Лабораторная работа №4
Вложенные циклы

Задания для самостоятельного выполнения

1. Изучите теоретическую справку по методу средних прямоугольников и правилу Рунге.

2. Используя свой вариант и наработки по лабораторной работе №3, напишите программу для расчёта приближённого значения интеграла $I = \int_a^b f(x)dx$ по формуле средних прямоугольников с заданной точностью по правилу Рунге.

Требования и ограничения

Требуемую точность вводить с клавиатуры. Значение, рассчитанное программой, должно совпадать с контрольным значением.

Теоретическая справка

Метод средних прямоугольников

В случаях, когда при вычислении интерграла $I = \int_a^b f(x)dx$ невозможно найти или очень сложно вычислить первообразную, обращаются к численному интегрированию. Рассмотрим на примере метода средних прямоугольников, в котором площадь подынтегральной трапеции заменяется площадью совокупности прямоугольников (см. рис. 1).

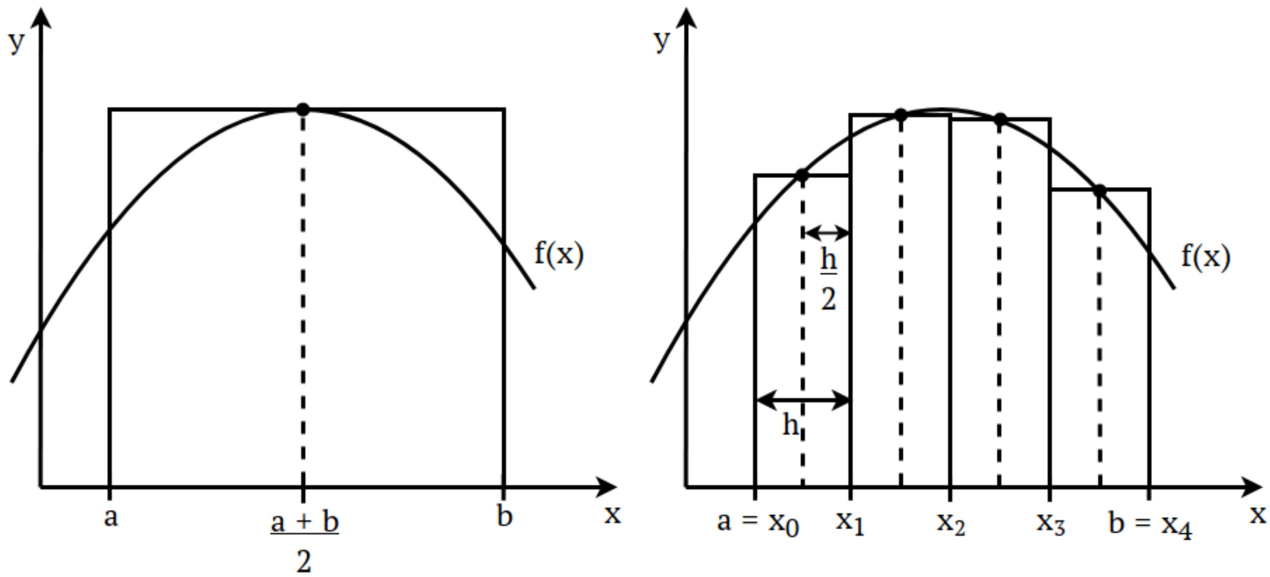

Рис. 1: Метод средних прямоугольников без разбиений отрезка интегрирования и с разбиением на 4 части.

Без разбиений интеграл I можно найти в виде площади прямоугольника с шириной, равной длине интервала интегрирования $[a, b]$ и высотой, равной значению

$f(x)$ в середине этого интервала:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Введём равномерную сетку $x_i = a + ih, i = 0, 1, \ldots, n$, где $h = \frac{b-a}{n}$ - шаг сетки. Тогда интеграл I найдём как сумму площадей прямоугольников шириной h и высотой, равной значению $f(x)$ в средней точке каждого прямоугольника:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right).$$

Правило Рунге

Правило Рунге служит для оценки погрешности численных методов. Сформулируем это правило для метода средних прямоугольников. Для поиска интеграла с заданной точностью ε:

1. Найти интеграл с числом шагов, равным n.
2. Найти интеграл с числом шагов, равным $2n$.
3. Вычислить величину $\Delta_{2n} = \frac{|I_{2n} - I_n|}{3}$.
4. Если $\Delta_{2n} < \varepsilon$ - закончить. Иначе - принять $n = 2n$ и перейти к шагу 2.

Варианты заданий:

1. $f(x) = \begin{cases} \cos(x + x^3), & 0 \le x \le 1; \\ e^{-x^2} - x^2 + 2x, & 1 < x \le 2. \end{cases}$
   Контрольное значение интеграла: 1,43537.
2. $f(x) = \begin{cases} e^{\sin x}, & 0 \le x \le \frac{1}{4}; \\ e^x - \frac{1}{\sqrt{x}}, & \frac{1}{4} < x \le \frac{1}{2}. \end{cases}$
   Контрольное значение интеграла: 0,23431.
3. $f(x) = \begin{cases} \cos(x)e^{-x^2}, & 0 \le x \le 1; \\ \ln(x+1) - \sqrt{4 - x^2}, & 1 < x \le 2. \end{cases}$
   Контрольное значение интеграла: 0,33735.
4. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} - \frac{1}{2}, & 0 \le x \le 1; \\ e^{-x-\frac{1}{x}}, & 1 < x \le 2. \end{cases}$
   Контрольное значение интеграла: 0,16514.

5. $f(x) = \begin{cases} 2^x - 2 + x^2, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2}; \\ \sqrt{x}e^{-x^2}, & \frac{\pi}{2} < x \le \pi. \end{cases}$
Контрольное значение интеграла: 1,02481.

6. $f(x) = \begin{cases} 8x^3 \cos x, & 0 \le x \le 1; \\ \ln(1 + \sqrt{x}) - \cos x, & 1 < x \le 2. \end{cases}$
Контрольное значение интеграла: 2,10167.

7. $f(x) = \begin{cases} e^{-2\sin x}, & -1 \le x \le 1; \\ x^2 - \operatorname{ctg} x, & 1 < x \le 2. \end{cases}$
Контрольное значение интеграла: 5,52399.

8. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+25x^2}, & 0 \le x \le 0{,}6; \\ (x + 2x^4)\sin x^2, & 0{,}6 < x \le 1{,}6. \end{cases}$
Контрольное значение интеграла: 4,60078.

9. $f(x) = \begin{cases} (x^2 - 2x^3)\cos x^2, & -\frac{\pi}{2} \le x \le 0; \\ e^{\sin 2x}, & 0 < x \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$
Контрольное значение интеграла: 2,93972.

10. $f(x) = \begin{cases} -\cos e^x, & 0 \le x \le 1; \\ \ln(2x + \sin x^2), & 1 < x \le 2. \end{cases}$
Контрольное значение интеграла: 1,37207.

11. $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{arctg} x, & 0 \le x \le 1; \\ \sin \frac{1}{x^2}, & 1 < x \le 2. \end{cases}$
Контрольное значение интеграла: 0,67927.

12. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\sqrt[3]{x} - 3), & -2 \le x \le 0; \\ \sqrt{x}\cos 2x, & 0 < x \le 1. \end{cases}$
Контрольное значение интеграла: 2,42417.