



Статья

Скрытая марковская модель для биржевой торговли

Нгуен Нгуен

Факультет математики и статистики Янгстаунского государственного университета, 1 University Plaza,
Youngstown, OH 44555, США; ntnguyen01@ysu.edu; Тел: +1-330-941-1805

Получено: 5 ноября 2017 г.; Принято: 21 марта 2018 г.; Опубликовано: 26 марта 2018 г.

Аннотация: Скрытая марковская модель (НММ) - это статистическая модель прогнозирования сигналов, которая широко используется для прогнозирования экономических режимов и цен на акции. В данной статье мы представляем применение НММ в торговле акциями (на примере индекса S&P 500) на основе прогнозирования цен на акции. Процедура начинается с использования четырех критериев, включая информацию Акаике, байесовскую информацию, информацию Ханнана-Куинна и последовательную информацию Акаике Боздогана, чтобы определить оптимальное количество состояний для НММ. Затем выбранная четырехсоставная ЧММ используется для прогнозирования месячных цен закрытия индекса S&P 500. Для данной работы вневыборочная оценка

R^2_{Og} и некоторые другие оценки ошибок используются для проверки предсказаний НММ по сравнению с историческими данными.

модель среднего. Наконец, и НММ, и модель исторического среднего используются для торговли S&P 500. Полученные результаты убедительно доказывают, что НММ превосходит традиционный метод в прогнозировании и торговле акциями.

Ключевые слова: скрытая марковская модель; цены на акции; наблюдения; состояния; режимы; прогнозы; торговля; вневыборочный R^2 ; валидация модели

1. Введение

Биржевые трейдеры всегда хотят купить акции по низкой цене и продать их по более высокой. Однако вопрос о том, когда лучше всего покупать или продавать акции, является сложным. Инвестиции в акции могут принести как огромный доход, так и значительные убытки из-за высокой волатильности цен на акции. Многие модели использовались для прогнозирования операций с акциями, такие как "экспоненциальная скользящая средняя" (ЕМА) и метод "головы и плеч". Однако многие из этих моделей прогнозирования требуют стационарности входного временного ряда. В реальности финансовые временные ряды часто нестационарны, поэтому необходимы нестационарные модели временных рядов. Модели авторегрессии были модифицированы путем добавления переменных, зависящих от времени, чтобы адаптироваться к нестационарности временных рядов. Гевеке и Теруи (1993) разработали пороговую авторегрессионную модель, параметры которой зависят от значения предыдущего наблюдения. Juang и Rabiner (1985), Wong и Li (2000) и Frühwirth-Schnatter (2006) представили модели смешивания для временных рядов. Эти модели являются частным случаем моделей авторегрессии с марковским переключением.

Основываясь на основных концепциях НММ, Гамильтон (1989) разработал модель переключения режимов (RSM) для нелинейных стационарных временных рядов и бизнес-циклов. Исследователи, такие как Honda (2003), Sass и Hausmann (2004), Taksar и Zeng (2007), Erlwein et al. (2009), доказали, что переменные, переключающиеся в режиме, значительно улучшают модели выбора портфеля. RSM не идентична НММ, представленной

Баумом и Петри (1966). Параметры RSM были получены с помощью модели авторегрессии, в то время как параметры НММ были откалиброваны путем максимизации логарифмического правдоподобия данных наблюдений. Хотя и RSM, и НММ связаны с режимами или скрытыми состояниями, RSM следует рассматривать как регрессионную модель, в которой переменная сдвига режима является объясняющей переменной. Кроме того, НММ - это более широкая модель, которая позволяет установить более гибкую связь между данными наблюдения и последовательностью скрытых состояний. Эта связь может быть представлена в виде

функции вероятности наблюдения, соответствующие каждому скрытому состоянию. Общими функциями, которые исследователи используют в моделях НММ, являются функции плотности нормальной, смешанной нормальной или экспоненциальной. Недавно исследователи применили НММ для прогнозирования цен на акции. [Хассан и Натх \(2005\)](#) использовали НММ для прогнозирования цен на акции на взаимосвязанных рынках. [Kritzman et al. \(2012\)](#) применили НММ с двумя состояниями для прогнозирования режимов турбулентности рынка, инфляции и индекса промышленного производства. [Guidolin и Timmermann \(2007\)](#) использовали НММ с четырьмя состояниями и множеством наблюдений для изучения решений о распределении активов на основе переключения режимов в доходности активов. [Ang и Bekaert \(2002\)](#) применили модель смены режимов для распределения международных активов. [Нгуен \(2014\)](#) использовал НММ как с одним, так и с несколькими наблюдениями для прогнозирования экономических режимов и цен на акции. [Гупта и др. \(2012\)](#) применили НММ, используя различные данные наблюдений (цены открытия, закрытия, низкие, высокие) для прогнозирования цен закрытия акций. В нашей предыдущей работе [Nguyen и Nguyen \(2015\)](#) мы использовали НММ для данных одного наблюдения, чтобы предсказать режимы некоторых экономических показателей и сделать выбор акций на основе

показатели этих акций в рамках прогнозируемых схем.

В данном исследовании мы используем НММ для нескольких независимых переменных: цены открытия, минимума, максимума и закрытия американского базового индекса S&P 500. Мы ограничиваем количество состояний НММ шестью, чтобы сохранить модель простой и пригодной для циклических экономических этапов. Для выбора лучшей модели НММ используются четыре критерия: (1) информационный критерий Акаике (AIC) [Akaike \(1974\)](#), (2) байесовский информационный критерий (BIC) [Schwarz \(1978\)](#), (3) информационный критерий Ханнана-Куинна (HQC) [Hannan and Quinn \(1979\)](#) и (4) информационный критерий Боздогана (CAIC) [Bozdogan Consistent Akaike Information Criterion \(1987\)](#). После выбора лучшей модели мы используем НММ для прогнозирования цены S&P 500 и сравниваем результаты с моделью исторической средней доходности (HAR). Наконец, мы применяем модели НММ и HAR для торговли акциями и сравниваем их результаты.

Процесс прогнозирования цены акций основан на работе [Хассана и Ната \(Hassan and Nath, 2005\)](#). Авторы использовали НММ с четырьмя наблюдениями: закрытие, открытие, высокая и низкая цена некоторых акций авиакомпаний, чтобы предсказать их будущую цену закрытия с помощью четырех состояний. В своей работе авторы нашли день в прошлом, который был похож на недавний день, и использовали изменение цены в эту дату и цену недавнего дня для прогнозирования будущей цены закрытия. Наш подход отличается от их работы в трех модификациях. Во-первых, мы используем AIC, BIC, HQC и CAIC для проверки эффективности НММ с двумя-шестью состояниями. Во-вторых, мы используем выбранную модель НММ и множество наблюдений (цены открытия, закрытия, высокие и низкие цены) для прогнозирования цены закрытия S&P 500. Для оценки вневыборочных прогнозов НММ по сравнению с результатами, полученными с помощью эталонной модели HAR, используется множество статистических методов. В-третьих, мы также пошли дальше и использовали модели для торговли S&P 500, используя различные периоды обучения и прогнозирования.

Чтобы проверить нашу модель на предмет предсказаний вне выборки, мы используем квадрат R вне выборки, [Campbell and Thompson \(2008\)](#), и кумулятивные квадратичные ошибки предсказания, [Zhu and Zhu \(2013\)](#), чтобы сравнить производительность НММ и модели исторического среднего.

Данная работа организована следующим образом: В разделе 2 дается краткое введение в НММ и три ее основные проблемы и соответствующие алгоритмы. В разделе 3 описывается выбор модели НММ. В разделе 4 проводится тестирование модели для вневыборочного прогнозирования цен на акции, а в разделе 5 приводятся выводы.

2. Краткое введение в скрытую марковскую модель

Скрытая марковская модель - это стохастическая модель сигналов, представленная [Баумом и Петри \(1966\)](#).

Модель имеет следующие основные допущения:

1. наблюдение в момент t было порождено скрытым состоянием (или режимом),
2. скрытые состояния конечны и удовлетворяют марковскому свойству первого порядка,
3. матрица вероятностей перехода между этими состояниями постоянна,
4. Наблюдение в момент времени t в НММ имеет определенное распределение вероятностей, соответствующее возможному скрытому состоянию.

Хотя этот метод был разработан в 1960-х годах, в 1970-х годах был представлен метод максимизации [Baum et al. \(1970\)](#) для калибровки параметров модели по одной последовательности наблюдений. Однако,

Более одного наблюдения может быть сгенерировано скрытым состоянием. Поэтому Левинсон и др. (1983) ввели метод оценки максимального правдоподобия для обучения НММ с несколькими последовательностями наблюдений, предполагая, что все наблюдения независимы. В работе Li et al. (2000) было исследовано полное обучение НММ для нескольких последовательностей без предположения о независимости этих последовательностей наблюдений. В этой статье мы представим алгоритмы НММ для нескольких последовательностей наблюдений, предполагая, что они независимы.

Существует две основные категории скрытых марковских моделей: дискретная НММ и непрерывная НММ. Эти две версии имеют незначительные различия, поэтому сначала мы представим ключевые понятия дискретной НММ. Затем мы добавим подробности о непрерывной НММ.

2.1. Основные понятия дискретной ЧММ

Краткое описание основных элементов модели НММ приведено в таблице 1. Параметрами НММ являются матрица констант A , матрица вероятностей наблюдений B и вектор p , которые обобщены в компактной нотации:

$$\lambda \equiv \{A, B, p\}.$$

Если у нас есть бесконечное количество символов для каждого скрытого состояния, то символ v_k будет опущен из модели, и условная вероятность наблюдения b_{ik} запишется как:

$$b_{ik} = b_i(O_t) = P(O_t | q_t = S_i).$$

Если вероятности распределены непрерывно, то мы имеем непрерывную НММ. В данном исследовании мы предполагаем, что вероятность наблюдения является гауссовским распределением; тогда $b_i(O_t) = N(O_t = v_k, \mu_i, \sigma_i)$, где μ_i и σ_i - среднее и дисперсия распределения, соответствующего состоянию S_i , соответственно.

Таким образом, параметры НММ

$$\lambda \equiv \{A, \mu, \sigma, p\},$$

где μ и σ - векторы средних и дисперсий гауссовских распределений, соответственно.

Таблица 1. Основные элементы скрытой марковской модели.

Элемент	Обозначение/определение
Длина данных наблюдения	T
Число государств	N
Количество символов в каждом состоянии	M
Последовательность наблюдений	$O = \{O_t, t = 1, 2, \dots, T\}$
Скрытая последовательность состояний	$Q = \{q_t, t = 1, 2, \dots, T\}$
Возможные значения каждого состояния	$\{S_i, i = 1, 2, \dots, N\}$
Возможные символы в каждом состоянии	$\{v_k, k = 1, 2, \dots, M\}$
Матрица переходов	$A = (a_{ij}), a_{ij} = P(q_t = S_j q_{t-1} = S_i), i, j = 1, 2, \dots, N$
Вектор начальной вероятности нахождения в состоянии (режиме) S_i в момент времени $t = 1$	$p = (p_i), p_i = P(q_1 = S_i), i = 1, 2, \dots, N$
Матрица вероятностей наблюдений	$B = (b_{ik}), b_{ik} = P(O_t = v_k q_t = S_i), i = 1, 2, \dots, N \text{ и } k = 1, 2, \dots, M.$

2.2. Основные проблемы и решения

Три основных вопроса при применении НММ для решения реальной задачи выражаются следующим образом

1. Учитывая данные наблюдений $O = \{O_t, t = 1, 2, \dots, T\}$ и параметры модели $\lambda = \{A, B, p\}$, вычислите вероятность наблюдений, $P(O|\lambda)$.
2. Учитывая данные наблюдений $O = \{O_t, t = 1, 2, \dots, T\}$ и параметры модели $\lambda = \{A, B, p\}$, найдите "наилучшее соответствие" последовательности состояний $Q = \{q_1, q_2, \dots,$

- Учитывая последовательность наблюдений $O = \{O_t, t = 1, 2, \dots, T\}$, откалибруйте параметры НММ, $\lambda = \{A, B, p\}$.

Эти проблемы были решены с помощью алгоритмов, описанных ниже:

- Найдите вероятность наблюдений: Прямой или обратный алгоритм Баума и Эгона (1967) и Баума и Селла (1968).
- Найдите "подходящие по ставке" скрытые состояния наблюдений: Алгоритм Витерби от Витерби (1967).
- Калибровка параметров модели: Алгоритм Баума-Уэлча от Баума и Петри (1966).

2.3. Алгоритмы

У НММ есть четыре основных алгоритма: прямой, обратный, алгоритм Витерби и алгоритм Баума-Уэлча. Ознакомиться с четырьмя алгоритмами для одной последовательности наблюдений можно в [Nguyen and Nguyen \(2015\)](#). Наиболее важным из алгоритмов НММ является алгоритм Баума-Уэлча, который калибрует параметры НММ с учетом данных наблюдений. Метод Баума-Уэлча, или метод модификации ожиданий (ЕМ), используется для поиска локального максимизатора, λ^* , функции вероятности $P(O|\lambda)$. Алгоритм был представлен Баумом и др. (1970) для оценки параметров НММ для одного наблюдения. Затем, в 1983 году, алгоритм был расширен для калибровки параметров НММ для нескольких независимых наблюдений [Levinson et al. \(1983\)](#). В 2000 году был разработан алгоритм для множества наблюдений без предположения о независимости наблюдений, [Li et al. \(2000\)](#). В данной работе мы используем эти три алгоритма НММ (прямой, обратный и Баума-Уэлча) для множества независимых последовательностей наблюдений, поэтому мы представим алгоритмы (Алгоритмы A.1-A.3) в Приложении A. Эти алгоритмы для множества независимых последовательностей наблюдений написаны на основе работ Баума и Эгона (1967), Баума и Селла (1968) и Рабинера (1989).

3. НММ для прогнозирования цен на акции

Скрытая марковская модель широко используется в области финансовой математики для предсказания экономических режимов или прогнозирования цен на акции. В этой статье мы исследуем новый подход НММ к прогнозированию цен на акции и торговле акциями. В этом разделе мы обсудим, как использовать информационный критерий Акаике (AIC) [Akaike \(1974\)](#), байесовский информационный критерий (BIC) [Schwarz \(1978\)](#), информационный критерий Ханнана-Куинна (HQC) [Hannan and Quinn \(1979\)](#) и информационный критерий Акаике Боздогана (CAIC) [Bozdogan \(1987\)](#) для проверки производительности НММ с различным количеством состояний. Затем мы расскажем, как использовать НММ для прогнозирования цен на акции. Наконец, мы используем предсказанные результаты для торговли акциями.

Для реализации нашей модели мы выбрали один из распространенных бенчмарков американского фондового рынка - индекс Standard & Poor's 500 (S&P 500). Данные по S&P 500 за период с января 1950 года по ноябрь 2016 года были взяты с сайта [finance.yahoo.com](#). Сводные данные представлены в таблице 2.

Таблица 2. Сводка месячных цен индекса S&P 500 с 1 марта 1950 года по 11 января 2016 года.

Цена	Мин	Макс	Среднее	Std.
Открыт	16.66	2173.15	504.06	582.20
Высокий	17.09	2213.35	520.46	599.28
Низкий	16.66	2147.56	486.91	562.96
Закреть	17.05	2213.35	506.73	584.98

3.1. Выбор модели

Выбор числа скрытых состояний для НММ является важной задачей. В этом разделе

мы используем четыре общих критерия: AIC, BIC, HQC и CAIC для оценки производительности НММ с различным количеством состояний. Эти критерии подходят для НММ, поскольку в процессе обучения модели

Алгоритм Баума-Уэлча A.3, метод ЕМ использовался для максимизации логарифмического правдоподобия модели. Мы ограничиваем число состояний от двух до шести, чтобы сохранить модель простой и пригодной для прогнозирования запасов. Эти критерии рассчитываются по следующим формулам соответственно:

$$AIC = -2 \ln(L) + 2k, \quad (1)$$

$$BIC = -2 \ln(L) + k \ln(M), \quad (2)$$

$$HQC = -2 \ln(L) + k \ln(\ln(M)), \quad (3)$$

$$CAIC = -2 \ln(L) + k(\ln(M) + 1), \quad (4)$$

где L - функция правдоподобия для модели, M - количество точек наблюдения, а k - количество оцениваемых параметров в модели. В данной работе мы предполагаем, что распределение, соответствующее каждому скрытому состоянию, является гауссовским, поэтому число параметров k формулируется как $k = N^2 + 2N - 1$, где N - число состояний, используемых в НММ.

Для обучения параметров НММ мы используем исторические наблюдаемые данные фиксированной длины T ,

$$O = \{O_t^{(1)}, O_t^{(2)}, O_t^{(3)}, O_t^{(4)}, t = 1, 2, \dots, T\},$$

где $O^{(i)}$ с $i = 1, 2, 3$ или 4 представляет собой цену открытия, минимума, максимума или закрытия акции, соответственно. Для НММ с одной последовательностью наблюдений мы используем только данные о цене закрытия,

$$O = O_t, t = 1, 2, \dots, T,$$

где O_t - цена закрытия акции в момент времени t . Мы используем ежемесячные данные S&P 500 для обучения НММ и вычисления AIC, BIC, HQC и CAIC. Каждый раз мы используем блок цен S&P 500 длиной $T = 120$ (десятилетний период), $O = (\text{open, low, high, close})$, чтобы откалибровать параметры НММ и рассчитать AIC и BIC. Первый блок данных - это ежемесячные цены S&P 500 с декабря 1996 года по ноябрь 2006 года. Мы используем этот набор данных для калибровки параметров НММ с помощью алгоритма Баума-Уэлча A.3. Затем мы используем параметры для вычисления вероятности наблюдений, которая является правдоподобием L модели, с помощью прямого алгоритма A.1. Наконец, с помощью правдоподобия мы вычисляем критерии по формулам (1)-(4). Начальные параметры для первой калибровки мы выбираем следующим образом:

$$\begin{aligned} A &= (a_{ij}), a_{ij} = \frac{1}{N} \\ p &= (1, 0, \dots, 0), \\ \mu_i &= \mu^{(0)} + Z, Z \sim N(0, 1), \\ \sigma_i &= \sigma^{(0)}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $i, j = 1, \dots, N$, а $N(0, 1)$ - стандартное нормальное распределение.

Для второй калибровки мы сдвигаем десятилетние данные на один месяц вверх, получаем новый набор данных с января 1997 года по декабрь 2006 года и используем калиброванные параметры из первой калибровки в качестве начальных параметров. Мы повторяем этот процесс 120 раз для 120 блоков данных, перемещая блок данных вперед. Последний блок данных - это ежемесячные цены с ноября 2006 года по ноябрь 2016 года. Показатели AIC, BIC, HQC и CAIC для 120 калибровок представлены на рисунках 1 и 2. По всем этим четырем критериям модель с меньшим значением критерия лучше. Таким образом, результаты, полученные на рисунках 1 и 2, показывают, что четырехсоставная НММ является лучшей моделью среди двух-шестисоставных НММ. Поэтому мы будем использовать ЧММ с четырьмя состояниями в прогнозировании и торговле ценами на акции. Хотелось бы отметить, что для разных акций при использовании этих критериев мы можем иметь другое

Int. J. Financial Stud. 2018, 6, 36
Оптимальное количество состояний для НММ. Поэтому мы предлагаем исследователям, прежде чем применять НММ для прогнозирования цен на акции, использовать некоторые из критериев, чтобы выбрать число состояний НММ, которое работает наилучшим образом для данной акции.

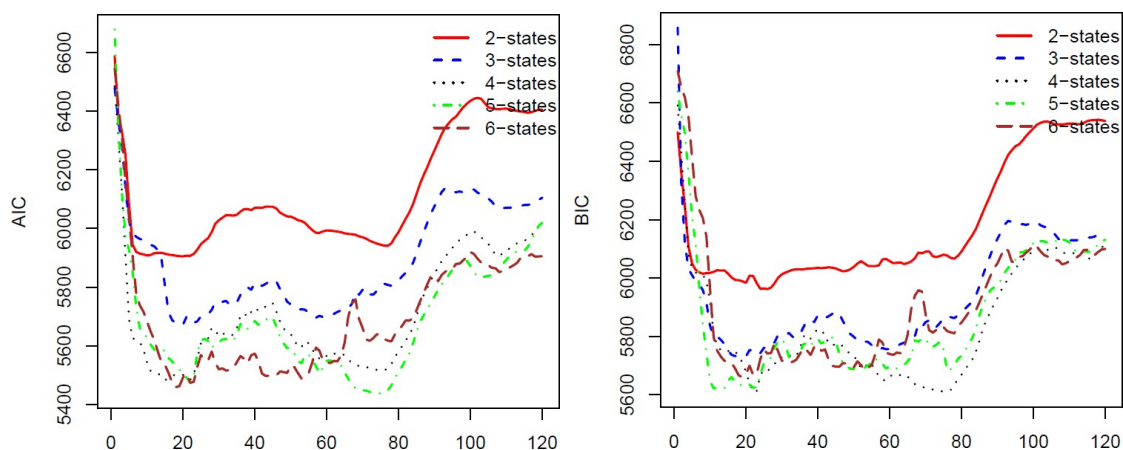


Рисунок 1. AIC (слева) и BIC (справа) для 120 калибровок параметров HMM с использованием месячных цен S&P 500.

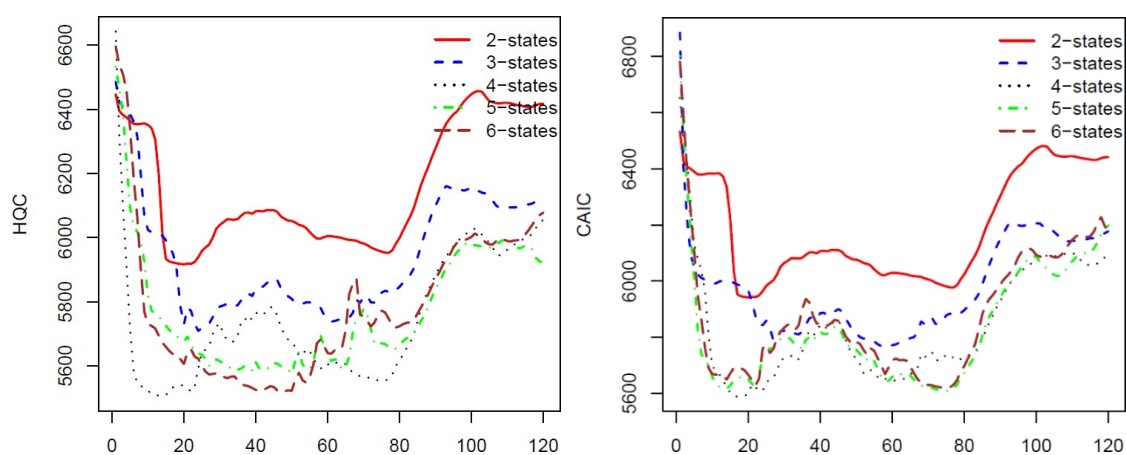


Рисунок 2. HQC (слева) и CAIC (справа) для 120 калибровок параметров HMM с использованием месячных цен S&P 500.

3.2. Прогнозирование цены акций вне выборки

В этом разделе мы используем HMM для прогнозирования цен на акции и сравним прогнозы с реальными ценами на акции, а также с результатами использования метода средней исторической доходности. Мы используем месячные цены S&P 500 с января 1950 года по ноябрь 2016 года.

Сначала мы расскажем, как прогнозировать цены на акции с помощью HMM. Процесс прогнозирования можно разделить на три этапа. Сначала параметры HMM калибруются с помощью обучающих данных и вычисляется вероятность (или правдоподобие) наблюдения в наборе данных. Затем мы находим в прошлом набор "похожих данных", вероятность которых аналогична вероятности обучающих данных. Наконец, мы будем использовать разницу цен на акции в последнем месяце найденной последовательности с ценой в следующем месяце для прогнозирования будущих цен на акции. Этот подход к прогнозированию основан на работе Хассана и Ната (Hassan and Nath, 2005). Однако авторы прогнозировали ежедневные цены четырех акций авиакомпаний, в то время как мы прогнозируем ежемесячные цены базового рынка США, S&P 500. Предположим, что мы хотим предсказать цену закрытия в момент времени $T + 1$ для S&P 500. На первом этапе мы выберем фиксированную временную длину D обучающих данных (мы называем D окном обучения), а затем используем обучающие данные от времени $T - D + 1$ до T для калибровки параметров HMM, λ . Мы предполагаем, что вероятность наблюдения $b_i(k)$, определенная в разделе 1, является гауссовским распределением, поэтому матрица B в параметре $\lambda = \{A, B, \mathbf{p}\}$ представляет собой матрицу два на N средних μ и дисперсий σ N нормальных распределений, где N - количество состояний. Начальные HMM

параметры для калибровки были рассчитаны по формуле (5). В качестве обучающих данных использовались четыре последовательности: цена открытия, цена минимума, цена максимума и цена закрытия:

$$O = \{O_t^{(1)}, O_t^{(2)}, O_t^{(3)}, O_t^{(4)}, t = T - D + 1, T - D + 2, \dots, T\}.$$

Затем мы вычисляем вероятность наблюдения, $P(O|\lambda)$. На втором этапе мы сдвигаем блок данных на один месяц назад, чтобы получить новые данные наблюдений $O_{new} = \{O_t^{(1)}, O_t^{(2)}, O_t^{(3)}, O_t^{(4)}, t =$

$T - D, T - D + 1, \dots, T - 1\}$ и вычисляем $P(O_{new}|\lambda)$. Мы продолжаем перемещать блоки данных в обратном направлении в течение месяца по месяцам, пока не найдем набор данных $O^*, (O^* = \{O_t^{(1)}, O_t^{(2)}, O_t^{(3)}, O_t^{(4)}, t = T^* - D + 1, T^* - D, \dots, T^*\})$,

так, что $P(O^*|\lambda) \approx P(O|\lambda)$. На последнем этапе мы оцениваем цену закрытия акции для времени $T + 1$,

$O_{T+1}^{(4)}$, по следующей формуле:

$$O_{T+1}^{(4)} = O_T^{(4)} + (O_{T+1}^{(4)} - O_{T^*}^{(4)}) \times \text{sign}(P(O|\lambda) - P(O^*|\lambda)). \quad (6)$$

Аналогично, чтобы предсказать цену акций в момент времени $T + 2$, мы будем использовать новые обучающие данные $O: O = \{O_t^{(1)}, O_t^{(2)}, O_t^{(3)}, O_t^{(4)}, t = T - D, T - D + 2, \dots, T + 1\}$ для прогнозирования цены акций на момент времени $T + 2$.

Калиброванные параметры НММ λ в первом предсказании были использованы в качестве начальных параметров для второго предсказания. Мы повторяем трехэтапный процесс прогнозирования для второго прогноза и так далее. Для удобства мы используем окно обучения D , равное периоду вневыборочного прогнозирования. На практике мы можем выбрать вневыборочный период любой длины, но для обучающего окна D , в силу эффективности имитационного моделирования, следует определить подходящую длину, исходя из характеристик выбранных данных. Результаты десятилетнего периода вне выборки ($D = 120$) представлены на рисунке 3, на котором Исторические данные S&P 500 с января 1950 года по октябрь 2006 года были использованы для прогнозирования цен на акции с ноября 2006 года по ноябрь 2016 года. Из рисунка 3 видно, что НММ хорошо отражает изменения цен в период экономического кризиса 2008-2009 годов. Результаты прогнозирования для других временных периодов представлены на рисунках A1 и A2 в Приложении A.

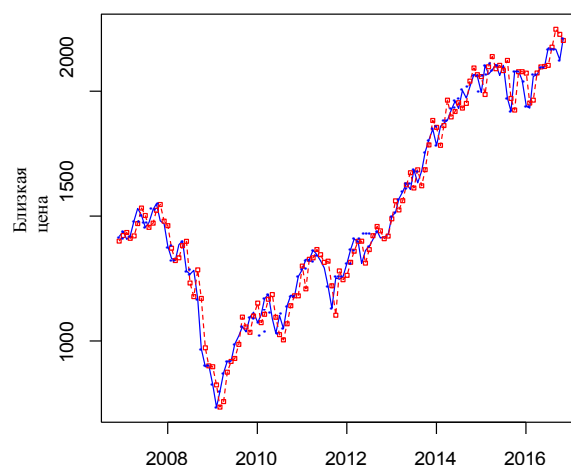


Рисунок 3. Прогнозируемые месячные цены S&P 500 с ноября 2006 года по ноябрь 2016 года с использованием четырехсоставной НММ.

3.3. Валидация модели

Для проверки наших предсказаний мы использовали статистику R^2 вне выборки, R^2 , введенную Кэмпбеллом

Инт. J. Finance (2008) 3018. Многие исследователи использовали статистический показатель для оценки своих моделей прогнозирования. Кэмпбелл и Томпсон (2008) использовали вневыборочный показатель R^2 для сравнения Показатели модели прогнозирования доходности акций, разработанной Уэлчем и Гойалом (2008), и модели прогнозирования исторической средней доходности. Авторы использовали месячную общую доходность (включая дивиденды) S&P 500. Рапач и др. (2010) используют вневыборочный R^2 для проверки эффективности своей комбинации. подход к прогнозированию премии по акциям вне выборки в сравнении с методом средней исторической доходности.

Чжу и Чжу (2013) также использовали вневыборочный R^2 , чтобы показать комбинацию режимных переключений. прогнозы увеличения избыточной доходности по сравнению с моделью исторического среднего. Все вышеперечисленные подходы основывались на регрессионной модели для прогнозирования доходности акций с использованием нескольких экономических переменных.

Вневыборочный R^2_{OS} рассчитывается следующим образом. Сначала временной ряд доходностей делится на две части: наборы: первые m точек называются набором данных внутри выборки, а последние q точек - набором данных вне выборки. Тогда вневыборочный R^2_{OS} для прогнозируемой доходности определяется как:

$$R^2_{OS} = 1 - \frac{\sum_{t=1}^q (r_{m+t} - \hat{r}_{m+t})^2}{\sum_{t=1}^D (r_{m+t} - \tilde{r}_{m+t})^2}, \quad (7)$$

где r_{m+t} - реальная доходность в момент времени $m + t$, \hat{r}_{m+t} - прогнозируемая доходность по желаемой модели, а \tilde{r}_{m+t} - прогнозируемая доходность по конкурирующей модели. Из уравнения (7) видно, что

R^2_{OS} оценивает уменьшение средней квадратичной ошибки прогнозирования (MSPE) двух моделей. Таким образом, если вневыборочный R^2_{OS} положителен, то желаемая модель работает лучше, чем конкурирующая модель. В качестве эталонной конкурирующей модели используется метод средней исторической доходности, для которого прогнозируемая доходность на следующий временной шаг рассчитывается как среднее значение исторической доходности до этого момента,

$$\tilde{r}_{t+1} = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t r_i.$$

В данном исследовании мы используем модель НММ для прогнозирования цен на акции, основываясь только на исторических ценах. Однако мы можем рассчитать цены на акции на основе ее прогнозируемой доходности и обратного хода. Поэтому мы будем рассчитывать вневыборочный R^2_{OS} , используя два подхода: вневыборочный R^2 для доходности акций и вневыборочный R^2 для цен на акции на основе прогнозируемой доходности (без дивидендов). Численные результаты, представленные в данном разделе, относятся к вневыборочному периоду и периодам обучения длиной $q = m = 60$.

Вневыборочный R^2_{OSR} для относительной доходности (без дивидендов) определяется

$$R^2_{OSR} = 1 - \frac{\sum_{t=1}^q (r_{m+t} - \hat{r}_{m+t})^2}{\sum_{t=1}^q (r_{m+t} - \tilde{r}_{m+t})^2}, \quad (8)$$

где r_{m+t} - реальная относительная цена доходности акций в момент времени $m + t$,

$$r_{m+t} = \frac{P_{m+t} - P_{m+t-1}}{P_{m+t-1}},$$

\hat{r}_{m+t} - это прогнозируемая относительная доходность, полученная с помощью НММ,

$$\hat{r}_{m+t} = \frac{P_{m+t} - P_{m+t-1}}{P_{m+t-1}}, \quad (9)$$

а \tilde{r}_{m+t} - прогнозируемая цена по модели исторического среднего, $\tilde{r}_{t+1} = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t r_i$.

R^2_{OSP} для цены акций на основе прогнозируемой доходности, а именно R^2_{OSP} задается

$$R^2_{OSP} = 1 - \frac{\sum_{t=1}^q (r_{m+t} - \hat{r}_{m+t})^2}{\sum_{t=1}^q (r_{m+t} - \tilde{r}_{m+t})^2}$$

$$\frac{(P_{m+t} - \hat{P}_{m+t})^2}{(P_{m+t} - \hat{P}_{m+t})^2}, \quad (10)$$

где P_{m+t} - реальная цена акций в момент времени $m + t$, \hat{P}_{m+t} - прогнозируемая цена НММ, а \tilde{P}_{m+t} - прогнозируемая цена на основе прогнозируемой доходности модели исторической средней доходности,

$$\tilde{r}_{t+1} = P_t + P_t \tilde{r}_{t+1} = P_t (\tilde{r}_{t+1} + 1).$$

Положительное значение R^2 указывает на то, что НММ превосходит модель исторического среднего. Поэтому мы

Для проверки гипотетической статистики, представленной [Кларком и Уэстом \(2007\)](#), будет использован тест MSPE-adjusted hypothesized statistics.

Нулевая гипотеза $R_{OS}^2 = 0$ против чередующейся гипотезы $R^2 > 0$. В тесте с поправкой на MSPE, мы сначала определяем

$$f_{t+1} = (r_{t+1} - \tilde{r})_{t+1}^2 - [(r_{t+1} - \hat{r})_{t+1}^2 - (\tilde{r}_{t+1} - \hat{r})_{t+1}^2]. \quad (11)$$

Затем мы проверяем $R_{OS}^2 = 0$ (или равен MSPE) путем регрессии $\{f_{m+i}\}_{i=1}^q$ на константу и использования

р-значение для нулевого коэффициента. Наше р-значение для проверки R_{OS}^2 и R_{OSP}^2 , которые представлены в таблице 3, больше эффективного уровня $\alpha = 0,001$, что указывает на принятие нулевой гипотезы о том, что коэффициент каждого теста равен нулю. Кроме того, р-значения констант для обоих тестов значимы на уровне $\alpha = 0,001$, что означает, что мы отвергаем нулевую гипотезу о том, что $R^2 = 0$ и принимаем

Попеременно выдвигалась гипотеза, что $R^2 > 0$. Вневыборочный R^2 для прогнозируемых цен и прогнозируемых

Доходности представлены на рисунке 4, показывая, что оба вневыборочных R^2 положительны, т. е. НММ превосходит историческое среднее в прогнозировании доходности акций и цен на акции.

Таблица 3. Тест с поправкой на среднюю квадратичную ошибку прогнозирования, $MSPE_{adj}$, для R_{OS}^2 и R_{OSP}^2 .

	MSPE-adj. Коэффициент	Смета	Станд. ошибка	t-статистика	p-Value
R_{OSP}^2	$\frac{f_{m+i}}{m+i}$	1.968×10^{-18}	3.358×10^{-14}	5.861×10^{15}	0.921×10^{-16}
R_{OSR}^2	$\frac{f_{m+i}}{m+i}$	5.280×10^{-19}	6.807×10^{-18}	7.800×10^{-2}	0.938

Примечание: "****" означает, что результат теста значим на уровне 0,001.

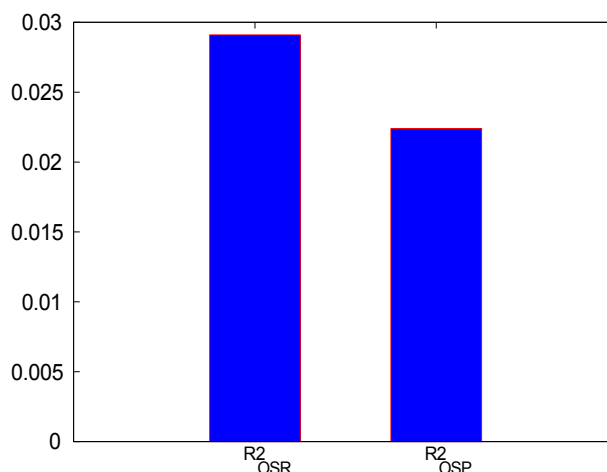


Рисунок 4. R_{OSP}^2 и R_{OSR}^2 месячные цены S&P 500 с декабря 2011 года по ноябрь 2016 года.

Хотя R_{OS}^2 сравнивает производительность двух моделей на всей вневыборочной выборке

период прогнозирования, он не показывает эффективность двух конкурирующих моделей для каждой точечной оценки. Поэтому мы используем кумулятивные квадратичные ошибки прогнозирования (CSPE), которые были представлены в работе [Zhu и Zhu \(2013\)](#), чтобы показать относительную эффективность двух моделей после каждого прогноза. Статистика CSPE в момент времени $m + t$, обозначаемая $CSPE_t$, рассчитывается как:

$$CSPE_t = \sum_{i=m+1}^t [(r_i - \tilde{r})_i^2 - (r_i - \hat{r})_i^2]. \quad (12)$$

Из определения кумулятивных квадратичных ошибок прогнозирования видно, что если функция возрастает, то НММ превосходит модель исторического среднего. Напротив, если

функция убывает, то модель исторического среднего превосходит HMM на временном интервале. Если мы заменим цены возврата в Label (12) на прогнозируемые цены, мы получим CSPE для цен. CSPE предсказанных доходностей и цен представлен на рисунке 5.

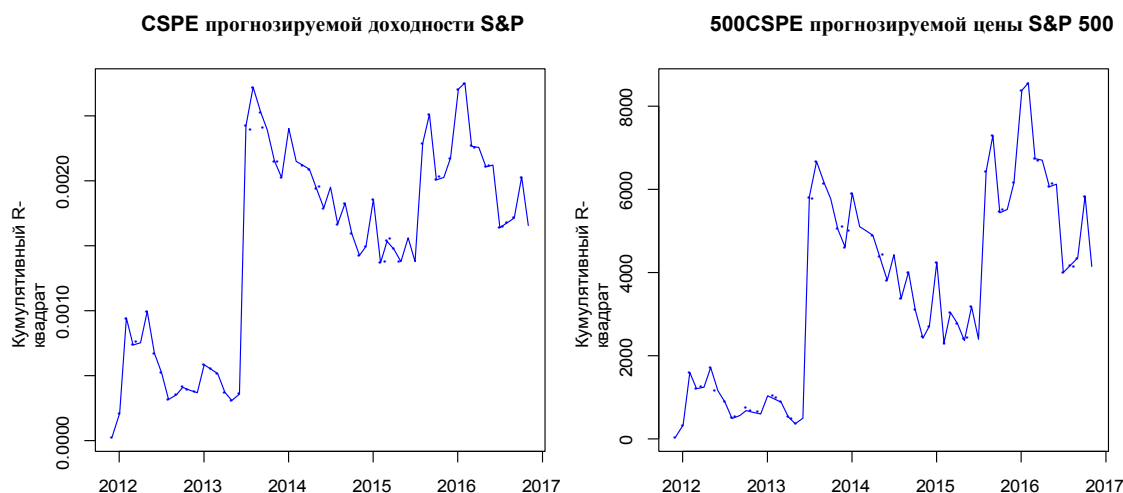


Рисунок 5. Кумулятивные квадратичные ошибки прогнозирования, CSPE, ежемесячных прогнозных цен (справа) и доходностей (слева) S&P 500 с декабря 2011 года по ноябрь 2016 года.

Результаты, представленные на рисунке 5, показывают, что, хотя в некоторых периодах HAR превосходит HMM, CSPE являются положительными и следуют восходящему тренду на всем вневыборочном периоде. Таким образом, мы приходим к выводу, что во вневыборочных прогнозах HMM превосходит модель HAR.

Мы также сравниваем производительность HMM с исторической средней моделью с помощью четырех стандартных оценок ошибок: абсолютной процентной ошибки (APE), средней абсолютной ошибки (AAE), средней относительной процентной ошибки (ARPE) и среднеквадратичной ошибки (RMSE). Эти оценки ошибок рассчитываются с помощью следующих выражений:

$$APE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|r_i - \tilde{r}_i|}{\bar{r}}, \quad (13)$$

$$AAE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |r_i - \tilde{r}_i|, \quad (14)$$

$$ARPE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|r_i - \tilde{r}_i|}{r_i}, \quad (15)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (r_i - \tilde{r}_i)^2}, \quad (16)$$

где N - количество смоделированных точек, r_i - реальная цена акции (или доходность акции), \tilde{r}_i - расчетная цена (или доходность), \bar{r} - среднее значение выборки. Мы используем оценки ошибок для расчета ошибок предсказаний моделей HMM и HAR для предсказанных доходностей (уравнение (8)) и предсказанных цен (уравнение (10)). Используя статистику R^2 , мы определяем меру эффективности для сравнения HMM

с моделью HAR в виде:

$$Eff = 1 - \frac{\text{Ошибка HMM}}{\text{Ошибка HAR's}} \quad (17)$$

Ошибки двух моделей и эффективность HMM по сравнению с HAR рассчитываются с помощью уравнений (13)-(17). Положительное значение эффективности (Eff) указывает на то, что HMM превосходит модель HAR. Результаты представлены в таблице 4.

Таблица 4. Ошибка и эффективность прогнозируемых цен и прогнозируемой доходности S&P 500 при использовании НММ в сравнении с HAR-моделью.

Оценщики ошибок		APE	AAE	ARPE	RMSE
Прогнозируемое возвращение	HMM	0.3325	0.0245	0.0303	2.4371
	HAR	0.1708	0.0249	0.0308	2.4752
	Эфф.	-0.9467	0.0161	0.0161	0.0154
Прогнозируемая цена	HMM	0.0242	43.5080	54.8606	0.0240
	HAR	0.0246	44.2091	55.4853	0.02440
	Эфф.	0.0163	0.0159	0.0113	0.0164

В таблице 4 представлены ошибки и эффективность НММ по сравнению с моделью HAR. Из таблицы видно, что модель HAR выигрывает у НММ по показателю абсолютной процентной ошибки, APE, для доходности акций. Однако во всех остальных случаях мы имеем положительную эффективность, что убедительно свидетельствует о том, что НММ превосходит HAR.

4. Торговля акциями с помощью НММ

В этом разделе мы будем использовать предсказанные доходности моделей НММ и HAR для торговли S&P 500, используя месячные данные. Если прогнозируемая доходность акций в следующем месяце положительная, мы будем покупать акции в этом месяце и продавать их, если следующая прогнозируемая доходность будет отрицательной. Мы предполагаем, что покупаем и продаем по ценам закрытия. Если НММ предсказывает, что цена акции в следующем месяце не вырастет, то мы ничего не будем делать. Мы также предполагаем, что торговые издержки составляют 7,00 долларов за сделку, это предположение основано на торговых сборах на американском рынке. Торговые сборы варьируются от брокера к брокеру; некоторые брокеры даже предлагают бесплатную торговлю для квалифицированных инвесторов. В реальности у нас есть много различных способов минимизировать плату за переход. Один из простых способов - увеличение объема или количества акций в каждой сделке. В каждой сделке мы будем покупать или продавать по 100 акций каждого из индексов S&P 500. Основываясь на результатах выбора моделей в разделе 2, мы используем НММ с четырьмя состояниями только для торговли акциями. Мы используем различные периоды обучения и торговли для тестирования нашей модели. Результаты торговли с использованием моделей НММ и HAR представлены в таблице 5.

Таблица 5. Торговля S&P 500 с использованием моделей НММ, HAR и Buy & Hold для различных временных периодов.

Торговый период	Модель	Инвестиции (\$)	Заработок (\$)	Стоимость (\$)	Прибыль (%)
40 месяцев (7/2013 -11/2016)	HMM	168,155	65,172	168	38.66
	HAR	168,573	52,762	14	31.29
	Покупать и держать	168,573	52,762	14	31.29
60 месяцев (12/2011 -11/2016)	HMM	124,696	95,205	378	76.05
	HAR	131,241	90,094	14	68.64
	Покупать и держать	124,696	96,639	14	77.49
80 месяцев (4/2010 -11/2016)	HMM	116,943	113,971	392	97.12
	HAR	116,943	104,392	14	89.26
	Покупать и держать	116,943	104,392	14	89.26
100 месяцев (8/2008 -11/2016)	HMM	126,738	94282	616	73.91
	MAP	126,738	73,010	84	57.54
	Покупать и держать	126,738	94,597	14	74.63
120 месяцев	HMM	141,830	100,614	770	70.39

(11/2006	HAR	140,063	81,272	14	58.15
-11/2016)	Покупать и	140,063	81,272	14	58.15
	держать				

В таблице 5 "Инвестиции" - это цена, по которой мы купили 100 акций индекса S&P 500 в первый раз. Стоимость" была рассчитана путем умножения общего количества "покупок" и "продаж" за период на \$7,00. Прибыль" - это процент прибыли после торговых издержек. В таблице мы привели результаты торговли по моделям HMM и HAR, а также по методу Buy & Hold. В методе Buy & Hold мы предполагаем, что инвестор купит 100 акций S&P 500 в начале торгового периода и будет держать их до конца периода. Результаты показывают, что HMM превосходит модель HAR во всех случаях и превосходит метод Buy & Hold в большинстве случаев, за исключением 100-месячного периода. В трех случаях: 40 месяцев, 80 месяцев и 120 месяцев, модели HAR и Buy & Hold имеют идентичные результаты, поскольку все прогнозируемые доходности HAR положительны. Недостатком модели HAR является то, что ее прогнозы сильно зависят от среднего значения исторических данных, которое не чувствительно к изменению цены в той или иной точке. Напротив, HMM очень хорошо улавливает изменение входных данных в одной точке. Поэтому она больше подходит для прогнозирования цен на акции, чем модель исторического среднего.

5. Выводы

Показатели акций являются важным индикатором сильных и слабых сторон корпорации и экономики в целом. В данной работе мы использовали скрытую марковскую модель для прогнозирования месячных цен закрытия S&P 500, а затем использовали эти прогнозы для торговли акциями. Сначала мы использовали четыре критерия: AIC, BIC, HQC и CAIC, чтобы исследовать производительность HMM с числом состояний от двух до шести. Результаты показывают, что HMM с четырьмя состояниями является лучшей моделью среди этих пяти моделей HMM. Затем мы используем HMM с четырьмя состояниями для прогнозирования месячных цен на индекс S&P 500 и сравниваем с результатами, полученными с помощью эталонной модели исторической средней доходности. Мы используем вневыборочный R^2 и другие методы проверки модели для тестирования нашей модели, и результаты показывают, что HMM превосходит метод исторического среднего. После проверки модели HMM для вневыборочных прогнозов мы применили модель для торговли S&P 500, используя различные периоды обучения и тестирования. Численные результаты показывают, что четырехсоставная HMM превосходит HAR не только в прогнозировании доходности, но и в торговле акциями. В целом модель HMM превосходит стратегию Buy & Hold и приносит более высокую процентную прибыль. Результаты тестирования и торговли указывают на то, что HMM является потенциальной моделью для прогнозирования цен на акции и торговли акциями.

Благодарности: Мы благодарим соредатора и четырех анонимных рецензентов за ценные замечания и предложения.

Конфликты интересов: Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Приложение А. Алгоритмы

Приложение А.1. Алгоритм форвардинга

Мы определяем совместную функцию вероятности как

$$\alpha_t^{(l)}(i) = P(O_1^{(l)}, O_2^{(l)}, \dots, O_t^{(l)}, q_t = S_i | \lambda), t = 1, 2, \dots, T \text{ и } l = 1, 2, \dots, L,$$

и затем рекурсивно вычисляем $\alpha_t^{(l)}(i)$. Вероятность наблюдения $P(O^{(l)} | \lambda)$ - это просто сумма $\alpha_t^{(l)}(i)s_i$.

Алгоритм А1: прямой алгоритм.

1. Инициализация $P(O|\lambda) = 1$
2. Для $l = 1, 2, \dots, L$ сделайте

- (a) Инициализация: для $i = 1, 2, \dots, N$

$$\alpha_1^{(l)}(i) = p_{b_{ii}}(O_1^{(l)}).$$

- (b) Рекурсия: для $t = 2, 3, \dots, T$, и для $j = 1, 2, \dots, N$, вычислите

$$\alpha_t^{(l)}(j) = \sum_{i=1}^N \alpha_{t-1}^{(l)}(i) a_{ij} b_j(O_t^{(l)}).$$

- (c) Рассчитайте:

$$P(O^{(l)}|\lambda) = \sum_{i=1}^N \alpha_t^{(l)}(i).$$

- (d) Обновление:

$$P(O|\lambda) = P(O|\lambda) \times P(O^{(l)}|\lambda).$$

3. Выходные данные: $P(O|\lambda)$.
-

Приложение А.2. Обратный алгоритм

Алгоритм А2: обратный алгоритм.

1. Инициализация $P(O|\lambda) = 1$
2. Для $l = 1, 2, \dots, L$ сделайте

- (a) Инициализация: для $i = 1, 2, \dots, N$

$$\beta_T^{(l)}(i) = 1.$$

- (b) Рекурсия: для $t = T - 1, T - 2, \dots, 1$, и для $j = 1, 2, \dots, N$, вычислите

$$\beta_t^{(l)}(i) = \sum_{j=1}^N a_{ij} b_j(O_{t+1}^{(l)}) \beta_{t+1}^{(l)}(j).$$

- (c) Рассчитайте:

$$P(O^{(l)}|\lambda) = \sum_{i=1}^N \beta_1^{(l)}(i).$$

- (d) Обновление:

$$P(O|\lambda) = P(O|\lambda) \times P(O^{(l)}|\lambda).$$

3. Выходные данные: $P(O|\lambda)$.
-

Приложение А.3. Алгоритм Баума-Уэлча

Чтобы описать процедуру, определим условную вероятность

$$\beta_t^{(l)}(i) = P(O_1^{(l)}, O_2^{(l)}, \dots, O_T^{(l)} | q_t = S_i, \lambda),$$

для $i = 1, \dots, N, l = 1, 2, \dots, L$. Очевидно, что для $i = 1, 2, \dots, N \beta^{(l)}(i) = 1$, и мы имеем следующее

обратное рекурсивное отношение

$$\beta_t^{(l)}(i) = \sum_{j=1}^N a_{ij} b_{ij}^{(l)}(O_{t+1}^{(l)}) \beta_{t+1}^{(l)}(j), t = T-1, T-2, \dots, 1.$$

Алгоритм А3: Баум-Уэлч для L независимых наблюдений $O = (O^{(1)}, O^{(2)}, \dots, O^{(L)})$ с одинаковой длиной T .

1. Инициализация: входные параметры λ , допуск δ и вещественное число Δ
2. Повторяйте до тех пор, пока $\Delta < \delta$

- Вычислите $P(O, \lambda) = \prod_{l=1}^L P(O^{(l)} | \lambda)$, используя алгоритм А.1.
- Вычислите новые параметры $\lambda^* = \{A^*, B^*, p^*\}$, для $1 \leq i \leq N$

$$p_i^* = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \gamma_l^{(i)}$$

$$a_{ij}^* = \frac{\sum_{l=1}^L \sum_{t=1}^{T-1} \xi_t^{(l)}(i, j)}{\sum_{l=1}^L \sum_{t=1}^{T-1} \gamma_t^{(i)}}, 1 \leq j \leq N$$

$$b_i(k)^* = \frac{\sum_{l=1}^L \sum_{t=1}^T O_t^{(l)} = k \gamma_t^{(i)}}{\sum_{l=1}^L \sum_{t=1}^T \gamma_t^{(i)}}, 1 \leq k \leq M$$

- Вычислите $\Delta = P(O, \lambda^*) - P(O, \lambda)$
- Обновление

$$\lambda = \lambda^*.$$

3. Выход: параметры λ .
-

Затем мы определили $\gamma_t^{(l)}(i)$, вероятность нахождения в состоянии S_i в момент времени t наблюдения $O^{(l)}$, $l =$

$1, 2, \dots, L$

как:

$$\gamma_t^{(l)}(i) = P(q_t = S_i | O^{(l)}, \lambda) = \frac{\alpha_t^{(l)}(i) \beta_t^{(l)}(i)}{P(O^{(l)} | \lambda)} = \frac{\alpha_t^{(l)}(i) \beta_t^{(l)}(i)}{\sum_{i=1}^N \alpha_t^{(l)}(i) \beta_t^{(l)}(i)}.$$

Вероятность нахождения в состоянии S_i в момент времени t и в состоянии S_j в момент времени $t+1$ по наблюдению $O^{(l)}$, $l =$

$1, 2, \dots, L$ как:

$$\xi_t^{(l)}(i, j) = P(q_t = S_i, q_{t+1} = S_j | O^{(l)}, \lambda) = \frac{\alpha_t^{(l)}(i) a_{ij} b_{ij}^{(l)}(O_{t+1}^{(l)}) \beta_{t+1}^{(l)}(j)}{P(O^{(l)}, \lambda)}.$$

Ясно,

$$\gamma_t^{(l)}(i) = \sum_{j=1}^N \xi_t^{(l)}(i, j).$$

Обратите внимание, что параметр λ^* был обновлен на шаге 2 алгоритма Баума-Уэлча, чтобы максимизировать функцию $P(O | \lambda)$, поэтому мы будем иметь $\Delta = P(O, \lambda^*) - P(O, \lambda) > 0$.

Если вероятность наблюдения $b_i(k)^*$, определенная в разделе 1, является гауссовской, то для обновления параметра модели, $\lambda \equiv \{A, \mu, \sigma, p\}$, мы будем использовать следующую формулу.

$$\mu_i^* = \frac{\sum_{l=1}^L \sum_{t=1}^{T-1} V^{(l)}(i) O^{(l)}_t}{\sum_{l=1}^L \sum_{t=1}^{T-1} V^{(l)}(i)},$$

$$q_i^* = \frac{\sum_{l=1}^L \sum_{t=1}^T V^{(l)}(i) (O^{(l)}_t - \mu_i) (O^{(l)}_t - \mu_i)'}{\sum_{l=1}^L \sum_{t=1}^T V^{(l)}(i)}.$$

Приложение А.4. Результаты прогнозирования цены S&P 500

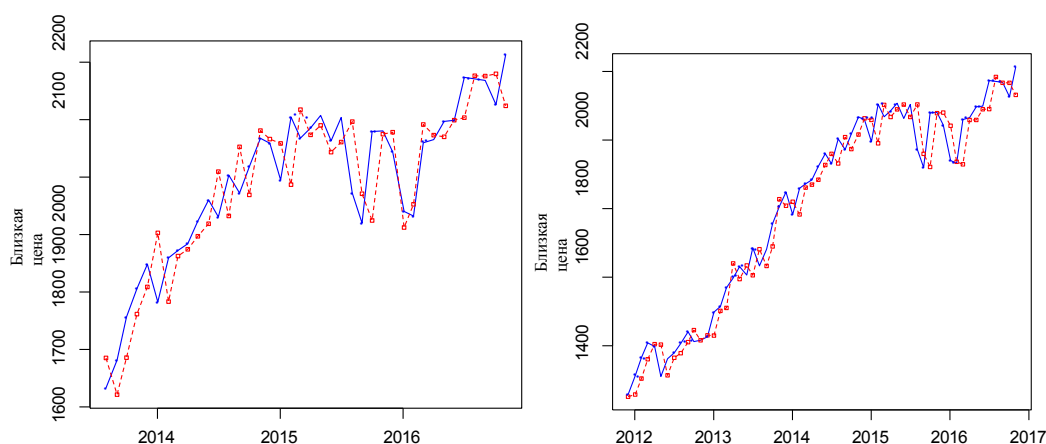


Рисунок А1. Прогнозируемые цены S&P 500 с использованием четырехсоставной НММ для 40-месячного вневыборочного периода (слева) и 60-месячного вневыборочного периода (справа).

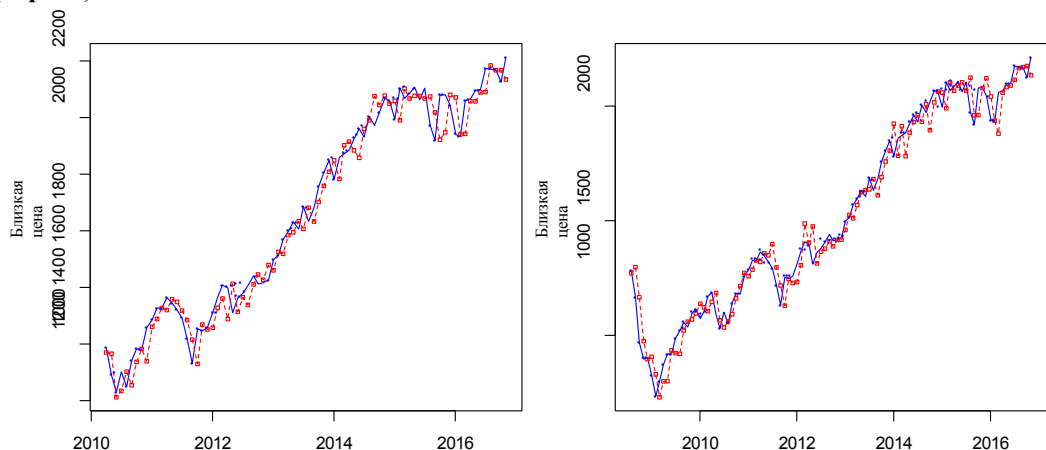


Рисунок А2. Прогнозируемые цены S&P 500 с использованием четырехсоставной НММ для 80-месячного периода вне выборки (слева) и 100-месячного периода вне выборки (справа).

Ссылки

- Акаике, Хиротугу. 1974. Новый взгляд на статистическую идентификацию модели. *IEEE Transactions on Automatic Control* 19: 716-23.
- Анг, Эндрю и Геерт Бекаэрт. 2002. Международное распределение активов со сменой режимов. *Обзор финансовых исследований* 15: 1137-87.
- Баум, Леонард Э. и Джон Алонзо Игон. 1967. Неравенство с приложениями к статистическому оцениванию для вероятностных функций марковского процесса и к модели для экологии. *Бюллетень Американского математического общества* 73: 360-63.

- Баум, Леонард Э. и Джордж Селл. 1968. Функции роста для преобразований на многообразиях. *Тихоокеанский журнал математики* 27: 211-27.
- Баум, Леонард Э. и Тед Петри. 1966. Статистический вывод для вероятностных функций марковских цепей с конечными состояниями. *Анналы математической статистики* 37: 1554-63.
- Баум, Леонард Е., Тед Петри, Джордж Соулс и Норман Вайс. 1970. Техника максимизации, встречающаяся в статистическом анализе вероятностных функций цепей Маркова. *Анналы математической статистики* 41: 164-71.
- Боздоган, Хампарсум. 1987. Выбор модели и информационный критерий Акаике (AIC): общая теория и ее аналитические расширения. *Psychometrika* 52: 345-70.
- Кэмпбелл, Джон Й. и Сэмюэл Б. Томпсон. 2008. Прогнозирование премии за акцию вне выборки: Может ли что-нибудь превзойти историческое среднее? *Review of Financial Studies* 21: 1509-31.
- Кларк, Тодд Е. и Кеннет Д. Уэст. 2007. Приблизительно нормальные тесты на равную предсказательную точность во вложенных моделях. *Journal of Econometrics* 138: 291-311.
- Эрлвейн, Кристина, Рогемар Мамон и Мэтт Дэвисон. 2009. An Examination of HMM-based Investment Strategies for Asset Allocation. *Прикладные стохастические модели в бизнесе и промышленности* 27: 204-21. doi:10.1002/asmb.820.
- Гвидолин, Массимо и Аллан Тиммерманн. 2007. Распределение активов в условиях многомерного переключения режимов. *Журнал Экономическая динамика и контроль* 31: 3503-44.
- Гамильтон, Джеймс Д. 1989. Новый подход к экономическому анализу нестационарных временных рядов и бизнес-цикла. *Econometrica* 57: 357-84.
- Ханнан, Эдвард Дж. и Барри Дж. Quinn. 1979. Определение порядка авторегрессии. *Journal of the Royal Statistical Society. Серия B (методологическая)* 41: 190-95.
- Хассан, Мд Рафиул и Байкунт Натх. 2005. Прогнозирование фондового рынка с помощью скрытых марковских моделей: A New Approach. Доклад представлен на пятой Международной конференции IEEE по интеллектуальным системам Design and Applications, Вроцлав, Польша, 8-10 сентября, стр. 192-96.
- Хонда, Тосики. 2003. Оптимальный выбор портфеля при ненаблюдаемых и меняющихся в зависимости от режима средних доходах. *Journal of Economic Dynamics and Control* 28: 45-78.
- Крицман, Марк, Себастьян Пейдж и Дэвид Теркингтон. 2012. Смена режимов: Последствия для динамических стратегий. *Журнал финансовых аналитиков* 68: 22-39.
- Левинсон, Стивен Е., Лоуренс Р. Рабинер и Ман Мохан Сонди. 1983. Введение в применение теории вероятностных функций марковского процесса к автоматическому распознаванию речи. *Bell System Technical Journal* 62: 1035-74.
- Ли, Сяолин, Марк Паризо и Режан Пламодон. 2000. Обучение скрытых марковских моделей с множественными наблюдениями - комбинаторный метод. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 22: 371-77.
- Нгуен, Нгуен Тхи. 2014. Вероятностные методы в оценке и прогнозировании финансовых моделей. Докторская диссертация, Florida State University, Tallahassee, FL, USA.
- Нгуен, Нгуен и Дунг Нгуен. 2015. Скрытая марковская модель для выбора акций. *Risks* 3: 455-73.
- Гупта, Адитья и Дхингра Бхуван. 2012. Прогнозирование фондового рынка с помощью скрытых марковских моделей. Доклад представлен на конференции студентов по инженерным наукам и системам (SCES), Аллахабад, Уттар-Прадеш, Индия, 16-18 марта, с. 1-4.
- Рабинер, Лоуренс Р. 1989. Учебное пособие по скрытым марковским моделям и их выборочному применению в распознавании речи. *Proceedings of the IEEE* 77: 257-86.
- Рапач, Дэвид Е., Джек К. Штраус и Гуофу Чжоу. 2010. Прогнозирование премии по акциям вне выборки: Комбинация прогнозов и связи с реальной экономикой. *Обзор финансовых исследований* 23: 821-62.
- Засс, Йорн и Ульрих Г. Хаусманн. 2004. Оптимизация конечного богатства в условиях частичной информации: The Drift Process as A Continuous Time Markov Chain. *Финансы и стохастика* 8: 553-77. doi:10.1007/s00780-004-0132-9.
- Шварц, Гидеон. 1978. Оценка размерности модели. *The annals of statistics* 6: 461-64.
- Таксар, Майкл и Сюдун Цзэн. 2007. Оптимальное конечное богатство в условиях частичной информации: Дрейф и волатильность, управляемые дискретной цепью Маркова времени. *SIAM Journal on Control and Optimization* 46: 1461-82.
- Витерби, Эндрю. 1967. Error Bounds for Convolutional Codes and An Asymptotically Optimal Decoding Algorithm. *IEEE transactions on Information Theory* 13: 260-69.

Велч, Иво и Амит Гоял. 2008. Всесторонний взгляд на эмпирическую эффективность прогнозирования премии по акциям. *Обзор финансовых исследований* 21: 1455-508.

- Чжу, Сяонэн и Цзе Чжу. 2013. Прогнозирование доходности акций: Комбинированный подход с переключением режимов и экономические связи. *Journal of Banking & Finance* 37: 4120-33.
- Гевеке, Джон и Нобухико Тери. 1993. Байесовские пороговые авторегрессионные модели для нелинейных временных рядов. *Journal of Time Series Analysis* 14: 441-54.
- Фрювирт-Шнаттер, Сильвия. 2006. *Модели конечных смесей и марковских переключений*. Берлин: Springer.
- Хуанг, Биинг-Хванг и Лоуренс Рабинер. 1985. Смешанные авторегрессионные скрытые марковские модели для речевых сигналов. *IEEE Transactions and Acoustic, Speech, and Signal Processing* 33: 1404-13.
- Вонг, Чун Шань и Вай Кун Ли. 2000. О модели смешанной авторегрессии. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* 62: 95-115.



© 2018 г. Авторы. Лицензиат MDPI, Базель, Швейцария. Эта статья является статьей с открытым доступом и распространяется на условиях лицензии Creative Commons Attribution (CC BY) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).