^{6x}$

$1 + 5x = 6x$

$\underline{x = 1}$

5. $9^x + 7 \cdot 3^x = 30$

כידוע לנו $9 = 3^2$ ולכן: $9^x = (3^2)^x = 3^{2x} = (3^x)^2$

כלומר: $9^x = (3^x)^2$

ועל ידי הצבה במשוואה: $(3^x)^2 + 7 \cdot 3^x = 30$

נגדיר: $t = 3^x$ ועל ידי הצבה: $t^2 + 7t = 30$

$t^2 + 7t - 30 = 0$

פתרון המשוואה הרבועית: $t_1 = -10$ $\quad t_2 = 3$

ופתרון x: $3^x = -10$ $\quad 3^x = 3$

<u>אין פתרון: אין מעריך שיהפוך מספר חיובי לשלילי!</u> $\quad \underline{x = 1}$

6. $5^x - 55 \cdot 5^{-x} + 6 = 0$

לפי כלל (2) $\quad 5^x - \frac{55}{5^x} + 6 = 0$

ועל ידי הכפלה במכנה: $(5^x)^2 - 55 + 6 \cdot 5^x = 0$

גם כאן כדאי להציב: $t^2 + 6t - 55 = 0$

$t_1 = -11 \qquad t_2 = 5$

$5^x = -11 \qquad 5^x = 5$

אין פתרון $\qquad \underline{x = 1}$

7. $\left(\frac{2}{3}\right)^x + 1 = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x + 1 = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$

על ידי הצבה: $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

$t + 1 - 2t^{-1} = 0$

$t + 1 - \frac{2}{t} = 0$

$t^2 + t - 2 = 0$

$t_1 = -2 \qquad t_2 = 1$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = -2 \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$

אין פתרון $\qquad \underline{x = 0}$

<u>בדיקת הבנה</u>

3. פתרו את המשוואות הבאות:

א. $2^{2x+5}-2^{2x+2}=1792$

ב. $\left(\frac{3}{8}\right)^{x-1}-\left(\frac{8}{3}\right)^{-x}=11\frac{23}{27}$

ג. $5^{x+\frac{1}{2}}-5^{x-\frac{1}{2}}=100$

ד. $2\cdot4^x+\frac{5\cdot4^{x+\frac{1}{2}}}{4^{x-2}}=11\cdot4^{x-\frac{1}{2}}$

ה. $4^x+5\cdot2^x=104$

ו. $3^x-63\cdot3^{-x}=2$

ז. $\left(\frac{2}{3}\right)^x+8\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-x}=4$

עד כה פתרנו תרגילים שלהם בסיס אחד משותף.

נעבור לבחון איך פותרים משוואות שלהן שני בסיסים.

באופן כללי, כללי הפתרון נשארים בעינם אלא שלעיתים יש צורך בחישוב ושימוש בכללים (5) ו-(6) כדי ליצור השוואת בסיסים.

ד. פתרו את המשוואות הבאות:

1. $4^{3-x}\cdot7^x=112$
2. $6\cdot2^{2x}=8\cdot3^x$
3. $3^{2x-1}\cdot6^x=3\cdot18^x$
4. $7^{x+1}\cdot2^{x+3}=14^{x+1}\cdot2^{x+\frac{1}{2}}$
5. $2^{x+1}\cdot5^x-2^{x+3}\cdot5^{x-1}=40$
6. $36\cdot2^x-8\cdot3^x=9\cdot2^x$
7. $2^{2x-1}\cdot3^{2x+1}-4\cdot6^x=30$
8. $9\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^x+45\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x-34=0$
9. $25\cdot3^{2x}-6\cdot5^{2x}=5\cdot15^x$

פתרון:

1. $4^{3-x}\cdot7^x=112$

$\frac{64}{4^x}\cdot7^x=112$ על ידי פירוק המעריך וחישוב מספרי

$\frac{7^x}{4^x}=\frac{112}{64}=\frac{7}{4}$ חילוק ב-64

$$\left(\frac{7}{4}\right)^x = \frac{7}{4}$$ לפי כלל (6)

$\underline{x = 1}$

2. $6 \cdot 2^{2x} = 8 \cdot 3^x$

$$\frac{2^{2x}}{3^x} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$ על ידי העברת אגפים

$$\frac{4^x}{3^x} = \frac{4}{3}$$ וכדי להשוות מעריכים

$\underline{x = 1}$

3. $3^{2x-1} \cdot 6^x = 3 \cdot 18^x$

כאן אנחנו מוצאים את הבסיס 3 מיד. אולם מתוך הגורם

6^x אנו נרמזים שיש גם בסיס 2 ולכן (לפי כלל (5)) :

$$\frac{3^{2x}}{3} \cdot 2^x \cdot 3^x = 3 \cdot 9^x \cdot 2^x$$

$$\frac{3^{2x}}{3} \cdot 2^x \cdot 3^x = 3 \cdot 3^{2x} \cdot 2^x$$

מכיוון ש- $3^{2x}, 2^x \neq 0$ ניתן לחלק בהם ולקבל:

$$\frac{1}{3} \cdot 3^x = 3$$

$$3^x = 9$$

$\underline{x = 2}$

4. $7^{x+1} \cdot 2^{x+3} = 14^{x+1} \cdot 2^{x+\frac{1}{2}}$

הבסיסים כמובן הם 2,7.

$$7 \cdot 7^x \cdot 8 \cdot 2^x = 14 \cdot 14^x \cdot \sqrt{2} \cdot 2^x$$

$$56 \cdot 7^x \cdot 2^x = 14\sqrt{2} \cdot 14^x \cdot 2^x$$

$$56 \cdot 14^x = 14\sqrt{2} \cdot 14^x \cdot 2^x$$

$$56 = 14\sqrt{2} \cdot 2^x$$ חילוק ב- 14^x

$$\frac{56}{14\sqrt{2}} = 2^x$$ ועל ידי העברת אגפים

$$\frac{4}{\sqrt{2}} = 2^x$$

$$\frac{2^2}{2^{\frac{1}{2}}} = 2^x = 2^{1.5}$$

$\underline{x = 1.5}$

5. $2^{x+1} \cdot 5^x - 2^{x+3} \cdot 5^{x-1} = 40$

$$2 \cdot 2^x \cdot 5^x - 8 \cdot 2^x \cdot \frac{5^x}{5} = 40$$

$$10 \cdot 2^x \cdot 5^x - 8 \cdot 2^x \cdot 5^x = 200$$ הכפלה במכנה משותף

$$10 \cdot 10^x - 8 \cdot 10^x = 200$$ לפי כלל (5)

$2\cdot 10^x = 200$

$10^x = 100$

$\underline{x = 2}$

6. $36\cdot 2^x - 8\cdot 3^x = 9\cdot 2^x$

העברת אגפים $36\cdot 2^x - 9\cdot 2^x = 8\cdot 3^x$

$27\cdot 2^x = 8\cdot 3^x$

ושוב העברת אגפים $\frac{2^x}{3^x} = \frac{8}{27}$

שימוש בכלל (6) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^3$

$\underline{x = 3}$

7. $2^{2x-1}\cdot 3^{2x+1} - 4\cdot 6^x = 30$

$\frac{2^{2x}}{2}\cdot 3\cdot 3^{2x} - 4\cdot 2^x\cdot 3^x = 30$

הכפלה במכנה משותף $2^{2x}\cdot 3\cdot 3^{2x} - 8\cdot 2^x\cdot 3^x = 60$

לפי כלל (5) $3\cdot 6^{2x} - 8\cdot 6^x = 60$

עתה ניתן לראות שמתקבלת משוואה ריבועית.

נוח להציב $t = 6^x$ ואז $3t^2 - 8t - 60 = 0$

ופתרון המשוואה הריבועית $t_1 = 6 \qquad t_2 = -3.33$

$t = 6^x$ ולכן t_2 לא מתאים. עבור t_1 : $6 = 6^x$

$\underline{x = 1}$

8. $9\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^x + 45\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x - 34 = 0$

קל לראות ש : $\frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$ ולכן : $9\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 45\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x - 34 = 0$

ושוב מתקבלת משוואה ריבועית.

הצבה של $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x$: $9t^2 + 45t - 34 = 0$

$t_1 = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$ $\qquad t_2 < 0$

לא מתאים

$\frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

$\underline{x = 1}$

9. $25\cdot 3^{2x}-6\cdot 5^{2x}=5\cdot 15^{x}$

במשוואות מסוג זה קל לראות ש : $15^{x}=3^{x}\cdot 5^{x}$

אולם באיברים האחרים הבסיסים הם במעריך של $2x$ ולכן יש קושי לפתרון.

ה"פטנט" הוא <u>לחלק</u> את כל המשוואה ב- $3^{x}\cdot 5^{x}$ ואז מקבלים :

$$\frac{25\cdot 3^{2x}}{3^{x}\cdot 5^{x}}-\frac{6\cdot 5^{2x}}{3^{x}\cdot 5^{x}}=5$$

$$25\cdot\frac{3^{x}}{5^{x}}-6\cdot\frac{5^{x}}{3^{x}}=5$$

עכשיו יש לנו בסיס משותף $\frac{3}{5}$

$$25\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{x}-6\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{-x}=5$$

על ידי הצבת $t=\left(\frac{3}{5}\right)^{x}$:

$$25\cdot t-\frac{6}{t}=5$$

$$25t^{2}-5t-6=0$$

וזו משוואה ריבועית שפתרונה

$t_{1}=0.6=\frac{3}{5}$ $\qquad$ $t_{2}<0$ לא מתאים

$$\frac{3}{5}=\left(\frac{3}{5}\right)^{x}$$

$\underline{x=1}$

<u>בדיקת הבנה</u>

4. פתרו את המשוואות הבאות :

א. $5^{x}\cdot 6^{3-x}=150$

ב. $1024\cdot 3^{x}=54\cdot 2^{3x}$

ג. $4^{x-1}\cdot 7^{x}=2\cdot 14^{x}$

ד. $5^{3x-\frac{1}{2}}\cdot 3^{2x+2}=15^{2x+1}\cdot 3^{x-\frac{1}{2}}$

ה. $25\cdot\left(\frac{9}{25}\right)^{x}+75\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{x}=84$

ו. $27\cdot 4^{2x}-32\cdot 3^{2x}=30\cdot 12^{x}$

משוואות מעריכיות יכולות להכיל משתנה גם בבסיס. במצב כזה יש לזכור שני דברים.

1. הבסיס חייב להיות חיובי! **ולכן לאחר כל מציאת פתרון נוודא שהפתרון נמצא בתחום ההגדרה** גם אם איננו רושמים אותו מחדש בכל פעם.
2. אם הבסיסים = 1 המעריכים לא צריכים להיות שווים כי $1^t = 1$ לכל t.

בכל השאר אין הבדל בין מה שנלמד כבר לבין פתרון משוואות אלו.

דוגמאות:

ה. פתרו את המשוואות הבאות:

1. $x^{2x-1} = x^3$
2. $x^{4x-5} = 1$
3. $(x-2)^{6x+7} = (x-2)^{x+3}$
4. $(7-x)^x + (7-x)^{\frac{x}{2}} = 2$
5. $\left(\sqrt{x^2-12x+20}\right)^{2x^2-10x} = \left(x^2-12x+20\right)^{36}$

פתרון:

1. $x^{2x-1} = x^3$

מתוך הערה (2) $\underline{x_1 = 1}$

עבור $x \neq 1$

$2x - 1 = 3$

$2x = 4$

$\underline{x_2 = 2}$

2. $x^{4x-5} = 1$

מתוך הערה (2) $\underline{x_1 = 1}$

עבור $x \neq 1$

$4x - 5 = 0$ תזכורת: $\boxed{a^0 = 1}$

$4x = 5$

$\underline{x = 1.25}$

3. $(x-2)^{6x+7} = (x-2)^{x+3}$

הפעם מתוך (2)

$x - 2 = 1$

$\underline{x_1 = 3}$

ועבור $x \neq 3$

$6x + 7 = x + 3$

$5x = -4$

$x = -0.8$

תוצאה זו אינה מתאימה שהרי מתוך הערה (1) $x - 2 > 0$

כלומר: תחום ההגדרה הוא: $x > 2$ ולכן התוצאה הסופית: $\underline{x = 3}$

4. $(7-x)^x + (7-x)^{\frac{x}{2}} = 2$

$1 + 1 = 2$ ולכן לפי הערה (2)

$\underline{x_1 = 6}$

עבור $x \neq 1$ אנחנו רואים שהמעריך באיבר השמאלי הוא כפולה של המעריך באיבר האמצעי

לכן נציב $t=(7-x)^{\frac{x}{2}}$ ונקבל: $t^2+t-2=0$

$t_1=1 \qquad t_2=-2$

$t_1=1 \qquad t_2<0$ לא מתאים

$(7-x)^{\frac{x}{2}}=1$

כבר ראינו שבמקרה זה $\frac{x}{2}=0$

כלומר: $\underline{x_2=0}$

ולבדיקה: $7-0>0$ אכן הבסיס חיובי!

5. $\left(\sqrt{x^2-6x+9}\right)^{2x^2-10x}=\left(x^2-6x+9\right)^{36}$

מחוקי חזקות $\left(x^2-6x+9\right)^{\frac{2x^2-10x}{2}}=\left(x^2-6x+9\right)^{36}$

ומהערה (2) $x^2-6x+9=1$

$x^2-6x+8=0$

$\underline{x_1=2} \qquad \underline{x_2=4}$

עבור $x \neq 2,4$ $\frac{2x^2-10x}{2}=36$

$x^2-5x-36=0$

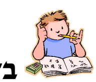
$\underline{x_1=9} \qquad \underline{x_2=-4}$

בדיקה עבור תחום ההגדרה:

$(-4)^2-12\cdot(-4)+20>0$ מתאים

$9^2-12\cdot 9+20<0$ לא מתאים

ולכן התוצאה הסופית: $\underline{x_3=-4} \qquad \underline{x_2=4} \qquad \underline{x_1=2}$



בדיקת הבנה

5. פתרו את המשוואות הבאות:

א. $x^{2x+5}=x^{3x-7}$

ב. $(x-1)^{4x-3}=1$

ג. $(5-x)^x+2\cdot(5-x)^{\frac{x}{2}}=3$

ד. $\left(x^2-7x+13\right)^{x^2+36}=\left(\sqrt{x^2-7x+13}\right)^{26x}$

תרגול עצמי

פתרו את המשוואות הבאות :

6. $3^x=81$
7. $81^x=\frac{1}{27}$
8. $1.5^{2x+1}=2.25$
9. $\left(\frac{32}{243}\right)^x=\left(\frac{4}{9}\right)^{3x-2}$
10. $2^{2x}=\sqrt{16}$
11. $5^{2x+3}\cdot 25^{x-1}=625$
12. $3^{x+7}\cdot 3^{5-4x}=9^{2x+11}$
13. $\left(\frac{9}{25}\right)^x\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{x-1}=\left(\frac{3}{5}\right)^{2x+3}$
14. $\left(\frac{4}{9}\right)^{x^2+2x}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{3x+5}=\frac{81}{16}$
15. $\left(2^{2x}\right)^{x+3}\cdot\frac{16}{2^{x-1}}=\frac{32}{2^{x-20}}$
16. $\sqrt{2^{x+3}}\cdot 4^{2x}=4\sqrt{2}$
17. $\sqrt[3]{5^{3x+9}}\cdot 25^{\frac{1}{x}-1}=\frac{25^{-1.5}}{\sqrt[x]{5}}$
18. $2^{2x}+5\cdot 2^x=864$
19. $9^x-17\cdot 3^x=270$
20. $3^{x+3}+9^{x+\frac{1}{2}}=108$
21. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x-4}{2}}=3$
22. $3\cdot 2^{5-x}+2^{x+2}=44$
23. $9^x-\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}=72$
24. $3\cdot 25^x-2\cdot 15^x=5\cdot 9^x$
25. $2\cdot 4^{x+1}+9^{x+1.5}=30\cdot 6^x$
26. $25\cdot 3^x=9\cdot 5^x$
27. $3^{x+2}\cdot 4^{3x-2}=12^{2x}$
28. $3^{x-2}\cdot 2^{x+1}=12^{x-2}$
29. $2\cdot 3^x+5\cdot 3^x=63$
30. $2\cdot 3^x-3^{x-1}=45$
31. $3^x\cdot 2^x+5\cdot 6^x=1$
32. $3^x\cdot 2^{x-1}-6^{x-2}=102$
33. $\left(\frac{4}{7}\right)^{x-1}+\left(\frac{7}{4}\right)^{-x}=\frac{77}{16}$
34. $(x+3)^{2x-1}=(x+3)^{x+7}$
35. $\left(x^2+6x-6\right)^{x^2-x-6}=1$
36. $\left(\sqrt{x^2-4x-4}\right)^{x^2-11x}=\left(x^2-4x-4\right)^{-14}$

משוואות מעריכיות בשני נעלמים

משוואות מעריכיות בשני נעלמים עובדות תמיד על בסיס של הצבה. לעיתים ההצבה ברורה ופשוטה ולעיתים יש צורך בהצבה מתוחכמת. עם הזמן והתרגול לומדים מתי להשתמש באיזו הצבה.

דוגמאות :

ו. פתרו את מערכות המשוואות הבאות :

1. $3^x-4\cdot 3^y=-9$

   $x+y=5$

2. $3^{2x-3y}=243$

   $5^{x-y-1}=25$

3. $2^{x-1}+3^{y+2}=7$

   $2^x+3^{3+y}=17$