

**«Интегралы и дифференциальные уравнения»  
все специальности ИУ (кроме ИУ9), РЛ, ПС, РТ  
Вопросы для подготовки к экзамену\***

*Теоретические вопросы*

1. Сформулировать определение первообразной. Сформулировать свойства первообразной и неопределённого интеграла. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании по частям для неопределённого интеграла. [Л. 1,2.]
2. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие. Интегрирование простейших дробей. [Л. 3.]
3. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему о сохранении определенным интегралом знака подынтегральной функции. [Л. 5–6.]
4. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему об оценке определенного интеграла. [Л. 5–6.]
5. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему об оценке модуля определенного интеграла. [Л. 5–6.]
6. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему о среднем для определенного интеграла. [Л. 5–6.]
7. Дать определение интеграла с переменным верхним пределом. Сформулировать и доказать теорему о производной от интеграла с переменным верхним пределом. [Л. 7.]
8. Сформулировать свойства определенного интеграла. Вывести формулу Ньютона — Лейбница. [Л. 5–7.]
9. Дать геометрическую интерпретацию определенного интеграла. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании подстановкой для определенного интеграла. [Л. 5–7.]
10. Сформулировать свойства определенного интеграла. Интегрирование периодических функций. Интегрирование четных и нечетных функций на отрезке, симметричном относительно начала координат. [Л. 5–7.]
11. Сформулировать свойства определенного интеграла. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании по частям для определенного интеграла. [Л. 7.]
12. Сформулировать определение несобственного интеграла 1-го рода. Сформулировать и доказать признак сходимости по неравенству для несобственных интегралов 1-го рода. [Л. 8–10.]
13. Сформулировать определение несобственного интеграла 1-го рода. Сформулировать и доказать предельный признак сравнения для несобственных интегралов 1-го рода. [Л. 8–10.]
14. Сформулировать определение несобственного интеграла 1-го рода. Сформулировать и доказать признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-го рода. [Л. 8–10.]
15. Сформулировать определение несобственного интеграла 2-го рода и признаки сходимости таких интегралов. Сформулировать и доказать признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-го рода. [Л. 8–10.]
16. Фигура ограничена кривой  $y = f(x) \geq 0$ , прямыми  $x = a$ ,  $x = b$  и  $y = 0$  ( $a < b$ ). Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла площади этой фигуры. [Л. 11.]
17. Фигура ограничена лучами  $\varphi = \alpha$ ,  $\varphi = \beta$  и кривой  $r = f(\varphi)$ . Здесь  $r$  и  $\varphi$  — полярные координаты точки,  $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$ , где  $r$  и  $\varphi$  — полярные координаты точки. Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла площади этой фигуры. [Л. 11.]

---

\* В квадратных скобках после текста вопроса указаны номера лекций согласно календарному плану учебного курса (см. также: Интегралы и дифференциальные уравнения (1-й курс, 2-й семестр): конспект лекций / П.Л. Иванков. Электронный ресурс <http://fn.bmstu.ru/educational-work-fs-12/lecture-notes-fs-12>).

**18.** Тело образовано вращением вокруг оси  $Ox$  криволинейной трапеции, ограниченной кривой  $y = f(x) \geq 0$ , прямыми  $x = a$ ,  $x = b$  и  $y = 0$  ( $a < b$ ). Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла объема тела вращения. [Л. 12–13.]

**19.** Кривая задана в декартовых координатах уравнением  $y = f(x)$ , где  $x$  и  $y$  — декартовы координаты точки,  $a \leq x \leq b$ . Вывести формулу для вычисления длины дуги этой кривой. [Л. 12–13.]

**20.** Кривая задана в полярных координатах уравнением  $r = f(\varphi) \geq 0$ , где  $r$  и  $\varphi$  — полярные координаты точки,  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ . Вывести формулу для вычисления длины дуги этой кривой. [Л. 12–13.]

**21.** Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Интегрирование линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка методом Бернулли (метод “ $u \cdot v$ ”) и методом Лагранжа (вариации произвольной постоянной). [Л. 15.]

**22.** Сформулировать теорему Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения  $n$ -го порядка. Интегрирование дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка, допускающих понижение порядка. [Л. 17.]

**23.** Сформулировать теорему Коши о существовании и единственности решения линейного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка. Доказать свойства частных решений линейного однородного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка. [Л. 18–19.]

**24.** Сформулировать определения линейно зависимой и линейно независимой систем функций. Сформулировать и доказать теорему о вронскиане линейно зависимых функций. [Л. 18–19.]

**25.** Сформулировать определения линейно зависимой и линейно независимой систем функций. Сформулировать и доказать теорему о вронскиане системы линейно независимых частных решений линейного однородного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка. [Л. 18–19.]

**26.** Сформулировать и доказать теорему о существовании фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка. [Л. 18–19.]

**27.** Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка. [Л. 18–19.]

**28.** Вывести формулу Остроградского — Лиувилля для линейного дифференциального уравнения 2-го порядка. [Л. 18–19.]

**29.** Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка при одном известном частном решении. [Л. 18–19.]

**30.** Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка. [Л. 20–21.]

**31.** Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае кратных корней характеристического уравнения. [Л. 20–21.]

**32.** Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней характеристического уравнения. [Л. 20–21.]

**33.** Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида (являющейся квазимногочленом). Сформулировать и доказать теорему о наложении частных решений. [Л. 20–21.]

**34.** Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных для нахождения решения линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка и вывод системы соотношений для варьируемых переменных. [Л. 20–21.]

При ответе на теоретические вопросы билета формулировки теорем должны сопровождаться определениями используемых в них понятий. Знание остальных теорем, определений и понятий из программы курса может потребоваться при ответе на дополнительные вопросы экзаменатора.

## Задачи для подготовки

В экзаменационный билет входят два теоретических вопроса (по двум модулям дисциплины) и две задачи (указаны номера комплектов задач). Каждая из задач относится к одной из следующих тем:

- неопределенные интегралы;
- приложения определенного интеграла;
- несобственные интегралы;
- дифференциальные уравнения (ОДУ), допускающие понижение порядка;
- линейные ОДУ с правой частью специального вида;
- линейные ОДУ с правой частью общего вида.

При подготовке к экзамену рекомендуется прорешать следующие задачи.

### Модуль 1

#### 1. Неопределенные интегралы.

$$\begin{array}{llll} 1.1. \int \frac{\sqrt[4]{5 + \ln x}}{x} dx. & 1.2. \int \frac{x^2 dx}{x^6 - 1}. & 1.3. \int x^2 \cos 2x dx. & 1.4. \int e^{2x} \cos 3x dx. \\ 1.5. \int \ln x dx. & 1.6. \int \frac{4x + 1}{\sqrt{2 + 4x - x^2}} dx. & 1.7. \int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2 - 2x - 1}}. & 1.8. \int \operatorname{tg}^3 x dx. \\ 1.9. \int \frac{dx}{4 \sin^2 x + 3 \cos^2 x}. & 1.10. \int (\sqrt{\cos x} + \sin x)^2 dx. & 1.11. \int \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt{x-1}} dx. & \\ 1.12. \int \frac{dx}{5 - 2 \sin x + 5 \cos x}. & 1.13. \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}. & 1.14. \int \frac{x^3 + x + 1}{x(x^2 + 1)} dx. & \end{array}$$

#### 2. Приложения определенного интеграла.

2.1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми  $y = \sqrt{x+4}$ ,  $y = -\sqrt{x} + 2$  и осью  $Ox$ . Сделать чертёж.

2.2. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$ . Сделать чертёж.

2.3. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой  $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$  и лучами  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ . Сделать чертёж.

2.4. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной линиями  $y = e^{-2x} - 1$ ,  $y = e^{-x} + 1$  и  $x = 0$ . Сделать чертёж.

2.5. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси  $Oy$  фигуры, ограниченной линиями  $y = \frac{x^2}{2} + 2x + 2$  и  $y = 2$ . Сделать чертёж.

2.6. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной кривой  $x = at^2$ ,  $y = a \ln t$  ( $a > 0$ ) и осями координат, вокруг оси  $Ox$ . Сделать чертёж.

2.7. Найти объём тела, образованного вращением кривой  $r = a \sin^2 \phi$  вокруг полярной оси. Сделать чертёж.

2.8. Найти длину дуги кривой  $y = x^2$  от точки  $(-1, 1)$  до точки  $(1, 1)$ . Сделать чертёж.

2.9. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси  $Ox$  кривой  $x = 2 \cos t$ ,  $y = 4 \sin t$ . Сделать чертёж.

#### 3. Исследование несобственных интегралов на сходимость.

$$\begin{array}{lll} 3.1. \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{1+x^2}}{x+3} dx. & 3.2. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^{4/3}} dx. & 3.3. \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sin x^3} dx. \end{array}$$

## Модуль 2

### 4. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.

4.1.  $xy'' + y' + x = 0$ .

4.2.  $1 + yy'' + (y')^2 = 0$  при начальных условиях  $y|_{x=1} = 1, y'|_{x=1} = 1$ .

### 5. Вид общего решения линейного ОДУ.

5.1.  $y^{IV} + y'' = xe^{-x} + 2 - x + x \sin x - e^x \sin x$ .

5.2.  $y^V - 5y^{IV} + 4y''' = 2 + xe^{-2x} + xe^x - e^{-2x} \cos 3x$ .

### 6. Линейные ОДУ с правой частью общего вида.

6.1.  $y'' + y = \operatorname{tg} x \sec x$ .

6.2.  $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x}$ .

6.3. Решить уравнение  $x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$ , если известно его частное решение соответствующего однородного уравнения:  $y_1 = x$ .

## Образец билета

---

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

---

### ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ 0.

Интегралы и дифференциальные уравнения  
2-й сем., ИУ-РЛ-ПС-РТ (2021-22)

1. (6 баллов) Сформулировать свойства определенного интеграла. Вывести формулу Ньютона — Лейбница.

2. (6 баллов) Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней характеристического уравнения.

3. (6 баллов) Задача из комплекта № 1.

4. (6 баллов) Задача из комплекта № 5.

5. (6 баллов) Дополнительные вопросы экзаменатора.

---

Билеты утверждены на заседании кафедры ФН-12 25.04.2022.

---