РК 2 Дифференциальные уравнения

Оглавление

Введение

Здесь разобрана теория к РК 1 по интегралам и дифференциальным уравнениям. Основной источник информации - http://fn.bmstu.ru/educational-work-fs-12/70-lections/241-int , конспекты лекций, интернет.

Теория

1. Теоретический вопрос на тему «Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков». ФСР. Определитель Вронского и его свойства. Общее решение ДУ. Формула Остроградского-Лиувилля (задача совмещает теорию и практику).+?+

Формулировка задачи:

Функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, $y_4(x)$ являются решением дифференциального уравнения:

$$y^{IV} + f_1(x)y^{III} + f_2(x)y'' + f_3(x)y' = 0$$

P. S. Вместо $f_1(x)$ может быть C=const

Как называются дифференциальные уравнения такого вида? В каком случае функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, $y_4(x)$ образуют фундаментальную систему решений данного уравнения? Дать определение фундаментальной системы решений для уравнений такого вида.

Записать определитель Вронского для системы решений $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, $y_4(x)$ в общем виде. В каких случаях этот определитель

1) тождественно равен 0 на всей числовой прямой,
2) в некоторых точках равен 0, а в некоторых не равен,
3) отличен от 0 в любой точке $x \in \mathbb{R}$?

Какова структура общего решения данного уравнения?

Найти определитель Вронского для системы решений $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, $y_4(x)$ представленного уравнения в любой точке $x \in \mathbb{R}$, если известно, что в точке x_0 =… он равен …. Чему равен определитель Вронского в точке x = …?

P. P. S. «…» - некая константа.

Анализ задачи

Как называются дифференциальные уравнения такого вида?

Я постарался изучить видео с билетами – качество видео низкое, но, судя по всему, перед вами всегда будут уравнения вида выше, то есть линейные однородные дифференциальные уравнения 4-го порядка (ЛОДУ 4-го порядка). В дальнейшем отталкиваемся от этого.

В каком случае функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, $y_4(x)$ образуют фундаментальную систему решений данного уравнения?

Если $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, $y_4(x)$ линейно независимы (определитель Вронского отличен от 0), то они образуют фундаментальную систему решений дифференциального уравнения.

Дать определение фундаментальной системы решений для уравнений такого вида.

Система n линейно независимых решений ($y_n(x)=y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка называется фундаментальной системой решения данного уравнения.

Записать определитель Вронского для системы решений $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, $y_4(x)$ в общем виде.

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) & y_4(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) & y_4'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) & y_4''(x) \\ y_1'''(x) & y_2'''(x) & y_3'''(x) & y_4'''(x) \end{vmatrix} = C, \text{где } C = const; C \neq 0$$

В каких случаях этот определитель

1) *тождественно равен 0 на всей числовой прямой,*
2) *в некоторых точках равен 0, а в некоторых не равен,*
3) *отличен от 0 в любой точке $x \in \mathbb{R}$?*

1) Данные функции линейно зависимы
2) Данные функции линейно независимы
3) Данные функции линейно независимы

Какова структура общего решения данного уравнения?

Структура общего решения данного ЛОДУ определяется следующей формулой:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x) + C_4 y_4(x), \text{где } C_n = const$$

Найти определитель Вронского для системы решений $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, $y_4(x)$ представленного уравнения в любой точке $x \in \mathbb{R}$, если известно, что в точке x_0 =… он равен …. -???

Объясните, кто догадался, как найти формулу определителя Вронского для любого x, зная его значение в x_0, но не зная ни одного $y_n(x)$? Я допишу этот пункт.

Чему равен определитель Вронского в точке x = …?

2. Определение линейной независимости и линейной зависимости систем функций. Сформулировать теорему о вронскиане линейно зависимой системы функций.+++

Линейная зависимость функций

Для системы функций

$$y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x) \ ,$$

заданных на промежутке I, обычным образом вводится понятие линейной зависимости; такая система называется линейно зависимой, если существует нетривиальная равная нулю линейная комбинация этих функций:

$$\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n \equiv 0 \ , \quad \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 > 0 \, .$$

В противном случае (т.е. когда тождественному нулю может равняться лишь тривиальная линейная комбинация этих функций) система функций называется линейно независимой.

Теорема о вронскиане линейно зависимых функций (можно без доказательства)

Теорема (об определителе Вронского линейно зависимой системы функций). Если система $n-1$ раз дифференцируемых на промежутке I функций $y_1, \ldots, y_n$ линейно зависима, то определитель Вронского этой системы функций тождественно равен нулю.

3. Определение линейной независимости и линейной зависимости систем функций. Сформулировать теорему о вронскиане линейно НЕзависимой системы частных решений линейного однородного дифференциального уравнения.+++

Линейная зависимость функций

Для системы функций

$$y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x) ,$$

заданных на промежутке I, обычным образом вводится понятие линейной зависимости; такая система называется линейно зависимой, если существует нетривиальная равная нулю линейная комбинация этих функций:

$$\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n \equiv 0 , \quad \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 > 0 .$$

В противном случае (т.е. когда тождественному нулю может равняться лишь тривиальная линейная комбинация этих функций) система функций называется линейно независимой.

Теорема о вронскиане системы линейно независимых частных решений ОЛДУ

Теорема (об определителе Вронского линейно независимой системы решений линейного однородного уравнения n-го порядка). Пусть $y_1, \ldots, y_n$ – линейно независимая система решений уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0 , \tag{3}$$

где $a_1 = a_1(x), \ldots, a_n = a_n(x)$ – функции, непрерывные на промежутке I. Тогда определитель Вронского этой системы решений не равен нулю ни в одной точке промежутка I.

4. Сформулировать теорему о существовании фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка.+++

Теорема о существовании и единственности решения.

Теорема (о существовании и единственности решения линейного уравнения n-го порядка). Для любой точки $x_0 \in I$ и для любых чисел $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ существует решение $y = y(x)$ уравнения (1), определенное на всем промежутке I и удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0', \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Любые два решения, удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям, совпадают во всех точках промежутка I.

5. Сформулировать теорему о размерности пространства решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка.+++

Теорема (о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения). Пусть имеется дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0\ ,$$

где функции $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ определены и непрерывны на промежутке I. Тогда совокупность всех решений этого уравнения есть линейное пространство размерности n.

6. Выписать формулу Остроградского-Лиувилля. Построение общего решения линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка по известному частному решению.+++

Формула Остроградского-Лиувилля для ОЛДУ n-го порядка

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(t)dt} .$$

Это равенство называется формулой Остроградского-Лиувилля.

Аналогичная формула справедлива и для линейного однородного уравнения n-го порядка: если $y_1, \ldots, y_n$ – решения уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0 ,$$

то

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(t)dt} ,$$

где

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_n \\ y_1' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} ,$$

а x_0 – произвольная точка промежутка, на котором заданы коэффициенты уравнения.

Если известно частное решение $\varphi(x)$ линейного однородного уравнения, то порядок уравнения может быть понижен. Соответствующий прием рассмотрим для уравнения второго порядка

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 . \qquad (6)$$

Подставим в это уравнение $y = z \cdot \varphi(x)$, где $z = z(x)$ – новая неизвестная функция. Т.к.

$$y' = z \cdot \varphi'(x) + z'\varphi(x) = 0 ,$$
$$y'' = z \cdot \varphi''(x) + 2z'\varphi'(x) + z''\varphi(x) ,$$

то для определения z имеем уравнение

$$z\big(\varphi''(x) + a_1(x)\varphi'(x) + a_2(x)\varphi(x)\big) + 2z'\varphi'(x) + z''\varphi(x) + a_1(x)z' \cdot \varphi(x) = 0 .$$

Коэффициент при z здесь равен нулю, и z определяется из уравнения

$$z''\varphi(x) + \big(2\varphi'(x) + a_1(x)\varphi'(x)\big) \cdot z' = 0 ,$$

которое не содержит z и легко сводится к линейному однородному уравнению первого порядка.

Другой подход к понижению порядка линейного однородного уравнения при известном частном решении основан на применении формулы Остроградского-Лиувилля. Если, как и выше, $\varphi(x)$ – известное частное решение уравнения (6), то

$$W(x) = \begin{vmatrix} y & \varphi(x) \\ y' & \varphi'(x) \end{vmatrix} = W(x_0) \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(t)dt}, \tag{7}$$

и для определения $y = y(x)$ получается линейное однородное уравнение первого порядка. Если при этом нас не интересуют начальные условия для $y(x)$, то x_0 и $W(x_0)$ в правой части (7) можно задать произвольно. Например, можно находить $y = y(x)$ из уравнения

$$\begin{vmatrix} y & \varphi(x) \\ y' & \varphi'(x) \end{vmatrix} = e^{-\int a_1(x)dx},$$

где $\displaystyle\int a_1(x)dx$ означает произвольную фиксированную первообразную функции $a_1(x)$.

7. Выписать формулы общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае: а) простых действительных корней характеристического уравнения; б) кратных корней характеристического уравнения; в) комплексных корней характеристического уравнения.+++

а) простые действительные корни характеристического уравнения (можно остановится уже после строки y=… Вывод не нужен)

1. Корни уравнения (3) вещественны и различны. Обозначим эти корни λ_1 и λ_2. Тогда фундаментальную систему решений уравнения (2) образуют функции $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ и $y_2 = e^{\lambda_2 x}$, а общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} .$$

Здесь нужно проверить лишь линейную независимость решений y_1 и y_2; чтобы убедиться в этом, составим определитель Вронского:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 \cdot x} & e^{\lambda_2 \cdot x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 \cdot x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 \cdot x} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 \cdot x} \cdot e^{\lambda_2 \cdot x} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)\cdot x} \cdot (\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0 .$$

Таким образом, y_1 и y_2 линейно независимы и, следовательно, образуют фундаментальную систему решений уравнения (2).

б) кратные корни характеристического уравнения (можно остановится уже после строки y=… Вывод не нужен)

2. Уравнение (3) имеет один вещественный корень кратности 2; обозначим этот корень λ_0. Тогда фундаментальную систему решений уравнения (2) образуют функции $y_1 = e^{\lambda_0 \cdot x}$ и $y_2 = x\, e^{\lambda_0 \cdot x}$, а общее решение этого уравнения есть

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{\lambda_0 \cdot x} .$$

Проверим, что y_2 есть решение уравнения (2). Т.к. λ_0 - корень кратности 2 характеристического уравнения (3), то $\lambda_0^2 + a_1\lambda_0 + a_2 = 0$ и $2\lambda_0 + a_1 = 0$. Далее

$$\begin{aligned} y_2' &= (1 + \lambda_0 x) \cdot e^{\lambda_0 \cdot x} , \\ y_2'' &= (2\lambda_0 + \lambda_0^2 x) \cdot e^{\lambda_0 \cdot x} \end{aligned} .$$

Отсюда

$$y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = e^{\lambda_0 \cdot x}(2\lambda_0 + \lambda_0^2 x + a_1 + a_1\lambda_0 x + a_2 x) = e^{\lambda_0 \cdot x}(2\lambda_0 + a_1 + x\left(\lambda_0^2 + a_1\lambda_0 + a_2\right)) = 0 ,$$

т.е. y_2 – решение уравнения (2). Проверим линейную независимость y_1 и y_2:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_0 \cdot x} & x \cdot e^{\lambda_0 \cdot x} \\ \lambda_0 e^{\lambda_0 \cdot x} & (1 + \lambda_0 x)\, e^{\lambda_0 \cdot x} \end{vmatrix} = e^{2\lambda_0 \cdot x} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x \\ \lambda_0 & 1 + \lambda_0 x \end{vmatrix} = e^{2\lambda_0 \cdot x} \neq 0 .$$

Таким образом, y_1 и y_2 образуют фундаментальную систему решений уравнения (2).

в) комплексные корни характеристического уравнения (можно остановится уже после строки y=… Вывод не нужен)

3. Характеристическое уравнение (3) имеет комплексно сопряженные корни $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\,\beta$, $\beta \neq 0$. В этом случае фундаментальная система решений уравнения (2) имеет вид

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x\ , \quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x\ ,$$

а общее решение записывается так:

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)\ .$$

Здесь в проверке нуждается лишь линейная независимость решений y_1 и y_2; имеем

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha\cdot x}\cos\beta x & e^{\alpha\cdot x}\sin\beta x \\ e^{\alpha\cdot x}(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x) & e^{\alpha\cdot x}(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x) \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2\alpha\cdot x}\cdot\begin{vmatrix} \cos\beta x & \sin\beta x \\ \alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x & \alpha\sin\beta + \beta\cos\beta x \end{vmatrix} = \beta\, e^{2\alpha\cdot x}(\cos^2\beta x + \sin^2\beta x) = \beta\, e^{2\alpha\cdot x} \neq 0\ .$$

Поэтому y_1 и y_2 линейно независимы.

8. Сформулировать теорему о структуре общего решения линейного НЕоднородного дифференциального уравнения n-го порядка.+++

Теорема (о структуре общего решения неоднородного линейного уравнения). Общее решение уравнения (4) может быть записано в виде

$$y = y_0(x) + C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x) \ , \tag{5}$$

где $y_0(x)$ – частное решение уравнения (4), а $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ – фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения; $C_1, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

9. Сформулировать теоремЫ о свойствах частных решений линейного однородного и неоднородного дифференциальных уравнений.???

10. Сформулировать теорему о наложении частных решений линейного НЕоднородного дифференциального уравнения (принцип суперпозиции).+++

Теорема о наложении частных решений

Теорема (о наложении частных решений). Пусть имеются два линейных неоднородных уравнения

$$L[y] = b_1(x) \quad \text{и} \quad L[y] = b_2(x) \; ;$$

где $L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y$, и пусть $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ – решения этих уравнений. Тогда $y_1(x) + y_2(x)$ будет решением уравнения $L[y] = b_1(x) + b_2(x)$.

Теоремы с доказательством

Здесь впервые пусто! Что за фигня…

Практика

Ждите обновлений