Тогда формулу (1) преобразуем к виду:

$$dV = \pi(R^2 - h^2)dh$$

Просуммируем моменты инерции всех дисков:

$$J = \int_{-R}^{R} dJ = \int_{-R}^{R} \frac{r^2 dm}{2} = \int_{-R}^{R} \frac{(\sqrt{R^2-h^2})^2 \cdot \rho \cdot \pi \cdot (\sqrt{R^2-h^2})^2 dh}{2} = \int_{-R}^{R} \frac{\pi(R^2-h^2)^2 dh}{2} = \frac{1}{2}\pi\rho \int_{-R}^{R} (R^2-h^2)^2 dh = \pi\rho\int_{0} (R^2-h^2)$$

$$= \pi\rho \cdot \int_{0}^{R} (R^4 - 2R^2h^2 + h^4)dh = \pi\rho\left(\int_{0}^{R} R^4 dh - \int_{0}^{R} 2R^2h^2 dh + \int_{0}^{R} h^4 dh \right) =$$

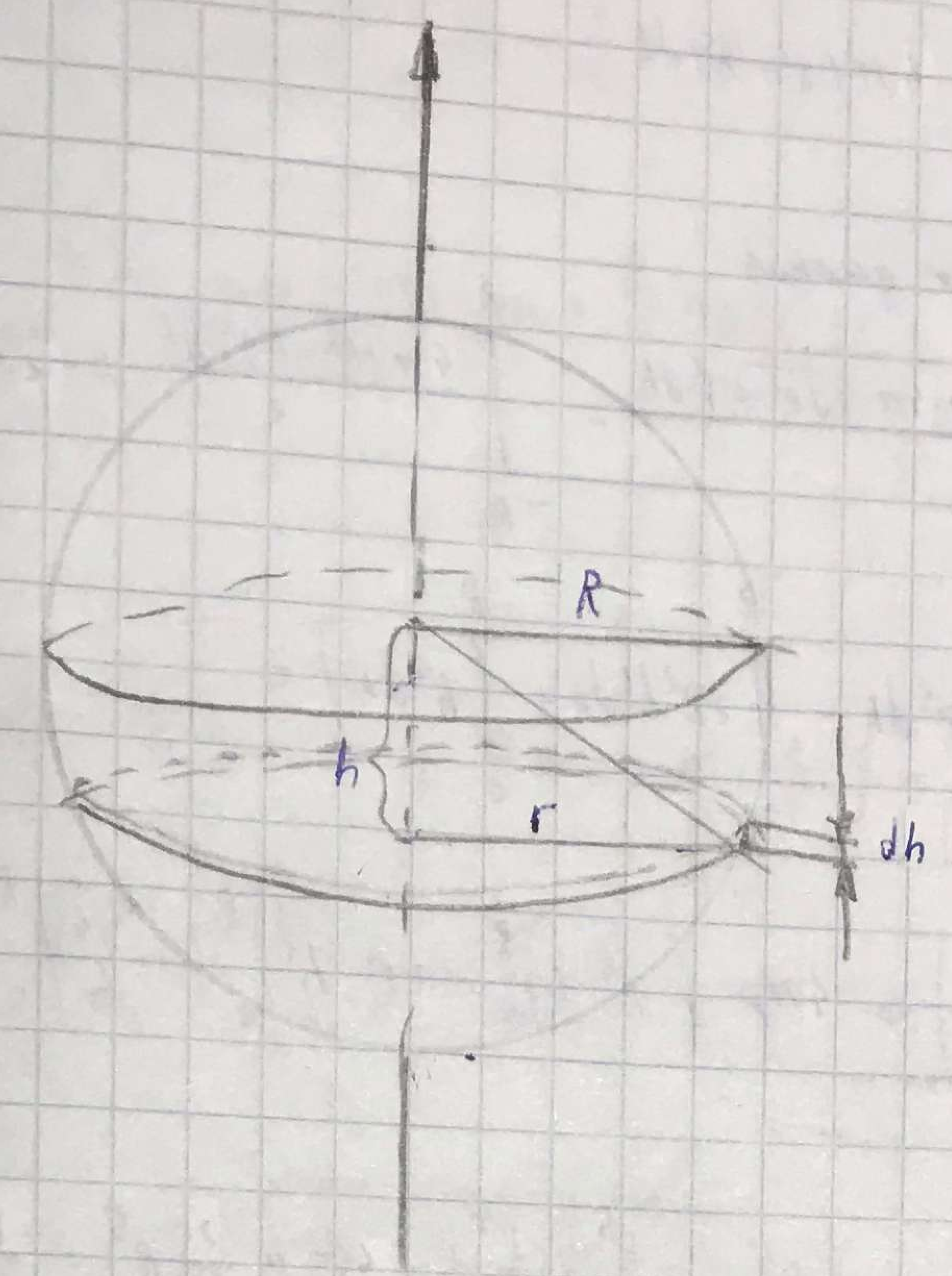
$$= \pi\rho \cdot \left(R^4 \int_{0}^{R} dh - 2R^2 \int_{0}^{R} h^2 dh + \int_{0}^{R} h^4 dh \right) = \pi\rho \cdot \left(R^4 \cdot h \Big|_{0}^{R} - 2R^2 \cdot \frac{h^3}{3}\Big|_{0}^{R} + \frac{h^5}{5}\Big|_{0}^{R} \right) =$$

$$= \pi\rho \cdot \left(R^4 \cdot R - 2R^2 \cdot \frac{R^3}{3} + \frac{R^5}{5} \right) = \pi\rho \cdot \left(R^5 - \frac{2}{3}R^5 + \frac{R^5}{5} \right) = \pi \cdot \rho \cdot \frac{8}{15} R^5 = \frac{8}{15}\pi\rho \cdot R^5 =$$

$$= \underbrace{\overbrace{\frac{4}{3}\pi \cdot R^3}^{V} \cdot \rho}_{m} \cdot R^2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5} m R^2$$

$$\boxed{J = \frac{2}{5} m R^2}$$

<u>Шар</u>



По условию шар является однородным, плотность его можно представить как:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

где $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ – объём шара

m – масса шара

В качестве элементарной массы выберем сферический слой радиуса r.

Его массу можно представить как:

$$dm = \rho dV$$

При этом объём рассматриваемого сферического слоя равен:

$$dV = \pi r^2 dh \qquad (1)$$

Момент инерции тонкого диска (толщина диска $dh << r$) равен:

$$dJ = \frac{r^2 dm}{2}$$

Выделенный нами диск находится на расстоянии h от центра шара.

Радиус рассматриваемого нами диска связан с расстоянием h выражением:

$$r = \sqrt{R^2 - h^2}$$