1. *Сформулировать определение общего решения ОДУ n-го порядка*

Для ОДУ вида $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, где x – независимая переменная, y = неизвестная функция, $y', \dots, y^{(n)}$ – производные соответствующих порядков, решением называется функция $y = y(x, C_1, \dots C_n)$, заданная на некоторой области D (n+1)-мерного пространства переменных $x, C_1, \dots, C_n$. Условие: при любых фиксированных C, для которых существует хотя бы один интервал I такой, что точка $(x, C_1, \dots, C_n)$ лежит в области D, данная функция является решением данного уравнения на любом таком интервале.

2. *Сформулировать определение задачи Коши для ОДУ n-го порядка*

Задача решения уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0', \dots\ \ y^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}$, называется задачей Коши

3. *Сформулировать определение линейного ОДУ n-го порядка*

Линейным ДУ n порядка называется уравнение вида $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = b(x)$, где функции a1(x)…an(x), b(x) определены и непрерывны на некотором промежутке I числовой прямой.

4. *Сформулировать определение линейной зависимости и независимости системы функций на промежутке*

Система функций $y_1 = y_1(x), \dots, y_n = y_n(x)$, заданная на промежутке I, называется линейно зависимой (независимой), если существует (не существует) нетривиальная равная нулю линейная комбинация этих функций $a_1y_1 + \dots + a_ny_n \equiv 0,\ a_1^2 + \dots + a_n^2 > 0$.

5. *Сформулировать определение определителя Вронского системы функций*

Если система функций $y_1, \dots, y_n$, заданных на промежутке I, состоит из n-1 раз дифференцируемых функций, то определителем Вронского этой системы называют определитель $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ . & . & . \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$.

6. *Сформулировать определение фундаментальной системы решений линейного однородного ОДУ*

Фундаментальной системой решений линейного однородного ДУ называется базис решений этого уравнения. Если $y_1(x), \dots, y_n(x)$ – ФСР линейного однородного ДУ, то общее решение можно записать в виде $y(x) = C_1y_1(x) + \dots + C_ny_n(x)$, где C – произвольные постоянные.

7. *Сформулировать определение характеристического уравнения линейного ОДУ с постоянными коэффициентами*

Характеристическим уравнением линейного ОДУ с постоянными коэффициентами $y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = 0$ является уравнение $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$.

---

1. *Сформулировать и доказать теорему о вронскиане системы линейно зависимых функций*

Теорема: Если система n-1 раз дифференцируемых на промежутке I функций линейно зависима, то определитель Вронского этой системы функций тождественно равен нулю.

Доказательство: Т.к. функции $y_1, \dots, y_n$ линейно зависимы, то существует нетривиальная комбинация этих функций, тождественно равная нулю: $a_1y_1 + \dots + a_ny_n \equiv 0$. Дифференцируя это равенство n-1 раз, получим $\begin{matrix} a_1y_1' + \dots + a_ny_n' \equiv 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny^{(n-1)} \equiv 0 \end{matrix}$. Столбцы определителя Вронского рассматриваемой системы функций линейно зависимы, и следовательно, определитель равен нулю.

2. *Сформулировать и доказать теорему о вронскиане системы линейно независимых частных решений линейного однородного ОДУ*

Теорема: Пусть $y_1, \dots, y_n$ - линейно независимая система решений уравнения $y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots a_ny = 0$, где $a_i = a_i(x)$ - функции, непрерывные на промежутке I. Тогда определитель Вронского этой системы решений не равен нулю ни в одной точке промежутка I.

Доказательство: Пусть вопреки утверждению теоремы в некоторой точке $x_0 \in I\ W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ . & . & . \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0$.. Из этого равенства следует, что столбцы определителя W(x0) линейно зависимы, т.е. существует нетривиальный набор чисел $a_1, \dots a_n$ такой, что $a_1y^{(j)}(x_0) + \dots a_ny_n^{(j)}(x_0) = 0,\ j = \overline{0, n-1}$. Рассморим функцию $y(x) = a_1y_1(x) + \dots + a_ny_n(x)$; по теореме о пространстве решений линейного ОДУ эта функция есть решение уравнения. Функция, тождественно равная нулю на промежутке I, также удовлетворяет этому уравнению и начальным условиям. ПО теореме существования и единственности получаем, что $y(x) \equiv 0$, т.е. существует нетривиальная равная нулю линейная комбинация функций $y_1, \dots, y_n$, что противоречит линейной независимости этих функций. Полученное противоречие доказывает теорему.

3. *Сформулировать и доказать теорему о существовании ФСР линейного однородного ОДУ n порядка*

Теорема: Для любого линейного однородня дифференциального уравнения порядка n существует ФСР.

Доказательство: Рассмотрим определитель $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$. Построим n частных решений, удовлетворяющих в некоторой точке x0 следующим начальным условиям: $y_i(x0) = a_{1i},\ y_i'(x0) = a_{2i}, \dots\ y_i^{(n-1)}(x0) = a_{ni},\ i = \overline{1, n}$. Таким образом, система решений $y_1(x) \dots y_n(x)$ – линейно независимая система решений, и значит образует ФСР.

4. *Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного однородного ОДУ n порядка*

Теорема: Пусть имеется дифференциальное уравнение $y^{(n)} + a1(x)y^{(n-1)} + \dots + an(x)y = 0$, где функции a1(x)…an(x) определены и непрерывны на промежутке I. Тогда совокупность всех решений этого уравнения есть линейное пространство размерности n.

Доказательство: То, что совокупность X всех решений данного дифференциального уравнения образует линейное пространство доказано в теореме о линейном пространстве решений линейного однородного уравнения. Чтобы доказать, что dim X=n, достаточно указать в X базис из n векторов. Рассмотрим решения $y1(x) \dots yn(x)$ данного дифференциального уравнения, удовлетворяющие начальным условиям

$$\begin{matrix} y1(x0)=1, & y1'(x0)=\dots=y1^{(n-1)}(x0)=0, \\ \dots & \dots \\ yn(x0)=\dots=yn^{(n-2)}(x0)=0, & yn^{(n-1)}(x0)=1 \end{matrix}$$

, где x0 – произвольная точка промежутка I. Существование таких решений следует из теоремы существования и единственности. Решения эти линейно независимы, т.к. определитель Вронского данной системы не равен нулю. Далее, если y(x) – произвольное решение рассматриваемого уравнения, и если $y(x0)=C1, \dots y^{(n-1)}(x0)=Cn$, то в точке x0 выполняются равенства $y^{(j)}(x0)=C1y1^{(j)}(x0)+\dots+C_n y_n^{(j)}(x0),\ j=\overline{0,n-1}$. Поэтому по теореме существования и единственности, $y(x)=C1y1(x)+\dots+C_n y_n(x)$ при любом $x\in I$. Таким образом, $y1(x)\dots y_n(x)$ образуют в X базис и dimX=n. Теорема доказана.

5. Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного неоднородного ОДУ n порядка

Теорема: Общее решение уравнения (1) $y^{(n)}+a1(x)y^{(n-1)}+\dots+a_n(x)y=b(x)$ может быть записано в виде (2) $y=y0(x)+C1y1(x)+\dots+C_n y_n(x)$, где y0(x) – частное решение уравнения, а y1…yn – ФСР соответствующего однородного уравнения; C – произвольные постоянные.

Доказательство: Уравнение ЖЖ с помощью дифференциального оператора можно записать $L[y]=b(x)$; соответствующее однородное уравнение запишется в виде $L[y]=0$. Применяя этот дифференциальный оператор к (2), получим: $L[y]=L[y0+C1y1+\dots+C_n y_n]=L[y0]+\dots+C_n L[y_n]=b(x)$, и при любых C функция y, определяемая равенством (2) является решением уравнения.

Проверим теперь, что при соответствующем подборе констант C можно получить решение, удовлетворяющее любым начальным условиям $y(x0)=y0,\ \ y'(x0)=y0',\dots,y^{(n-1)}(x0)=y0^{(n-1)}$. Для определения констант C имеем систему $\begin{matrix} y(x0)+\dots+C_n y_n(x0)=y0 \\ \dots\dots\dots \\ y(x0)^{(n-1)}+\dots+C_n y_n(x0)^{(n-1)}=y0^{(n-1)} \end{matrix}$. Определитель этой системы $W(x0)=\begin{vmatrix} y1(x0) & \dots & y_n(x0) \\ . & . & . \\ y1^{(n-1)}(x0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x0) \end{vmatrix}\neq$, т.к. y1,…yn – ФСР однородного уравнения, соответствующего уравнению (1). Поэтому требуемый набор постоянных C существует. Теорема доказана.

6. Сформулировать и доказать теорему о наложении частных решений линейного неоднородного ОДУ

Теорема: Пусть имеются два линейных неоднородных уравнения $L[y]=b1(x)$ и $L[y]=b2(x)$;, где $L[y]=y^{(n)}+\dots+a_n y$, и пусть $y1, y2$ - решения этих уравнений. Тогда $y1+y2$ будет решением уравнения $L[y]=b1(x)+b2(x)$.

Доказательство: $L[y1+y2]=L[y1]+L[y2]=b1(x)+b2(x)$, т.е. y1+y2 - решение уравнения $L[y]=b1(x)+b2(x)$ Теорема доказана.

7. Сформулировать и доказать свойства частных решений линейного однородного ОДУ

//замечание автора: вот тут я абсолютно ниипу что имеется в виду, по идее это то что я доказываю v, однако в нескольких местах ещё встречал вдобавок кэтому и теоремы про определитель вронского для линейно зависимых\независимых

Теорема: Совокупность всех решений линейного однородного уравнения n порядка образует линейное пространство.

Доказательство: Уравнение $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\dots+a_n(x)y=b(x)$ при $b(x)$ можно записать в виде $L[y]=0$. Если y,y1,y2 – произвольные решения этого уравнения и α – вещественное число, то в силу линейности оператора L имеем, где $L[y1+y2]=L[y1]+L[y2]=\bar{0}$, где $\bar{0}$ обозначает функцию, тождественно равную нулю на промежутке I. Мы видим, что y1+y2 и ay – также решения уравнения. Прочие условия из определения линейного пространства также проверяются без труда. Поэтому совокупность решений уравнения образует линейное пространство.

8. Вывести формулу Остроградского – Лиувилля для линейного ОДУ 2 порядка

Пусть y_1 и y_2 - решения линейного ОДУ второго порядка $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$. Для определителя Вронского указанных решений имеем

$$W'(x)=\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -a_1(x)y_1'-a_2(x)y_1 & -a_1(x)y_2'-a_2(x)y_2 \end{vmatrix}=-a_1(x)W(x), \text{т. е.} W'(x)+a_1(x)W(x)=0$$

Определитель Вронского удовлетворяет уравнению $y'+a_1(x)y=0$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что этому же уравнению удовлетворяет и функция $W(x)=y(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}a_1(t)dt}$, причем $y(x_0)=W(x_0)$ где x0 – произвольная точка промежутка I. Из теоремы существования и единственности для уравнения $y'+a_1(x)y=0$ получаем что для всех $x\in I$ выполняется равенство $W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}a_1ыыы(t)dt}$. Данное равенство называется формулой Остроградского-Лиувилля.

9. Вывести формулу для общего решения линейного однородного ОДУ 2 порядка с постоянными коэффициентами в случае простых действительных корней характеристического уравнения

Рассмотрим линейное ОДУ $y''+a1y'+a2y=0$, где a1 и a2 – вещественные числа. Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2+a1\lambda+a2=0$.

Пусть корни характеристического уравнения вещественны и различны, $\lambda1$ и $\lambda2$. Тогда ФСР дифференциального уравнения образуют функции $y1=e^{\lambda1x}$ и $y2=e^{\lambda2x}$, а общее решение имеет вид $y=C1e^{\lambda1x}+C2e^{\lambda2x}$. Определитель Вронского данной системы $W(x)=\begin{vmatrix} e^{\lambda1x} & e^{\lambda2x} \\ \lambda1e^{\lambda1x} & \lambda2e^{\lambda2x} \end{vmatrix}=e^{\lambda1x}e^{\lambda2x}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda1 & \lambda2 \end{vmatrix}=e^{(\lambda1+\lambda2)x}*(\lambda1-\lambda2)\neq 0$. Таким образом, y1 и y1 ЛНЗ и образуют ФСР данного ДУ.

10. Вывести формулу для общего решения линейного однородного ОДУ 2 порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней характеристического уравнения

Рассмотрим линейное ОДУ $y''+a1y'+a2y=0$, где a1 и a2 – вещественные числа. Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2+a1\lambda+a2=0$.

Пусть характеристическое уравнение имеет один вещественный корень кратности 2, $\lambda0$. Тогда ФСР этого уравнения образуют функции $y1=e^{\lambda0x}$ и $y2=xe^{\lambda0x}$, а общее решение уравнения - $y=(C1+C2)e^{\lambda0x}$. Т.к. $\lambda0$ – корень кратности 2 характеристического уравнения, то $\lambda0^2+a1\lambda0+a2=0;\ \ 2\lambda0+a1=0$. Далее $y2'=(1+\lambda0x)e^{\lambda0x},\ y2''=(2\lambda0+\lambda0^2x)e^{\lambda0x}$. Отсюда $y2''+a1y2'+a2y2=e^{\lambda0x}(2\lambda0+\lambda0^2x+a1+a1\lambda0x+x2x)=e^{\lambda0x}\big(2\lambda0+a1+x(\lambda0^2+a1\lambda0+a2)\big)=0, \text{т. е.} y2$ - решение дифференциального уравнения. Определитель Вронского *(//комментарий автора: аналогично ^)* не равен нулю, и y1 и y2 образуют ФСР ДУ.

11. Вывести формулу для общего решения линейного однородного ОДУ 2 порядка с постоянными коэффициентами в случае кратных корней характеристического уравнения

Рассмотрим линейное ОДУ $y''+a1y'+a2y=0$, где a1 и a2 – вещественные числа. Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2+a1\lambda+a2=0$.

Пусть характеристическое уравнение имеет комплексно сопряженные корни $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta, \beta\neq 0$. Тогда ФСР ДУ имеет вид $y1=e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ y2=e^{\alpha x}\sin\beta x$, общее решение запишется как $y=e^{\alpha x}(C1\cos\beta x+C2\sin\beta x)$. Здесь в проверке нуждается лишь линейная независимость решений y1 и y2. Имеем $W(x)=\begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x-\beta\sin\beta x) & e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x+\beta\cos\beta x) \end{vmatrix}=e^{2\alpha x}\begin{vmatrix} \cos\beta x & \sin\beta x \\ \alpha\cos\beta x-\beta\sin\beta x & \alpha\sin\beta x+\beta\cos\beta x \end{vmatrix}=\beta e^{2\alpha x}(\cos^2\beta x+\sin^2\beta x)\neq 0$. Поэтому y1 и y2 линейно независимы и образуют ФСР.

12. Описать метод Лагранжа вариации произвольных постоянных для линейного неоднородного ОДУ 2-го порядка и вывести систему соотношений для варьируемых переменных

Пусть y1,…,yn – ФСР однородного уравнения $L[y]=0$. Тогда частное решение неоднородного уравнения $L[y]=b(x)$ можно записать в виде $y(x)=$ (1) $C1(x)y1(x)+\dots+C_n(x)y_n(x)$, где функции $C1(x)\dots C_n(x)$ определяются из системы $\begin{matrix} C_1'y_1+\dots+C_n'y_n=0 \\ \dots \\ C_1y_1^{(n-2)}+\dots+C_n'y_n^{(n-2)}=0 \\ C_1'y_1^{(n-1)}+\dots+C_n'y_n^{(n-1)}=b(x) \end{matrix}$. Т.к. определитель $\begin{vmatrix} y1 & \dots & y_n \\ . & . & . \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}\neq 0$, то из этой системы $C_1'\dots C_n'$определяются однозначно, а сами функции $C_1\dots C_n$ – с точностью до произвольных постоянных. Если в (1) подставить именно эти функции, то получаем частное решение дифференциального уравнения.

Докажем последнее утверждение для n=2. Уравнение в этом случае имеет вид $y''+a1(x)y'+a2(x)y=b(x)$, где a1,a2,b – непрерывные на некотором промежутке функции. Частное решение данного уравнения ищем в виде $y(x)=C1y1+C2y2$, где y1, y2 – фундаментальная система решений однородного уравнения $y''+a1(x)y'+a2(x)y=0$, а C1=C1(x), C2=C2(x) – подлежащие определению функции. Предположим, что они удовлетворяют системе: $\begin{matrix} C_1'y1+C_2'y2=0 \\ C_1'y1'+C_2'y_2'=b(x) \end{matrix}$. Тогда $\begin{matrix} y'(x)=C_1'y1+C_2'y2+C_1y1'+C_2y2'=C_1y1'+C_2y2' \\ y''(x)=C_1'y1'+C_2'y2'+C_1y1''+C_2y2''=b(x)+C_1y1''+C_2y2'' \end{matrix}$. Отсюда $y''+a1(x)y'+a2(x)y=b(x)+C_1y1''+C_2y2''+a1(x)(C_1y1'+C_2y2')+a2(x)(C_1y1+C_2y2)=b(x)+C_1(y1''+a2(x)y1'+a2(x)y1)+C_2(y2''+a1(x)y2'+a2(x)y2)=b(x)$, т.е. $y''+a1(x)y'+a2(x)y=b(x)$, и наше утверждение доказано.