Вопросы для подготовки к экзамену по математическому анализу
для всех специальностей ИУ (кроме ИУ9), РЛ, ПС, РТ
(экзамен 2021-22 уч.г.)[*]

1. Сформулируйте и докажите теорему о единственности предела сходящейся последовательности. [*Л. 4*]

2. Сформулируйте и докажите теорему об ограниченности сходящейся последовательности. [*Л. 4*]

3. Сформулируйте и докажите теорему о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел. [*Л. 5*]

4. Сформулируйте и докажите теорему о сохранении функцией знака своего предела. [*Л. 5*]

5. Сформулируйте и докажите теорему о предельном переходе в неравенстве. [*Л. 5*]

6. Сформулируйте и докажите теорему о пределе промежуточной функции. [*Л. 5*]

7. Сформулируйте и докажите теорему о пределе произведения функций. [*Л. 6*]

8. Сформулируйте и докажите теорему о пределе сложной функции. [*Л. 6*]

9. Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$. [*Л. 6*]

10. Сформулируйте и докажите теорему о связи функции, ее предела и бесконечно малой. [*Л. 7*]

11. Сформулируйте и докажите теорему о произведении бесконечно малой функции на ограниченную. [*Л. 7*]

12. Сформулируйте и докажите теорему о связи между бесконечно большой и бесконечно малой. [*Л. 7*]

13. Сформулируйте и докажите теорему о замене бесконечно малой на эквивалентную под знаком предела. [*Л. 8*]

14. Сформулируйте и докажите теорему о необходимом и достаточном условии эквивалентности бесконечно малых. [*Л. 8*]

15. Сформулируйте и докажите теорему о сумме конечного числа бесконечно малых разных порядков. [*Л. 8*]

16. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций. [*Л. 9*]

17. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности сложной функции. [*Л. 9*]

18. Сформулируйте и докажите теорему о сохранении знака непрерывной функции в окрестности точки. [*Л. 9*]

19. Дайте определение функции, непрерывной в точке. Сформулируйте теорему о непрерывности элементарных функций. Докажите непрерывность функций $y = \sin x$, $y = \cos x$. [*Л. 9*]

20. Сформулируйте свойства функций, непрерывных на отрезке. [*Л. 10*]

21. Сформулируйте определение точки разрыва функции и дайте классификацию точек разрыва. На каждый случай приведите примеры. [*Л. 9*]

22. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие существования наклонной асимптоты. [*Л. 10*]

23. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в точке. [*Л. 11*]

24. Сформулируйте и докажите теорему о связи дифференцируемости и непрерывности функции. [*Л. 11*]

25. Сформулируйте и докажите теорему о производной произведения двух дифференцируемых функций. [*Л. 11*]

26. Сформулируйте и докажите теорему о производной частного двух дифференцируемых функций. [*Л. 11*]

---

[*] В квадратных скобках после текста вопроса указаны номера лекций согласно календарному плану учебного курса (см. также Иванков П.Л. Конспект лекций по математическому анализу // электронный ресурс http://fn.bmstu.ru/educational-work-fs-12/lecture-notes-fs-12).

27. Сформулируйте и докажите теорему о производной сложной функции. [*Л. 11*]

28. Сформулируйте и докажите теорему о производной обратной функции. [*Л. 11*]

29. Сформулируйте и докажите свойство инвариантности формы записи дифференциала первого порядка. [*Л. 12*]

30. Сформулируйте и докажите теорему Ферма. [*Л. 13*]

31. Сформулируйте и докажите теорему Ролля. [*Л. 13*]

32. Сформулируйте и докажите теорему Лагранжа. [*Л. 13*]

33. Сформулируйте и докажите теорему Коши. [*Л. 13*]

34. Сформулируйте и докажите теорему Лопиталя – Бернулли для предела отношения двух бесконечно малых функций. [*Л. 13*]

35. Сравните рост показательной, степенной и логарифмической функций на бесконечности. [*Л. 13*]

36. Выведите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. [*Л. 14*]

37. Выведите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. [*Л. 14*]

38. Выведите формулу Маклорена для функции $y = e^x$ с остаточным членом в форме Лагранжа. [*Л. 14*]

39. Выведите формулу Маклорена для функции $y = \sin x$ с остаточным членом в форме Лагранжа. [*Л. 14*]

40. Выведите формулу Маклорена для функции $y = \cos x$ с остаточным членом в форме Лагранжа. [*Л. 14*]

41. Выведите формулу Маклорена для функции $y = \ln(1 + x)$ с остаточным членом в форме Лагранжа. [*Л. 14*]

42. Выведите формулу Маклорена для функции $y = (1 + x)^\alpha$ с остаточным членом в форме Лагранжа. [*Л. 14*]

43. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие неубывания дифференцируемой функции. [*Л. 15*]

44. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие невозрастания дифференцируемой функции. [*Л. 15*]

45. Сформулируйте и докажите первое достаточное условие экстремума (по первой производной). [*Л. 15*]

46. Сформулируйте и докажите второе достаточное условие экстремума (по второй производной). [*Л. 15*]

47. Сформулируйте и докажите достаточное условие выпуклости функции. [*Л. 16*]

48. Сформулируйте и докажите необходимое условие точки перегиба. [*Л. 16*]

49. Сформулируйте и докажите достаточное условие точки перегиба. [*Л. 16*]

При ответе на теоретические вопросы билета формулировки теорем должны сопровождаться определениями используемых в них понятий, в частности: предела последовательности [*Л. 4*]; предела функции (определения по Коши и по Гейне) [*Л. 5*]; окрестности и ε-окрестности точки $x \in \mathbb{R}$ [*Л. 2*]; окрестностей $+\infty$, $-\infty$ и ∞ [*Л. 2*]; сходящейся, ограниченной, возрастающей, убывающей, невозрастающей, неубывающей, монотонной, фундаментальной последовательностей [*Л. 3, 4*]; бесконечно малой и бесконечно большой функций [*Л. 7*]; бесконечно малых одного порядка, несравнимых, эквивалентных [*Л. 8*]; порядка малости и роста функции [*Л. 8*] приращения функции [*Л. 9*]; функции, непрерывной в точке, на интервале, на отрезке [*Л. 9*]; точек разрыва: устранимого, I-го рода, II-го рода [*Л. 9*]; асимптоты [*Л. 10*]; производной функции в точке [*Л. 11*]; односторонней производной функции [*Л. 11*]; дифференцируемой функции [*Л. 11*]; дифференциала первого порядка [*Л. 12*]; производной и дифференциала n-го порядка [*Л. 12*] возрастающей, невозрастающей, убывающей, неубывающей, монотонной, строго монотонной функций [*Л. 15*]; строгого и нестрогого локальных минимума, максимума, экстремума [*Л. 15*]; стационарной и критической точек [*Л. 15*]; выпуклости (вверх или вниз) графика функции на промежутке [*Л. 16*]; точки перегиба графика функции [*Л. 16*].

Задачи для подготовки к экзамену

При подготовке к экзамену рекомендуется прорешать следующие задачи.

1. Вычислить предел:

1.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\cos n}{2n}+\dfrac{5n}{3n+7}\right)$. **1.2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$. **1.3.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{2+x}-\sqrt[3]{2-x}}$.

1.4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}}$. **1.5.** $\lim\limits_{x\to\alpha}\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2\alpha}\sin\dfrac{x-\alpha}{2}$. **1.6.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-\operatorname{tg}2x}{x^3}$.

1.7. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{\cos x}}$. **1.8.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$. **1.9.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-7)\big(\ln(3x+5)-\ln(3x-1)\big)$.

1.10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{e^{3x}-1}}$. **1.11.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^7+4x^4+1}{(x-2)^3(4x+5)^2(3x-1)^2}$.

1.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(4x^4+x^2)+e^{x^2}-\cos 2x}{\ln(1+2x^2)}$. **1.13.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+7x^2+\cos 5x+\operatorname{arctg}x^5+e^{-x^2}}{\sqrt{x^4+8x^3}}$.

2. Выделить главную часть бесконечно малой или бесконечно большой функции:

2.1. $f(x)=\sin(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})$ при $x\to 0$. **2.2.** $f(x)=\operatorname{tg}x-\sin x$ при $x\to 0$.

2.3. $f(x)=\sqrt{\lg x}$ при $x\to 1$. **2.4.** $f(x)=(2x+1)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$ при $x\to+\infty$.

3. Определить порядок малости $\alpha(x)=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1$ относительно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

4. Найти точки разрыва функции, исследовать их характер:

4.1. $f(x)=2^{\frac{x}{9-x^2}}$. **4.2.** $f(x)=\dfrac{5^{1/x}-1}{5^{1/x}+1}$. **4.3.** $f(x)=(2+x)\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{x}{(2-x)(1-x^2)}$.

4.4. $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{1}{x}, & x<0;\\ \operatorname{arctg}\dfrac{\pi}{\pi-x}, & x\geqslant 0.\end{cases}$ **4.5.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+x^3}}{x}, & x<1;\\ 2^{1/x}, & 1\leqslant x<2;\\ \sqrt{2}, & x\geqslant 2.\end{cases}$

5. Найти угол под которым пересекаются параболы $y=(x-2)^2$ и $y=-x^2+6x-4$.

6. Составить уравнение касательной к линии $y=x^2+4x$, которая параллельна прямой $y-2x=0$.

7. Найти точки, в которых нормаль к кривой $x^2-2x+y^2=0$ параллельна оси OY.

8. Вычислить пределы с помощью правила Лопиталя — Бернулли:

8.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg}x}$. **8.2.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2^x)^{1/x}$. **8.3.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$.

9. Используя разложения функций по формуле Маклорена, вычислить предел:

9.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}\cdot\cos x}{\operatorname{tg}^4 x}$. **9.2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^2)-4e^{-x^2/2}+4}{x^3(e^x-1)}$. **9.3.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\operatorname{tg}x}{(3^x-1)^3}$.

10. Функцию $f(x)$ разложить по целым степеням x с остаточным членом в форме Пеано, ограничиваясь членами до пятого порядка малости относительно x:

10.1. $f(x) = e^{x^2-1}$. **10.2.** $f(x) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$. **10.3.** $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{2x}{1-x}$.

10.4. $f(x) = \ln\dfrac{3+x}{1-x^2}$. **10.5.** $f(x) = x\sqrt[3]{8-x^2}$. **10.6.** $f(x) = x\sqrt{1-x^2} - \cos x \cdot \ln(1+x)$.

11. Разложить многочлен $P(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 2x + 4$ по степеням $x - 2$.

12. Найти асимптоты, точки экстремума, интервалы монотонности функции $y = \sqrt[3]{12x - 4x^3}$. Построить график функции в окрестности точек экстремума и асимптот.

13. Найти интервалы выпуклости графика функции $y = x - \operatorname{arctg} 5x$ и точки перегиба.

14. Построить график функции $y = \dfrac{x}{x^2-4}$, определить асимптоты, точки эктремума, интервалы возрастания и убывания, направление выпуклости графика функции и точки перегиба.

Образец билета

– –

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ **0**.

по курсу Математического анализа, 1-й сем., ИУ (кроме ИУ9), РЛ, ПС, РТ

1. (*6 баллов*) Сформулируйте и докажите теорему о замене бесконечно малой на эквивалентную под знаком предела.

2. (*6 баллов*) Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие неубывания дифференцируемой функции.

3. (*6 баллов*) Задача из комплекта 1.

4. (*6 баллов*) Задача из комплекта 5.

5. (*6 баллов*) Дополнительные вопросы экзаменатора.

Билеты утверждены на заседании кафедры ФН-12 22.11.2021.

– –