Control de monóxido de carbono en sangre

Yadhira Lisset Escobedo Tellez (20210779) Fabian Gonzalez Morales (18211551)
Paola Giselle Hernandez Peraza (19210608)
Rosa Helena Zavala Silva (18211599)
Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica
Tecnológico Nacional de México / Instituto Tecnológico de Tijuana

December 18, 2024

Palabras clave: Circuito RLC; Controlador PID; Función de transferencia; Monóxido de carbono; Sistema respiratorio.

Correo: **fabian.gonzalez193@tectijuana.edu.mx**

Carrera: **Ingeniería Biomédica**

Asignatura: **Modelado de Sistemas Fisiológicos**

Profesor: **Dr. Paul Antonio Valle Trujillo** (paul.valle@tectijuana.edu.mx)

1 Función de transferencia

1.1 Ecuaciones principales

El circuito RLC que representa al sistema respiratorio tiene la siguiente ecuación principal.

$$P_{ao}(t) = R_c Q(t) + L_c \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C_s} \int [Q(t) - Q_A(t)]dt,$$

Igualando el voltaje de las ramas paralelas del bucle dentro del circuito se plantea la siguiente ecuacion:

$$\frac{1}{C_s} \int [Q(t) - Q_A(t)]dt = R_P Q_A(t) + \frac{1}{C_m} \int Q_A(t)dt$$

con la siguiente salida identificada en el capacitor:

$$P_A(t) = \frac{1}{C_m} \int Q_A(t)dt.$$

1.2 Transformada de Laplace

Al calcular la transformada de Laplace para las ecuaciones principales se obtienen los siguientes resultados.

$$\begin{aligned}
P_{ao}(s) &= R_c Q(s) + sL_c Q(s) + \frac{Q(s) - Q_A(s)}{sC_s} \\
\frac{Q(s) - Q_A(s)}{sC_s} &= R_P Q_A(s) + \frac{1}{sC_m} Q_A(s) \\
P_A(s) &= \frac{1}{sC_m} Q_A(s)
\end{aligned}$$

1.3 Procedimiento algebraico

Con base en la segunda ecuación principal se realiza el despeje del flujo Q(s):

$$\begin{aligned}
\frac{Q(s) - Q_A(s)}{sC_s} &= \left[R_P + \frac{1}{sC_m}\right] Q_A(s) \\
Q(s) &= \left[R_P + \frac{1}{sC_m}\right] [Q_A(s) \times sC_s] + Q_A(s)
\end{aligned}$$

simplificando mediante software se obtiene lo siguiente :

$$Q(s) = \left(\frac{C_m + C_s + sC_m R_P C_s}{C_m}\right) Q_A(s)$$

Esta equivalencia se emplea en la sustitución del flujo Q(s) para obtener P$_{ao}(s)$ en función únicamente de Q$_A$(s).

$$\begin{aligned}
P_{ao}(s) &= R_c Q(s) + sL_c Q(s) + \frac{Q(s) - Q_A(s)}{sC_s} \\
P_{ao}(s) &= \left(R_c + sL_c + \frac{1}{sC_s}\right) [Q(s)] - \frac{Q_A(s)}{sC_s} \\
P_{ao}(s) &= \left[\left(R_c + sL_c + \frac{1}{sC_s}\right)\left(\frac{C_m + C_s + sC_m R_P C_s}{C_m}\right) - \frac{1}{sC_s}\right][Q_A(s)]
\end{aligned}$$

La función de trasferencia está dada entonces por:

$$\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s)} = \frac{\left(\frac{1}{sC_m}\right) Q_A(s)}{\left[\left(R_c + sL_c + \frac{1}{sC_s}\right)\left(\frac{C_m + C_s + sC_m R_P C_s}{C_m}\right) - \frac{1}{sC_s}\right][Q_A(s)]}$$

entonces, se formula lo siguiente:

$$\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s)} = \frac{\frac{1}{sC_m}}{\left(R_c + sL_c + \frac{1}{sC_s}\right)\left(\frac{C_m + C_s + sC_m R_P C_s}{C_m}\right) - \frac{1}{sC_s}}$$

1.4 Resultado

Con base en el análisis realizado en esta sección, se concluye que la función de transferencia del sistema respiratorio está dado por la siguiente expresión

$$\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s)} = \frac{1}{(C_m R_P C_s L_c)\, s^3 + (C_m L_c + C_s L_c + C_m R_P C_s R_c)\, s^2 + (C_m R_P + C_m R_c + C_s R_c)\, s + 1}$$

2 Estabilidad del sistema en lazo abierto

La estabilidad del sistema en lazo abierto se analiza al calcular las raíces del denominador, es decir, los polos, por lo tanto al ser un sistema de tercer orden tendrá tres polos:

$$(C_m R_P C_s L_c)\, s^3 + (C_m L_c + C_s L_c + C_m R_P C_s R_c)\, s^2 + (C_m R_P + C_m R_c + C_s R_c)\, s + 1 = 0$$

Al analizar el paciente control se establecen los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} R_c &= 1 \\ L_c &= 0.01 \\ R_P &= 0.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_s &= 0.5 \\ C_m &= 10 \end{aligned}$$

con estos valores se determinan los polos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} (C_m R_P C_s L_c)\, s^3 + (C_m L_c + C_s L_c + C_m R_P C_s R_c)\, s^2 + (C_m R_P + C_m R_c + C_s R_c)\, s + 1 &= 0 \\ 0.025\, s^3 + 2.605 s^2 + 15.5 s + 1 &= 0 \end{aligned}$$

lo cual da las siguientes raíces.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -6.5231 \times 10^{-2} \\ \lambda_2 &= -97.869 \\ \lambda_3 &= -6.2656 \end{aligned}$$

Tomando en cuenta el valor negativo y distinto de cada raíz, se establece que el sistema es estable con una respuesta sobreamortiguada.

Para el paciente con intoxicación por monóxido de carbono se alteran los siguientes parámetros:

$$
\begin{aligned}
C_s &= 1 \\
C_m &= 0.5
\end{aligned}
$$

con estos valores se determinan los polos de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
(C_m R_P C_s L_c)\, s^3 + (C_m L_c + C_s L_c + C_m R_P C_s R_c)\, s^2 + (C_m R_P + C_m R_c + C_s R_c)\, s + 1 &= 0 \\
0.002\,5 s^3 + 0.265\, s^2 + 1.\,75 s + 1 &= 0
\end{aligned}
$$

lo cual da las siguientes raíces.

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= -0.631\,45 \\
\lambda_2 &= -98.\,968 \\
\lambda_3 &= -6.\,400\,7
\end{aligned}
$$

Igual que en el paciente control, el valor negativo y distinto de cada raíz indica que el sistema es estable con una respuesta sobreamortiguada.

3 Modelo de ecuaciones integro-diferenciales

El modelo de ecuaciones integro-diferenciales está dado por:

$$
\begin{aligned}
Q(t) &= \left[P_{ao}(t) - L_c \frac{dQ(t)}{dt} - \frac{1}{C_s} \int [Q(t) - Q_A(t)] dt \right] \frac{1}{R_c} \\
Q_A(t) &= \left[\frac{1}{C_s} \int [Q(t) - Q_A(t)] dt - \left(\frac{1}{C_m} \right) \int Q_A(t) dt \right] \frac{1}{R_P} \\
P_A(t) &= \left(\frac{1}{C_m} \right) \int Q_A(t) dt.
\end{aligned}
$$

4 Error en estado estacionario

El error en estado estacionario se calcula mediante el siguiente límite:

$$
\begin{aligned}
e\,(t) &= \lim_{s\to 0} sR\,(s)\left[1-\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s)}\right]= \\
&= \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}[1-\frac{1}{(C_mR_PC_sL_c)\,s^3+(C_mL_c+C_sL_c+C_mR_PC_sR_c)\,s^2+(C_mR_P+C_mR_c+C_sR_c)\,s+1}], \\
&= \lim_{s\to 0}\left[1-\frac{1}{1}\right]=0
\end{aligned}
$$

es decir, el error en estado estacionario es $0V$.

$$
\begin{aligned}
R(s) &: \text{ Representa la entrada al sistema.} \\
\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s)} &: \text{ Representa la función de transferencia del sistema.}
\end{aligned}
$$

5 Cálculo de componentes para el controlador PID

Al sintonizar el controlador se buscó un tiempo de establecimiento menor a 10 milisegundos para así emplear los mismos valores de las ganancias para ambos casos. Así se obtuvo las ganancias integradora, proporcional y derivativa:

$$
\begin{aligned}
k_I &= \frac{1}{R_eC_r}=13.7603 \\
k_P &= \frac{R_r}{R_e}=10.7123 \\
k_D &= R_rC_e=1.4435
\end{aligned}
$$

Para el cálculo consecuente de los demás componentes electrónicos se propuso un valor de Cr.

$$
C_r=1\times 10^{-6}
$$

Con este valor definido, se sustituye en las siguientes ecuaciones para despejar los valores restantes.

$$
\begin{aligned}
R_e &= \frac{1}{k_IC_r}=\frac{1}{13.7603\times 10^{-6}}=72673 \\
R_r &= k_PR_e=10.7123\times 72673=7.784\,9\times 10^{5} \\
C_e &= \frac{k_D}{R_r}=\frac{1.4435}{7.784\,9\times 10^{5}}=1.854\,2\times 10^{-6}
\end{aligned}
$$