

# Лабораторная работа №2

## Получение конструктивной постоянной двигателя

В данной лабораторной работе будет рассмотрена более полная модель двигателя постоянного тока по сравнению с первой лабораторной работой. Так же будут найдены все константы, описывающие двигатель. Некоторые из них были заданы в предыдущей лабораторной работе.

### 1 Математическая модель

В технических задачах, связанных с автоматическим управлением, все явления рассматриваются как некоторые *процессы*. Каждый из них, прежде всего, характеризуется<sup>1</sup>:

- *входными сигналами* — величинами, которые приводят к изменению текущего состояния системы и с помощью которых, следовательно, может осуществляться управление;
- *выходными сигналами* — величинами, которые характеризуют состояние системы в данный момент времени и над которыми осуществляется управление;
- функциональной зависимостью между ними — условно говоря, информацией о том, как входные сигналы влияют на выходные.

Рассматривая с учетом данной терминологии работу электродвигателя можно сказать следующее.

Роль входного сигнала выполняет подаваемое на двигатель напряжение  $U_{ctrl}$ . Например, для того, чтобы осуществить такое изменение состояния двигателя, как запустить его ротор на вращение, надо приложить к электродвигателю определенную разность потенциалов. Входными сигналами также могут являться и некоторые из моментов сил, приложенных к ротору. К примеру, если повернуть вал ротора рукой, тем самым приложив к нему определенный момент, его состояние, очевидно, изменится. Мы будем рассматривать только такие ситуации, в которых  $M_{oth} = 0$ , а значит двигатель испытывает действие всего одного входного воздействия — напряжения.

В качестве выходных сигналов можно рассматривать сразу несколько величин. Во-первых, ими являются кинематические характеристики вращения ротора, то есть рассмотренные нами в прошлой главе функции  $\alpha(t)$ ,  $\omega(t)$  и  $\theta(t)$ . Во-вторых, величины, описывающие протекающие в двигателе электродинамические процессы, например сила тока в обмотке якоря  $I(t)$ . В-третьих, любые другие величины, удовлетворяющие данному выше определению, например, развиваемый двигателем момент силы  $M_{el}(t)$ . В данной главе нас будет интересовать значения

---

<sup>1</sup>Следует отметить, что в теории автоматического управления дается более сложная классификация характеристик процессов.

двух выходных сигналов: угловая скорость вращения ротора  $\omega(t)$  и сила тока в обмотке якоря  $I(t)$ .

Функциональная зависимость будет представлена уравнениями, составляющими математическую модель.

Теперь же, учитывая все сказанное и возвращаясь к составлению математической модели двигателя постоянного тока, можно сделать вывод о том, что в ней должны рассматриваться упомянутые величины, играющие роль входных и выходных сигналов. Полученная в прошлой главе версия математической модели

$$\dot{\omega} + \frac{k_m k_e}{JR} \omega = \frac{k_m}{JR} U \quad (1)$$

не удовлетворяет данному условию, здесь отсутствует сила тока. Из этого следует, что она не является полной, а значит подлежит уточнению.

С указанной целью рассмотрим еще одно явление, которое мы не учитывали в прошлой лабораторной работе — ЭДС самоиндукции. Оно зависит от индуктивности катушек ротора, которая достаточно мала.

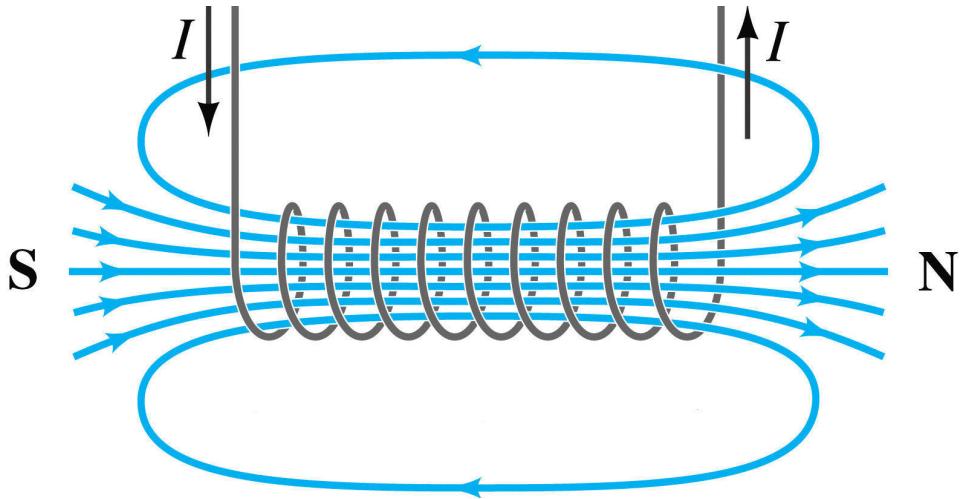


Рис. 1. Появление индукционных магнитных полей.

При подаче напряжения на катушку в ней возникает ток, а при возникновении тока внутри катушки возникает магнитное поле (рис. 1). Как мы знаем, при изменении магнитного потока, проходящего через контур (катушку), в ней появляется ЭДС индукции, которое мешает причине, ее вызвавшей, то есть мешает возникновению тока. Данная ЭДС называется ЭДС самоиндукции, поскольку она возникает из-за собственного магнитного поля катушки.

С учетом ЭДС самоиндукции закон Ома примет вид

$$I = \frac{U_{ctrl} + \mathcal{E}_{stat} + \mathcal{E}_{self}}{R}, \quad (2)$$

где  $U_{ctrl}$ ,  $B$  — подведенное к двигателю напряжение (входной сигнал);  $\mathcal{E}_{stat}$ ,  $B$  — ЭДС индукции со стороны поля статора;  $\mathcal{E}_{self}$ ,  $B$  — ЭДС самоиндукции;  $R$ ,  $\Omega$  — полное сопротивление цепи ротора.

Из прошлой лабораторной работы нам уже известно выражение для ЭДС индукции со стороны поля статора

$$\mathcal{E}_{stat} = -k_e \omega. \quad (3)$$

Выражение для ЭДС самоиндукции выглядит следующим образом:

$$\mathcal{E}_{self} = -L\dot{I}, \quad (4)$$

где  $L$ ,  $\Gamma_h$  — индуктивность катушки;  $\mathcal{E}_{self}$ ,  $B$  — ЭДС самоиндукции;  $I$ ,  $A$  — сила тока в катушке.

Еще раз рассмотрим действие всех магнитных полей в двигателе. Представим ротор рамкой с током и рассмотрим ее поворот из горизонтального положения в положение, изображенное на рис. 2.

При указанном повороте, как видно из рис. 2, поток магнитного поля  $\vec{B}$ , создаваемого статором, через контур будет возрастать. Его изменение (возрастание), согласно *явлению электромагнитной индукции*, спровоцирует появление в контуре индуцированного тока. Направление индуцированного тока, согласно *правилу Ленца*, будет таким, чтобы создаваемое им магнитное поле  $\vec{B}_{\mathcal{E}_i}$  противодействовало имеющемуся изменению магнитного потока, обусловленного внешним магнитным полем  $\vec{B}$ , то есть в нашем случае уменьшало его поток. Этому будет соответствовать направление магнитного поля  $\vec{B}_{\mathcal{E}_i}$ , показанное на рис. 2 темно-зеленым цветом. Согласно *правилу буравчика*, такое магнитное поле создается током, противоположным по направлению контурному току. Последнее означает, что в выражении (3) следует поставить минус.

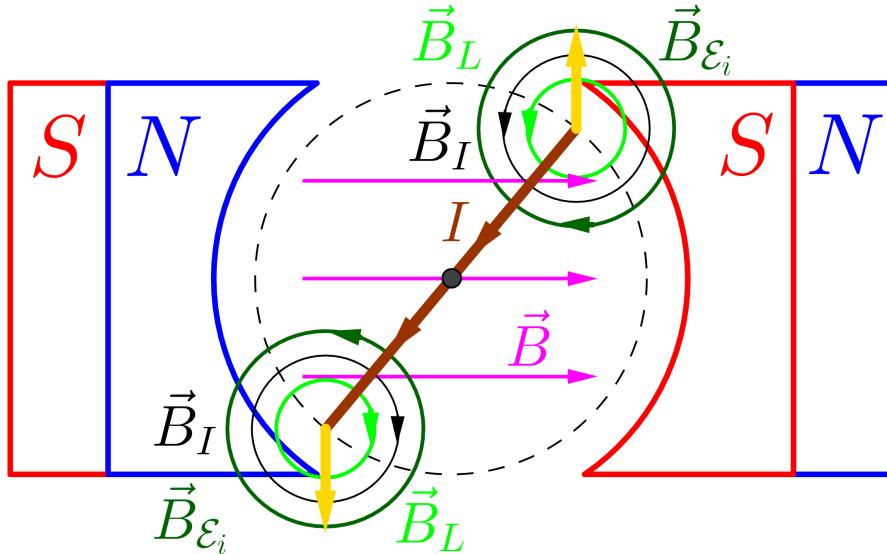


Рис. 2. Появление индукционных магнитных полей.

Полный магнитный поток, пронизывающий контур, создается не только магнитным полем  $\vec{B}$ , но и магнитным полем  $\vec{B}_I$ , формируемым током в самом контуре. В самом начале при подаче напряжения на катушки ток изменится с 0 до какого-то значения, что создаст магнитное поле, которое вызовет ЭДС самоиндукции  $L\dot{I}$ , препятствующее возникновению тока и уменьшающее скорость его возрастания. Когда скорость двигателя увеличится, появится ЭДС со стороны поля статора, что приведет к тому, что ток в контуре начнет ослабевать. Это же, в свою очередь, приведет к ослаблению поля  $\vec{B}_I$ , а следовательно и к уменьшению создаваемого им магнитного потока, пронизывающего контур. Последнее обстоятельство вызовет изменение знака ЭДС самоиндукции (из-за изменения знака производной силы тока)  $L\dot{I}$ , создающей дополнительный

ток, направленный так, чтобы препятствовать ослаблению магнитного поля  $\vec{B}_I$ . Для этого его магнитное поле  $\vec{B}_L$  должно быть сонаправлено полю  $\vec{B}_I$ , а значит и данный индуцированный ток должен быть сонаправлен с током в самом контуре. Последнее говорит о том, что значение ЭДС самоиндукции должно складываться с ЭДС источника тока. Внимательно посмотрев теперь на уравнения (2) и (4), можно заметить, что они говорят нам о том же: общий ток контура из-за действия ЭДС  $\mathcal{E}_{stat}$  уменьшается, следовательно, производная  $\dot{I}$  оказывается меньшей нуля. Это говорит о том, что с учетом стоящего перед  $L\dot{I}$  минуса соответствующая ЭДС  $|L\dot{I}|$  суммируется с  $U_{ctrl}$ .

Вернемся к уравнениям. Из первой лабораторной работы возьмем также второй закон Ньютона

$$M = J\dot{\omega} \quad (5)$$

и выражение для силы Ампера

$$M_{el} = k_m I. \quad (6)$$

Объединив их с выражениями (2), (3) и (4), получим систему (для ненагруженного двигателя, когда  $M_{el} = M$ ):

$$\begin{cases} \dot{\omega} = \frac{k_m}{J} I \\ \dot{I} = \frac{1}{L} U_{ctrl} - \frac{k_e}{L} \omega - \frac{R}{L} I. \end{cases} \quad (7)$$

Модель (7) также можно записать с использованием матриц в виде

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_m}{J} \\ -\frac{k_e}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} U_{ctrl}. \quad (8)$$

Данная система уравнений при условии, что известна зависимость  $U_{ctrl}(t)$  (входной сигнал), может быть решена относительно функций  $\omega(t)$  и  $I(t)$  (выходные сигналы). Этот факт показывает, что она является искомой математической моделью работы электродвигателя: с её помощью можно установить, как он будет вести себя в той или иной ситуации.

Из этой системы получаются следующие выражения для  $\omega(t)$  и  $I(t)$ :

$$\omega(t) = C_1 \exp(\kappa_1 t + \kappa_2 t) + C_2 \exp(\kappa_1 t - \kappa_2 t) + \frac{U_{ctrl}}{k_e}, \quad (9)$$

$$I(t) = C_3 \exp(\kappa_1 t + \kappa_2 t) - C_3 \exp(\kappa_1 t - \kappa_2 t), \quad (10)$$

где

$$C_1 = \frac{U_{ctrl}}{2k_e} \left( \frac{\kappa_1}{\kappa_2} - 1 \right), \quad (11)$$

$$C_2 = -\frac{U_{ctrl}}{2k_e} \left( \frac{\kappa_1}{\kappa_2} + 1 \right), \quad (12)$$

$$C_3 = \frac{J}{k_m} \cdot \frac{U_{ctrl}}{2k_e} \left( \frac{\kappa_1^2}{\kappa_2} - \kappa_2 \right), \quad (13)$$

где, в свою очередь,

$$\kappa_1 = -\frac{R}{2L}, \quad (14)$$

$$\varkappa_2 = \sqrt{\varkappa_1^2 - \frac{k_m k_e}{JL}}, \quad (15)$$

Графики, полученные с помощью представленных уравнений при небольших значениях индуктивности, имеют вид, показанный на рис. 3 и 4. Из них в первую очередь вытекают следующие факты.

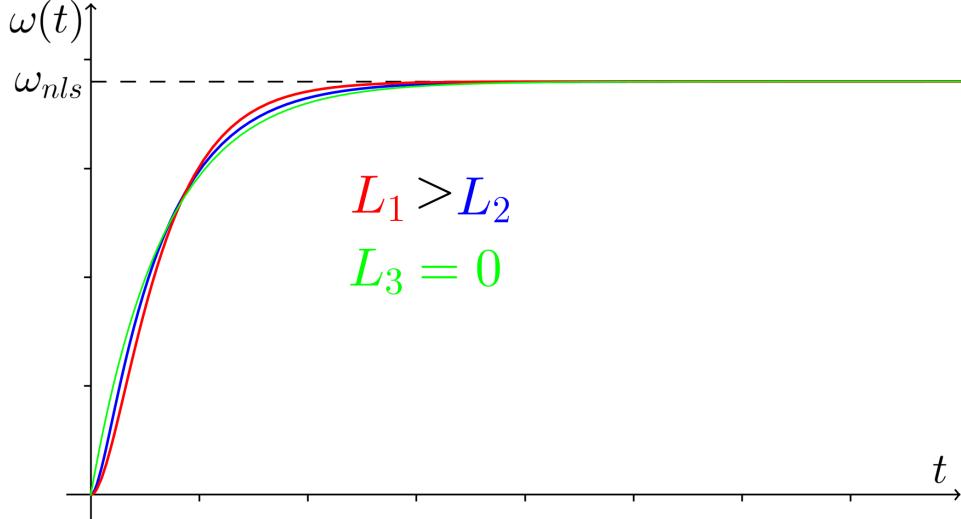


Рис. 3. График зависимости угловой скорости вращения ротора от времени.

Во-первых, графики с рис. 4 показывают, что при установлении постоянной скорости вращения ротора сила тока в его обмотке обращается в нуль. Согласно уравнению (6) это означает, что в нуль обращается и вращательный момент  $M_{el}$ . Как мы уже говорили в первой главе, данная особенность подтверждается опытами. Во-вторых, графики говорят о том, что вращательный момент  $M_{el}$  достигает своего максимального значения тем дольше, чем больше индуктивность обмотки якоря. При этом по мере роста  $L$  максимальное значение  $M_{el}$  уменьшается. Относительно быстроты достижения скоростью вращения ротора  $\omega$  своего максимального значения  $\omega_{yctm}$  наблюдается обратная зависимость: с возрастанием  $L$  функция  $\omega(t)$  стремится к значению  $\omega_{yctm}$  все быстрее.

Важно отметить, что график на рис. 3 зритально схож с тем, который мы получили для функции  $\omega(t)$  в первой лабораторной работе. Такое согласие, несмотря на то, что в первой главе при составлении математической модели мы предположили момент  $M_{el}$  пропорциональным полному напряжению в цепи, а не силе тока, как должно быть на самом деле, и пренебрегли при нахождении полного напряжения в цепи слагаемым  $L\dot{I}$  (или, что то же самое, положили  $L = 0$ ), можно объяснить, если обратиться к той особенности для представленных графиков, о которой мы уже упоминали — они были построены для небольших значений индуктивности. Учитывая указанное свойство, согласно уравнению (2) получаем, что в таком случае при проведении математических выкладок можно пренебречь ЭДС самоиндукции. В результате получится, что сила тока будет пропорциональна полному напряжению в цепи. Из последнего факта следует, что момент силы также будет пропорционален напряжению.

Сказанное позволяет сделать вывод о том, что рассмотренная нами в прошлой главе математическая модель работы двигателя является частным случаем системы (7) при  $L = 0$ .

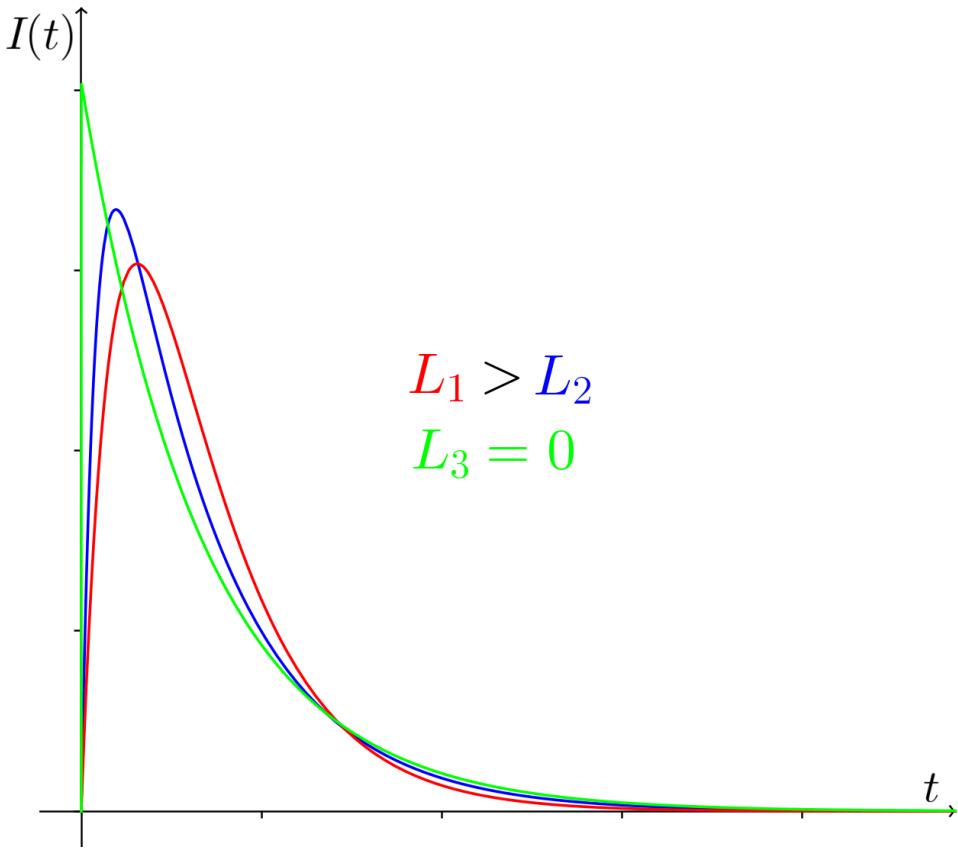


Рис. 4. График зависимости силы тока ротора от времени.

Проверим это — положим в системе (7)  $L = 0$  и решим получившиеся дифференциальные уравнения (или просто найдем выражения, в которые переходят уравнения (9) и (10) при стремлении  $L$  к нулю). В результате получим

$$\omega(t) = \frac{U_{ctrl}}{k_e} \left( 1 - \exp\left(-\frac{k_m k_e}{JR} t\right) \right), \quad (16)$$

$$I(t) = \frac{U_{ctrl}}{R} \exp\left(-\frac{k_m k_e}{JR} t\right). \quad (17)$$

Легко видеть, что выражение (16) для зависимости  $\omega(t)$  совпадет с тем, которое было получено в прошлой главе.

Таким образом, мы показали, что рассмотренная нами в первой главе математическая модель двигателя является частным случаем расширенной версии. Хорошее совпадение с результатами эксперимента в прошлой главе объясняется тем, что индуктивность двигателя EV3 — очень малая величина. Ее значение составляет приблизительно 0.0047 Гн.

Систему (7) путем несложных преобразований можно представить в виде одного дифференциального уравнения вида

$$\frac{L}{R} \ddot{\omega} + \dot{\omega} + \frac{k_m k_e}{JR} \omega = \frac{k_m}{JR} U_{ctrl}. \quad (18)$$

Если в данном выражении принять индуктивность катушек равной нулю ( $L = 0$ ), то получим математическую модель системы из первой лабораторной работы

$$\dot{\omega} + \frac{k_m k_e}{JR} \omega = \frac{k_m}{JR} U_{ctrl}. \quad (19)$$

Из первой работы мы знаем про электромеханическую постоянную времени, которая показывает, насколько быстро растет скорость ротора (насколько его физически сложно раскрутить):

$$T_m = \frac{JR}{k_m k_e} \quad (20)$$

Сейчас мы можем вычленить еще одну постоянную времени — электромагнитную:

$$T_a = \frac{L}{R} \quad (21)$$

Она показывает насколько быстро меняется ток в катушках (насколько индуктивность мешает ему меняться). Таким образом, умножив выражение (18) на  $\frac{JR}{k_m k_e}$ , получим:

$$T_a T_m \ddot{\omega} + T_m \dot{\omega} + \omega = \frac{1}{k_e} U_{ctrl} \quad (22)$$

Коэффициент перед входным сигналом ( $U_{ctrl}$ ) называется коэффициентом усиления. В данной модели это коэффициент  $\frac{1}{k_e}$ . Модель (22) называется модель Вход-Выход, так как в ней есть только входная переменная ( $U_{ctrl}$ ) и выходная ( $\omega$ ), а внутренние процессы в двигателе скрыты. Модель (7) называется модель Вход-Состояние, так как кроме угловой скорости в ней присутствует сила тока, что отражает внутреннее состояние мотора.

Схема моделирования системы Вход-Выход может быть представлена в среде Simulink с использованием блока передаточной функции («Transfer Fcn»). Пример такого моделирования представлен на рис. 5.

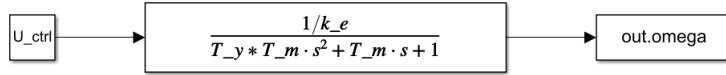


Рис. 5. Схема моделирования ДПТ в форме Вход-Выход

## 2 Схема моделирования

Схема моделирования процесса разгона ненагруженного ротора двигателя (7) в форме Вход-Состояние, примет вид, показанный на рис. 6. Здесь используются два блока с надписью «To workspace» для записи получаемых данных: нижний нужен для фиксации значений угловой скорости, а второй (верхний) — значений силы тока.

Рассмотрим пример: при составлении уравнений для математической модели двигателя мы не учитывали вид входных и выходных сигналов ( $U_{ctrl}$ ,  $M_{oth}$  и  $\omega$ ,  $I$  соответственно). Следовательно полученные уравнения, играющие роль функциональной связи, оказываются справедливыми для любых функций управляющего напряжения и момента (входных сигналов), которые однозначно могут определить вид функции угловой скорости и тока (выходных сигналов).

Каждая схема моделирования имеет общую неизменяемую часть. В связи с этим можно сказать, что неизменяемую часть можно отнести к исследуемому объекту, а не только к

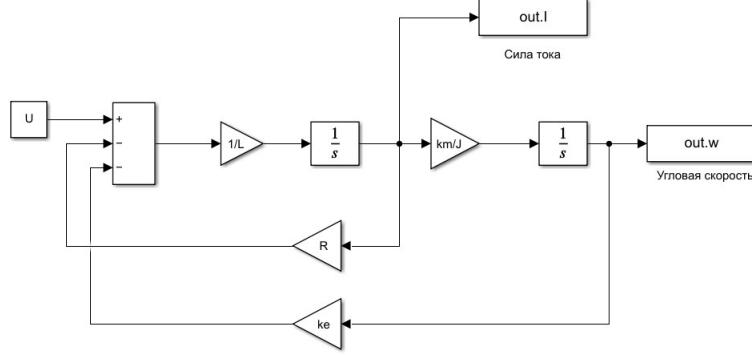


Рис. 6. Схема моделирования процесса разгона ненагруженного двигателя.

какому-то конкретному процессу. При этом, чтобы перейти от рассмотрения одного процесса, протекающего в системе, к другому, достаточно только поменять блоки, ответственные за входные и выходные сигналы.

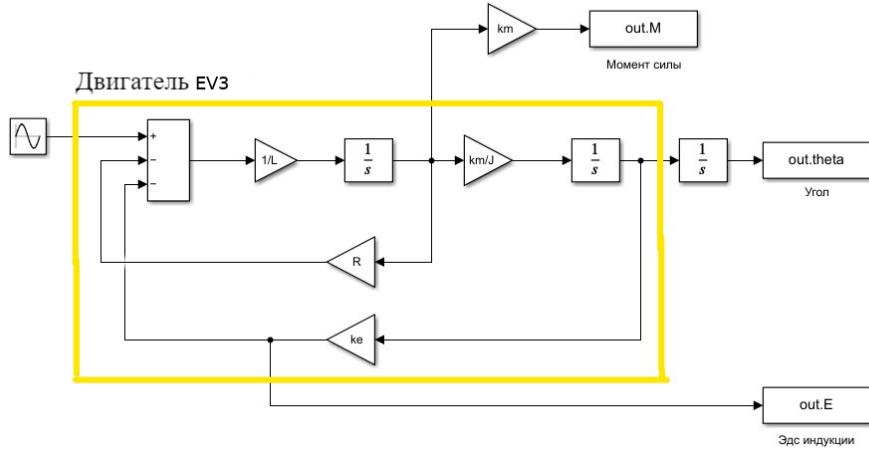


Рис. 7. Схема моделирования работы двигателя при его подключении к источнику переменного напряжения.

Покажем сказанное на примере. Для этого обратимся к рис. 7; на нем показана схема, которую необходимо составить для исследования поведения ненагруженного двигателя при подаче на него синусоидального напряжения. При этом пусть нас будут интересовать в качестве выходных сигналов не функции  $\omega(t)$  и  $I(t)$ , а зависимости  $M_{el}(t)$ ,  $\theta(t)$  и  $\mathcal{E}_i(t)$ . Сравнивая ее и схему на рис. 6, находим подтверждение нашим словам: они действительно отличаются только блоками, отвечающими за входные (управляющие) сигналы и выходные сигналы, и обе содержат постоянную часть — схему исследуемого электродвигателя постоянного тока (обведена желтой рамкой).

Обращаем внимание, что для обеих схем моделирования напряжение подается в Вольтах. Так как в реальном роботе вы подавали напряжение в процентах, необходимо перевести его значения в Вольты (см. первую лабораторную работу).

### 3 Дополнительные сведения

То, что до этого времени мы называли двигателем EV3, на самом деле представляет из себя некоторое устройство, называемое *мотор-редуктор*, в котором обычный электродвигатель играет роль всего лишь одной из его частей. Например, помимо последнего мотор EV3 содержит *редуктор* — систему шестерней, соединяющих внешний вал мотора с валом находящегося внутри него электродвигателя, датчик, измеряющий угол поворота внешнего вала, и некоторую микросхему (рис. 8).

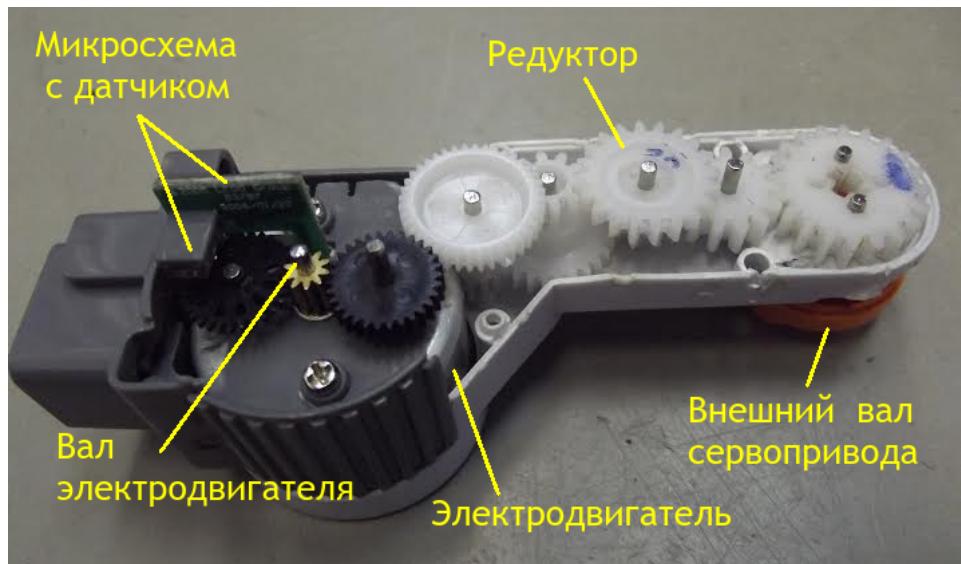


Рис. 8. мотор-редуктор EV3.

В этом случае все уравнения, полученные выше для обычного двигателя, без определенных изменений не будут справедливы для мотор-редуктора EV3. Тут стоит обратиться к моменту инерции  $J$  мотора. Рассматривая мотор-редуктор, мы интересуемся поведением (например, видом функций  $M_{el}(t)$  и  $\omega(t)$ ) только внешнего вала. Но момент инерции последнего в чистом виде не будет искомым  $J$ .

Рассмотрим пример, в котором редуктор мотора содержит всего три шестерни — см. рис. 9<sup>2</sup>. Будем считать, что ведущей является шестерня №1 (она будет служить аналогом вала электродвигателя), а ведомой, следовательно, шестерня №3 (она будет служить аналогом внешнего вала мотора).

Запишем для шестерней (в рассматриваемой модели — соприкасающихся без проскальзывания цилиндров) уравнения второго закона Ньютона:

$$M_{el}^m - F_1 r_1 = J_1 \dot{\omega}_1, \quad (23)$$

$$F_1 r_2 - F_2 r_2 = J_2 \dot{\omega}_2, \quad (24)$$

$$F_2 r_3 - M_{oth}^* = J_3 \dot{\omega}_3, \quad (25)$$

<sup>2</sup>Для большего числа шестерней и других способов их сопряжения все выкладки, которые мы получим в дальнейшем, выводятся аналогично.

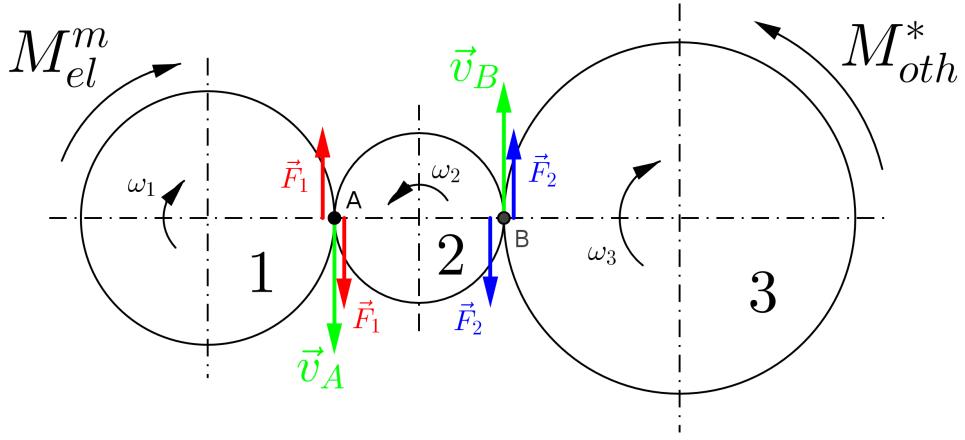


Рис. 9. Модель мотор-редуктора.

где  $J_i$ ,  $r_i$  и  $\omega_i$  — момент инерции, радиус и угловая скорость вращения шестерни № $i$  соответственно;  $M_{el}^m$  — момент силы, раскручивающий первую шестерню;  $M_{oth}^*$  — суммарный момент сил, тормозящих третью шестерню;  $F_1$  и  $F_2$  — силы взаимодействия шестерней друг с другом (несмотря на то, что на рис. 9 для удобства показано иное, эти силы приложены к точкам  $A$  и  $B$ ). Уберем из третьего уравнения неизвестную силу  $F_2$ . Для этого сначала выразим из первого уравнения силу  $F_1$  и подставим результат во второе уравнение:

$$F_1 = \frac{M_{el}^m}{r_1} - \frac{J_1 \dot{\omega}_1}{r_1}, \quad (26)$$

$$M_{el}^m \frac{r_2}{r_1} - J_1 \dot{\omega}_1 \frac{r_2}{r_1} - F_2 r_2 = J_2 \dot{\omega}_2, \quad (27)$$

а затем выразим  $F_2$  из уравнения (27) и подставим то, что получится, в третье:

$$F_2 = \frac{M_{el}^m}{r_1} - \frac{J_1 \dot{\omega}_1}{r_1} - \frac{J_2 \dot{\omega}_2}{r_2}, \quad (28)$$

$$M_{el}^m \frac{r_3}{r_1} - J_1 \dot{\omega}_1 \frac{r_3}{r_1} - J_2 \dot{\omega}_2 \frac{r_3}{r_2} - M_{oth}^* = J_3 \dot{\omega}_3. \quad (29)$$

После преобразования уравнения (29) получим:

$$M_{el}^m \frac{r_3}{r_1} - M_{oth}^* = J_1 \dot{\omega}_1 \frac{r_3}{r_1} + J_2 \dot{\omega}_2 \frac{r_3}{r_2} + J_3 \dot{\omega}_3. \quad (30)$$

Выразим ускорения  $\dot{\omega}_1$  и  $\dot{\omega}_2$  через ускорение  $\dot{\omega}_3$ . Для этого заметим, что для скоростей точек  $A$  и  $B$ , по которым шестерни касаются друг друга, справедливо следующее выражение:

$$v_A = v_B = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 = \omega_3 r_3. \quad (31)$$

Отсюда получим<sup>3</sup>

$$\omega_1 = \omega_3 \frac{r_3}{r_1}, \quad \omega_2 = \omega_3 \frac{r_3}{r_2}. \quad (32)$$

Полученные соотношения будут справедливы и для угловых ускорений шестерней. Подставив их в уравнение (30), будем иметь

$$M_{el}^m \frac{r_3}{r_1} - M_{oth}^* = \left( J_1 \left( \frac{r_3}{r_1} \right)^2 + J_2 \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^2 + J_3 \right) \dot{\omega}_3, \quad (33)$$

<sup>3</sup>В модели скорости шестерней оказываются связанными через радиусы; на самом же деле эту роль выполняют количества их зубьев.

а введя обозначение

$$J_{real} = J_1 \left( \frac{r_3}{r_1} \right)^2 + J_2 \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^2 + J_3, \quad (34)$$

окончательно получим

$$M_{el}^m \frac{r_3}{r_1} - M_{oth}^* = J_{real} \dot{\omega}_3. \quad (35)$$

Данное уравнение замечательно тем, что по своему строению не отличается от выражения, полученного нами из второго закона Ньютона, для описания вращения ротора обычного двигателя. Следовательно, мы можем рассматривать мотор-редуктор, как двигатель, чей ротор имеет момент инерции, равный  $J_{real}$ <sup>4</sup>, и раскручивается моментом  $M_{el}^m(r_3/r_1)$ . Таким образом, чтобы полученные ранее формулы были справедливы для мотора NXT достаточно при их использовании принимать во внимание указанные особенности.

Надо сказать, что вторую из обозначенных поправок можно учесть, характеризуя двигатель, которым мы мысленно заменяем мотор, в  $(r_3/r_1)$  раз большей конструктивной постоянной, чем та, которой описывается входящий в его состав электродвигатель. Обозначим последнюю через  $k_D$ ; тогда конструктивная постоянная мотор-редуктора составит  $(r_3/r_1)k_D$ . С учетом такого уточнения мы, как и требуется, будем получать: при одном и том же токе ( $I^*$ ) в двигателе и моторе — различие в  $(r_3/r_1)$  раз у развиваемых моментов<sup>5</sup>:

$$M_{el}^m = k_D I^*; \quad \frac{r_3}{r_1} M_{el}^m = \left( \frac{r_3}{r_1} k_D \right) I^*; \quad (36)$$

и при различающихся в  $(r_3/r_1)$  раз скоростях вращения ( $\omega^*$ ) выходных валов — одинаковую ЭДС индукции  $\mathcal{E}_i^*$ :

$$\mathcal{E}_i^* = k_D \left( \frac{r_3}{r_1} \omega^* \right); \quad \mathcal{E}_i^* = \left( \frac{r_3}{r_1} k_D \right) \omega^*. \quad (37)$$

Вернемся к определению момента инерции мотор-редуктора.

Расчет значения  $J_{real}$  можно упростить, пренебрегая моментами инерции шестерней редуктора (в модели это  $J_2$  и  $J_3$ ) по сравнению с моментом инерции якоря двигателя (в модели это  $J_1$ )<sup>6</sup>. При таком раскладе на основании уравнения (34) для  $J_{real}$  мы получим

$$J_{real} = J_1 \left( \frac{r_3}{r_1} \right)^2, \quad (38)$$

или, согласно (31),

$$J_{real} = J_1 \left( \frac{\omega_1}{\omega_3} \right)^2. \quad (39)$$

Входящее в последнее из уравнений отношение угловой скорости ведущей шестерни к угловой скорости ведомой шестерни называется *передаточным отношением* редуктора. Для мотор-редуктора EV3 оно равно  $i = 48$ .

Таким образом, чтобы найти приведенный момент инерции  $J = J_{real}$ , которым мы будем характеризовать сервопривод EV3, достаточно умножить момент инерции ротора находящегося внутри него электродвигателя на квадрат передаточного отношения редуктора.

<sup>4</sup>Полученная продемонстрированным выше способом величина  $J_{real}$  называется *приведенным моментом инерции*.

<sup>5</sup>Можно догадаться, что левое уравнение описывает двигатель, а правое — мотор-редуктор.

<sup>6</sup>Шестерни редуктора, используемого в моторе EV3, из-за своих малых масс допускают такое упрощение.

## 4 Цель работы

Изучить внутреннее устройство и принцип работы электродвигателей постоянного тока на примере мотора EV3. Изучить математическую модель последнего и определить его параметры, в том числе конструктивные(ую) постоянные(ую).

## 5 Порядок выполнения работы

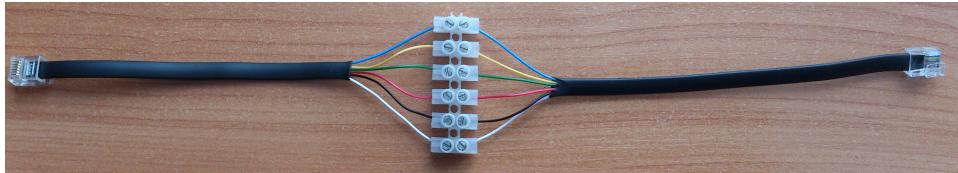


Рис. 10. Используемый в работе кабель

### 1 Определение полного сопротивления цепи двигателя

1.1 Соберите из набора EV3 такую же, как и в первой лабораторной работе конструкцию.

В данном случае используйте для питания мотора EV3 специальным образом вскрытый кабель (пример — см. рис. 10).

1.2 Напишите программу в удобном для вас редакторе (например, в интегрированной среде разработки для языка программирования Python - PyCharm или в кроссплатформенном текстовом редакторе – Sublime Text). Затем необходимо реализовать соединение с контроллером EV3, что подробно описано в пункте 6 первой лабораторной работы. Данный код должен выполнять следующие действия: организует движение двигателя EV3 в течение небольшого промежутка времени (1-3 с) со скоростью, соответствующей аргументу voltage функции `motor.run_direct()`, равному 10, после чего останавливает двигатель на некоторое время; после чего опять запускает его на вращение, но уже со значением «скорости» в функции `motor.run_direct()`, равным 15; после чего опять останавливает его; после чего опять запускает уже при «скорости», равной 20, и т.д. до `motor.run_direct(..., 50)` включительно.

1.3 Загрузите ее на EV3.

1.4 Запустив программу на выполнение, при каждой подаче на двигатель напряжения в разрыве белого или черного, на выбор, провода измеряйте и записывайте фиксируемую мультиметром силу тока (рис. 11). Важно отметить, что при проведении данных измерений вал мотора должен быть застопорен. Это необходимо для того, чтобы в его цепи не возникала ЭДС индукции  $\varepsilon_{stat}$ , а следовательно выражение (2) с установлением в цепи постоянной силы тока принимало вид

$$U_{ctrl} = IR \quad (40)$$

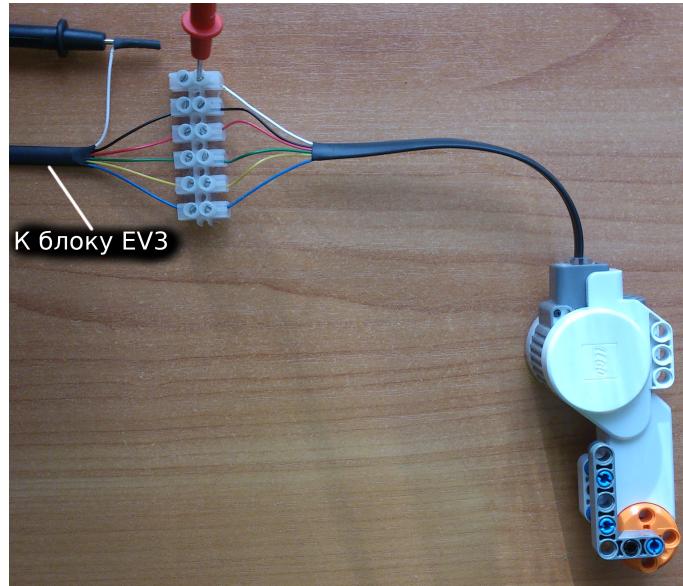


Рис. 11. Измерение силы тока

1.5 Отключите двигатель от кабеля. При этом второй штырь кабеля оставьте включенным в EV3. Запустите программу на выполнение. В этот раз при каждой подаче на двигатель напряжения измеряйте и записывайте его, предварительно подключив один щуп мультиметра к белому, а другой к черному проводам (рис. 12).

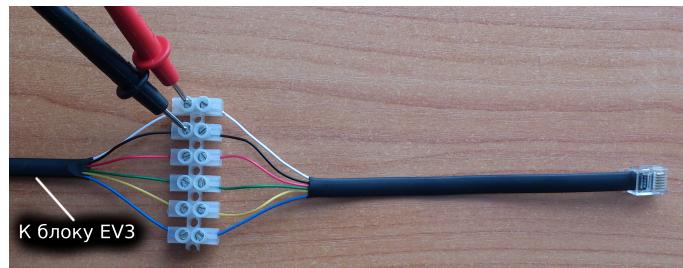


Рис. 12. Измерение ЭДС

1.6 Повторите измерения двух предыдущих пунктов при вращении двигателя EV3 в другую сторону.

1.7 На основании полученных данных постройте в Matlab графики зависимости  $U_{ctrl}(I)$  (один график — на основании данных, полученных при вращении двигателя в одну сторону, другой — на основании данных, полученных при вращении двигателя в другую сторону). Пример — см. синюю кривую на рис. 13.

1.8 В каждом из случаев аппроксимируйте полученные зависимости линейной функцией  $U_{ctrl} = RI$ , то есть подберите такое значение коэффициента пропорциональности  $R$ , при котором график этой функции будет наилучшим образом усреднять полученный результат (пример — см. красную кривую на рис. 13). Для этого используйте метод наименьших квадратов, а точнее формулу

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{10} U_i I_i}{\sum_{i=1}^{10} I_i^2}, \quad (41)$$

в которой  $U_i, I_i$  — результаты  $i$ -го измерения напряжения и силы тока соответственно. 12).

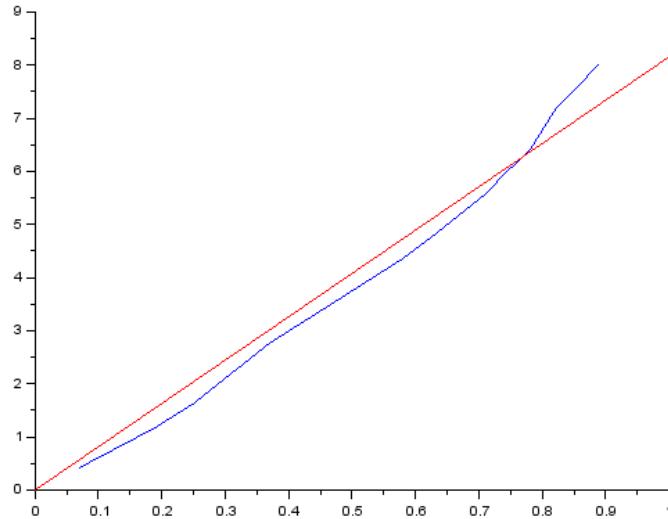


Рис. 13. Аппроксимация полученных данных

1.9 Найдите итоговое значение сопротивления как среднее арифметическое от получившихся значений  $R$  в каждом из случаев:

$$R_{umoz} = \frac{R_1 + R_2}{2} \quad (42)$$

2 Определение остальных параметров двигателя

2.1 Измерьте массу ( $m_p$ ) и радиус ( $r_p$ ) ротора электродвигателя, находящегося внутри мотора EV3 (рис. 14), и рассчитайте его момент инерции по формуле:

$$J_{\vartheta} = \frac{m_p r_p^2}{2} \quad (43)$$

Умножив полученный результат на квадрат передаточного отношения редуктора, найдите приведенный момент инерции  $J$ :

$$J = i^2 J_{\vartheta} \quad (44)$$



Рис. 14. Ротор электродвигателя, находящегося внутри мотора EV3

- 2.2 Модифицируйте написанную в первой лабораторной работе программу так, чтобы она, как и программа из п. 1.2, запускала двигатель на вращение, поочередно меняя последний аргумент в функции `motor.run_direct()` с 10 до 50 с шагом 5. При этом свой файл с данными она должна формировать для каждого из запусков двигателя (в итоге должно получиться 9 файлов).
- 2.3 Подключите незастопоренный мотор EV3 к кабелю и запустите программу на выполнение. Сохраните полученные в результате ее работы файлы с данными к себе на ПК.
- 2.4 Повторите действия предыдущего пункта для другого направления вращения вала мотора EV3.
- 2.5 Так же, как и в первой лабораторной работе, обработайте каждый из полученных файлов. На основании достигнутых результатов сформируйте две одностолбцовые (или одностроковые) матрицы<sup>7</sup>, содержащие значения  $\omega_{yct}$ .
- 2.6 На основании полученных значений скорости и напряжения (последние были получены в п. 1.5) подобно тому, как это было сделано при определении сопротивления цепи двигателя, постройте два графика зависимости  $U(\omega_{yct})$  и аппроксимируйте их функцией  $U = k_e \omega_{yct}$ . Тем самым будут определены два значения для коэффициента  $k_e$ . За итоговый результат возьмите их среднее значение.
- 2.7 Примите  $k_m$  равным  $k_e$ .

### 3 Проверка результатов

- 3.1 Постройте схему моделирования процесса разгона ненагруженного двигателя, изображенную на рис. 6. Заметим, что она собирает информацию о выходных сигналах, представленных зависимостями  $I(t)$  и  $\theta(t)$ . Особое внимание при работе

<sup>7</sup>Одна матрица будет содержать данные относящиеся к одному направлению вращения вала, вторая — к противоположному.

с ней обратите на то, что имена переменных, указанных в блоках «To workspace» должны различаться.

- 3.2 Аналогично тому, как это было сделано в первой работе, постройте график зависимости  $\theta(t)$ , соответствующий реальному разгону мотора. Для этого получите такой же, как и в прошлой лабораторной, файл с данными.
- 3.3 Промоделируйте собранную схему в Simulink и постройте в том же графическом окне, в котором изображен график функции  $\theta(t)$ , получающуюся кривую для выходного сигнала  $\theta(t)$ . Итоговый результат должен быть аналогичен тому, который был достигнут в первой лабораторной работе (рис. 15).
- 3.4 В новом графическом окне постройте график зависимости выходного сигнала I от времени. Полученная кривая должна быть похожа на зеленый график с рис. 4.

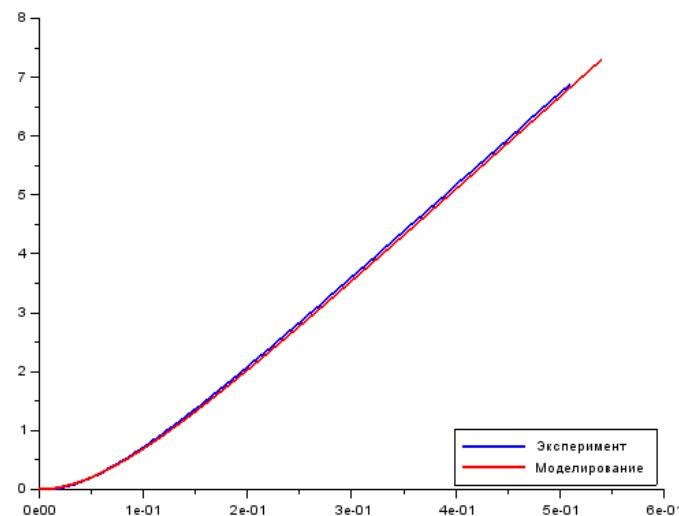


Рис. 15. Пример графиков для зависимости  $\theta(t)$