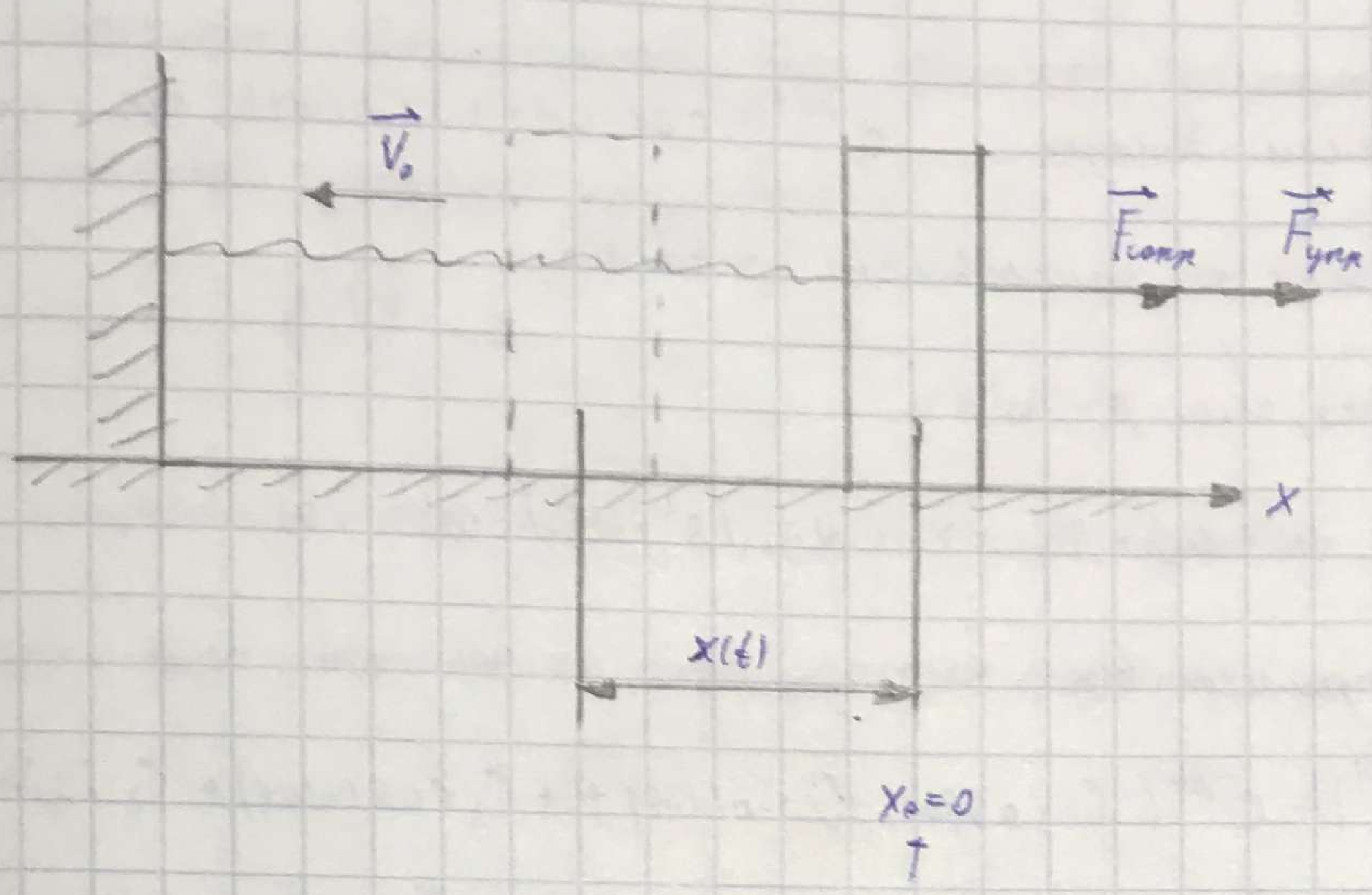
Затухающие колебания



II закон Ньютона:

$-ma = F_{сопр} + F_{упр}$

$-ma = rV + k \cdot x(t)$

$-m\ddot{x} = r\dot{x} + kx$

$-m\ddot{x} - r\dot{x} - kx = 0 \quad | : (-m)$

$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

Обозначим $\frac{r}{m} = 2\beta$, $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, где β – коэффициент затухания

ω_0 – циклическая частота незатухающих колебаний

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x = 0$$

Будем искать решение уравнения свободных затухающих колебаний в виде $x = e^{\lambda t}$

Подставив в уравнение и сокращая, получаем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

Значения корней этого уравнения:

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Поэтому решение уравнения должно иметь

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} = e^{-\beta t} \left(C_1 e^{t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} + C_2 e^{-t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} \right)$$, где C_1, C_2 – const

Воспользуемся формулой Эйлера: $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$, где $i = \sqrt{-1}$

При $\beta^2 - \omega_0^2 > 0$ решение не описывает колебания

Колебания наблюдаются, если $\beta^2 - \omega_0^2 < 0$

Введём обозначения $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 \Rightarrow \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-\omega^2} = i\omega$

Решение уравнения примет вид:

$$x = e^{-\beta t}(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}) = e^{-\beta t}(C_1 \cos(\omega t) + C_1 i\sin(\omega t) + C_2 \cos(-\omega t) + C_2 \cdot i\sin(-\omega t)) =$$

$$= e^{-\beta t}(C_1 \cos\omega t + C_2 \cos\omega t + C_1 i\sin\omega t - C_2 i\sin\omega t) =$$

Замена:

$$= e^{-\beta t}((C_1 + C_2)\cos\omega t - i(C_2 - C_1)\sin\omega t)$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = A_0 \cos\varphi_0 \\ i(C_2 - C_1) = A_0 \sin\varphi_0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = e^{-\beta t}(A_0 \cos\omega t \cos\varphi_0 - A_0 \sin\omega t \sin\varphi_0) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$, A_0, φ_0 зависят от начальных условий: $x(t=0) = x_0$, $\frac{dx}{dt}(t=0) = v_0$

Оно описывает свободные колебания с циклической частотой ω, затухающие с течением времени

Циклическая частота затухающих колебаний $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

Период затухающих колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$

Амплитуда затухающих колебаний $A = A_0 e^{-\beta t}$