МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ “ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”

Кафедра систем штучного інтелекту

Лабораторна робота №6

з дисципліни
«Дискретна математика»

Виконав:
студент групи КН-114
Брила Ярослав

Викладач:
Мельникова.Н.І

Львів – 2019 р

Тема: Генерація комбінаторних конфігурацій

Мета роботи: набути практичних вмінь та навичок при комп'ютерній реалізації комбінаторних задач.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТА ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Головна задача комбінаторики – підрахунок та перелік елементів у скінчених множинах.

Правило додавання: якщо елемент – x може бути вибрано n способами, а y- іншими m способами, тоді вибір „ x або y" може бути здійснено (m+n) способами.

Правило добутку: якщо елемент – x може бути вибрано n способами, після чого y - m способами, тоді вибір упорядкованої пари (x, y) може бути здійснено (m*n) способами.

Набір елементів $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}$ з множини $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ називається вибіркою об'єму m з n елементів – *(n, m) – вибіркою.*

Упорядкована (n, m) – вибірка, в якій елементи не можуть повторюватися, називається *(n, m) – розміщеням*, кількість всіх можливих розміщень обчислюється за формулою:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Упорядкована (n, m) – вибірка, в якій елементи можуть повторюватися, називається *(n, m) – розміщеням з повторюваннями*, кількість всіх можливих таких розміщень обчислюється за формулою:

$$\overline{A_n^m} = n^m.$$

Неупорядкована (n, m) – вибірка, в якій елементи не можуть повторюватися, називається *(n, m) – сполученням*, кількість всіх можливих сполучень обчислюється за формулою:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Неупорядкована (n, m) – вибірка, в якій елементи можуть повторюватися, називається *(n,m)-сполученням з повторюваннями*, кількість всіх можливих таких сполучень обчислюється за формулою:

$$\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^m.$$

A_n^n – називається *перестановкою*, а кількість різних перестановок позначається та обчислюється за формулою:

$$P_n = n!.$$

Якщо в перестановках є однакові елементи, а саме перший елемент присутній n_1 разів, другий елемент – n_2 разів, ... , k-ий елемент – n_k разів, причому $n_1+n_2+\dots+n_k=n$, то їх називають *перестановками з повторенням* та кількість їх можна знайти за формулою

$$P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}.$$

Нехай $X = \{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ - *розбиття множини* X ($X = n$) на k підмножин таких, що: $\bigcup_{i=1}^{k} X_i = X$, $X_i \cap X_j = 0$ при $i \neq j$,

$$C_n^{n_1,n_2,\dots,n_k}(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}.$$

Якщо ж

множину X ($|X| = n$) потрібно розбити на підмножини, серед яких для усіх i=1, …, n є $m_i \geq 0$ підмножин

з i елементами, де $\sum_{i=1}^{n} i * m_i = n$, та при цьому набір підмножин в розбитті

не є упорядкованим, тоді їх кількість обчислюється за формулою: $n!$

$$N(m_1, m_2, \dots, m_n) = \frac{n!}{m_1!m_2!\dots m_n!(1!)^{m1}(2!)^{m2}\dots(n!)^{m_n}}.$$

Формула включень та виключень. Нехай X_i – скінчені множини, де i=1,…,n, тоді:

$$|X_1 \cup \dots \cup X_n| = (|X_1| + \dots + |X_n|) - (|X_1 \cap X_2| + \dots + |X_{n-1} \cap X_n|) +$$

$$+ (|X_1 \cap X_2 \cap X_3| + \dots + |X_{n-2} \cap X_{n-1} \cap X_n|) - \dots + (-1)^{n+1}|X_1 \cap \dots \cap X_n|.$$ Наслідок.

$$|X \setminus (X_1 \cup \dots \cup X_n)| = |X| - (|X_1| + \dots + |X_n|) +$$

$$(|X_1 \cap X_2| + \dots + |X_{n-1} \cap X_n|) - \dots + (-1)^n |X_1 \cap \dots \cap X_n|.$$

Приведемо ще одну форму запису формули включень та виключень. Нехай X – скінчена множина з N елементів, $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ – деякі властивості, якими володіють чи ні елементи з X. Позначимо через $X_i = \{x \in X | \alpha_i(x)\}$ – множину елементів в X, які володіють властивістю α_i, а

$N(\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{ik}) = |X_{i1} \cap \dots \cap X_{ik}| = |\{x \in X | \alpha_{i1}(x) \wedge \dots \wedge \alpha_{ik}(x)\}|$ – кількість

елементів в X, які володіють одночасно властивостями $\alpha_{i1},\dots,\alpha_{ik}$, $N_0 = |X \setminus (X_1 \cup \dots \cup X_n)|$ - кількість елементів, що не володіють жодною з властивостей $\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{ik}$. Тоді маємо формулу:

$N_0 = N - S_1 + S_2 - \dots + (-1)^n S_n$, де $S_k = \sum_{1 \le i_1, \dots, i_k \le n} N(\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{ik})$ $k = 1, 2, \dots, n.$

Якщо треба знайти кількість елементів, які володіють рівно m властивостями, тоді використовують наступну формулу:

$$\hat{N}_m = \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k C_{m+k}^m S_{m+k}.$$

Приклади.

1. Кожен день, протягом 10 днів, клієнт брав з картки гроші а) кожен день різну суму 5, 10, 15,…, 50 грн; б) 3 дні у сумі 100 грн, 5 днів у сумі 50 грн., 2 дня у сумі 20 грн, Скількома способами він це міг зробити?

Розв’язання:

а) усього 10 днів (n=10), і в усі ці дні клієнт брав гроші (m=10), кожен день різну суму, тобто має значення лише в який день була яка сума, тому маємо перестановку: $P_{10} = 10! = 3628800$,

б) усього 10! перестановок, але 3! перестановок не відрізняються між собою тому, що в три дні сума однакова – 100 грн, також – 5! та 2! перестановки однакові, тому різних способів буде:

Варіант№2

Завдання№1

Кожен день, протягом 10 днів, клієнт брав з картки гроші

а) 3 дні у сумі 100 грн, 5 днів у сумі 50 грн., 2 дня у сумі 20 грн;

б) кожен день різну суму 5, 10, 15,…, 50 грн.

Скількома способами він це міг зробити?

Розв'язання:

а) усього 10! перестановок, але 3! перестановок не відрізняються між собою тому, що в три дні сума однакова – 100 грн, також – 5! та 2! перестановки однакові, тому різних способів буде:

P=10!/(3!*5!*2!);

б) усього 10 днів (n=10), і в усі ці дні клієнт брав гроші (m=10), кожен день різну суму, тобто має значення лише в який день була яка сума, тому маємо перестановку: P10 =10!= 3628800.

Завдання№2

2. Скільки п'ятицифрових чисел можна утворити з дев'яти цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

Розв'язання. З дев'яти цифр (n=9) необхідно вибрати – п'ять (m=5), причому цифри у числі можуть повторюватися, і має значення в якому порядку вони записані, тому усього можливо утворити: $A_9^5 = 9^5 = 59049$ чисел.

Завдання№3

3. Команда з п'яти чоловік виступає на змаганнях, у яких бере учать ще 20 спортсменів. Скількома способами можуть бути розподілені місця, зайняті членами цієї команди, за умови, що жодне з них не може бути поділено, та немає значення, як місця будуть поділені між членами команди?

Розв'язування.

Всього 25 чоловік. Перше місце: 25!/1!(25!-1!)=25. Друге місце: 24!/1!(24!-1!)=24. Третє місце: 23!/1!(23!-1!)=23,і так з 5 членами учасників команди В загальному 25*24*23*22*21=6 375 600 способів

Завдання№4

4. Комісія складається з голови, його заступника, та ще трьох чоловік. Скількома способами можна вибрати таку комісію з 7 чоловік?

Розв'язання. З початку з 7 чоловік виберемо голову– маємо 7 способів, потім з шести залишених чоловік – його заступника– 6 способів, потім з п'яти – трьох чоловік 5!/3!(5!-3!)=10 способів

. За теоремою добутку загальна кількість способів буде: 7*6*10=420

Завдання№5

Скількома способами можна розставити 5 різних книжок з математики і 3 різні книжки з фізики, щоб усі книжки з фізики стояли поруч?

Розв'язання.

Об'єднаємо книжки з фізики умовно в одну, тоді всіх книг 6 і P_6 перестановок. Книги з фізики можна розставити «всередині» нової книги P_3 способами.

Всього за правилом добутку, отримаємо:$P_6 * P_3$ =6!*3!=4320 способів.

Завдання№6

Вісім авторів мають писати книгу з шістнадцяти розділів. Скількома способами можна розподілити матеріал між авторами, якщо два чоловіки напишуть по три розділи, чотири – по два та двоє – по одному розділу книги?

З початку виберемо 3 групи, це можливо зробити

8^3 =512 способами, потім розіб'ємо авторів на три групи, це буде не упорядковане розбиття, тобто маємо: 8!/(2!*4!*2!)=420

Далі за правилом добутку отримаємо – 512 * 420 = 215040 різних способів.

Завдання№7

Якщо відомо, що кожен учень у школі вивчає принаймні одну із іноземних мов, знайдіть загальну кількість учнів у школі, якщо відомо, що англійську мову вивчають 28 учнів, французьку – 23 учні, німецьку – 21 учень, англійську та французьку – 12 учнів, англійську та німецьку – 8 учнів, французьку та німецьку – 7 учнів, всі три мови - 5 учнів.

Розв'язання. За формулою включень та виключень маємо: N=?, N0=0, S1=28+23+21=72, S2=12+8+7=27 S3=5, N=N0+S1-S2-S3=0+72-27-5=40 всього учнів.

Додаток№2

Запрограмувати за варіантом обчислення кількості розміщення(перестановок, комбінацій, алгоритму визначення наступної лексикографічної сполуки, перестановки) та формулу Ньютона і побудувати за допомогою неї розклад за варіантом

Завдання №1

Задане додатне ціле число n. Розташувати у лексикографічному порядку всі перестановки множини {1, 2, …, n}. Побудувати розклад $(x\text{-}y)^5$

```cpp
#include <iostream>
using namespace std;
bool NextSet(int *a, int n)
{
    int j = n - 2;
    while (j != -1 && a[j] >= a[j + 1]) j--;
    if (j == -1)
        return false;
    int k = n - 1;
    while (a[j] >= a[k]) k--;
    swap( a[j], a[k]);
    int l = j + 1, r = n - 1;
    while (l<r)
        swap( a[l++], a[r--]);
    return true;
}
int main()
{
    int num=1,n, *a;
    cout << "N = ";
    cin >> n;
    cout <<num++ << ": ";
    a = new int[n];
    for (int i = 0; i < n; i++)
        a[i] = i + 1;
    for (int i = 0; i < n; i++)
        cout << a[i] << " ";
    cout << endl;
    while (NextSet(a, n))
        {
        cout << num++ << ": ";
            for (int i = 0; i < n; i++)
                cout << a[i] << " ";
            cout << endl;
        }
    return 0;
}
```

```
N =4
 1: 1 2 3 4
2: 1 2 4 3
3: 1 3 2 4
4: 1 3 4 2
5: 1 4 2 3
6: 1 4 3 2
7: 2 1 3 4
8: 2 1 4 3
9: 2 3 1 4
10: 2 3 4 1
11: 2 4 1 3
12: 2 4 3 1
13: 3 1 2 4
14: 3 1 4 2
15: 3 2 1 4
16: 3 2 4 1
17: 3 4 1 2
18: 3 4 2 1
19: 4 1 2 3
20: 4 1 3 2
21: 4 2 1 3
22: 4 2 3 1
23: 4 3 1 2
24: 4 3 2 1
```

Завдання№2

Побудувати розклад $(x\text{-}y)^5$

```
#include ...
using namespace std;
int fact (int n)
{
    if (n<=1) return 1;
    else return fact( n: n-1)*n;
}
int main()
{   cout<<"(x-y)^n";
    int n;
    cout<<"\nEnter n=";
    cin>>n;
    cout << "(x-y)^" << n <<" = ";
    for(int i=0; i<=n; i++){

        if(i==0){
            cout << "x^" << n-i;
        }
        if(i==1){
            cout << fact(n)/(fact(i)*fact( n: n-i)) << "*x^" << n-i << "*y";
        }
        if(i!=0 && i!=1 && i!=n-1 && i!=n){
                cout << fact(n)/(fact(i)*fact( n: n-i)) << "*x^" << n-i << "*y^" << i;
            }
        if(i==n-1){
                cout << fact(n)/(fact(i)*fact( n: n-i)) << "*x" << "*y^" << i ;}
        if(i==n){
            cout << "y^" << i;}
        if(i!=n){
            if(i%2==1 )cout<<" + ";
                else
                    cout<<" - ";
        }
    }
}
```

```
(x-y)^n
Enter n=5
(x-y)^5 = x^5 - 5*x^4*y + 10*x^3*y^2 - 10*x^2*y^3 + 5*x*y^4 - y^5
```

Висновок: набув практичних вмінь та навичок при комп’ютерній реалізації комбінаторних задач.