**בעיות מילוליות**

**רקע**

מספר קשיים עיקריים עומדים בפנינו כשאנו מתחילים לעסוק בפתרון בעיות מילוליות.

קושי ראשון הוא השפה. בבעיות מתמטיות אנו משתמשים בשפה העברית, אך חלק מהמושגים מקבלים שינוי קל, ועלינו ללמוד את כוונת השאלה ולזכור שהוראת מילה מסוימת היא קצת שונה מזו שאנו רגילים אליה בשימוש יומיומי.

דוגמאות:

**זמן נסיעה**: בחיי היומיום אנו מתייחסים אל זמן הנסיעה כפרק הזמן שעבר מרגע היציאה מהבית ועד הגיענו למחוז חפצנו. זמן זה כולל את ההמתנות להסעה, את העצירות להתרעננות וכד'.

לעומת זאת בבעיות מתמטיות אנו מייחסים את זמן הנסיעה רק לזמן שבו הגוף מצוי בתנועה, כלומר זמן הנסיעה ללא כל אותן המתנות וחניות ביניים.

**מנה ושארית**: בדרך כלל אנו משתמשים במושג מנה לציון כמות. מנת גלידה, מנה שווארמה... שארית גם כן נתפסת ככמות; שאריות בדים או שאריות אוכל, כלומר כמות שנותרה אחר שימוש.

בבעיות מספרים מנה היא תוצאת החילוק של מונה במכנה, ושארית היא יחס בין הנותר מהמונה למכנה. השארית איננה גודל עצמאי, אלא היא מתייחסת למכנה.

בתרגיל : 7/3 אנו מקבלים מנה 2 ושארית 1, אך כתיבה מתמטית של התוצאה היא:  כלומר השארית של 1 מתייחסת למכנה 3.

קושי שני הוא המעבר מהכרת האלגברה המופשטת לטיפול במודלים מתמטיים של העולם האמיתי. בבעיות מילוליות אנו מנסים לבנות מודל שיתאר מצבים "מציאותיים" בעזרת פונקציות מתמטיות. למצבים כאלה יש כבר משמעות למספר ולנעלם, והוא מפסיק להיות מספר טהור. נסביר את הדברים בעזרת דוגמה. כאשר אנו יושבים מול מסך ולפנינו מקלדת. לצִדֵּנו נמצא המארז של המחשב וכן העכבר. כל זה משתלב בשולחן, ולידו הכיסא שעליו אנו יושבים. האם אנו יכולים לומר שסביבנו יש 6 ? התשובה היא, כמובן: 6 מה ? כלומר בעולם האמיתי אנו צריכים להוסיף מֵמַד למספר. במקרה שלנו יש לומר: סביבנו נמצאים שישה פריטים. כפי שאנו רואים, אנו כבר לא מתייחסים אל המספר כמייצג מופשט, אלא מייחסים לו לשון זכר ומוסיפים מֵמַד שיתאר אותו.

כך יש לעשות גם בבעיות מילוליות. כאשר אנו בוחרים נעלם, לא מספיק להגדירו כ- x או y . אותיות אלה יכולות לייצג נעלם. אולם הגדרת הנעלם חייבת להיות בעלת מֵמַד מתאים לבעיה. לדוגמה: מרחק שעברה מכונית (ק"מ), כמות החומץ בתערובת (ליטר) וכד'.

אם נגדיר נכון את הנעלמים, נוכל גם לבדוק את המשוואות שבנינו, ולהתאים להם את המְמַדים כפי שיפורט בהמשך.

קושי שלישי הוא ליקוט הנתונים מתוך השאלה. לעִתים הנתונים מופיעים באופן מפורש וברור, ולעִתים רק ברמז. כמו כן יש בעיות הבנויות מ"סיפור" אחד המתאר מצב, ויש, שלהן שניים או שלושה סיפורים שונים. עלינו לזהות ממה מורכב כל סיפור, ולבדוק איך לייצגו באופן אלגברי. אם יש יותר מסיפור אחד, נצטרך לייצג כל אחד מהסיפורים באופן עצמאי. כל סיפור כזה מציב משוואה אחת לפחות. כך אנו יכולים לבנות מערכת משוואות היוצרת מודל מתמטי של הבעיה. על "שליפת" נתונים נתעכב בהמשך.

יש לתת תשומת לב מיוחדת למספר אלמנטים הקשורים לפתרון בעיות מילוליות.

כאשר אנו קוראים את הבעיה, יש לבחון היכן נמצא משפט השאלה. ברוב השאלות שאנו עוסקים בהן, היא כתובה דווקא בסוף הבעיה; בדרך כלל אפילו במשפט האחרון. לכן בכל בעיה רצוי להדגיש את משפט השאלה לבירור המטלה המבוקשת כבר בקריאה ראשונה, ובקריאה שנייה להתעמק וללקט נתונים. לעִתים נידָרֵש גם לקריאה שלישית. דבר זה קורה כאשר אנו מוצאים שיש לנו יותר נעלמים ממשוואות. במצב כזה צריך להיות לנו ברור שלא השתמשנו בכל נתוני השאלה, ולכן עלינו לקרוא אותה שוב ולחפש אחר נתונים ש"פספסנו".

אם התייחסנו לנעלמים, הרי שעלינו גם למצוא אותם. ראשית הנעלמים הטבעיים ביותר יבואו מתוך השאלה (שכפי שכבר נאמר - נמצאים במשפט האחרון). נעלמים נוספים יכולים להיווצר תוך כדי פתרון. לא תמיד נדע מראש כמה נעלמים נדרשים לנו. גם בעולם האמיתי איננו רואים תמיד את הפתרון למצב אלא מתמודדים תוך כדי מהלך הדברים. בכל מקום שלא נמצא נתון באופן מִיָּדִי, נציב במקומו נעלם. כדאי ורצוי "לסמוך" על "רוחב" לִבּו של מחבר השאלה שלא ישאיר אותנו ללא מספיק משוואות לפתרון. (טיפ לחיי היומיום: בכלל כדאי להרפות קצת שליטה ולסמוך על העולם שלפעמים דברים יפעלו למעננו גם אם לא נלְחַץ או נילָחֵץ.)

**תרגול נעלמים ושליפת נתונים**

מכיוון שהמְמַדים חשובים לפתרון בעיות מילוליות, נרחיב קצת בנושא.

נתחיל בבעיות תנועה.

באופן כללי ומחיי היומיום אנו מכירים את המושגים: מהירות, דרך וזמן. מעטים מאִתנו נותנים את הדעת על כך שהמהירות איננה מֵמַד בפני עצמו, אלא היא פשוט חלוקה של מֵמַד הדרך במֵמַד הזמן. כאשר אנו משתמשים במושג - קמ"ש - אנו מתארים את המהירות באופן של , כלומר מהירות היא תמיד חלוקה של המרחק שעוברים ביחידת זמן אחת. אמנם בדרך כלל בבעיות דרך אנו מוצאים מְמַדים של ק"מ ושעות, אך בעולם האמיתי ניתן להשתמש גם במְמַדים אחרים. למשל, ישנן ארצות בהם משתמשים במֵמַד של מייל לתיאור מרחקים, ואז המהירות היא מס' המיילים לשעה.

ישנן מהירויות שטווח המדידה שלהן הוא קצר, ואז נוח יותר לתארן במְמַדים של מטרים ושניות. למשל, כאשר מודדים מהירות בעיטה של שחקן כדורגל, המדידה תהיה במטרים לשנייה, או כאשר מחשבים מהירויות לוויינים בעלי מהירויות גבוהות, עוברים ממדידה של מטרים לשנייה למדידה של ק"מ לשנייה. נוח יותר לחשוב על 16  מאשר על 16000.

אנו רואים שהמטרה היא להתאים את מְמַדי המדידה למהירויות הנמדדות. אם הזכרנו מהירויות גבוהות, נצביע גם על מהירויות נמוכות מאוד. למשל, כאשר רוצים למדוד תנועה של מים בתוך קרקע (לצרכים חקלאיים או לתכנון בארות), התנועה נמדדת במטרים ליום, ותנועת היבשות נמדדת בס"מ לשנה.

ישנה מדידה אחת שהיא שונה לחלוטין מהאחרות, והיא מדידת מרחק בין גלקסיות. אנו שומעים מעת לעת על מרחקים של "שנות אור". איך הפך מֵמַד של זמן (שנה) למֵמַד של אורך ?

התשובה היא שאכן שנה היא מֵמַד של זמן, אולם לאור יש מהירות קבועה ותמידית של 300000 ק"מ בכל שנייה בקירוב. אם נכפיל את המהירות הזו במספר השניות שיש בשנה, נקבל את המרחק שתעבור קרן אור. זהו המרחק המתואר ע"י "שנת אור" - המרחק שיעבור האור בשנה אחת.

(מומלץ לנסות ולבדוק כמה ק"מ יש בשנה כזו).

נעבור לדוגמה:

א. מכונית יצאה מאילת צפונה במהירות קבועה. כעבור שעה יצא רוכב אופנוע, גם הוא מאילת צפונה,

במהירות קבועה. מהירות האופנוע גדולה ב – 30 קמ"ש ממהירות המכונית. רוכב האופנוע השיג את המכונית במרחק 250 ק"מ. מה הייתה מהירות המכונית ?

פתרון:

מקריאה ראשונית נמצא שהנעלם הטבעי הוא מהירות המכונית. כלומר:

x – מהירות המכונית

נוסיף שִׂרטוט של הבעיה:

אילת

נקודת פגישה

אופנוע

מכונית

אנו מוצאים כאן תיאור של שני סיפורים (תנועות שונות): אחת של המכונית ואחת של האופנוע. לכן נבנה את טבלת המאורעות על פי שני הסיפורים:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | סיפור א | סיפור ב |
|  | תנועת המכונית | תנועת האופנוע |
| מהירות |  |  |
| זמן |  |  |
| דרך |  |  |

כדי להשלים את הטבלה עלינו לקרוא שוב את השאלה. תחילה נתמקד בסיפור המכונית. כבר ראינו שמהירותה היא x . עתה עלינו למצוא את הזמן. מכיוון שהוא לא נתון לנו, נוסיף נעלם ונגדיר:

t – זמן תנועת המכונית

הדרך שעברה המכונית עד המפגש היא אותה דרך שעשה רוכב האופנוע, כי הם נפגשו לאחר 250 ק"מ.

כלומר הדרך היא 250 ק"מ.

מכאן אנו מקבלים את הטבלה:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | סיפור א | סיפור ב |
|  | תנועת המכונית | תנועת האופנוע |
| מהירות | x |  |
| זמן | t |  |
| דרך | 250 | 250 |

עכשיו נפנה לתנועת האופנוע.

על זמן תנועת האופנוע יש לנו מידע בסיסי והוא: "כעבור שעה יצא רוכב אופנוע..." אם רוכב האופנוע יצא שעה לאחר המכונית, הרי שעד הפגישה הוא נסע שעה פחות (צריך לזכור שאנו מחשבים זמן נסיעה נטו). כלומר הוא נסע (1 - t) שעות. גם על המהירות יש לנו מידע: "מהירות האופנוע גדולה ב – 30 קמ"ש ממהירות המכונית." לכן מהירותו (x + 30). עכשיו הטבלה השלמה תֵּיראה:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | סיפור א | סיפור ב |
|  | תנועת המכונית | תנועת האופנוע |
| מהירות | x |  |
| זמן | t | 1- t |
| דרך | 250 | 250 |

אותו רעיון ניתן ליישום גם בבעיות קנייה ומכירה:

ב. תלמיד קנה מספר מחברות ושילם תמורתן 100 ₪. אם היה מחיר מחברת נמוך בשקל אחד, היה יכול

לקנות באותו מחיר עוד 5 מחברות. מה מחירה של מחברת אחת, וכמה מחברות קנה התלמיד ?

פתרון:

גם כאן אנו מוצאים את הנעלמים הטבעיים:

x – מחיר מחברת אחת

y – מספר מחברות שקנה התלמיד

גם כאן אנו מוצאים שני סיפורים: הקנייה בפועל והקנייה במקרה של מחיר נמוך בשקל.

הטבלה נראית כמו הטבלאות הקודמות:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | סיפור א | סיפור ב |
|  | הקנייה בפועל | הקנייה במקרה של מחיר מופחת |
| מחיר יחידה | x | 1x - |
| כמות | y | 5 + y |
| סה"כ תשלום | 100 | 100 |

***בדיקת הבנה***

1. חקלאי קנה מספר חבילות זרעים ושילם תמורתם **₪. לו היה מחיר חבילה נמוך ב-** שקלים, היה יכול לקנות עוד ** חבילות. מה מחיר חבילת זרעים, וכמה חבילות קנה ?

בנו טבלה מתאימה. **(שימו לב, בשלב זה עליכם לבנות טבלה ולא למצוא פתרון!)**

אותו רעיון קיים גם בבעיות הֶספק:

בעיות הֶספק כִּשמן כן הן. אלה בעיות שבסיסן הוא קֶצֶב. אנחנו בדרך כלל רגילים לפתור שאלות של כמויות, ולכן לא אחת אנחנו מתקשים בלוגיקה של בעיות הֶספק. אם נפנים את המושג הֶספק, יקל עלינו להתמודד עם שאלות אלה.

**הֶספק** הוא תמיד **כמות ליחידת זמן**. לדוגמה: כאשר אנו מתכננים תאורה, הגורם המעניין הוא לאיזה הֶספק היא מתוכננת, שכן ככל שההֶספק גבוה יותר, כך יהיה לנו יותר אור. אנו לא יודעים כמה חשמל היא תִּצרַךְ כי זה כבר תלוי גם במספר השעות שהיא תִּדלַק. אבל כן חשוב לנו כמה חשמל יעבור בה בכל יחידת זמן כי זה מצביע על עצמת ההארה. כנ"ל לגבי מיזוג אוויר. אמנם חשוב לנו החיסכון, אולם אנו יודעים כי ככל שֶהֶספק החשמל יִגבַּר, כך החדר יגיע מהר יותר לטמפרטורה הרצויה וישמור עליה גם בתנאים קיצוניים.

כמו כן אנו מודעים להֶספק בנוזלים. בטפטפות אנו עובדים ביחידות של ליטר לשעה.

בְּברז הכיור אנו נמדוד בליטר לדקה, ואילו במילוי ברֵכות נמדוד מ"ק לשעה.

כך אנו מתאימים יחידות לרמת ההֶספק הדרושה. גם כאן אנו רואים שההֶספק הוא כמות ליחידת זמן.

כך גם לגבי **עבודה**. אמנם יש לנו כמות מסוימת של עבודה (נניח לשטוף 200 צלחות), אבל אנו משלמים לפּוֹעֵל כדי שהוא יסיים אותה בזמן סביר. נבחר להעסיק את הפּוֹעֵל שיבצע את העבודה באופן יעיל. כלומר גם פה נביא בחשבון את ההֶספק של הפועל ולא רק את העובדה שהוא סיים את המלאכה (לא נעסיק פועל שישטוף את הצלחות לאורך כל הלילה. נחפש את זה שיעשה זאת בחצי שעה).

כל הפָּתִיחַ הזה הובא כדי להסביר שבבעיות מסוג זה אנו עוברים לבדיקה של קֶצֶב. אם מְספרים לנו על פועל שמסיים עבודה ביומיים, אנו מִיד נתייחס לעובדה שהוא מבצע חצי מהעבודה ביום. לא חשוב לנו מהי העבודה, אנו תמיד נתייחס אליה כאל יחידת עבודה שלמה.

אם מורה צריך לבדוק 500 מבחני בגרות בשבוע, אנו נדע שקֶצֶב עבודתו הוא  מתוך העבודה ביום, וזה לא

ממש משנה מהי כמות המחברות אם מתייחסים אל הבדיקה כאל יחידת עבודה שלמה.

כך גם בנושאי **זרימה**. גם אם לא נתונה הכמות במפורש, אנו יכולים ללמוד על קֶצֶב העבודה. אם ברז ממלא ברֵכה ביומיים, הרי שקֶצֶב המילוי שלו הוא  מתוך הברֵכה בכל שעה. באופן הסתכלות כזה נמצא

שפתירת בעיות מסוג זה נהיית פשוטה ואינה מבלבלת.

לדוגמה:

ברז ממלא אמבטיה במשך 20 דקות. פתח הניקוז מרוקן אותה במשך 30 דקות. אם ממלאים אמבטיה זו ולא סוגרים את פתח הניקוז, תוך כמה זמן היא תתמלא ?

בחירת הנעלם: t – זמן מילוי האמבטיה (מילוי האמבטיה הוא יחידת העבודה, ולכן **כמות העבודה =1**.)

אם האמבטיה מתמלאת ב- 20 דקות, הרי שההֶספק (קֶצֶב המילוי) הוא:  מהאמבטיה בדקה.

כנ"ל אם האמבטיה מתרוקנת ב- 30 דקות, ההֶספק (קֶצֶב ההֲרָקָה) הוא:  מהאמבטיה בדקה.

עתה אנו יכולים לעבור לטבלה. יש כאן סיפור אחד בלבד של מילוי במצב של זרימה חופשית פנימה והחוצה, ולכן:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| הֶספק |  | (זהו הֶספק המילוי נטו אם לוקחים בחשבון את ההֲרָקָה.) |
| זמן | t |  |
| כמות כוללת | 1 | (כלומר השלמת יחידת העבודה שהיא במקרה שלנו מילוי הברֵכה) |

ג. שני ברזים ממלאים ברֵכה ב - שעות. יום אחד פתחו את שני הברזים, ולאחר שעות שמילאו יחד את

הברֵכה, התקלקל ברז אחד, וכדי למלא את הברֵכה המשיכו להפעיל את הברז השני עוד שעות.

בכמה זמן יכול כל ברז למלא את הברֵכה לבדו ?

פתרון:

גם כאן אנו מוצאים את נתוני זמן העבודה כיחידה אחת.

נבחר את הזמנים כנעלמים:

- זמן מילוי ברֵכה על ידי ברז א'

- זמן מילוי הברֵכה על ידי ברז ב'

ומכאן:

הֶספק ברז א' - 

הֶספק ברז ב' - 

בשאלה זו אנו מוצאים שני סיפורים: עבודת הברזים המשותפת ועבודה ביום התקלה, אך כל אחד מהם נחלק גם הוא לשניים. ברז א' וברז ב'. והטבלה:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | סיפור א | | סיפור ב | |
|  | עבודה משותפת | | יום התקלה | |
|  | ברז א | ברז ב | ברז א | ברז ב |
| הֶספק |  |  |  |  |
| זמן | 6 | 6 | 5 | 9 |
| סה"כ | 1 | | 1 | |

סגנון נוסף של שאלות הֶספק עוסק בבעיות שלגביהן כן נתונה הכמות כמו בדוגמה הבאה:

ד. שני גננים צריכים לשתול 180 שתילים. גנן א' עבד במשך שעתיים, ואחר כך החליף אותו גנן ב'. גנן ב'

סיים את העבודה בתום 6 שעות. גנן א' זריז יותר ויכול לבצע שתילה של 90 שתילים בשעה וחצי פחות מגנן ב'. כמה שתילים שותל כל אחד מהגננים בשעה ?

פתרון:

כאן יש התייחסות לכמות העבודה (180 שתילים ו-90 שתילים), לכן נתייחס אל ההֶספק כאל כנעלם.

בחירת הנעלמים היא פשוטה:

x – הֶספק (מס' השתילים לשעה) גנן א'

y – הֶספק גנן ב'

גם בשאלה זו נתונים שני סיפורים: 1) שתילת 180 שתילים, 2) שתילת 90 שתילים. אולם לאחר קריאה חוזרת אנו מוצאים, למעשה, ארבעה סיפורים כי לכל מצב יש פעולת גנן א' ופעולת גנן ב'. לכן הטבלה תֵּיראה:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | שתילת 180 שתילים | | שתילת 90 שתילים | |
|  | גנן א | גנן ב | גנן א | גנן ב |
| הֶספק | x | y | x | y |
| זמן | 2 | 6 |  |  |
| סה"כ | s1 | s2 | 90 | 90 |

עתה אנו רואים שחסר לנו נתון לגבי זמן השתילה של הגננים את 90 השתילים. לכן נוסיף לנו נעלם:

t - זמן השתילה של גנן א' את 90 השתילים.

עתה נוכל להשלים את הטבלה:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | שתילת 180 שתילים | | שתילת 90 שתילים | |
|  | גנן א | גנן ב | גנן א | גנן ב |
| הֶספק | x | y | x | y |
| זמן | 2 | 6 | t |  |
| סה"כ | s1 | s2 | 90 | 90 |

שימו לב שבשאלה זו לא השתמשנו בכל הנתונים (180 שתילים). אין זה אומר שהנתון מיותר. נלמד להשתמש בנתון זה בהמשך.

כדאי לשים לב שגם משפט השאלה שונה בשתי הדוגמאות האחרונות. בדוגמה ג' מחפשים **זמן**, בדוגמה ד' מחפשים את **ההֶספק** (מספר שתילים לשעה). תשומת לב כזו תקל עלינו להבחין איך נוח יותר לגשת לפתרון השאלה.

***בדיקת הבנה***

2. שני פועלים יכולים לסיים עבודה מסוימת אם הם עובדים יחד במשך  דקות. נתון כי הזמן הדרוש לפועל השני לבצע את כל העבודה לבדו, גדול ב- דקות מהזמן הדרוש לפועל הראשון לבצע את כל העבודה לבדו. בכמה זמן יכול כל אחד מהפועלים לבצע את כל העבודה לבדו ? בנו טבלה מתאימה.

3. שני פועלים גוזמים יחד  עצים בשעתיים. אם פועל א' יעבוד לבדו  שעות, יספיק פועל ב' לבדו להשלים את הגיזום כעבור חצי שעה. כמה עצים גוזם כל פועל בשעה ? בנו טבלה מתאימה.

בעיות כוללות לפעמים גם חישובים באחוזים. כדי שנדע להתמודד אִתם, נרחיב קצת על נושא האחוזים בכלל.

הדבר החשוב שעלינו לזכור בכל הקשור באחוזים, הוא שהאחוז מצביע על חלק יחסי מתוך גודל מסוים ואיננו מתאר כמות. בשפת היומיום אנו שומעים משפטים, כמו: "את החולצה הזו קניתי ב- 50%." המידע שעובר אלינו, הוא שיש לדובר תחושה טובה. איננו מקבלים כל מידע על מחיר החולצה.

כדי להדגיש את הנקודה הזו נשתמש בדוגמה.

שתי חנויות בגדים נפתחו במרכז מסחרי. חנות א' מפרסמת שהיא בעלת המחירים הנמוכים ביותר בעיר. בחלון הראווה של חנות ב' מופיעה כרזה גדולה על מכירת סוף עונה בהנחה של 50%. בחנות א' ניתן למצוא חולצה מסוימת במחיר של 180 ₪. בחנות ב' נמכרת אותה חולצה בדיוק במחיר של 400 ₪ לפני הנחה. לקוח הבא לקנות, יכול להתרשם מהכרזה המופיעה בחנות ב' ולהעדיף אותה, אולם המחיר שישלם יהיה 200 ₪ . אמנם הוא יוכל להתפאר בחולצה שרכש בחצי מחיר, אך בפועל שילם 20 ₪ מיותרים.

לכן עלינו לזכור תמיד כי אחוז חייב לבוא בצמידות למחיר הבסיסי (או כפי שהוא מופיע לפעמים, כמחיר הקרן).

אחרי שמבררים את האחוז ואת המחיר הבסיסי, ניתן לחשב את הכמות המסתתרת מאחורי האחוזים. לשם חישוב הכמות שמבטא האחוז (מכאן והלאה נכנה אותה הכמות האחוזית), יש לנו תבנית אחת ברורה:





בתבנית זו x מבטא את הבסיס, p מבטא את האחוז, ו-y מבטא את הכמות האחוזית (הכמות שהיא החלק היחסי מתוך הבסיס).

כאשר נתון האחוז באופן מספרי, כדאי מאוד לזכור את המעבר מאחוז לחלק יחסי וההֶפֶך, זאת בעזרת הקבוע 100. כלומר אם נתון 30%, אנו מיד יכולים לתרגמו ל - 0.3. כנ"ל 7% יהיו - 0.07 .

וההֶפֶך: אם אנו מקבלים 0.23, ניתן לתרגמו ל - 23%.

לכן כדי לחשב מע"מ בשיעור 17% אנו מכפילים את המחיר ב - 0.17 ,

וכדי לחשב את התשלום אנו מכפילים ב - 1.17 כי אנו מחברים את המחיר עם המע"מ.

דוגמה: מחיר של חולצה הוא 150 ₪. חישוב המע"מ הוא: 

ובנוסף למחיר החולצה התשלום הכולל הוא: 

ניתן, כמובן, גם לחשב זאת באופן מִיָדי: 

ובהוצאת גורם משותף: 

במקרה זה יש משמעות הגיונית לסוגריים כי הם מייצגים את מחיר הקרן בתוספת החלק היחסי של המע"מ. לכן כאשר אנו רוצים להוסיף מחיר או משקל באחוזים ידועים, אנו נחבר את החלק היחסי לאחד ונכפיל בבסיס. ובדוגמה שלנו: 175.5 =

באותו אופן נוכל לחשב את הבלאי של סחורה בשווי 1250 ₪ אם ידוע ש- 7% ממנה ניזוק בהובלה.

מכיוון שעלינו לחסר את הכמות האחוזית, אנו מקבלים: 

m = 1162.5 ₪

עתה נעבור לכמה דוגמאות פשוטות:

ה. מוצר מסוים הוזל ב-x אחוזים. לאחר תקופה מסוימת התייקר אותו מוצר שוב ב- x אחוזים.

האם מחירו הסופי של המוצר היה שווה, יקר או זול ממחירו הראשוני ?

פתרון:

שאלה זו ייחודית בכך שאיננו נשאלים על כמות ורכישה אלא על השוואה פנימית של מחיר מוצר בדיד. מסגנון השאלה אנו רואים כי ניתן לבחור את הנעלם כמחירו המקורי של המוצר או כמחירו הסופי. ממילא אנו משווים את המחירים האלה. לכן באופן שרירותי נבחר:

y – מחיר מקורי של המוצר

עתה נפנה לטבלה:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | סיפור א' | סיפור ב' |
|  | הוזלה | התייקרות |
| מחיר מקורי | y |  |
| אחוז | x | x |
| מחיר סופי |  |  |

כפי שאנו רואים מהטבלה, בשאלות מסוג זה מחירו הסופי של סיפור א' הוא מחירו המקורי של סיפור ב', ולכן תמיד כדאי להשלים תחילה את סיפור א' ורק אחר כך לעבור לסיפור ב'.

בבעיות תערובת אנו מוצאים שימוש רב באחוזים. אין זה משנה את כללי העבודה עם אחוזים. התבנית נשארת בעינה. אולם עלינו להזכיר לעצמנו מהי תמיסה, ומהו ריכוז תמיסה.

תמיסה או תערובת מציינים שני חומרים או יותר המעורבבים זה בזה. הכמויות נמדדות בדרך כלל במְמַדי נפח: ליטרים או סמ"ק וכד'. מהילה אף היא מציינת ערבוב. כאשר כוהל נמהל במים, מקבלים תמיסת כוהל. כבר הזכרנו בנושא האחוז שהוא תמיד מתוך גודל מסוים. הוא מצטרף תמיד לכמות. ריכוז תמיסה הוא האחוז של החומר המומס בתוך התמיסה, ולכן גם הריכוז מצטרף תמיד לכמות הכוללת.

באופן כללי המעבר מריכוז לכמות הוא על פי הנוסחה:





וההֶפֶך:

לדוגמה:

ו. לתוך 60 ליטר תמיסת כוהל של 35% הוסיפו 30 ליטר כוהל נקי. מה ריכוז התמיסה שהתקבלה ?

פתרון:

בחירת הנעלם: x – ריכוז סופי

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | תמיסת הכוהל | תוספת | ערבוב |
| יחס ריכוז | 0.35 | 1 | x |
| כמות כוללת | 60 | 30 | 60+30=90 |
| כמות מומס |  |  | 21+30=51 |

***בדיקת הבנה***

4. נתונים שני כלים. בכלי א' יש  ליטרים כוהל בריכוז מסוים. בכלי ב' יש  ליטרים בריכוז הגבוה ב- מהריכוז שנמצא בכלי א'. את הקיבול שבשני הכלים יחד מזגו לכלי ג', והתקבלה תמיסה בריכוז של .מה היה ריכוז הכוהל בכלי ב' ?

בנו טבלה מתאימה.

דוגמאות נוספות לשליפת נתונים:

ז. בשעה 8.00 בבוקר יצאה משאית במהירות 70 קמ"ש מאילת לבאר שבע. בשעה 8.40 יצאה מכונית

מבאר שבע לאילת. בשעה 10.30 נפגשו המשאית והמכונית והמשיכו בדרכן. המכונית הגיעה לאילת שעה לפני שהמשאית הגיעה לבאר שבע.

א. מה הייתה מהירות המכונית ?

ב. מה המרחק מבאר שבע לאילת ?

בנו טבלה מתאימה.

פתרון:

גם כאן אנו מוצאים מקריאה ראשונית שהנעלמים הטבעיים הם:

s – המרחק מבאר שבע לאילת

v – מהירות המכונית

מקריאה שנייה אנו מוצאים ארבעה סיפורים: תנועת המשאית עד הפגישה, תנועת המשאית אחרי הפגישה, תנועת המכונית עד הפגישה ותנועת המכונית אחרי הפגישה.

אילת

באר שבע

פגישה

s2

s1

לכן הטבלה שנבנה, תֵּיראה כך:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | משאית | | מכונית | |
|  | לפני פגישה | אחרי פגישה | לפני פגישה | אחרי פגישה |
| מהירות | 70 | 70 | v | v |
| זמן | 2.5 | t |  | 1- t |
| דרך | s1 | s2 | s2 | 1s |

ההסבר:

המהירויות קבועות כל הזמן.

זמן המשאית עד הפגישה הוא לפי: 2.5=10.5-8. זמן המשאית אחרי הפגישה איננו ידוע, ולכן נקרא לו t.

זמן המכונית לפני הפגישה הוא: . מהם עלינו להפחית 40 דקות (לפי המידע שהמכונית יצאה 40 דקות אחרי המשאית): , כלומר  שעות.

זמן המכונית לאחר הפגישה הוא בשעה פחות מזמן המשאית.

הדרך של המשאית עד הפגישה אינה ידועה, ולכן נקרא להs1 , אולם ידוע לנו שאם לאחר הפגישה המשיכה כל אחת לדרכה, הרי שהמכונית עשתה בדיוק את הדרך הזו מהפגישה ועד אילת. כנ"ל, הדרך של המשאית אחרי הפגישה שווה לדרך של המכונית לפני הפגישה, והיא s2 .

ח. סוחר קנה 15 מוצרים במחיר כולל של 1000 ₪. 3 מוצרים נפגמו בדרך, ולכן מכר אותם בהנחה של 30%

ממחיר הקנייה. עוד מוצר אחד לקח לעצמו. את השאר מכר ברווח של 15 ₪ ליחידה. כמה הרוויח הסוחר בעסקה זו ?

בנו טבלה מתאימה.

פתרון:

כאן אנו מוצאים שלושה סיפורים:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | קניית המוצרים | מכירת המוצרים | |
|  |  | מוצרים תקינים | מוצרים פגומים |
| מחיר יחידה | x | 15x + |  |
| כמות | 15 | 15-3-1=11 | 3 |
| סה"כ מחיר | 1000 | z1 | z2 |

***תרגול עצמי*** *-* ***שליפת נתונים***

בתרגילים הבאים שִלפו את הנתונים ובנו טבלאות מתאימות.

5. מכונית נוסעת כל יום מרחק של  ק"מ במהירות קבועה. יום אחד לאחר נסיעה של חצי שעה האטה המכונית את המהירות ב –  קמ"ש, ולכן בשעה שהייתה אמורה להגיע ליעדה, עדיין הייתה במרחק  ק"מ מהיעד. מה הייתה מהירותה ההתחלתית ?

*6. שני הולכי רגל יצאו זה לקראת זה. האחד יצא מנקודה  לנקודה  במהירות של  קמ"ש. השני יצא שעה מאוחר יותר מנקודה  לנקודה  במהירות  קמ"ש. הם נפגשו והמשיכו כל אחד בדרכו. ההולך הראשון הגיע לנקודה  חצי שעה לפני שההולך השני הגיע לנקודה . מה המרחק מ - ל -?*

*7. המרחק בין שתי ערים הוא  ק"מ. משאית יצאה מעיר א' לעיר ב' במהירות של  קמ"ש. חצי שעה אחר כך יצאה מונית מעיר א' לכיוון המשאית. המונית השיגה את המשאית ומיד החלה לחזור. כאשר הגיעה המונית חזרה לעיר א', הייתה המשאית במרחק  ק"מ מעיר ב'. מה הייתה מהירות המונית ?*

*(שאלה למחשבה: האם יש מקום בתבנית לנתוני המרחק בין הערים ולמרחק המשאית מהעיר ?*

*איזה שימוש ניתן לעשות בנתונים אלה לדעתכם ?)*

8. עמותה למטרות צדקה קנתה חבילות שי בסכום של ₪. את החבילות פירקו מתנדבים וארזו

אותם מחדש בחבילות קטנות יותר. כל חבילה נמכרה בשקל יותר ממחיר חבילה שנקנתה. מספר החבילות שנמכרו היה גבוה ב-  ממספר החבילות שנקנו. סה"כ הכניסה העמותה לתקציבה ₪ . כמה חבילות נמכרו, ובאיזה מחיר ?

**הצבת משוואות ופתרון בעיות מילוליות**

מאופן שליפת הנתונים אנו כבר יכולים לראות שכל הבעיות המילוליות נפתרות באותה התבנית:

 כאשר ההבדל היחיד בין הסוגים השונים הוא

במְמַדים המתאימים לבעיה.

בבעיות דרך נקבל: מרחק כולל = זמן •  (מהירות)

בבעיות קנייה ומכירה: מחיר כולל = מס' יחידות • 

בבעיות הֶספק : סה"כ עבודה = זמן •  (הֶספק)

בבעיות תערובת: כמות מומס = נפח/משקל •  (% הריכוז של המומס)

כלומר אנו יכולים לראות שבאופן כללי ההיגיון המנחה בבעיות מילוליות אינו תלוי בנושא השאלה.

כדי שנהיה בטוחים במערכת ההצבות שלנו, כדאי גם לבדוק את המְמַדים של כל משוואה. נוכל להשוות בין המֵמַד המתקבל בצד שמאל, לבין המֵמַד המתקבל בצד ימין. אם ההתאמה אינה מתקיימת, סימן מובהק הוא שהמשוואה **אינה** נכונה. במקרה זה נחסוך זמן פתרון ונחזור למציאת המשוואה הנכונה. אם קיימת התאמה, יש סיכוי טוב שהמשוואה נכונה, ושווה להשקיע גם בפתרון כדי להגיע לתוצאה המבוקשת.

מכיוון שהמְמַדים חשובים לפתרון בעיות מילוליות, נרחיב קצת בנושא.

נתחיל בבעיות תנועה.

מתוך כל הנאמר לעיל, אני תקווה שכבר הבנתם כי בתנועה שולטת הנוסחה: 

או כפי שכבר ראינו: מרחק כולל = זמן •  (מהירות)

בדרך כלל (אך זו ממש לא חובה) מסמנים את המהירות באות – v, את הזמן באות – t ואת הדרך

באות - s, ואז מתקבלת אותה הנוסחה בצורה: 

בדיקת המְמַדים תַּראה לנו שאכן מתקיים בהם שוויון: s = t  v



ואכן רואים שלאחר צמצום מתקבל מֵמַד של ק"מ בשני האגפים.

נתחיל בניתוח בעיות פשוטות.

ט. אדם יצא לטייל בשעה 5.00 במהירות מסוימת. בשעה 7.00 הגדיל את מהירותו ב- 1 קמ"ש והתמיד

במהירות זו עד השעה 9.00 . מה הייתה מהירותו התחילית אם עבר בסה"כ 18 ק"מ ?

פתרון:

תחילה נבחר נעלמים. הנעלם הוודאי הוא המהירות התחילית כפי שעולה מניסוח השאלה (בדרך כלל נמצא את הנעלם במשפט האחרון של השאלה). נזכיר כי לא נהסס להוסיף נעלמים, ככל שיידרשו, בהצגת המודל. לכן נציין בפנינו:

v - מהירות התנועה של הטייל עד השעה 7.00

9.00

7.00

5.00

נוסיף שִׂרטוט:

עתה נבחן שוב את השאלה; נבדוק כמה סיפורים מופיעים בשאלה ולפי זה, נציג את הנתונים. מהסתכלות נוספת אנו מוצאים שני סיפורים: הראשון מתאר את ההליכה עד השעה 7.00, והשני - מהשעה 7.00 . לכן הצגת הנתונים תֵּיראה כך:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | עד 7.00 | אחרי 7.00 |
| מהירות | v (הנעלם הנבחר) | 1 v + (הגדלת המהירות ב-1) |
| זמן | 2 (זמן הליכה) | 2 (זמן הליכה) |
| **\*** דרך | s1 | s2 |

**\*** בהצגת הדרכים הוספנו נעלם. מכיוון שלא הוגדרה לנו הדרך באופן מפורש, נוסיף עוד נעלם ונקווה

שנקבל מספיק משוואות. אל דאגה! באופן רגיל המשוואות מתכנסות במהירות ובקלות למספר מצומצם של משוואות (עד שתיים) ולפתרון פשוט.

עתה נוכל לעבור להצגת המשוואות שיתארו את תנאי השאלה:

משוואת התנועה עד השעה 7.00 תהיה לפי נוסחת הדרך:  (1)

משוואת התנועה אחרי השעה 7.00 תהיה לפי אותה נוסחה:  (2)

מכיוון שהשתמשנו בנוסחה, אנו יכולים לסמוך על נכונותה, ואין צורך לבדוק מְמַדים.

כדי להשוות את מספר המשוואות למספר הנעלמים כדאי לחפש נתון נוסף שלא הוצב בטבלה. את המשוואה השלישית נמצא לפי הנתון הנוסף של סה"כ הדרך. נתון זה מקשר בין הדרכים שבסיפורים שלנו. המשוואה תהיה:  (3)

בדיקת מְמַדים תַּראה: ק"מ = ק"מ+ ק"מ כלומר מְמַדי האגפים במשוואה (3) שווים.

תהליך הפתרון של משוואות אלה נהיה פשוט אם מציבים את משוואות (1) ו- (2) במשוואה (3) .

מקבלים אז:  (4)

ולאחר פתיחת סוגריים: 

נעביר אגפים ונקבל:  

ולבסוף: 

והתשובה היא: מהירותו ההתחלתית של המטייל הייתה 4 קמ"ש.

י. משני מקומות שהמרחק ביניהם 61 ק"מ, יצאו שני רוכבי אופניים זה לקראת זה. הראשון יצא בשעה

5.30 ובמהירות 10 קמ"ש, והשני יצא בשעה 7.00 ובמהירות 13 קמ"ש. מצאו את זמן פגישתם.

פתרון:

בשאלה זו יש לשים לב שקיים הבדל בין מועדי הנסיעה. אם אנו מחשבים את הזמן בבעיות תנועה כזמן נטו של התנועה, הרי שהרוכב שיצא מאוחר יותר, נסע פחות שעות.

גם בשאלה זו קל לראות שהנעלם המִיָּדִי הוא הזמן. לכן נציין בפנינו:

t- זמן הרכיבה של הרוכב הראשון

גם פה נוסיף נעלמים בכל מקום שיידרשו.

שִׂרטוט:

רוכב א'

נקודת פגישה

רוכב ב'

שוב אנו מוצאים שני סיפורים ונציג אותם בדרך זהה לבעיה הקודמת:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | רוכב א' | רוכב ב' |
| מהירות | 10 | 13 |
| זמן | t | 1.5 - t |
| דרך | s1 | s2 |

הצבת המשוואות תהיה: (1)

(2)

(3)

לפני המשך הפתרון כדאי לכם להסביר לעצמכם: א. מהיכן נובעת כל משוואה ? ב. האם המְמַדים מתאימים ?

עתה יש לפתור את המשוואות (כמו בדוגמה הקודמת).

התשובה צריכה להיות: 3.5t =

והתשובה הסופית: הפגישה בין הרוכבים הייתה בשעה 9.00.

***בדיקת הבנה***

9. שתי רכבות יוצאות בו זמנית זו לקראת זו משתי תחנות. התחנות מרוחקות 600 ק"מ זו מזו. אחת הרכבות מגיעה למטרתה 3 שעות לפני השנייה. ידוע כי אחת הרכבות עוברת מרחק של 200 ק"מ באותו זמן שהרכבת השנייה עוברת 250 ק"מ. מהן מהירויות הרכבות ?

נעבור עתה לבעיות קנייה ומכירה.

גם כאן "ניתקל" בשאלות שיכללו כמה סיפורים. לכן דרכי הפתרון יהיו על פי אותה מתכונת כמו בבעיות תנועה.

יא. תלמיד קנה כמות של מחברות ושילם תמורתן 140 ₪. אם מחיר כל מחברת היה נמוך ב- 30 אגורות,

היה התלמיד מקבל עבור אותו סכום 6 מחברות יותר.

כמה מחברות קנה התלמיד, ומה מחיר כל מחברת ?

פתרון:

תחילה נקרא את השאלה כולה.

בבעיות כאלו יש לשים לב שלעִתים המחירים נקובים בשני מְמַדים שונים: שקלים ואגורות. לכן יש תחילה להמיר את כל המחירים למֵמַד שווה. אנו נבחר להמיר את האגורות לשקלים, ולכן 30 אגורות יהפכו ל- 0.3 ₪.

עתה עלינו לברור נעלמים מדויקים. כמו תמיד הנעלם יימצא בסופה של השאלה.

עתה נגדיר את הנעלמים:

מס' המחברות שקנה התלמיד – x

מחיר כל מחברת – y

עתה נקרא שוב את הבעיה ונברר כמה סיפורים יש בבעיה.

נמצא שישנם 2 סיפורים: הראשון מתאר את המקרה "האמיתי", והשני מקרה של "הוזלת המחיר".

נציג את הסיפורים באופן מפורט (אין לחשוש להציב נעלם בכל מקום שלא נתון לנו ערך מספרי):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | המקרה האמיתי | הוזלת מחיר |
| מחיר מחברת | y | 0.3 y - |
| מס' מחברות | x | 6 x + |
| תשלום | 140 | 140 |

לאחר הצבת הערכים בכל סיפור אנו מגיעים לבניית המשוואה.

משוואה ראשונה תהיה (בהתאם לדרך המוכרת לנו כבר):  (1)

משוואה שנייה תהיה (כנ"ל)  (2)

במשוואות שהצבנו, מתקיימת ההתאמה, ובשני האגפים מתקבל מֵמַד של שקלים:

בימין מופיע מחיר, ובשמאל מופיע כפולה של מחיר (מחברת) במספר חסר מֵמַד (מס' מחברות), כלומר גם הוא מֵמַד של שקלים. כך בשתי המשוואות. לכן כדאי להשקיע זמן גם בפתרון.

והפתרון המלא: פתיחת סוגריים במשוואה (2): 

הצבה של (1) בתוך (2): 

העברת אגפים ובידוד של x: 

אחרי חילוק המשוואה ב- 0.3 - : 

הצבה חוזרת של x במשוואה (1): 

שוב פתיחת סוגריים: 

וסידור המשוואה הריבועית: 

פתרון המשוואה הריבועית נותן:  

מכיוון שהנעלם y מייצג מחיר, אין הוא יכול להיות שלילי (אין ערך שלילי לחפצים). לכן התשובה המתאימה לבעיה שלנו היא: , ואותה עלינו להציב שוב כדי לקבל את מספר המחברות (x).

נציב שוב במשוואה (1) (או (2) אם אתם מעדיפים): 

וע"י העברת אגפים: 

מקבלים: 

כמובן, אין לשכוח לתת תשובה מילולית לשאלה מילולית:

תשובה: התלמיד קנה 50 מחברות במחיר 2.8 שקלים למחברת.

יב. בי"ס קנה מחשבים ומדפסות בסכום כולל של 105,000 ₪. מחיר מחשב גבוה ב- 2500 ₪ ממחיר

מדפסת. הסכום ששולם עבור מחשבים היה גבוה פי 2 מהסכום ששולם עבור מדפסות. מה מחיר מדפסת, ומה מחיר מחשב אם ידוע שנִקנו סה"כ 55 פריטים ?

פתרון:

גם כאן נבחר נעלמים אחר קריאה ראשונה של השאלה. גם כאן הנעלמים ייבחרו לפי השאלה המופיעה במשפט האחרון.

מחיר מחשב – x

מהיר מדפסת – y

קריאה חוזרת תַּראה לנו שגם פה ישנם שני סיפורים: קניית המחשבים וקניית המדפסות. והצגתם:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | מחשבים | מדפסות |
| מחיר יחידה | x | y |
| מס' יחידות | n | n- 55 |
| עלות כוללת | z 2 | z |

כפי שניתן לראות, הוספנו (עוד) שני נעלמים: מספר מחשבים שנקנו – n ועלות כל המדפסות – z, ואין לחשוש מכך. פשוט עלינו לזכור שכל הנדרש הוא לבנות מערכת משוואות עם מס' משוואות זהה למס' הנעלמים. את הנתונים הנוספים נמצא בתוך השאלה.

משוואת מחיר המחשבים:  (1)

משוואת מחיר המדפסות:  (2)

סה"כ עלות הקנייה:  (3)

הקשר בין מחיר מחשב למחיר מדפסת:  (4)

לכאורה נראה שכדי לפתור את כל המשוואות האלה יש צורך בתחכום מיוחד . האמת היא שלא. בדרך כלל הן מתנוונות מהר מאוד לשתי משוואות בשני נעלמים:

ממשוואה (3) מקבלים מיד:    (5)

ממשוואה (4) מתקבל:  (6)

הצבתם של משוואות (5,6) במשוואה (1): 

 (7)

הצבתם של משוואות (5,6) במשוואה (2): 

 (8)

ועתה עלינו לפתור שתי משוואות: (7) ו- (8):

חיבור המשוואות (7,8) נותן: 



ובידוד n מוביל ל: 

הצבה של n במשוואה (7) : 

הכפלה ב- 2500 : 

סידור משוואה ריבועית: 

והפתרון:  

לא מתאים

וע"י הצבת y במשוואה (6): 

והתשובה המילולית:

מחיר מחשב 3500 ₪, ומחיר מדפסת 1000 ₪.

יג. מוצר מסוים הוזל ב-x אחוזים. לאחר תקופה מסוימת התייקר אותו מוצר שוב ב- x אחוזים.

א. האם מחירו הסופי של המוצר היה שווה למחירו הראשוני, יקר יותר או זול יותר ?

ב. אם ידוע ש- x = 12, ומחירו הסופי היה 9856 ₪, מה היה מחירו ההתחלתי ?

פתרון:

לפתרון סעיף א' ניתן להסתפק בהסבר מילולי. מתוך מה שלמדנו עד כה, אנו יכולים להבין שאחוז ממחיר גבוה גדול בערכו הכספי מאחוז ממחיר נמוך. לכן ההוזלה תהיה גדולה יותר בערכה הכספי מאשר ההתייקרות. ומכאן שערכו הסופי של המוצר יהיה נמוך יותר מאשר ערכו הראשוני, ואין הדבר תלוי כלל בערכו הראשוני של המוצר.

אנו נוכיח זאת גם בדרך חישובית.

כדי להקל על ההוכחה נניח כי מחיר הבסיס של המוצר היה 100 ₪, ולמחיר הסופי נקרא m.

עתה נבנה את הטבלה:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | הוזלה | התייקרות |
| מחיר מקורי | 100 | (- 100(1 |
| אחוז השינוי | x | x |
| מחיר סופי | (- 100(1 | ( (1+(- 100(1 |

כלומר מחיר המוצר הסופי יהיה: m= 

(מבחינה מתמטית אין משמעות לסוגריים המרובעים, והם נועדו רק להבהיר איך הגענו לביטוי זה).

עתה אנו יכולים לבצע את ההכפלה: m=

ולפי נוסחת כפל מקוצר, מקבלים: m= 

בלי כל קשר לגודל x הסוגריים תמיד יהיו קטנים מ- 1, ולכן המחיר הסופי יהיה קטן מ- 100.

נשים לב שמחיר הבסיס לא בא כלל לידי ביטוי בחישוב שערכנו, ובקלות היינו יכולים להחליפו בפרמטר כלשהו - נניח a - ואז היינו מקבלים מחיר סופי: m=

כדי לחשב את סעיף ב' קל להיעזר בביטוי שקיבלנו.

נציב את הערכים הידועים לנו: 

וע"י העברת אגפים פשוטה נקבל: 10000a = .

תשובה: מחירו הראשוני של המוצר היה 10000 ₪.

***בדיקת הבנה***

10. סוחר קנה נעלי ספורט ב- ₪.  זוגות הוא מכר ברווח של  לעומת המחיר ששילם. 15 זוגות נוספים מכר ברווח של 30% לעומת המחיר ששילם, ואילו את הזוגות הנותרים מכר בהפסד של 25% לעומת המחיר ששילם תמורתם. הסוחר הרוויח בעסקה זו 570 ₪. כמה זוגות נעלי ספורט קנה הסוחר ?

באותה מתכונת נטפל גם בנושא בעיות הֶספק.

יד. פועל יכול לבצע עבודה מסוימת ב- 6 שעות. פועל אחר יכול לסיים את אותה עבודה ב- 9 שעות.

בכמה זמן תושלם העבודה אם יעבדו בצוותא ?

פתרון:

בחירת הנעלם המִיָדי היא: t – זמן העבודה המשותף.

פועל א' משלים עבודתו ב- 6 שעות, לכן קֶצֶב עבודתו:  מהעבודה בכל שעה.

פועל ב' משלים עבודתו ב- 9 שעות, לכן קֶצֶב עבודתו:  מהעבודה בכל שעה.

עתה נרשום לנו את נתוני השאלה לפי הטבלה:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | פועל א' | פועל ב' |
| הֶספק |  |  |
| זמן | t | t |
| כמות העבודה | s1 | s2 |

לכן משוואת המודל של הבעיה היא:



ועל ידי הצבה של (1) ו- (2) בתוך (3):



למשוואות מסוג זה אין מְמַדים כי אנו מחברים חלקי עבודה ומקבלים שלם.

(שימו לב! תמיד הסכום =1 כי תמיד מחברים לשם קבלת העבודה כולה, כלומר השלם.)

הפתרון: 





תשובה: הם יסיימו את העבודה במשך שלוש שעות ו- 36 דקות.

טו. כדי לרוקן מְכָל יש לפתוח שני ברזי ניקוז במשך 8 שעות. יום אחד היה המְכָל מלא, ופתחו רק ברז אחד

לפרק הזמן שהברז השני יכול לנקז את המְכָל לבד. סגרו ברז זה ופתחו את הברז השני לפרק זמן שבו יכול הברז הראשון לנקז  מהמְכָל לבדו. בסוף התהליך נמצא רבע מהמְכָל מלא.

כמה שעות היה פתוח כל ברז ?

פתרון:

נבחר: x - זמן ניקוז של ברז א' (ראשון) לבדו

y - זמן ניקוז של ברז ב' (שני) לבדו

והטבלה:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | ניקוז רגיל | | ניקוז של "יום אחד" | |
|  | ברז א' | ברז ב' | ברז א' | ברז ב' |
| הֶספק |  |  |  |  |
| זמן | 8 | 8 | y |  |
| כמות מנוקזת | 1 | |  | |

(כדאי לבדוק ולהסביר איך הגענו לזה.)

המשוואות המתקבלות:  (1)

 (2)

הפתרון הוא:

ממשוואה (1): 

ממשוואה (2): 

ע"י בידוד y במשוואה (1) מקבלים: 

והצבה במשוואה (2) : 

אם מכפילים את כל המשוואה

ב:  (יש לזכור ש: x2 לא אפס)

מקבלים : 

והתשובה הסופית: ברז א' מנקז את המכל ב- 40 שעות, וברז ב' ב- 10 שעות.

***בדיקת הבנה***

11. שני צינורות מובילים מים לברֵכה. דרך הצינור השני נכנסים  מ"ק מים בדקה. יום אחד, כשהברֵכה הייתה ריקה, פתחו את הצינור הראשון.  דקות אחר כך פתחו את הצינור השני. כמות המים שנכנסה דרך הצינור הראשון הייתה גדולה פי מהכמות שנכנסה דרך הצינור השני. למחרת, כשהברֵכה הייתה שוב ריקה, פתחו את שני הצינורות יחד, והברֵכה התמלאה ב- דקות פחות מאשר ביום הקודם (החל מפתיחת הראשון). מה נפח הברֵכה ?

באותה מתכונת נטפל גם בבעיות תמיסה ותערובת.

טז. 50 ליטר תמיסת כוהל עורבבה עם 30 ליטר תמיסת כוהל אחרת שהייתה בריכוז של 60% . לאחר

פעולה זו התקבלה תמיסה בריכוז 40% . מה היה ריכוז התמיסה של 50 הליטר?

תזכורת:

פתרון:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | מצב א' (לפני הערבוב) | | מצב ב' (לאחר ערבוב) |
|  | תמיסה א | תמיסה ב |  |
| ריכוז | x | 60 | 40 |
| כמות כוללת (ליטרים) | 50 | 30 | 80 |
| כמות מומס (ליטרים) |  |  | 18+ |

עכשיו אנו יכולים לבנות משוואה: 

ועל ידי הכפלה וסידור המשוואה מקבלים: 

תשובה: ריכוז התמיסה היה 28%.

יז. ערבבו שתי תמיסות מלח. אחת בריכוז 40%, והשנייה בריכוז 30% . מהתמיסה המעורבת איידו 20

ליטר וקיבלו 30 ליטר תמיסה בריכוז 60 אחוז. כמה ליטר הכילה כל תמיסה ?

פתרון:

הפעם מתאים לבחור כנעלמים:

x - כמות תמיסה אחת

y - כמות תמיסה שנייה

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | מצב א' | | מצב ב' | מצב ג' |
|  | תמיסה א' | תמיסה ב' | לאחר ערבוב | לאחר אידוי |
| ריכוז | 40 | 30 |  | 60 |
| כמות כוללת | x | y | x+y | 30 |
| כמות מומס | 0.4x | 0.3y | 0.4x+0.3y | 0.4x+0.3y |

עתה ניתן לבנות שתי משוואות :  

 (1)

 (2)

והפתרון: ממשוואה (1) מקבלים: 

בהצבה במשוואה (2) מקבלים: 

ואחרי הכפלה וסידור: 

הצבה חוזרת במשוואה מס' (1): 

תשובה: ערבבו 30 ליטר תמיסה בריכוז 40% עם 20 ליטר תמיסה בריכוז 30%.

***בדיקת הבנה***

12. בחבית נמצאת תמיסת כוהל. כמות המים בחבית גדולה ב- ליטרים מכמות הכוהל. אם יוציאו מהחבית  ליטרים מן הכוהל ו- ליטרים מים, ירד ריכוז הכוהל ב-. מהי כמות הכוהל,

ומהי כמות המים בחבית ?

דוגמאות נוספות (מומלץ לנסות ולענות על שאלות אלה באופן עצמאי):

יח. משאית עוברת דרך מסוימת במהירות קבועה. אם מהירותה תקטן ב- 20 קמ"ש, יתארך זמן נסיעתה

בשעה וחצי. אם תגדיל את מהירותה ב- 10 קמ"ש, יתקצר זמן נסיעתה ב- 30 דקות. מה מהירות

נסיעתה של המשאית, ומה המרחק שהיא עוברת ?

לפני תחילת הפתרון יש לתת את הדעת על כך ש- 30 דקות הן חצי שעה !!

כמו כן יש לשים לב שבשאלה זו ישנם שלושה סיפורים!

פתרון:

הנעלמים המִיָדיים:

v – מהירות הנסיעה של המשאית

s – הדרך שהמשאית עוברת

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | נסיעת המשאית | הקטנת מהירות | הגדלת מהירות |
| מהירות | v | 20 – v | 10 + v |
| זמן | t | 1.5 + t | 0.5 – t |
| דרך | s | s | s |

המשוואות:

 (1)

 (2)

 (3)

הצבת משוואה (1) בשתי האחרות ופתיחת סוגריים תביא למשוואות אלה: (בדקו.)

 (4)

 (5)

פתירת שתי משוואות אלה מגלה: t =4.5 v =80

כדי למצוא את הדרך נכפיל ביניהם ונקבל: 

והתשובה: מהירות המשאית 80 קמ"ש, והיא עוברת 360 ק"מ.

יט. רכבת עושה מסלול של 360 ק"מ במהירות קבועה. יום אחד אירעה תקלה במנוע, ולאחר שעתיים של נסיעה במהירות הקבועה נאלצה הרכבת להאט את מהירותה ב- 30 קמ"ש. לכן איחרה הרכבת להגיע ליעדה, וחצי שעה לאחר המועד המתוכנן לה, עדיין הייתה במרחק 30 ק"מ מהתחנה. מהי המהירות הרגילה של הרכבת ?

פתרון:

עקרונות הפתרון אינם שונים מאלו שבעזרתם פתרנו דוגמאות קודמות.

v – המהירות הרגילה של הרכבת

מבנה השאלה מורכב משני סיפורים עיקריים:המסלול הרגיל והמסלול של התקלה. הסיפור השני מכיל בתוכו גם כן שני סיפורים: שעתיים ראשונות וההמשך.

לכן הצגת הנתונים תקבל את המבנה הבא:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | בדרך כלל | יום של תקלה | |
|  |  | שעתיים ראשונות | המשך הדרך |
| מהירות | v | v | 30 –v |
| זמן | t | 2 | 1.5 – t **\*** |
| דרך | 360 | s1 | s2 |

**\***הזמן חושב לפי:  (שזה זמן הנסיעה הרגיל פחות שעתיים שהרכבת נסעה במהירות רגילה ועוד מחצית שעת נסיעה בשל האיחור).

המשוואות המתאימות יהיו:  (1)

 (2)

 (3)

 (4)

ע"י הצבה של משוואות (2)+(3) בתוך (4) מקבלים:  (5)

מפתרונות (1) +(5) מקבלים: t =4 v =90

והתשובה היא: המהירות הרגילה של הרכבת היא 90 קמ"ש.

כ. סוחר קנה מספר מַחשבונים ושילם תמורתם 4500 ₪. 8 מהם ניזוקו קלות, ולכן מכר אותם בהנחה של 14%. עוד 4 העביר לילדיו. את שאר המַחשבונים מכר במחיר גבוה ב- 15 שקלים ממחיר הקנייה. סה"כ הרוויח הסוחר 336 ₪ בעסקה זו. מה היה מחיר הקנייה של מַחשבון, וכמה מַחשבונים קנה ?

פתרון:

הגדרת נעלמים:

x – מחיר קנייה של מַחשבון

y – מס' מַחשבונים שנִקנו

הצגת הבעיה:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | קנייה | מכירה | |
|  |  | פגומים | שלמים |
| מס' מַחשבונים | y | 8 | y-12 |
| מחיר מַחשבון | x |  | 15 + x |
| סה"כ מחיר | 4,500 | m1 | m2 |

והמשוואות:  (1)

 (2)

 (3)

 (4)

לאחר הצבה של (3) + (2) במשוואה (4) מקבלים מערכת :

 (1)

 (4)

פתרון המשוואות הללו מגלה: x =75 y =60

(בדקו את הפתרון והשלימו תשובה מילולית.)

כא. שני פועלים מבצעים יחד מחצית עבודה ב- 3 שעות. באחד המקרים עבדו שני הפועלים במשך שעתיים ביחד. אחר כך עזב פועל א', ופועל ב' המשיך בעבודתו עוד חמש שעות. בסה"כ הם ביצעו  מהעבודה. בכמה שעות היה מבצע כל פועל את העבודה כולה ?

פתרון:

הנעלמים:

x - מס' השעות שפועל א' מסיים לבדו את העבודה

y - מס' השעות שפועל ב' מסיים לבדו את העבודה

מתוך הבחירה הזו, אנו כבר יכולים להציג את ההֶספק של הפועלים :

הֶספק של פועל א' -  מהעבודה בשעה

הֶספק של פועל ב' -  מהעבודה בשעה

ונציב בטבלה:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | מצב א' (רגיל) | | מצב ב' (יום אחד..) | |
|  | פועל א' | פועל ב' | פועל א' | פועל ב' |
| הֶספק |  |  |  |  |
| זמן | 3 | 3 | 2 | 7 |
| כמות עבודה |  | |  | |

ממילא יובן שאם יש לנו שני נעלמים, עלינו למצוא גם שתי משוואות:

משוואת הקֶצֶב המשותף של הפועלים:  (1)

משוואת התיאור של המקרה המיוחד:  (2)

הכפלה במכנה המשותף של המשוואה הראשונה:  (3)

סידור המשוואה השנייה: 

והכפלה במכנה משותף:  (4)

הצבת משוואה (3) בתוך (4): 





 (5)

הצבת משוואה (5) במשוואה (3): 





והפתרון: x1 = 0 (תוצאה זו לא רלוונטית למקרה זה) x2= 10 (6)

הצבה של (6) בתוך (5): 

15 = y

תשובה: פועל א' מסיים את העבודה לבדו במשך 10 שעות, ופועל ב' – במשך 15 שעות.

כב. שני רוכבים יוצאים זה לקראת זה. הראשון יצא מנקודה A ל- B במהירות 15 קמ"ש בשעה 4.40 בבוקר, והשני יצא מ- B ל- A במהירות 13 קמ"ש בשעה 6.00 בבוקר. הם נפגשו והמשיכו בדרכם. הראשון הגיע לנקודה B שעתיים ו- 24 דקות לפני שהשני הגיע לנקודה A. מהו המרחק בין A ל- B ?

פתרון:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | רוכב א' | | רוכב ב' | |
|  | עד המפגש | אחרי המפגש | עד המפגש | אחרי המפגש |
| מהירות | 15 | 15 | 13 | 13 |
| זמן | t1 | t2 | \* | \*\* |
| דרך | s1 | s2 | s2 | s1 |

מכאן נובעות 4 משוואות:

 (1)

 (2)

 (3)

 (4)

הצבת המשוואות (1) ב-4 ו2 ב-3 ):  (5)

  (6)

תשובה סופית: t1 = 4 שעות ועשרים דקות, t2 = שעתיים ושלושים ושש דקות,

והמרחק הוא: 104 ק"מ.



ההסבר למקרה הצורך:

\* הרוכב הראשון יצא שעה ועשרים דקות לפני הרוכב השני, לכן זמן התנועה של הרוכב השני קצר בשעה ועשרים דקות. בתרגום לשעות הזמן קצר בשעה ושליש, אך מכיוון שאנו כותבים נתונים אלה כדי להכניסם למשוואה, כדאי לכתוב אותם בשבר מדומה ולא כשבר עשרוני.

\*\*הרוכב הראשון הגיע לסוף המסלול לפני השני, לכן יש להוסיף את זמן התנועה של שעתיים ו- 24 דקות לרוכב השני. כדי לתרגם את הדקות לשעות יש לחלק ב 60. וכמו קודם מכיוון שעדיף לעבוד בפתרון משוואות עם שברים מדומים ולא עם שברים עשרוניים (כדי שלא ליפול על שגיאות קיטוע ועיגול), מקבלים את המספר הזה.

s1 – מוגדר כמרחק בין A למפגש.

s2 – מוגדר כמרחק בין B למפגש.

***תרגול עצמי - בעיות מכל הסוגים***

1. המרחק מרחובות לירושלים הוא  ק"מ. בשעה  בבוקר יצא רוכב אופניים מרחובות לירושלים, ובשעה  בבוקר יצא רוכב אופניים מירושלים לרחובות. רוכבי האופניים נפגשו בשעה , וכל אחד מהם המשיך בדרכו. רוכב האופניים מרחובות הגיע לירושלים שעתיים וחצי לפני שהרוכב מירושלים הגיע לרחובות. שני רוכבי האופניים נסעו באותה דרך, ומהירותם לא השתנתה בעת הנסיעה. מה הייתה מהירותו של כל אחד מרוכבי האופניים ?

14. המרחק מנתניה לנצרת הוא  ק"מ. בשעה  בבוקר יצא רוכב אופניים מנתניה ורכב במהירות קבועה על מנת להגיע לנצרת במועד שנקבע מראש. כעבור שלוש שעות האט את מהירותו ב- קמ"ש. כתוצאה מזה התאחר, ושעה אחת לאחר המועד שנקבע, נמצא עדיין במרחק של  ק"מ מנצרת. מה הייתה מהירותו של רוכב האופניים במשך שלוש השעות הראשונות לנסיעתו ?

15. כמות מסוימת של חומצת מלח בריכוז של  עורבבה בכמות חומצת מלח הקטנה ממנה ב-ליטר ובריכוז של . לאחר מכן אוידו מהתערובת  ליטר של מים טהורים ונתקבלה חומצת מלח בריכוז של . כמה ליטרים חומצת מלח בריכוז  נתקבלו ?

16. רוקח ערבב כמות מסוימת של כוהל בריכוז של  עם כמות אחרת של כוהל בריכוז של , הוסיף לתמיסה  גרם מים וקיבל  גרם כוהל בריכוז של . כמה גרם כוהל בריכוז של  הכניס הרוקח לתמיסה זו ? (הערה: כוהל בריכוז של , הכוונה לתמיסה המכילה  כוהל טהור ו-  מים.)

17. שתי כתבניות קיבלו להדפסה כתב יד ובו  עמודים. ביום הראשון לעבודתן התחילה כתבנית אחת בעבודתה שעה אחת אחרי חברתה. שתיהן הפסיקו יחד את עבודתן כשכל אחת הספיקה להדפיס  עמודים. למחרת התחילו שתי הכתבניות יחד בעבודתן, ולאחר  שעות הדפיסו יחד את  העמודים הנותרים של כתב היד. בהנחה כי קֶצֶב עבודתן לא השתנה במשך כל זמן העבודה, חַשבו כמה עמודים לשעה הדפיסה כל אחת מהן.

18. קבוצת פועלים התחייבה לייצר  פריטים תוך זמן קבוע, מתוך ידיעה שהיא מסוגלת לייצר בכל יום מכסה קבועה של פריטים. הפועלים ייצרו ב- הימים הראשונים לפי המכסה הקבועה, ולאחר מכן הגדילו את תפוקתם ב- פריטים ליום. כתוצאה מכך סיימו הפועלים לייצר  פריטים יום אחד לפני המועד שנקבע. כמה פריטים ליום הייתה המכסה המתוכננת ?

19. לדוד שנפחו  ליטר, מחוברים שני צינורות: האחד למילוי הדוד, והשני להֲרָקתו. הֲרָקת הדוד כשהוא מלא, נמשכת 6 דקות פחות ממילוי הדוד כשהוא ריק. במקרה מסוים כשהיה הדוד מלא, פתחו בטעות את שני הצינורות, והדוד התרוקן ב- דקות. מהי כמות המים הנכנסת לדוד בדקה דרך הצינור הראשון, ומהי הכמות היוצאת ממנו בדקה דרך הצינור השני ?

20. שני פועלים מסוגלים לחפור תעלה ב- שעות ו- דקות כשהם עובדים כל הזמן ביחד. אך בשל תקלה ניגש פועל אחד לעבודה כשהשני חפר כבר את מחצית התעלה ועזב את העבודה. בשל כך נחפרה התעלה בשבע וחצי שעות. הֶספק העבודה של הפועלים לא השתנה לאורך העבודה. בכמה שעות מסוגל כל אחד מהפועלים לחפור את התעלה לבדו ?

21. על שפת נהר נמצאותתחנות של ספינות דיג: A, B ו-C . B נמצאת ביןA ל- C במרחק  ק"מ מ-C . כיוון הזרם הוא מ-A ל-C . ספינת דיג ללא מנוע עוברת את הדרך מ-A ל- C בארבע שעות, ואת הדרך מ- C ל-A בשש שעות. ספינת מנוע שמהירותה גדולה פי  ממהירות הספינה ללא מנוע, עוברת את הדרך מ-B ל-C ב- דקות. כל אחת משתי הספינות חותרת במים במהירות קבועה. מצאו את מהירות זרם הנהר.

22. סוחר קנה שקיות אורז ושילם עבורן  ₪ (לכל שקית אותו מחיר). הסוחר ארז את האורז בשקיות קטנות יותר, כך שמספר השקיות שברשותו היה גדול ב- ממספר השקיות שקנה. הוא מכר כל אחת מן השקיות הללו במחיר גבוה ב- אגורות מן המחיר ששילם עבור כל שקית שקנה. בסך הכול הרוויח בעסקה  ₪. כמה שקיות קנה הסוחר ? (מצאו את כל התשובות האפשריות.)

23. מחירו המקורי של מוצר בתחילת העונה היה  ₪. באמצע העונה הוזילו את המחיר המקורי ב- x% . הביעו באמצעות x את מחיר המוצר באמצע העונה.

בסוף העונה הוזילו את המחיר של אמצע העונה ב- (x + 5 ) אחוזים. הביעו באמצעות x את מחיר המוצר בסוף העונה. חַשבו אתx אם נתון שבסוף העונה היה מחיר המוצר ₪.

24. מנמל A יצאה סירת משוטים עם הזרם לנמל B. מאותו נמל (A) יצאה בעקבותיה לאחר שעה סירת מנוע. היא הגיעה אל סירת המשוטים וחזרה אל נמל A. סירת המנוע הגיעה חזרה לנמל A בדיוק כאשר סירת המשוטים הגיעה לנמל B. ידוע כי מהירות סירת המשוטים (במים עומדים) גדולה פי 3 ממהירות הזרם, ומהירות סירת המנוע (במים עומדים) גדולה פי ממהירות הזרם. מצאו את משך התנועה של סירת המשוטים מנמל A לנמל B.

25. מחירו של מוצר א' הוא  ₪. מחיר זה עלה באחוז מסוים, ולאחר העלאה זו העלו את המחיר החדש שוב באותו אחוז. מחירו של מוצר ב' הוא  ₪. מחיר זה הוזל באותו אחוז שבו הועלה מחירו של מוצר א'. לאחר הוזלה זו הוזילו את מחירו החדש של מוצר ב' שוב באותו אחוז. לאחר שינויים אלה היה המחיר הסופי של שני המוצרים שווה. מהו המחיר הסופי ?

26. בכלי יש  ליטר כוהל נקי. מוציאים מהכלי מספר ליטרים של כוהל, מכניסים במקומו מספר ליטרים זהה של מים מזוקקים, ומערבבים. מהתמיסה שהתקבלה מוציאים שוב מספר ליטרים זהה כמו קודם, ומכניסים במקומם מספר ליטרים זהה של מים מזוקקים, ומערבבים. ידוע כי בתמיסה החדשה נמצא כוהל בריכוז של  (לפי נפח). מצאו את מספר הליטרים שהוצאו בכל פעם.

27. מונית הנוסעת במהירות קבועה של  קמ"ש, ואוטובוס הנוסע במהירות של  קמ"ש, יוצאים בו זמנית מנקודה A לנקודה B. כשהמונית הייתה באמצע הדרך, לאוטובוס נותרו עוד  ק"מ כדי להגיע לנקודה B. כשהאוטובוס היה באמצע הדרך, למונית נותרו עוד ק"מ כדי להגיע לנקודה B. א. חשבו את המרחק בין A ל- B. ב. חשבו את מהירות האוטובוס .

28. סוחר קנה כיסאות בסכום כולל של  ₪.  כיסאות נפגמו, לכן מכר אותם הסוחר בהפסד. הוא מכר את כל אחד מ- הכיסאות הפגומים ב-  מן המחיר ששילם לכיסא. את יתר הכיסאות מכר ברווח של  לכיסא. הסוחר הרוויח בעסקה כולה  ₪. כמה כיסאות קנה ?

29. כמות מסוימת של חומצת מלח בריכוז של  ערבבו בכמות חומצת מלח קטנה ממנה ב-  ליטר ובריכוז של . לאחר מכן איידו מהתערובת  ליטר של מים טהורים, ונתקבלה חומצת מלח בריכוז של . כמה ליטרים חומצה בריכוז של  נתקבלה ?

**פתרונים**

1.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | הקנייה בפועל | הקנייה במקרה של מחיר מופחת |
| מחיר יחידה | x | 5x- |
| כמות | y | 12 + y |
| סה"כ תשלום | 10000 | 10000 |

2.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | פועל א' | פועל ב' |
| הֶספק |  |  |
| זמן | ¼ | ¼ |
| סה"כ | s1 | s2 |

3.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | עבודה משותפת | | עבודה אישית | |
|  | פועל א | פועל ב | פועל א | פועל ב |
| הֶספק | x | y | x | y |
| זמן | 2 | 2 | 3 |  |
| סה"כ | 40 | | 40 | |

4.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | כלי א' | כלי ב' | כלי ג' |
| יחס ריכוז | x | x+0.1 | 0.46 |
| כמות כוללת | 10 | 15 | 25 |
| כמות מומס | 10x | 15(x+10) | 11.5 |

5.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | תנועת המכונית כל יום | תנועת המכונית ביום המיוחד | |
|  |  | חצי שעה ראשונה | המשך הנסיעה |
| מהירות | v | v | 30 –v |
| זמן | t1 | 0.5 | 0.5 – t1 |
| דרך | 150 | s1 |  |

6.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | הולך א' | | הולך ב' | |
|  | לפני פגישה | אחרי פגישה | לפני פגישה | אחרי פגישה |
| מהירות | 4 | 4 | 5 | 5 |
| זמן | 1t | t2 | 1- 1t | 0.5+t2 |
| דרך | S1 | s2 | s2 | 1s |

7.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | משאית | | מונית | |
|  | לפני פגישה | אחרי פגישה | לפני פגישה | אחרי פגישה |
| מהירות | 60 | 60 | v | V |
| זמן | 1t | t2 | 0.5- 1t | T2 |
| דרך | S1 | s2 | s2 | 1s |

8.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | קנייה | מכירה |
| מחיר יחידה | x | 1 x+ |
| כמות | y | 300 + y |
| סה"כ תשלום | 10000 | 10000 |

1. קמ"ש, קמ"ש
2. 50 זוגות
3. 540 מ"ק
4. 3 ליטרים כוהל ו- 27 ליטרים מים
5. 12 קמ"ש , 9 קמ"ש
6. 8 קמ"ש
7. 125 ליטר
8. 400 גרם
9. 5 ו- 6
10. 24 פריטים
11. 50 ליטר, 75 ליטר
12. 6 שעות ו- 9 שעות
13. 1 קמ"ש
14. 1200 שקיות או 2000 שקיות
15. x = 25
16. 6 שעות
17. 140,625 ₪
18. 18 ליטרים
19. א. 24 ק"מ, ב. v = 60 קמ"ש
20. 100 כיסאות
21. 100 ליטר