Вариант 1.

Классифицировать каждое из уравнений и найти его общий интеграл:

1. $xy'\sin\dfrac{y}{x} + x = y\sin\dfrac{y}{x}$

$y' = \dfrac{y}{x} - \left(\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)\right)^{-1}$ — однородное уравнение
$z = y/x, \quad y = z\cdot x, \quad y' = z'\cdot x + z,$
$z'\cdot x + z = \dfrac{z\sin z - 1}{\sin z},$
$\displaystyle\int\frac{dx}{x} = -\int\sin z\,dz,$
$\ln|x| = \cos z + C,$
$\ln|x| = \cos\dfrac{y}{x} + C$; *(3 балла)*

2. $xy\,dx = (x^2+4y)\,dy$

$x'_y - \dfrac{x}{y} = \dfrac{4}{x}$ — уравнение Бернулли,
$x(y) = u(y)v(y), \quad x'_y(y) = u'_y(y)v(y) + u(y)v'_y(y),$
$v'_y - \dfrac{v}{y} = 0, \quad u'_y = \dfrac{4}{uv},$
$\displaystyle\int\frac{dv}{v} = \int\frac{dy}{y},$
$v(y) = \exp(\ln|y|) = |y|,$
$\displaystyle\int u\,du = \int\frac{4\,dy}{y^2},$
$\dfrac{u^2}{2} = C - \dfrac{4}{y},$
$u(y) = \sqrt{2C - \frac{8}{y}},$
$x(y) = |y|\sqrt{2C - \frac{8}{y}}.$ *(3 балла)*

Классифицировать уравнение и решить задачу Коши:

3. $\dfrac{y}{y'} = \ln y, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = e$

$dx = \dfrac{\ln y\,dy}{y},$
$\displaystyle\int dx = \int\frac{\ln y\,dy}{y},$
$x = \dfrac{\ln^2 y}{2} + C,$
решение задачи Коши: $C = 0$,
$x = \dfrac{\ln^2 y}{2};$ *(3 балла)*

4. $y'\cos x + y\sin x = 1, \quad y(0) = 1$

$y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \dfrac{1}{\cos x}$ — линейное уравнение,
$\displaystyle\int\frac{dy}{y} = -\int\mathrm{tg}\,x\,dx,$
$y(x) = C\cos x, \quad \displaystyle\int dC = \int\frac{1}{\cos^2 x}\,dx, \quad C(x) = \mathrm{tg}\,x + C_1,$
$y(x) = \sin x + C_1\cos x,$
решение задачи Коши: $C_1 = 1, \quad y(x) = \sin x + \cos x.$ *(3 балла)*

min = 7, max = 12

Вариант 2.

Классифицировать каждое из уравнений и найти его общий интеграл:

1. $(1+x^2)y' + y\sqrt{1+x^2} = xy$

$$(1+x^2)y' = y(x - \sqrt{1+x^2}),$$
$$\frac{dy}{y} = \frac{(x-\sqrt{1+x^2})\,dx}{1+x^2},$$
$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{(x-\sqrt{1+x^2})\,dx}{1+x^2},$$
$$\ln|y| = \frac{\ln(1+x^2)}{2} - \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C,$$
исключительное решение: $y \equiv 0$; (*3 балла*)

2. $x \ln \dfrac{x}{y}\, dy = y\, dx$

$$y' = \frac{y}{x}\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right)^{-1}$$ — однородное уравнение
$$p = x/y, \quad x = p\cdot y, \quad x'_y = p'_y \cdot y + p,$$
$$p'_y \cdot y + p = p\ln p,$$
$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{p\,(\ln p - 1)}\,dp,$$
$$\ln|y| = \ln|\ln p - 1| + C,$$
$$\ln|y| = \ln\left|\ln\left(\frac{x}{y}\right) - 1\right| + C.$$ (*3 балла*)

Классифицировать уравнение и решить задачу Коши:

3. $2(y^3 - y + \frac{1}{2}xy)\,dy = dx, \quad y(2) = 0$

$x'_y - yx = 2y^3 - 2y$ — линейное уравнение,
$$\int \frac{dx}{x} = \int y\,dy,$$
$$x(y) = Ce^{\frac{y^2}{2}},$$
$$\int dC = \int \frac{2y^3 - 2y}{e^{y^2/2}}\,dy,$$
$$C(y) = -2e^{-\frac{y^2}{2}}(1+y^2) + C_1,$$
$$x(y) = \left(-2e^{-\frac{y^2}{2}}(1+y^2) + C_1\right)e^{\frac{y^2}{2}} = -2(1+y^2) + C_1 e^{\frac{y^2}{2}},$$
решение задачи Коши: $C_1 = 4$,
$$x(y) = -2(1+y^2) + 4e^{\frac{y^2}{2}};$$ (*3 балла*)

4. $(x-1)y' = y^2 + y, \quad y(0) = 1$

$$y' - \frac{y}{x-1} = \frac{y^2}{x-1}$$ — уравнение Бернулли,
$$y(x) = u(x)v(x), \quad y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$
$$v' - \frac{v}{x-1} = 0, \quad u' = \frac{u^2 v}{x-1},$$
$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x-1}, \quad v(x) = \exp(\ln|x-1|) = |x-1|,$$
$$\int \frac{du}{u^2} = \int dx, \quad -\frac{1}{u} = x + C, \quad u(x) = -\frac{1}{x+C},$$
$$y(x) = -\frac{|x-1|}{x+C},$$
исключительное решение: $y(x) \equiv 0$,

решение задачи Коши: $C = 1, \quad y(x) = -\dfrac{x-1}{x+1}$. (*3 балла*)

$\min = 7$, $\max = 12$

Вариант 3.

Классифицировать каждое из уравнений и найти его общий интеграл:

1. $(x+y)\,dx + (y-x)\,dy = 0$

$y' = \dfrac{y+x}{-y+x}$ — однородное уравнение
$z = y/x, \quad y = z\cdot x, \quad y' = z'\cdot x + z,$
$z'\cdot x + z = \dfrac{z+1}{1-z},$
$\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1-z}{1+z^2}\,dz,$
$\ln|x| = -\dfrac{1}{2}\ln\left|1+z^2\right| + \operatorname{arctg} z + C,$
$\ln|x| = -\dfrac{1}{2}\ln\left|1+\dfrac{y^2}{x^2}\right| + \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) + C,$
$\ln|x| = -\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x^2+y^2}{x^2}\right| + \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) + C,$
$-\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2+y^2\right| + \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{y}\right) = C$; *(3 балла)*

2. $xe^x y' = x^3 + 2ye^x$

$y' - \dfrac{2y}{x} = x^2 e^{-x}$ — линейное уравнение,
$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x},$
$y(x) = Cx^2,$
$\displaystyle\int dC = \int e^{-x}\,dx,$
$C(x) = -e^{-x} + C_1,$
$y(x) = (C_1 - e^{-x})x^2.$ *(3 балла)*

Классифицировать уравнение и решить задачу Коши:

3. $(y\ln x - 2)y\,dx = x\,dy, \quad y(1) = 4$

$y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{y^2\ln x}{x}$ — уравнение Бернулли,
$y(x) = u(x)v(x), \quad y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$
$v' + \dfrac{2v}{x} = 0, \quad u' = \dfrac{\ln x}{x}u^2 v,$
$\displaystyle\int \frac{dv}{v} = -2\int \frac{dx}{x}, \quad v(x) = \exp(-2\ln|x|) = \frac{1}{x^2},$
$\displaystyle\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{\ln x}{x^3}\,dx, \quad -\frac{1}{u} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C, \quad u(x) = \left(\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{4x^2} - C\right)^{-1},$
$y(x) = \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{\ln x}{2x^2} + \dfrac{1}{4x^2} - C\right)^{-1}, \quad y(x) = \dfrac{4}{2\ln x + 1 - 4Cx^2},$
исключительное решение: $y(x) \equiv 0,$
решение задачи Коши: $C = 0, \quad y(x) = \dfrac{4}{2\ln x + 1};$ *(3 балла)*

4. $\sqrt{4+y^2}\,dx - y\,dy = x^2 y\,dy, \quad y(0) = 0$

$\sqrt{4+y^2}\,dx = (1+x^2)y\,dy,$
$\dfrac{dx}{1+x^2} = \dfrac{y\,dy}{\sqrt{4+y^2}},$
$\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \int \frac{y\,dy}{\sqrt{4+y^2}},$
$\operatorname{arctg} x = \sqrt{4+y^2} + C,$
решение задачи Коши: $C = -2,$
$\operatorname{arctg} x = \sqrt{4+y^2} - 2.$ *(3 балла)*

min = 7, max = 12

Вариант 4.

Классифицировать каждое из уравнений и найти его общий интеграл:

1. $y' + \dfrac{y}{x} = x^2 y^4$

$y' + \dfrac{y}{x} = y^4 x^2$ — уравнение Бернулли,
$y(x) = u(x)v(x), \quad y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$
$v' + \dfrac{v}{x} = 0, \quad u' = x^2 u^4 v^3,$
$\displaystyle\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x},$
$v(x) = \dfrac{1}{x},$
$\displaystyle\int \frac{du}{u^4} = \int \frac{dx}{x},$
$-\dfrac{1}{3u^3} = \ln|x| + C,$
$u(x) = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{3\ln|x| + 3C}},$
$y(x) = -\dfrac{1}{x\sqrt[3]{3\ln|x| + 3C}},$
исключительное решение: $y(x) \equiv 0$; *(3 балла)*

2. $xy' = y + x\,\mathrm{tg}\,\dfrac{y}{x}$

$y' = \dfrac{y}{x} + \mathrm{tg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ — однородное уравнение
$z = y/x, \quad y = z \cdot x, \quad y' = z' \cdot x + z,$
$z' \cdot x + z = z + \mathrm{tg}\, z,$
$\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \int \mathrm{ctg}\, z\, dz,$
$\ln|x| = \ln|\sin z| + C,$
$\ln|x| = \ln\left|\sin\dfrac{y}{x}\right| + C$. *(3 балла)*

Классифицировать уравнение и решить задачу Коши:

3. $y\,dx = (x + \ln y)\,dy, \quad y(0) = 1$

$x'_y - \dfrac{x}{y} = \dfrac{\ln y}{y}$ — линейное уравнение,
$\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y},$
$x(y) = y,$
$\displaystyle\int dC = \int \frac{\ln y}{y^2}\,dy, \quad C(y) = -\frac{\ln y}{y} - \frac{1}{y} + C_1 = -\frac{\ln y + 1}{y} + C_1,$
$x(y) = -\ln y - 1 + C_1 y,$
решение задачи Коши: $C_1 = 1, \quad x(y) = -\ln y - 1 + y;$ *(3 балла)*

4. $x\,dy - y^2\,dx = y\,dx, \quad y(1) = 1$

$x\,dy = (y + y^2)\,dx,$
$\dfrac{dy}{y^2 + y} = \dfrac{dx}{x},$
$\displaystyle\int \frac{dy}{y^2 + y} = \int \frac{dx}{x}, \quad \ln|y| - \ln|y+1| = \ln|x| + C,$
исключительные решения: $x \equiv 0, \quad y \equiv -1, \quad y \equiv 0,$
решение задачи Коши: $C = -\ln 2, \quad \ln|y| - \ln|y+1| = \ln|x| - \ln 2,\ \frac{y}{y+1} = \frac{x}{2}.$ *(3 балла)*

min = 7, max = 12

Вариант 5.

Классифицировать каждое из уравнений и найти его общий интеграл:

1. $y\,dx + \left(x - \dfrac{1}{2}x^3 y\right) dy = 0$

$x'_y + \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2}x^3$ — уравнение Бернулли,
$x(y) = u(y)v(y), \quad x'_y(y) = u'_y(y)v(y) + u(y)v'_y(y),$
$v'_y + \dfrac{v}{y} = 0, \quad u'_y = \dfrac{1}{2}u^3v^2,$
$\displaystyle\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dy}{y}, \quad v(y) = \frac{1}{|y|},$
$\displaystyle\int \frac{du}{u^3} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y^2}, \quad -\frac{1}{2u^2} = -\frac{1}{2y} + C, \quad u(y) = \frac{1}{\sqrt{y^{-1} - 2C}},$
$x(y) = \dfrac{1}{|y|\sqrt{y^{-1} - 2C}},$
$x(y) = \dfrac{1}{\sqrt{y - 2Cy^2}},$
исключительные решения: $x(y) \equiv 0$, $y \equiv 0$; *(3 балла)*

2. $(y - x)\,dx + (y + x)\,dy = 0$

$y' = \dfrac{-y + x}{y + x}$ — однородное уравнение
$z = y/x, \quad y = z \cdot x, \quad y' = z' \cdot x + z,$
$z' \cdot x + z = -\dfrac{z - 1}{z + 1},$
$\displaystyle\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{z + 1}{z^2 + 2z - 1}\,dz,$
$\ln|x| = -\dfrac{1}{2}\ln\left|z^2 + 2z - 1\right| + C,$
$\ln|x| = -\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{2y}{x} - 1\right| + C,$
$\ln|x| = -\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{y^2 + 2xy - x^2}{x^2}\right| + C,$
$y^2 + 2xy - x^2 = C_1$
исключительные решения: $y = (1 - \sqrt{2})x$, $y = (1 + \sqrt{2})x$. *(3 балла)*

Классифицировать уравнение и решить задачу Коши:

3. $y' + 3y\,\mathrm{tg}\,3x = \sin 6x, \quad y(0) = \frac{1}{3}$

$y' + 3y\,\mathrm{tg}\,3x = \sin 6x$ — линейное уравнение,
$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = -3\int \mathrm{tg}\,3x\,dx,$
$y(x) = \dfrac{C}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\,3x}},$
$\displaystyle\int dC = \int \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\,3x}\,\sin 6x\,dx, \quad C(x) = -\frac{2}{3}|\cos 3x| + C_1,$
$y(x) = -\dfrac{2}{3}\cos^2 3x + C_1|\cos 3x|,$
решение задачи Коши: $C_1 = 1$,
$y(x) = -\dfrac{2}{3}\cos^2 3x + |\cos 3x|;$ *(3 балла)*

4. $(1 + e^x)yy' = e^{y+x}, \quad y(0) = -1$

$ye^{-y}\,dy = \frac{e^x\,dx}{1+e^x},$
$\displaystyle\int ye^{-y}\,dy = \int \frac{e^x\,dx}{1 + e^x},$
$-e^{-y}(y + 1) = \ln(1 + e^x) + C,$
решение задачи Коши: $C = -\ln 2$,
$-e^{-y}(y + 1) = \ln(1 + e^x) - \ln 2.$ *(3 балла)*

min = 7, max = 12

Вариант 6.

Классифицировать каждое из уравнений и найти его общий интеграл:

1. $3e^x \operatorname{tg} y\, dx + (1 - e^x)\dfrac{1}{\cos^2 y}\, dy = 0$

$\dfrac{3e^x\, dx}{1 - e^x} = -\dfrac{dy}{\operatorname{tg} y \cos^2 y}$,
$\displaystyle\int \frac{3e^x\, dx}{1 - e^x} = -\int \frac{dy}{\operatorname{tg} y \cos^2 y}$,
$-3\ln|1 - e^x| = -\ln|\operatorname{tg} y| + C$,
исключительные решения: $x \equiv 0, \quad y \equiv \pi k, \quad k \in Z$; *(3 балла)*

2. $(y^4 - 3x^2)\, dy + xy\, dx = 0$

$x'_y - 3\dfrac{x}{y} = -\dfrac{y^3}{x}$ — уравнение Бернулли,
$x(y) = u(y)v(y), \quad x'_y(y) = u'_y(y)v(y) + u(y)v'_y(y)$,
$v'_y - 3\dfrac{v}{y} = 0, \quad u'_y = -\dfrac{y^3}{uv^2}$,
$\displaystyle\int \frac{dv}{v} = 3\int \frac{dy}{y}$,
$v(y) = |y|^3$,
$\displaystyle\int u\, du = -\int \frac{dy}{y^3}$,
$\dfrac{u^2}{2} = \dfrac{1}{2y^2} + C$,
$u(y) = \sqrt{y^{-2} + 2C}$,
$x(y) = |y|^3\sqrt{y^{-2} + 2C} = y^2\sqrt{1 + 2Cy^2}$
исключительное решение: $y(x) \equiv 0$. *(3 балла)*

Классифицировать уравнение и решить задачу Коши:

3. $xy' = xe^{y/x} + y, \quad y(1) = 0$

$y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$ — однородное уравнение
$z = y/x, \quad y = z \cdot x, \quad y' = z' \cdot x + z$,
$z' \cdot x + z = e^z + z$,
$\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \int e^{-z}\, dz$,
$\ln|x| = -e^{-z} + C$,
$\ln|x| = -e^{-\frac{y}{x}} + C$,
решение задачи Коши: $C = 1$,
$\ln|x| = -e^{-\frac{y}{x}} + 1$; *(3 балла)*

4. $x(x-1)y' + y = x^2(2x - 1), \quad y(2) = 0$

$y' + \dfrac{y}{x(x-1)} = \dfrac{x(2x-1)}{x-1}$ — линейное уравнение,
$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{1}{x(x-1)}\, dx$,
$y(x) = \dfrac{Cx}{x-1}$,
$\displaystyle\int dC = \int (2x - 1)\, dx$,
$C(x) = x^2 - x + C_1$,
$y(x) = \dfrac{(x^2 - x + C_1)x}{x-1} = x^2 + \dfrac{C_1 x}{x-1}$,
решение задачи Коши: $C_1 = -2$,
$y(x) = x^2 - \dfrac{2x}{x-1}$. *(3 балла)*

min = 7, max = 12

Вариант 7.

Классифицировать каждое из уравнений и найти его общий интеграл:

1. $y' - y\cos x + \sin 2x = 0$

$y' - y\cos x = -\sin 2x$ — линейное уравнение,
$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \cos x\,dx,$
$y(x) = Ce^{\sin x},$
$\displaystyle\int dC = -\int \frac{\sin 2x}{e^{\sin x}}\,dx, \quad C(x) = 2e^{-\sin x}(\sin x + 1) + C_1,$
$y(x) = \left(2e^{-\sin x}(\sin x + 1) + C_1\right)e^{\sin x} = 2(\sin x + 1) + C_1 e^{\sin x};$ *(3 балла)*

2. $2x(x^2 + y^2)\,dy = y(y^2 + 2x^2)\,dx$

$\displaystyle y' = \frac{1}{2}\frac{y\left(y^2 + 2x^2\right)}{x\left(x^2 + y^2\right)}$ — однородное уравнение
Первый способ:
$z = y/x, \quad y = z\cdot x, \quad y' = z'\cdot x + z,$
$\displaystyle z'\cdot x + z = \frac{1}{2}\frac{z\left(z^2 + 2\right)}{1 + z^2},$
$\displaystyle\int \frac{dx}{x} = -2\int \frac{1 + z^2}{z^3}\,dz, \quad \ln|x| = z^{-2} - 2\ln|z| + C,$
$\displaystyle\ln|x| = \frac{x^2}{y^2} - 2\ln\left|\frac{y}{x}\right| + C.$
Второй способ:
$p = x/y, \quad x = p\cdot y, \quad x'_y = p'_y\cdot y + p,$
$\displaystyle p'_y\cdot y + p = \frac{2p\left(p^2 + 1\right)}{1 + 2p^2}, \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{1 + 2p^2}{p}\,dp,$
$\ln|y| = p^2 + \ln|p| + C,$
$\displaystyle\ln|y| = \frac{x^2}{y^2} + \ln\left|\frac{y}{x}\right| + C.$ *(3 балла)*

Классифицировать уравнение и решить задачу Коши:

3. $xy' - 2y - xy^3 = 0, \quad y(1) = 1$

$\displaystyle y' - 2\frac{y}{x} = y^3$ — уравнение Бернулли,
$y(x) = u(x)v(x), \quad y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$
$\displaystyle v' - \frac{2v}{x} = 0, \quad u' = u^3v^2,$
$\displaystyle\int \frac{dv}{v} = \int \frac{2\,dx}{x}, \quad v(x) = \exp(2\ln|x|) = x^2,$
$\displaystyle\int \frac{du}{u^3} = \int x^4\,dx, \quad -\frac{1}{2u^2} = \frac{1}{5}x^5 + C, \quad u(x) = \frac{1}{\sqrt{-\frac{2}{5}x^5 - 2C}},$
$\displaystyle y(x) = \frac{5x^2}{\sqrt{-10x^5 - 50C}},$
исключительное решение: $y(x) \equiv 0,$
решение задачи Коши: $C = -\frac{7}{10}, \quad \displaystyle y(x) = \frac{5x^2}{\sqrt{-10x^5 + 35}};$ *(3 балла)*

4. $\displaystyle y'\cos x = \frac{y}{\ln y}, \quad y(0) = e$

$\displaystyle\frac{\ln y\,dy}{y} = \frac{dx}{\cos x},$
$\displaystyle\int \frac{\ln y\,dy}{y} = \int \frac{dx}{\cos x},$
$\displaystyle\frac{\ln^2 y}{2} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C,$
исключительные решения: $\displaystyle x \equiv \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z,$
решение задачи Коши: $\displaystyle C = \frac{1}{2}, \quad \frac{\ln^2 y}{2} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + \frac{1}{2}.$ *(3 балла)*

min = 7, max = 12

Вариант 8.

Классифицировать каждое из уравнений и найти его общий интеграл:

1. $(y^2 + xy^2)y' + x^2 - yx^2 = 0$

$y^2(1+x)y' + x^2(1-y) = 0,$
$y^2(1+x)\,dy = x^2(y-1)\,dx,$
$\dfrac{y^2\,dy}{y-1} = \dfrac{x^2\,dx}{1+x},$
$\displaystyle\int \frac{y^2\,dy}{y-1} = \int \frac{x^2\,dx}{1+x},$
$\ln|y-1| + \dfrac{y^2}{2} + y = \ln|x+1| + \dfrac{x^2}{2} - x + C,$
исключительные решения: $x \equiv -1, \quad y \equiv 1;$ *(3 балла)*

2. $(xy + x^2y^3)\,dy = dx$

$x'_y - yx = x^2y^3$ — уравнение Бернулли,
$x(y) = u(y)v(y), \quad x'_y(y) = u'_y(y)v(y) + u(y)v'_y(y),$
$v'_y - yv = 0, \quad u'_y = y^3u^2v,$
$\displaystyle\int \frac{dv}{v} = \int y\,dy, \qquad v(y) = e^{\frac{y^2}{2}},$
$\displaystyle\int \frac{du}{u^2} = \int e^{\frac{y^2}{2}} y^3\,dy, \qquad -\frac{1}{u} = (y^2-2)e^{\frac{y^2}{2}} + C, \qquad u(y) = \frac{1}{(2-y^2)e^{\frac{y^2}{2}} - C},$
$x(y) = \dfrac{e^{\frac{y^2}{2}}}{(2-y^2)e^{\frac{y^2}{2}} - C},$
исключительное решение: $x(y) \equiv 0$. *(3 балла)*

Классифицировать уравнение и решить задачу Коши:

3. $\dfrac{dx}{y+x} = \dfrac{dy}{y-x}, \quad y\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$y' = \dfrac{y-x}{y+x}$ — однородное уравнение
$z = y/x, \quad y = z \cdot x, \quad y' = z' \cdot x + z,$
$z' \cdot x + z = \dfrac{z-1}{z+1},$
$\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \int -\frac{z+1}{1+z^2}\,dz,$
$\ln|x| = -\dfrac{1}{2}\ln\left(1+z^2\right) - \operatorname{arctg} z + C,$
$\ln|x| = -\dfrac{1}{2}\ln\left(1+\dfrac{y^2}{x^2}\right) - \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) + C,$
$\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) = -\operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) + C,$
решение задачи Коши: $C = \frac{\pi}{4},$
$\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) = -\operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) + \dfrac{\pi}{4}$; *(3 балла)*

4. $xy' = 2y + 2(\ln^2 x - \ln x), \quad y(1) = 2$

$y' - \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2\ln^2 x - 2\ln x}{x}$ — линейное уравнение,
$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x},$
$y(x) = Cx^2,$
$\displaystyle\int dC = \int \frac{2\ln^2 x - 2\ln x}{x^3}\,dx,$
$C(x) = -\dfrac{\ln^2 x}{x^2} + C_1,$
$y(x) = -\ln^2 x + C_1x^2,$
решение задачи Коши: $C_1 = 2,$
$y(x) = -\ln^2 x + 2x^2.$ *(3 балла)*

min = 7, max = 12

Вариант 9.

Классифицировать каждое из уравнений и найти его общий интеграл:

1. $xy' - y = x \operatorname{tg} \dfrac{y}{x}$

$y' = \dfrac{y}{x} + \operatorname{tg} \dfrac{y}{x}$ — однородное уравнение

Первый способ:

$z = y/x, \quad y = z \cdot x, \quad y' = z' \cdot x + z,$

$z' \cdot x + z = z + \operatorname{tg} z, \quad \displaystyle\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dz}{\operatorname{tg} z},$

$\ln|x| = \ln|\sin z| + C,$

$\ln|x| = \ln\left|\sin \dfrac{y}{x}\right| + C.$

Второй способ:

$p = x/y, \quad x = p \cdot y, \quad x'_y = p'_y \cdot y + p,$

$p'_y \cdot y + p = \dfrac{p}{1 + \operatorname{tg}\left(p^{-1}\right) p}, \quad \displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int -\frac{1 + \operatorname{tg}\left(p^{-1}\right) p}{p^2 \operatorname{tg}\left(p^{-1}\right)}\, dp,$

$\ln|y| = \ln\left|\sin \dfrac{1}{p}\right| - \ln|p| + C,$

$\ln|y| = \ln\left|\sin \dfrac{y}{x}\right| - \ln \dfrac{x}{y} + C,$

$\ln|x| = \ln\left|\sin \dfrac{y}{x}\right| + C;$ (*3 балла*)

2. $xy' + 2y = xyy'$

$x(1-y)y' + 2y = 0,$

$\dfrac{(y-1)\,dy}{y} = 2x\,dx,$

$\displaystyle\int \frac{(y-1)\,dy}{y} = \int 2x\,dx,$

$y - \ln|y| = x^2 + C,$

исключительное решение: $y \equiv 0.$ (*3 балла*)

Классифицировать уравнение и решить задачу Коши:

3. $yx\,dx = (x^2 - y^4)\,dy, \quad y(-3) = 1$

$x'_y - \dfrac{x}{y} = -\dfrac{y^3}{x}$ — уравнение Бернулли,

$x(y) = u(y)v(y), \quad x'_y(y) = u'_y(y)v(y) + u(y)v'_y(y),$

$v'_y - \dfrac{v}{y} = 0, \quad u'_y = -\dfrac{y^3}{uv^2},$

$\displaystyle\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dy}{y},$

$v(y) = |y|,$

$\displaystyle\int u\,du = -\int y\,dy,$

$\dfrac{u^2}{2} = -\dfrac{y^2}{2} + C, \quad u(y) = \pm\sqrt{2C - y^2},$

$x(y) = \pm|y|\sqrt{2C - y^2} = \pm\sqrt{2Cy^2 - y^4},$

решение задачи Коши: $C = 5, \quad x(y) = -\sqrt{10y^2 - y^4};$ (*3 балла*)

4. $y' \sin x - y \cos x = 1, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

$y' - y \operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\sin x}$ — линейное уравнение,

$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \operatorname{ctg} x\,dx,$

$y(x) = C \sin x,$

$\displaystyle\int dC = \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx, \quad C(x) = -\operatorname{ctg} x + C_1,$

$y(x) = -\cos x + C_1 \sin x,$

решение задачи Коши: $C_1 = 0, \quad y(x) = -\cos x.$ (*3 балла*)

min = 7, max = 12

Вариант 10.

Классифицировать каждое из уравнений и найти его общий интеграл:

1. $xy' = \dfrac{3y^3 + 14x^2y}{3y^2 + 7x^2}$

$y' = \dfrac{3y^3 + 14x^2y}{(3y^2 + 7x^2)\,x}$ — однородное уравнение
$z = y/x, \quad y = z \cdot x, \quad y' = z' \cdot x + z,$
$z' \cdot x + z = \dfrac{z\left(3z^2 + 14\right)}{3z^2 + 7}, \quad \displaystyle\int \frac{dx}{x} = \int \frac{3z^2 + 7}{z^3 + 7z}\,dz,$
$\ln|x| = \ln\left(z^3 + 7z\right) + C,$
$z^3 + 7z = Cx$
$y^3 + 7yx^2 - Cx^4$; *(3 балла)*

2. $x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$

$\dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\dfrac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}},$
$\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}},$
$-\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-y^2} + C,$
исключительные решения: $x \equiv \pm 1, \quad y \equiv \pm 1.$ *(3 балла)*

Классифицировать уравнение и решить задачу Коши:

3. $ye^{-y^2}\sin y\,dy = dx + 2xy\,dy, \quad y(1) = 0$

$x'_y + 2yx = ye^{-y^2}\sin y$ — линейное уравнение,
$\displaystyle\int \frac{dx}{x} = -\int 2y\,dy,$
$x(y) = Ce^{-y^2},$
$\displaystyle\int dC = \int y\sin(y)\,dy,$
$C(y) = \sin y - y\cos y + C_1,$
$x(y) = (\sin y - y\cos y + C_1)e^{-y^2},$
решение задачи Коши: $C_1 = 0,$
$x(y) = (\sin y - y\cos y)e^{-y^2};$ *(3 балла)*

4. $x\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0, \quad y\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

$x'_y + x = \dfrac{y^2}{x}$ — уравнение Бернулли,
$x(y) = u(y)v(y), \quad x'_y(y) = u'_y(y)v(y) + u(y)v'_y(y),$
$v'_y + v = 0, \quad u'_y = \dfrac{y^2}{uv^2},$
$\displaystyle\int \frac{dv}{v} = -\int dy, \quad v(y) = e^{-y},$
$\displaystyle\int u\,du = \int e^{2y}y^2\,dy, \quad \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{4}\left(1 - 2y + 2y^2\right)e^{2y} + C, \quad u(y) = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1 - 2y + 2y^2\right)e^{2y} + 2C},$
$x(y) = \pm e^{-y}\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1 - 2y + 2y^2\right)e^{2y} + 2C},$
решение задачи Коши: $C = \frac{1}{4}, \quad x(y) = -e^{-y}\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1 - 2y + 2y^2\right)e^{2y} + \tfrac{1}{2}}.$ *(3 балла)*

min = 7, max = 12

Вариант 11.

Классифицировать каждое из уравнений и найти его общий интеграл:

1. $(xy - x)\,dx + (xy + x - y - 1)\,dy = 0$

$x(y-1)\,dx + (x-1)(y+1)\,dy = 0,$
$-\dfrac{x\,dx}{x-1} = \dfrac{(y+1)\,dy}{y-1},$
$-\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x-1} = \int \frac{(y+1)\,dy}{y-1},$
$-\ln|x-1| - x = 2\ln|y-1| + y + C,$
исключительные решения: $x \equiv 1, \quad y \equiv 1;$ (*3 балла*)

2. $(x - y)\,dx + x\,dy = 0$

$y' = \dfrac{y}{x} - 1$ — однородное уравнение
$z = y/x, \quad y = z \cdot x, \quad y' = z' \cdot x + z,$
$z' \cdot x + z = z - 1,$
$z' = -\dfrac{1}{x},$
$\displaystyle\int z\,dz = -\int \frac{1}{x}\,dx,$
$z = -\ln|x| + C,$
$\dfrac{y}{x} = -\ln|x| + C,$
$y = -x\ln|x| + Cx$
исключительное решение $x \equiv 0.$ (*3 балла*)

Классифицировать уравнение и решить задачу Коши:

3. $2x^2y' + y + e^{1/x} = 0, \quad y(1) = e$

$y' + \dfrac{y}{2x^2} = -\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{2x^2}$ — линейное уравнение,
$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{2x^2},$
$y(x) = Ce^{\frac{1}{2x}}, \quad \displaystyle\int dC = -\int \frac{e^{\frac{1}{2x}}}{2x^2}\,dx, \quad C(x) = e^{\frac{1}{2x}} + C_1,$
$y(x) = \left(e^{\frac{1}{2x}} + C_1\right)e^{\frac{1}{2x}},$
решение задачи Коши: $C_1 = 0,$
$y(x) = e^{\frac{1}{x}};$ (*3 балла*)

4. $y\,dx + x^2(2 + \ln y)\,dy = -x\,dy, \quad y\left(-\frac{1}{4}\right) = 1$

$x'_y + \dfrac{x}{y} = -\dfrac{2 + \ln y}{y}x^2$ — уравнение Бернулли,
$x(y) = u(y)v(y), \quad x'_y(y) = u'_y(y)v(y) + u(y)v'_y(y),$
$v'_y + \dfrac{v}{y} = 0, \quad u'_y = -\dfrac{2 + \ln y}{y}u^2v,$
$\displaystyle\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dy}{y}, \quad v(y) = \frac{1}{y},$
$\displaystyle\int \frac{du}{u^2} = -\int \frac{2 + \ln y}{y^2}\,dy, \quad -\frac{1}{u} = \frac{3}{y} + \frac{\ln y}{y} + C, \quad u(y) = -\left(\frac{3}{y} + \frac{\ln y}{y} + C\right)^{-1},$
$x(y) = -\left(3 + \ln y + Cy\right)^{-1},$
исключительное решение: $x(y) \equiv 0,$
решение задачи Коши: $C = 1, \quad x(y) = -\dfrac{1}{3 + \ln y + y}.$ (*3 балла*)

Вариант 12.

Классифицировать каждое из уравнений и найти его общий интеграл:

1. $y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$

$y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$ — линейное уравнение,
$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = -\int \cos x\,dx,$
$y(x) = Ce^{-\sin x},$
$\displaystyle\int dC = \frac{1}{2}\int e^{\sin x}\sin 2x\,dx,$
$C(x) = e^{\sin x}(\sin x - 1) + C_1,$
$y(x) = \sin x - 1 + C_1 e^{-\sin x};$ *(3 балла)*

2. $(1+y^2)(e^{2x}\,dx - e^y\,dy) - (1+y)\,dy = 0$

$e^{2x}\,dx - e^y\,dy = \dfrac{(1+y)\,dy}{1+y^2},$
$\displaystyle\int e^{2x}\,dx = \int \frac{(1+y)\,dy}{1+y^2} + \int e^y\,dy,$
$\dfrac{e^{2x}}{2} = \operatorname{arctg} y + \dfrac{\ln(1+y^2)}{2} + e^y + C.$ *(3 балла)*

Классифицировать уравнение и решить задачу Коши:

3. $y' + \dfrac{1}{y} = \dfrac{y}{2x}, \quad y(1) = -1$

$y' - \dfrac{1}{2x}y = -y^{-1}$ — уравнение Бернулли,
$y(x) = u(x)v(x), \quad y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$
$v' - \dfrac{v}{2x} = 0, \quad u' = -\dfrac{1}{uv^2},$
$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{2x},$
$v(x) = \exp(1/2\ln|x|) = \sqrt{|x|},$
$\int u\,du = -\int \frac{dx}{x},$
$\frac{u^2}{2} = -\ln x + C,$
$u(x) = \pm\sqrt{C - 2\ln x},$
$y(x) = \pm\sqrt{|x|(C - 2\ln x)},$
решение задачи Коши: $C = 1,$
$y(x) = -\sqrt{x(1 - 2\ln x)};$ *(3 балла)*

4. $y' = \dfrac{y}{x} + \sin\dfrac{y}{x}, \quad y(1) = \dfrac{\pi}{2}$

$y' = \dfrac{y}{x} + \sin\dfrac{y}{x}$ — однородное уравнение
$z = y/x, \quad y = z\cdot x, \quad y' = z'\cdot x + z,$
$z'\cdot x + z = z + \sin z,$
$\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dz}{\sin z},$
$\ln|x| = \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{z}{2}\right| + C,$
$\ln|x| = \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{y}{2x}\right| + C,$
решение задачи Коши: $C = 0,$
$\ln|x| = \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{y}{2x}\right|.$ *(3 балла)*

Вариант 13.

Классифицировать каждое из уравнений и найти его общий интеграл:

1. $y' + \dfrac{y}{x} = -xy^2$

$y' + \dfrac{y}{x} = -y^2 x$ — уравнение Бернулли,
$y(x) = u(x)v(x), \quad y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$
$v' + \dfrac{v}{x} = 0, \quad u' = -xu^2 v,$
$\displaystyle\int \frac{dv}{v} = \int -x^{-1}\,dx,$
$v(x) = \dfrac{1}{x},$
$\displaystyle\int \frac{du}{u^2} = -\int dx,$
$-\dfrac{1}{u} = -x + C,$
$u(x) = (x + C)^{-1},$
$y(x) = \dfrac{1}{x\,(x + C)},$
исключительное решение: $y(x) \equiv 0$; *(3 балла)*

2. $(x^2 - yx^2)y' + y^2 + xy^2 = 0$

$x^2(1 - y)y' + y^2(1 + x) = 0,$
$\dfrac{(1 - y)\,dy}{y^2} = -\dfrac{(1 + x)\,dx}{x^2},$
$\displaystyle\int \frac{(1 - y)\,dy}{y^2} = -\int \frac{(1 + x)\,dx}{x^2},$
$-\dfrac{1}{y} - \ln|y| = \dfrac{1}{x} - \ln|x| + C,$
исключительное решение: $y \equiv 0$. *(3 балла)*

Классифицировать уравнение и решить задачу Коши:

3. $(x + y)\,dx + x\,dy = 0, \quad y(1) = 1$

$y' = \dfrac{-y - x}{x}$ — однородное уравнение
$z = y/x, \quad y = z \cdot x, \quad y' = z' \cdot x + z,$
$z' \cdot x + z = -z - 1,$
$\displaystyle\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{dz}{2z + 1},$
$\ln|x| = -\dfrac{1}{2}\ln|2z + 1| + C,$
$\ln|x| = -\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{2y}{x} + 1\right| + C,$
$\ln|x| = -\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{2y + x}{x}\right| + C,$
$x(2y + x) = C_1,$
решение задачи Коши: $C_1 = 3,$
$x(2y + x) = 3$; *(3 балла)*

4. $y' - \dfrac{5}{x}y = e^x x^5, \quad y(1) = 2e$

$y' - \dfrac{5y}{x} = e^x x^5$ — линейное уравнение,
$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = 5\int \frac{dx}{x},$
$y(x) = Cx^5,$
$\displaystyle\int dC = \int e^x\,dx, \quad C(x) = e^x + C_1,$
$y(x) = (e^x + C_1)\,x^5,$
решение задачи Коши: $C_1 = e, \quad y(x) = (e^x + e)\,x^5.$ *(3 балла)*

min = 7, max = 12

Вариант 14.

Классифицировать каждое из уравнений и найти его общий интеграл:

1. $xyy' = y^2 + 2x^2$

$$y' = \frac{y^2+2x^2}{xy} \text{ — однородное уравнение}$$
$$z = y/x, \quad y = z \cdot x, \quad y' = z' \cdot x + z,$$
$$z' \cdot x + z = \frac{z^2+2}{z},$$
$$\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\int z\,dz,$$
$$\ln|x| = \frac{1}{4}z^2 + C,$$
$$\ln|x| = \frac{y^2}{4x^2} + C\ ;$$

(*3 балла*)

2. $(1+e^{2x})y^2\,dy = e^x\,dx$

$$(1+e^{2x})y^2\,dy = e^x\,dx,$$
$$y^2\,dy = \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx,$$
$$\int y^2\,dy = \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx,$$
$$\frac{y^3}{3} = \operatorname{arctg} e^x + C.$$

(*3 балла*)

Классифицировать уравнение и решить задачу Коши:

3. $y' + xy = x^3y^3, \quad y(0) = 2$

$$y' + xy = y^3x^3 \text{ — уравнение Бернулли},$$
$$y(x) = u(x)v(x), \quad y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$
$$v' + xv = 0, \quad u' = x^3u^3v^2,$$
$$\int \frac{dv}{v} = -\int x\,dx,$$
$$v(x) = e^{-\frac{x^2}{2}},$$
$$\int \frac{du}{u^3} = \int \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^2 x^3\,dx,$$
$$-\tfrac{1}{2u^2} = -\tfrac{1}{2}\left(1+x^2\right)e^{-x^2} + C,$$
$$u(x) = \pm\tfrac{1}{\sqrt{(1+x^2)e^{-x^2}-2C}},$$
$$y(x) = \pm\tfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{(1+x^2)e^{-x^2}-2C}},$$

исключительное решение: $y(x) \equiv 0$,

решение задачи Коши: $C = \frac{3}{8}$,

$$y(x) = \tfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{(1+x^2)e^{-x^2}-\frac{3}{4}}};$$

(*3 балла*)

4. $\left(\sin y - \dfrac{x}{y}\right)y' = 1, \quad y(1) = \pi$

$$x'_y + \frac{x}{y} = \sin y \text{ — линейное уравнение},$$
$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{dy}{y},$$
$$x(y) = \frac{C}{y},$$
$$\int dC = \int y\sin y\,dy,$$
$$C(y) = \sin y - y\cos y + C_1,$$
$$x(y) = \frac{\sin y - y\cos y + C_1}{y},$$

решение задачи Коши: $C_1 = 0$,

$$x(y) = \frac{\sin y - y\cos y}{y}.$$

(*3 балла*)

min = 7, max = 12

Вариант 15.

Классифицировать каждое из уравнений и найти его общий интеграл:

1. $e^y(1+x^2)\,dy - 2x(1+e^y)\,dx = 0$

$$\frac{e^y\,dy}{1+e^y} = \frac{2x\,dx}{1+x^2},$$
$$\int \frac{e^y\,dy}{1+e^y} = \int \frac{2x\,dx}{1+x^2},$$
$$\ln(1+e^y) = \ln(1+x^2) + C,$$
$$1+e^y = C(1+x^2),$$
$$y = \ln(C(1+x^2)-1);$$

(3 балла)

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{\arcsin \frac{y}{x}}$

$$y' = \frac{y}{x} + \left(\arcsin\left(\frac{y}{x}\right)\right)^{-1} \text{ — однородное уравнение}$$
$$z = y/x, \quad y = z\cdot x, \quad y' = z'\cdot x + z,$$
$$z'\cdot x + z = z + \frac{1}{\arcsin z},$$
$$\int \frac{dx}{x} = \int \arcsin z\,dz,$$
$$\ln|x| = z\arcsin z + \sqrt{1-z^2} + C,$$
$$\ln|x| = \frac{y}{x}\arcsin\left(\frac{y}{x}\right) + \sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}} + C\ .$$

(3 балла)

Классифицировать уравнение и решить задачу Коши:

3. $dx = (2y + x\,\mathrm{tg}\,y - y^2\,\mathrm{tg}\,y)\,dy, \quad y(0)=\pi$

$$x'_y - \mathrm{tg}(y)x = 2y - y^2\,\mathrm{tg}\,y \text{ — линейное уравнение,}$$
$$\int \frac{dx}{x} = \int \mathrm{tg}\,y\,dy,$$
$$x(y) = \frac{C}{\cos y},$$
$$\int dC = \int \left(2y - y^2\,\mathrm{tg}\,y\right)\cos y\,dy,$$
$$C(y) = \int y\,(2\cos y - y\sin y)\,dy,$$
$$C(y) = y^2\cos y + C_1,$$
$$x(y) = \frac{y^2\cos y + C_1}{\cos y} = y^2 + \frac{C_1}{\cos y},$$
решение задачи Коши: $C_1 = \pi^2$,
$$x(y) = y^2 + \frac{\pi^2}{\cos y};$$

(3 балла)

4. $y' + y = e^{x/2}\sqrt{y}, \quad y(0) = \frac{9}{4}$

$y' + y = e^{\frac{x}{2}}\sqrt{y}$ — уравнение Бернулли,
$$y(x) = u(x)v(x), \quad y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$
$$v' + v = 0, \quad u' = e^{\frac{x}{2}}\sqrt{\tfrac{u}{v}},$$
$$\int \frac{dv}{v} = -\int dx, \quad v(x) = e^{-x},$$
$$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int e^x\,dx, \quad 2\sqrt{u} = e^x + C, \quad u(x) = \left(\frac{e^x + C}{2}\right)^2,$$
$$y(x) = e^{-x}\left(\frac{e^x+C}{2}\right)^2,$$
исключительное решение: $y(x)\equiv 0$,

решение задачи Коши: $C = 2, \quad y(x) = e^{-x}\left(\dfrac{e^x+2}{2}\right)^2.$

(3 балла)

min = 7, max = 12

Вариант 16

Классифицировать каждое из уравнений и найти его общий интеграл:

1. $xy' \sin\dfrac{y}{x} + x = y \sin\dfrac{y}{x}$

$y' = \dfrac{y}{x} - \left(\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)\right)^{-1}$ — однородное уравнение
$z = y/x, \quad y = z \cdot x, \quad y' = z' \cdot x + z,$
$z' \cdot x + z = \dfrac{z \sin z - 1}{\sin z},$
$\displaystyle\int \frac{dx}{x} = -\int \sin z\, dz,$
$\ln|x| = \cos z + C,$
$\ln|x| = \cos\dfrac{y}{x} + C$; (*3 балла*)

2. $xy\,dx = (x^2 + 4y)\,dy$

$x'_y - \dfrac{x}{y} = \dfrac{4}{x}$ — уравнение Бернулли,
$x(y) = u(y)v(y), \quad x'_y(y) = u'_y(y)v(y) + u(y)v'_y(y),$
$v'_y - \dfrac{v}{y} = 0, \quad u'_y = \dfrac{4}{uv},$
$\displaystyle\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dy}{y},$
$v(y) = \exp(\ln|y|) = |y|,$
$\displaystyle\int u\,du = \int \frac{4\,dy}{y^2},$
$\dfrac{u^2}{2} = C - \dfrac{4}{y},$
$u(y) = \sqrt{2C - \frac{8}{y}},$
$x(y) = |y|\sqrt{2C - \frac{8}{y}}.$ (*3 балла*)

Классифицировать уравнение и решить задачу Коши:

3. $\dfrac{y}{y'} = \ln y, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = e$

$dx = \dfrac{\ln y\, dy}{y},$
$\displaystyle\int dx = \int \frac{\ln y\, dy}{y},$
$x = \dfrac{\ln^2 y}{2} + C,$
решение задачи Коши: $C = 0$,
$x = \dfrac{\ln^2 y}{2};$ (*3 балла*)

4. $y' \cos x + y \sin x = 1, \quad y(0) = 1$

$y' + y \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}$ — линейное уравнение,
$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = -\int \operatorname{tg} x\, dx,$
$y(x) = C\cos x, \quad \displaystyle\int dC = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx, \quad C(x) = \operatorname{tg} x + C_1,$
$y(x) = \sin x + C_1 \cos x,$
решение задачи Коши: $C_1 = 1, \quad y(x) = \sin x + \cos x.$ (*3 балла*)

min = 7, max = 12

Вариант 17

Классифицировать каждое из уравнений и найти его общий интеграл:

1. $(1+x^2)y' + y\sqrt{1+x^2} = xy$

$(1+x^2)y' = y(x-\sqrt{1+x^2})$,
$\dfrac{dy}{y} = \dfrac{(x-\sqrt{1+x^2})\,dx}{1+x^2}$,
$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \frac{(x-\sqrt{1+x^2})\,dx}{1+x^2}$,
$\ln|y| = \dfrac{\ln(1+x^2)}{2} - \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C$,
исключительное решение: $y \equiv 0$; *(3 балла)*

2. $x\ln\dfrac{x}{y}\,dy = y\,dx$

$y' = \dfrac{y}{x}\left(\ln\left(\dfrac{x}{y}\right)\right)^{-1}$ — однородное уравнение
$p = x/y, \quad x = p\cdot y, \quad x'_y = p'_y \cdot y + p$,
$p'_y \cdot y + p = p\ln p$,
$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{p\,(\ln p - 1)}\,dp$,
$\ln|y| = \ln|\ln p - 1| + C$,
$\ln|y| = \ln\left|\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) - 1\right| + C$. *(3 балла)*

Классифицировать уравнение и решить задачу Коши:

3. $2(y^3 - y + \frac{1}{2}xy)\,dy = dx, \quad y(2) = 0$

$x'_y - yx = 2y^3 - 2y$ — линейное уравнение,
$\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \int y\,dy$,
$x(y) = Ce^{\frac{y^2}{2}}$,
$\displaystyle\int dC = \int \frac{2y^3-2y}{e^{y^2/2}}\,dy$,
$C(y) = -2e^{-\frac{y^2}{2}}(1+y^2) + C_1$,
$x(y) = \left(-2e^{-\frac{y^2}{2}}(1+y^2) + C_1\right)e^{\frac{y^2}{2}} = -2(1+y^2) + C_1e^{\frac{y^2}{2}}$,
решение задачи Коши: $C_1 = 4$,
$x(y) = -2(1+y^2) + 4e^{\frac{y^2}{2}}$; *(3 балла)*

4. $(x-1)y' = y^2 + y, \quad y(0) = 1$

$y' - \dfrac{y}{x-1} = \dfrac{y^2}{x-1}$ — уравнение Бернулли,
$y(x) = u(x)v(x), \quad y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$,
$v' - \dfrac{v}{x-1} = 0, \quad u' = \dfrac{u^2v}{x-1}$,
$\displaystyle\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x-1}, \quad v(x) = \exp(\ln|x-1|) = |x-1|$,
$\displaystyle\int \frac{du}{u^2} = \int dx, \quad -\frac{1}{u} = x + C, \quad u(x) = -\frac{1}{x+C}$,
$y(x) = -\dfrac{|x-1|}{x+C}$,
исключительное решение: $y(x) \equiv 0$,
решение задачи Коши: $C = 1, \quad y(x) = -\dfrac{x-1}{x+1}$. *(3 балла)*

Вариант 18

Классифицировать каждое из уравнений и найти его общий интеграл:

1. $(x+y)\,dx+(y-x)\,dy=0$

$y'=\dfrac{y+x}{-y+x}$ — однородное уравнение
$z=y/x,\quad y=z\cdot x,\quad y'=z'\cdot x+z,$
$z'\cdot x+z=\dfrac{z+1}{1-z},$
$\displaystyle\int\frac{dx}{x}=\int\frac{1-z}{1+z^2}\,dz,$
$\ln|x|=-\dfrac{1}{2}\ln\left|1+z^2\right|+\operatorname{arctg}z+C,$
$\ln|x|=-\dfrac{1}{2}\ln\left|1+\dfrac{y^2}{x^2}\right|+\operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)+C,$
$\ln|x|=-\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x^2+y^2}{x^2}\right|+\operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)+C,$
$-\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2+y^2\right|+\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{y}\right)=C$; *(3 балла)*

2. $xe^xy'=x^3+2ye^x$

$y'-\dfrac{2y}{x}=x^2e^{-x}$ — линейное уравнение,
$\displaystyle\int\frac{dy}{y}=2\int\frac{dx}{x},$
$y(x)=Cx^2,$
$\displaystyle\int dC=\int e^{-x}\,dx,$
$C(x)=-e^{-x}+C_1,$
$y(x)=(C_1-e^{-x})x^2.$ *(3 балла)*

Классифицировать уравнение и решить задачу Коши:

3. $(y\ln x-2)y\,dx=x\,dy,\quad y(1)=4$

$y'+\dfrac{2y}{x}=\dfrac{y^2\ln x}{x}$ — уравнение Бернулли,
$y(x)=u(x)v(x),\quad y'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x),$
$v'+\dfrac{2v}{x}=0,\quad u'=\dfrac{\ln x}{x}u^2v,$
$\displaystyle\int\frac{dv}{v}=-2\int\frac{dx}{x},\quad v(x)=\exp(-2\ln|x|)=\frac{1}{x^2},$
$\displaystyle\int\frac{du}{u^2}=\int\frac{\ln x}{x^3}\,dx,\quad -\frac{1}{u}=-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}+C,\quad u(x)=\left(\frac{\ln x}{2x^2}+\frac{1}{4x^2}-C\right)^{-1},$
$y(x)=\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{\ln x}{2x^2}+\dfrac{1}{4x^2}-C\right)^{-1},\quad y(x)=\dfrac{4}{2\ln x+1-4Cx^2},$
исключительное решение: $y(x)\equiv 0,$
решение задачи Коши: $C=0,\quad y(x)=\dfrac{4}{2\ln x+1}$; *(3 балла)*

4. $\sqrt{4+y^2}\,dx-y\,dy=x^2y\,dy,\quad y(0)=0$

$\sqrt{4+y^2}\,dx=(1+x^2)y\,dy,$
$\dfrac{dx}{1+x^2}=\dfrac{y\,dy}{\sqrt{4+y^2}},$
$\displaystyle\int\frac{dx}{1+x^2}=\int\frac{y\,dy}{\sqrt{4+y^2}},$
$\operatorname{arctg}x=\sqrt{4+y^2}+C,$
решение задачи Коши: $C=-2,$
$\operatorname{arctg}x=\sqrt{4+y^2}-2.$ *(3 балла)*

min = 7, max = 12

Вариант 19

Классифицировать каждое из уравнений и найти его общий интеграл:

1. $y' + \dfrac{y}{x} = x^2 y^4$

$y' + \dfrac{y}{x} = y^4 x^2$ — уравнение Бернулли,
$y(x) = u(x)v(x), \quad y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$
$v' + \dfrac{v}{x} = 0, \quad u' = x^2 u^4 v^3,$
$\displaystyle\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x},$
$v(x) = \dfrac{1}{x},$
$\displaystyle\int \frac{du}{u^4} = \int \frac{dx}{x},$
$-\dfrac{1}{3u^3} = \ln|x| + C,$
$u(x) = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{3\ln|x| + 3C}},$
$y(x) = -\dfrac{1}{x\sqrt[3]{3\ln|x| + 3C}},$
исключительное решение: $y(x) \equiv 0$; *(3 балла)*

2. $xy' = y + x \operatorname{tg} \dfrac{y}{x}$

$y' = \dfrac{y}{x} + \operatorname{tg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ — однородное уравнение
$z = y/x, \quad y = z \cdot x, \quad y' = z' \cdot x + z,$
$z' \cdot x + z = z + \operatorname{tg} z,$
$\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \int \operatorname{ctg} z \, dz,$
$\ln|x| = \ln|\sin z| + C,$
$\ln|x| = \ln\left|\sin \dfrac{y}{x}\right| + C$. *(3 балла)*

Классифицировать уравнение и решить задачу Коши:

3. $y\,dx = (x + \ln y)\,dy, \quad y(0) = 1$

$x'_y - \dfrac{x}{y} = \dfrac{\ln y}{y}$ — линейное уравнение,
$\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y},$
$x(y) = y,$
$\displaystyle\int dC = \int \frac{\ln y}{y^2}\,dy, \quad C(y) = -\frac{\ln y}{y} - \frac{1}{y} + C_1 = -\frac{\ln y + 1}{y} + C_1,$
$x(y) = -\ln y - 1 + C_1 y,$
решение задачи Коши: $C_1 = 1, \quad x(y) = -\ln y - 1 + y;$ *(3 балла)*

4. $x\,dy - y^2\,dx = y\,dx, \quad y(1) = 1$

$x\,dy = (y + y^2)\,dx,$
$\dfrac{dy}{y^2 + y} = \dfrac{dx}{x},$
$\displaystyle\int \frac{dy}{y^2 + y} = \int \frac{dx}{x}, \quad \ln|y| - \ln|y+1| = \ln|x| + C,$
исключительные решения: $x \equiv 0, \quad y \equiv -1, \quad y \equiv 0,$
решение задачи Коши: $C = -\ln 2, \quad \ln|y| - \ln|y+1| = \ln|x| - \ln 2, \ \frac{y}{y+1} = \frac{x}{2}.$ *(3 балла)*

Вариант 20

Классифицировать каждое из уравнений и найти его общий интеграл:

1. $y\,dx + \left(x - \dfrac{1}{2}x^3y\right)dy = 0$

$x'_y + \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2}x^3$ — уравнение Бернулли,
$x(y) = u(y)v(y), \quad x'_y(y) = u'_y(y)v(y) + u(y)v'_y(y),$
$v'_y + \dfrac{v}{y} = 0, \quad u'_y = \dfrac{1}{2}u^3v^2,$
$\displaystyle\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dy}{y}, \quad v(y) = \frac{1}{|y|},$
$\displaystyle\int \frac{du}{u^3} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y^2}, \quad -\frac{1}{2u^2} = -\frac{1}{2y} + C, \quad u(y) = \frac{1}{\sqrt{y^{-1} - 2C}},$
$x(y) = \dfrac{1}{|y|\sqrt{y^{-1} - 2C}},$
$x(y) = \dfrac{1}{\sqrt{y - 2Cy^2}},$
исключительные решения: $x(y) \equiv 0$, $y \equiv 0$; *(3 балла)*

2. $(y - x)\,dx + (y + x)\,dy = 0$

$y' = \dfrac{-y + x}{y + x}$ — однородное уравнение
$z = y/x, \quad y = z \cdot x, \quad y' = z' \cdot x + z,$
$z' \cdot x + z = -\dfrac{z - 1}{z + 1},$
$\displaystyle\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{z + 1}{z^2 + 2z - 1}\,dz,$
$\ln|x| = -\dfrac{1}{2}\ln\left|z^2 + 2z - 1\right| + C,$
$\ln|x| = -\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{2y}{x} - 1\right| + C,$
$\ln|x| = -\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{y^2 + 2xy - x^2}{x^2}\right| + C,$
$y^2 + 2xy - x^2 = C_1$
исключительные решения: $y = (1 - \sqrt{2})x$, $y = (1 + \sqrt{2})x$. *(3 балла)*

Классифицировать уравнение и решить задачу Коши:

3. $y' + 3y\,\mathrm{tg}\,3x = \sin 6x, \quad y(0) = \frac{1}{3}$

$y' + 3y\,\mathrm{tg}\,3x = \sin 6x$ — линейное уравнение,
$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = -3\int \mathrm{tg}\,3x\,dx,$
$y(x) = \dfrac{C}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\,3x}},$
$\displaystyle\int dC = \int \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\,3x}\,\sin 6x\,dx, \quad C(x) = -\frac{2}{3}|\cos 3x| + C_1,$
$y(x) = -\dfrac{2}{3}\cos^2 3x + C_1|\cos 3x|,$
решение задачи Коши: $C_1 = 1$,
$y(x) = -\dfrac{2}{3}\cos^2 3x + |\cos 3x|;$ *(3 балла)*

4. $(1 + e^x)yy' = e^{y+x}, \quad y(0) = -1$

$ye^{-y}\,dy = \frac{e^x\,dx}{1+e^x},$
$\displaystyle\int ye^{-y}\,dy = \int \frac{e^x\,dx}{1 + e^x},$
$-e^{-y}(y + 1) = \ln(1 + e^x) + C,$
решение задачи Коши: $C = -\ln 2$,
$-e^{-y}(y + 1) = \ln(1 + e^x) - \ln 2.$ *(3 балла)*

min = 7, max = 12

Вариант 21

Классифицировать каждое из уравнений и найти его общий интеграл:

1. $3e^x \operatorname{tg} y\, dx + (1-e^x)\dfrac{1}{\cos^2 y}\, dy = 0$

$\dfrac{3e^x\, dx}{1-e^x} = -\dfrac{dy}{\operatorname{tg} y \cos^2 y}$,
$\displaystyle\int \dfrac{3e^x\, dx}{1-e^x} = -\int \dfrac{dy}{\operatorname{tg} y \cos^2 y}$,
$-3\ln|1-e^x| = -\ln|\operatorname{tg} y| + C$,
исключительные решения: $x \equiv 0, \quad y \equiv \pi k, \quad k \in Z$; *(3 балла)*

2. $(y^4 - 3x^2)\, dy + xy\, dx = 0$

$x'_y - 3\dfrac{x}{y} = -\dfrac{y^3}{x}$ — уравнение Бернулли,
$x(y) = u(y)v(y), \quad x'_y(y) = u'_y(y)v(y) + u(y)v'_y(y)$,
$v'_y - 3\dfrac{v}{y} = 0, \quad u'_y = -\dfrac{y^3}{uv^2}$,
$\displaystyle\int \dfrac{dv}{v} = 3\int \dfrac{dy}{y}$,
$v(y) = |y|^3$,
$\displaystyle\int u\, du = -\int \dfrac{dy}{y^3}$,
$\dfrac{u^2}{2} = \dfrac{1}{2y^2} + C$,
$u(y) = \sqrt{y^{-2} + 2C}$,
$x(y) = |y|^3\sqrt{y^{-2}+2C} = y^2\sqrt{1+2Cy^2}$
исключительное решение: $y(x) \equiv 0$. *(3 балла)*

Классифицировать уравнение и решить задачу Коши:

3. $xy' = xe^{y/x} + y, \quad y(1) = 0$

$y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$ — однородное уравнение
$z = y/x, \quad y = z \cdot x, \quad y' = z' \cdot x + z$,
$z' \cdot x + z = e^z + z$,
$\displaystyle\int \dfrac{dx}{x} = \int e^{-z}\, dz$,
$\ln|x| = -e^{-z} + C$,
$\ln|x| = -e^{-\frac{y}{x}} + C$,
решение задачи Коши: $C = 1$,
$\ln|x| = -e^{-\frac{y}{x}} + 1$; *(3 балла)*

4. $x(x-1)y' + y = x^2(2x-1), \quad y(2) = 0$

$y' + \dfrac{y}{x(x-1)} = \dfrac{x(2x-1)}{x-1}$ — линейное уравнение,
$\displaystyle\int \dfrac{dy}{y} = -\int \dfrac{1}{x(x-1)}\, dx$,
$y(x) = \dfrac{Cx}{x-1}$,
$\displaystyle\int dC = \int (2x-1)\, dx$,
$C(x) = x^2 - x + C_1$,
$y(x) = \dfrac{(x^2 - x + C_1)x}{x-1} = x^2 + \dfrac{C_1 x}{x-1}$,
решение задачи Коши: $C_1 = -2$,
$y(x) = x^2 - \dfrac{2x}{x-1}$. *(3 балла)*

min = 7, max = 12

Вариант 22

Классифицировать каждое из уравнений и найти его общий интеграл:

1. $y' - y\cos x + \sin 2x = 0$

$y' - y\cos x = -\sin 2x$ — линейное уравнение,
$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \cos x\, dx,$
$y(x) = Ce^{\sin x},$
$\displaystyle\int dC = -\int \frac{\sin 2x}{e^{\sin x}}\, dx, \quad C(x) = 2e^{-\sin x}(\sin x + 1) + C_1,$
$y(x) = \left(2e^{-\sin x}(\sin x + 1) + C_1\right) e^{\sin x} = 2(\sin x + 1) + C_1 e^{\sin x};$ *(3 балла)*

2. $2x(x^2 + y^2)\, dy = y(y^2 + 2x^2)\, dx$

$\displaystyle y' = \frac{1}{2}\frac{y\left(y^2 + 2x^2\right)}{x\left(x^2 + y^2\right)}$ — однородное уравнение
Первый способ:
$z = y/x, \quad y = z \cdot x, \quad y' = z' \cdot x + z,$
$\displaystyle z' \cdot x + z = \frac{1}{2}\frac{z\left(z^2 + 2\right)}{1 + z^2},$
$\displaystyle\int \frac{dx}{x} = -2\int \frac{1 + z^2}{z^3}\, dz, \quad \ln|x| = z^{-2} - 2\ln|z| + C,$
$\displaystyle\ln|x| = \frac{x^2}{y^2} - 2\ln\left|\frac{y}{x}\right| + C.$
Второй способ:
$p = x/y, \quad x = p \cdot y, \quad x'_y = p'_y \cdot y + p,$
$\displaystyle p'_y \cdot y + p = \frac{2p\left(p^2 + 1\right)}{1 + 2p^2}, \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{1 + 2p^2}{p}\, dp,$
$\ln|y| = p^2 + \ln|p| + C,$
$\displaystyle\ln|y| = \frac{x^2}{y^2} + \ln\left|\frac{y}{x}\right| + C.$ *(3 балла)*

Классифицировать уравнение и решить задачу Коши:

3. $xy' - 2y - xy^3 = 0, \quad y(1) = 1$

$\displaystyle y' - 2\frac{y}{x} = y^3$ — уравнение Бернулли,
$y(x) = u(x)v(x), \quad y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$
$\displaystyle v' - \frac{2v}{x} = 0, \quad u' = u^3v^2,$
$\displaystyle\int \frac{dv}{v} = \int \frac{2\, dx}{x}, \quad v(x) = \exp(2\ln|x|) = x^2,$
$\displaystyle\int \frac{du}{u^3} = \int x^4\, dx, \quad -\frac{1}{2u^2} = \frac{1}{5}x^5 + C, \quad u(x) = \frac{1}{\sqrt{-\frac{2}{5}x^5 - 2C}},$
$\displaystyle y(x) = \frac{5x^2}{\sqrt{-10x^5 - 50C}},$
исключительное решение: $y(x) \equiv 0,$
решение задачи Коши: $C = -\frac{7}{10}, \quad \displaystyle y(x) = \frac{5x^2}{\sqrt{-10x^5 + 35}};$ *(3 балла)*

4. $\displaystyle y'\cos x = \frac{y}{\ln y}, \quad y(0) = e$

$\displaystyle\frac{\ln y\, dy}{y} = \frac{dx}{\cos x},$
$\displaystyle\int \frac{\ln y\, dy}{y} = \int \frac{dx}{\cos x},$
$\displaystyle\frac{\ln^2 y}{2} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C,$
исключительные решения: $\displaystyle x \equiv \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z,$
решение задачи Коши: $\displaystyle C = \frac{1}{2}, \quad \frac{\ln^2 y}{2} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + \frac{1}{2}.$ *(3 балла)*

min = 7, max = 12

Вариант 23

Классифицировать каждое из уравнений и найти его общий интеграл:

1. $(y^2+xy^2)y'+x^2-yx^2=0$

$y^2(1+x)y'+x^2(1-y)=0,$
$y^2(1+x)\,dy=x^2(y-1)\,dx,$
$\dfrac{y^2\,dy}{y-1}=\dfrac{x^2\,dx}{1+x},$
$\displaystyle\int\frac{y^2\,dy}{y-1}=\int\frac{x^2\,dx}{1+x},$
$\ln|y-1|+\dfrac{y^2}{2}+y=\ln|x+1|+\dfrac{x^2}{2}-x+C,$
исключительные решения: $x\equiv-1,\quad y\equiv1;$ *(3 балла)*

2. $(xy+x^2y^3)\,dy=dx$

$x'_y-yx=x^2y^3$ — уравнение Бернулли,
$x(y)=u(y)v(y),\quad x'_y(y)=u'_y(y)v(y)+u(y)v'_y(y),$
$v'_y-yv=0,\quad u'_y=y^3u^2v,$
$\displaystyle\int\frac{dv}{v}=\int y\,dy,\qquad v(y)=e^{\frac{y^2}{2}},$
$\displaystyle\int\frac{du}{u^2}=\int e^{\frac{y^2}{2}}y^3\,dy,\qquad -\frac{1}{u}=(y^2-2)e^{\frac{y^2}{2}}+C,\qquad u(y)=\frac{1}{(2-y^2)e^{\frac{y^2}{2}}-C},$
$x(y)=\dfrac{e^{\frac{y^2}{2}}}{(2-y^2)e^{\frac{y^2}{2}}-C},$
исключительное решение: $x(y)\equiv0$. *(3 балла)*

Классифицировать уравнение и решить задачу Коши:

3. $\dfrac{dx}{y+x}=\dfrac{dy}{y-x},\quad y\left(\dfrac{1}{\sqrt2}\right)=\dfrac{1}{\sqrt2}$

$y'=\dfrac{y-x}{y+x}$ — однородное уравнение
$z=y/x,\quad y=z\cdot x,\quad y'=z'\cdot x+z,$
$z'\cdot x+z=\dfrac{z-1}{z+1},$
$\displaystyle\int\frac{dx}{x}=\int-\frac{z+1}{1+z^2}\,dz,$
$\ln|x|=-\dfrac12\ln\left(1+z^2\right)-\operatorname{arctg}z+C,$
$\ln|x|=-\dfrac12\ln\left(1+\dfrac{y^2}{x^2}\right)-\operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)+C,$
$\dfrac12\ln\left(x^2+y^2\right)=-\operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)+C,$
решение задачи Коши: $C=\frac{\pi}{4},$
$\dfrac12\ln\left(x^2+y^2\right)=-\operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)+\dfrac{\pi}{4}$; *(3 балла)*

4. $xy'=2y+2(\ln^2x-\ln x),\quad y(1)=2$

$y'-\dfrac{2y}{x}=\dfrac{2\ln^2x-2\ln x}{x}$ — линейное уравнение,
$\displaystyle\int\frac{dy}{y}=2\int\frac{dx}{x},$
$y(x)=Cx^2,$
$\displaystyle\int dC=\int\frac{2\ln^2x-2\ln x}{x^3}\,dx,$
$C(x)=-\dfrac{\ln^2x}{x^2}+C_1,$
$y(x)=-\ln^2x+C_1x^2,$
решение задачи Коши: $C_1=2,$
$y(x)=-\ln^2x+2x^2.$ *(3 балла)*

min = 7, max = 12

Вариант 24

Классифицировать каждое из уравнений и найти его общий интеграл:

1. $xy' - y = x \operatorname{tg} \dfrac{y}{x}$

$y' = \dfrac{y}{x} + \operatorname{tg} \dfrac{y}{x}$ — однородное уравнение

Первый способ:

$z = y/x, \quad y = z \cdot x, \quad y' = z' \cdot x + z,$

$z' \cdot x + z = z + \operatorname{tg} z, \quad \displaystyle\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dz}{\operatorname{tg} z},$

$\ln|x| = \ln|\sin z| + C,$

$\ln|x| = \ln\left|\sin \dfrac{y}{x}\right| + C.$

Второй способ:

$p = x/y, \quad x = p \cdot y, \quad x'_y = p'_y \cdot y + p,$

$p'_y \cdot y + p = \dfrac{p}{1 + \operatorname{tg}(p^{-1})\, p}, \quad \displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int -\frac{1 + \operatorname{tg}\left(p^{-1}\right) p}{p^2 \operatorname{tg}(p^{-1})}\, dp,$

$\ln|y| = \ln\left|\sin \dfrac{1}{p}\right| - \ln|p| + C,$

$\ln|y| = \ln\left|\sin \dfrac{y}{x}\right| - \ln \dfrac{x}{y} + C,$

$\ln|x| = \ln\left|\sin \dfrac{y}{x}\right| + C;$ (*3 балла*)

2. $xy' + 2y = xyy'$

$x(1-y)y' + 2y = 0,$

$\dfrac{(y-1)\, dy}{y} = 2x\, dx,$

$\displaystyle\int \frac{(y-1)\, dy}{y} = \int 2x\, dx,$

$y - \ln|y| = x^2 + C,$

исключительное решение: $y \equiv 0.$ (*3 балла*)

Классифицировать уравнение и решить задачу Коши:

3. $yx\, dx = (x^2 - y^4)\, dy, \quad y(-3) = 1$

$x'_y - \dfrac{x}{y} = -\dfrac{y^3}{x}$ — уравнение Бернулли,

$x(y) = u(y)v(y), \quad x'_y(y) = u'_y(y)v(y) + u(y)v'_y(y),$

$v'_y - \dfrac{v}{y} = 0, \quad u'_y = -\dfrac{y^3}{uv^2},$

$\displaystyle\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dy}{y},$

$v(y) = |y|,$

$\displaystyle\int u\, du = -\int y\, dy,$

$\dfrac{u^2}{2} = -\dfrac{y^2}{2} + C, \quad u(y) = \pm\sqrt{2C - y^2},$

$x(y) = \pm|y|\sqrt{2C - y^2} = \pm\sqrt{2Cy^2 - y^4},$

решение задачи Коши: $C = 5, \quad x(y) = -\sqrt{10y^2 - y^4};$ (*3 балла*)

4. $y' \sin x - y \cos x = 1, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

$y' - y \operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\sin x}$ — линейное уравнение,

$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \operatorname{ctg} x\, dx,$

$y(x) = C \sin x,$

$\displaystyle\int dC = \int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx, \quad C(x) = -\operatorname{ctg} x + C_1,$

$y(x) = -\cos x + C_1 \sin x,$

решение задачи Коши: $C_1 = 0, \quad y(x) = -\cos x.$ (*3 балла*)

$\min = 7, \ \max = 12$

Классифицировать каждое из уравнений и найти его общий интеграл:

1. $xy' = \dfrac{3y^3 + 14x^2 y}{3y^2 + 7x^2}$

$y' = \dfrac{3y^3 + 14x^2 y}{(3y^2 + 7x^2)\,x}$ — однородное уравнение
$z = y/x, \quad y = z \cdot x, \quad y' = z' \cdot x + z,$
$z' \cdot x + z = \dfrac{z\left(3z^2 + 14\right)}{3z^2 + 7}, \quad \displaystyle\int \frac{dx}{x} = \int \frac{3z^2 + 7}{z^3 + 7z}\, dz,$
$\ln|x| = \ln\left(z^3 + 7z\right) + C,$
$z^3 + 7z = Cx$
$y^3 + 7yx^2 - Cx^4$; *(3 балла)*

2. $x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$

$\dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\dfrac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}},$
$\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}},$
$-\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-y^2} + C,$
исключительные решения: $x \equiv \pm 1, \quad y \equiv \pm 1.$ *(3 балла)*

Классифицировать уравнение и решить задачу Коши:

3. $ye^{-y^2} \sin y\, dy = dx + 2xy\, dy, \quad y(1) = 0$

$x'_y + 2yx = ye^{-y^2} \sin y$ — линейное уравнение,
$\displaystyle\int \frac{dx}{x} = -\int 2y\, dy,$
$x(y) = Ce^{-y^2},$
$\displaystyle\int dC = \int y \sin(y)\, dy,$
$C(y) = \sin y - y\cos y + C_1,$
$x(y) = (\sin y - y\cos y + C_1)e^{-y^2},$
решение задачи Коши: $C_1 = 0,$
$x(y) = (\sin y - y\cos y)e^{-y^2};$ *(3 балла)*

4. $x\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0, \quad y\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

$x'_y + x = \dfrac{y^2}{x}$ — уравнение Бернулли,
$x(y) = u(y)v(y), \quad x'_y(y) = u'_y(y)v(y) + u(y)v'_y(y),$
$v'_y + v = 0, \quad u'_y = \dfrac{y^2}{uv^2},$
$\displaystyle\int \frac{dv}{v} = -\int dy, \quad v(y) = e^{-y},$
$\displaystyle\int u\, du = \int e^{2y} y^2\, dy, \quad \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{4}\left(1 - 2y + 2y^2\right)e^{2y} + C, \quad u(y) = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1 - 2y + 2y^2\right)e^{2y} + 2C},$
$x(y) = \pm e^{-y}\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1 - 2y + 2y^2\right)e^{2y} + 2C},$
решение задачи Коши: $C = \frac{1}{4}, \quad x(y) = -e^{-y}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - 2y + 2y^2\right)e^{2y} + \frac{1}{2}}.$ *(3 балла)*

Вариант 26

Классифицировать каждое из уравнений и найти его общий интеграл:

1. $(xy - x)\,dx + (xy + x - y - 1)\,dy = 0$

$x(y-1)\,dx + (x-1)(y+1)\,dy = 0,$
$-\dfrac{x\,dx}{x-1} = \dfrac{(y+1)\,dy}{y-1},$
$-\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x-1} = \int \frac{(y+1)\,dy}{y-1},$
$-\ln|x-1| - x = 2\ln|y-1| + y + C,$
исключительные решения: $x \equiv 1, \quad y \equiv 1;$ (*3 балла*)

2. $(x - y)\,dx + x\,dy = 0$

$y' = \dfrac{y}{x} - 1$ — однородное уравнение
$z = y/x, \quad y = z \cdot x, \quad y' = z' \cdot x + z,$
$z' \cdot x + z = z - 1,$
$z' = -\dfrac{1}{x},$
$\displaystyle\int z\,dz = -\int \frac{1}{x}\,dx,$
$z = -\ln|x| + C,$
$\dfrac{y}{x} = -\ln|x| + C,$
$y = -x\ln|x| + Cx$
исключительное решение $x \equiv 0.$ (*3 балла*)

Классифицировать уравнение и решить задачу Коши:

3. $2x^2y' + y + e^{1/x} = 0, \quad y(1) = e$

$y' + \dfrac{y}{2x^2} = -\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{2x^2}$ — линейное уравнение,
$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{2x^2},$
$y(x) = Ce^{\frac{1}{2x}}, \quad \displaystyle\int dC = -\int \frac{e^{\frac{1}{2x}}}{2x^2}\,dx, \quad C(x) = e^{\frac{1}{2x}} + C_1,$
$y(x) = \left(e^{\frac{1}{2x}} + C_1\right)e^{\frac{1}{2x}},$
решение задачи Коши: $C_1 = 0,$
$y(x) = e^{\frac{1}{x}};$ (*3 балла*)

4. $y\,dx + x^2(2 + \ln y)\,dy = -x\,dy, \quad y\left(-\frac{1}{4}\right) = 1$

$x'_y + \dfrac{x}{y} = -\dfrac{2+\ln y}{y}x^2$ — уравнение Бернулли,
$x(y) = u(y)v(y), \quad x'_y(y) = u'_y(y)v(y) + u(y)v'_y(y),$
$v'_y + \dfrac{v}{y} = 0, \quad u'_y = -\dfrac{2+\ln y}{y}u^2v,$
$\displaystyle\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dy}{y}, \quad v(y) = \frac{1}{y},$
$\displaystyle\int \frac{du}{u^2} = -\int \frac{2+\ln y}{y^2}\,dy, \quad -\frac{1}{u} = \frac{3}{y} + \frac{\ln y}{y} + C, \quad u(y) = -\left(\frac{3}{y} + \frac{\ln y}{y} + C\right)^{-1},$
$x(y) = -\left(3 + \ln y + Cy\right)^{-1},$
исключительное решение: $x(y) \equiv 0,$
решение задачи Коши: $C = 1, \quad x(y) = -\dfrac{1}{3 + \ln y + y}.$ (*3 балла*)

min = 7, max = 12

Вариант 27

Классифицировать каждое из уравнений и найти его общий интеграл:

1. $y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$

$y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$ — линейное уравнение,
$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = -\int \cos x\,dx,$
$y(x) = Ce^{-\sin x},$
$\displaystyle\int dC = \frac{1}{2}\int e^{\sin x}\sin 2x\,dx,$
$C(x) = e^{\sin x}(\sin x - 1) + C_1,$
$y(x) = \sin x - 1 + C_1 e^{-\sin x};$ *(3 балла)*

2. $(1+y^2)(e^{2x}\,dx - e^y\,dy) - (1+y)\,dy = 0$

$e^{2x}\,dx - e^y\,dy = \dfrac{(1+y)\,dy}{1+y^2},$
$\displaystyle\int e^{2x}\,dx = \int \frac{(1+y)\,dy}{1+y^2} + \int e^y\,dy,$
$\dfrac{e^{2x}}{2} = \operatorname{arctg} y + \dfrac{\ln(1+y^2)}{2} + e^y + C.$ *(3 балла)*

Классифицировать уравнение и решить задачу Коши:

3. $y' + \dfrac{1}{y} = \dfrac{y}{2x}, \quad y(1) = -1$

$y' - \dfrac{1}{2x}y = -y^{-1}$ — уравнение Бернулли,
$y(x) = u(x)v(x), \quad y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$
$v' - \dfrac{v}{2x} = 0, \quad u' = -\dfrac{1}{uv^2},$
$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{2x},$
$v(x) = \exp(1/2\ln|x|) = \sqrt{|x|},$
$\int u\,du = -\int \frac{dx}{x},$
$\frac{u^2}{2} = -\ln x + C,$
$u(x) = \pm\sqrt{C - 2\ln x},$
$y(x) = \pm\sqrt{|x|(C - 2\ln x)},$
решение задачи Коши: $C = 1$,
$y(x) = -\sqrt{x(1 - 2\ln x)};$ *(3 балла)*

4. $y' = \dfrac{y}{x} + \sin\dfrac{y}{x}, \quad y(1) = \dfrac{\pi}{2}$

$y' = \dfrac{y}{x} + \sin\dfrac{y}{x}$ — однородное уравнение
$z = y/x, \quad y = z\cdot x, \quad y' = z'\cdot x + z,$
$z'\cdot x + z = z + \sin z,$
$\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dz}{\sin z},$
$\ln|x| = \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{z}{2}\right| + C,$
$\ln|x| = \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{y}{2x}\right| + C,$
решение задачи Коши: $C = 0$,
$\ln|x| = \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{y}{2x}\right|.$ *(3 балла)*

Вариант 28

Классифицировать каждое из уравнений и найти его общий интеграл:

1. $y' + \dfrac{y}{x} = -xy^2$

$y' + \dfrac{y}{x} = -y^2 x$ — уравнение Бернулли,
$y(x) = u(x)v(x), \quad y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$
$v' + \dfrac{v}{x} = 0, \quad u' = -xu^2 v,$
$\displaystyle\int \frac{dv}{v} = \int -x^{-1}\,dx,$
$v(x) = \dfrac{1}{x},$
$\displaystyle\int \frac{du}{u^2} = -\int dx,$
$-\dfrac{1}{u} = -x + C,$
$u(x) = (x+C)^{-1},$
$y(x) = \dfrac{1}{x\,(x+C)},$
исключительное решение: $y(x) \equiv 0$; *(3 балла)*

2. $(x^2 - yx^2)y' + y^2 + xy^2 = 0$

$x^2(1-y)y' + y^2(1+x) = 0,$
$\dfrac{(1-y)\,dy}{y^2} = -\dfrac{(1+x)\,dx}{x^2},$
$\displaystyle\int \frac{(1-y)\,dy}{y^2} = -\int \frac{(1+x)\,dx}{x^2},$
$-\dfrac{1}{y} - \ln|y| = \dfrac{1}{x} - \ln|x| + C,$
исключительное решение: $y \equiv 0$. *(3 балла)*

Классифицировать уравнение и решить задачу Коши:

3. $(x+y)\,dx + x\,dy = 0, \quad y(1) = 1$

$y' = \dfrac{-y-x}{x}$ — однородное уравнение
$z = y/x, \quad y = z\cdot x, \quad y' = z'\cdot x + z,$
$z'\cdot x + z = -z - 1,$
$\displaystyle\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{dz}{2z+1},$
$\ln|x| = -\dfrac{1}{2}\ln|2z+1| + C,$
$\ln|x| = -\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{2y}{x} + 1\right| + C,$
$\ln|x| = -\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{2y+x}{x}\right| + C,$
$x(2y+x) = C_1,$
решение задачи Коши: $C_1 = 3$,
$x(2y+x) = 3$; *(3 балла)*

4. $y' - \dfrac{5}{x}y = e^x x^5, \quad y(1) = 2e$

$y' - \dfrac{5y}{x} = e^x x^5$ — линейное уравнение,
$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = 5\int \frac{dx}{x},$
$y(x) = Cx^5,$
$\displaystyle\int dC = \int e^x\,dx, \quad C(x) = e^x + C_1,$
$y(x) = (e^x + C_1)\,x^5,$
решение задачи Коши: $C_1 = e, \quad y(x) = (e^x + e)\,x^5.$ *(3 балла)*

min = 7, max = 12

Вариант 29

Классифицировать каждое из уравнений и найти его общий интеграл:

1. $xyy' = y^2 + 2x^2$

$$y' = \frac{y^2+2x^2}{xy} \text{ — однородное уравнение}$$
$$z = y/x, \quad y = z \cdot x, \quad y' = z' \cdot x + z,$$
$$z' \cdot x + z = \frac{z^2+2}{z},$$
$$\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\int z\,dz,$$
$$\ln|x| = \frac{1}{4}z^2 + C,$$
$$\ln|x| = \frac{y^2}{4x^2} + C\ ;$$

(*3 балла*)

2. $(1+e^{2x})y^2\,dy = e^x\,dx$

$$(1+e^{2x})y^2\,dy = e^x\,dx,$$
$$y^2\,dy = \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx,$$
$$\int y^2\,dy = \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx,$$
$$\frac{y^3}{3} = \operatorname{arctg} e^x + C.$$

(*3 балла*)

Классифицировать уравнение и решить задачу Коши:

3. $y' + xy = x^3y^3, \quad y(0) = 2$

$$y' + xy = y^3x^3 \text{ — уравнение Бернулли},$$
$$y(x) = u(x)v(x), \quad y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$
$$v' + xv = 0, \quad u' = x^3u^3v^2,$$
$$\int \frac{dv}{v} = -\int x\,dx,$$
$$v(x) = e^{-\frac{x^2}{2}},$$
$$\int \frac{du}{u^3} = \int \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^2 x^3\,dx,$$
$$-\tfrac{1}{2u^2} = -\tfrac{1}{2}\left(1+x^2\right)e^{-x^2} + C,$$
$$u(x) = \pm\tfrac{1}{\sqrt{(1+x^2)e^{-x^2}-2C}},$$
$$y(x) = \pm\tfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{(1+x^2)e^{-x^2}-2C}},$$

исключительное решение: $y(x) \equiv 0$,

решение задачи Коши: $C = \frac{3}{8}$,

$$y(x) = \tfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{(1+x^2)e^{-x^2}-\frac{3}{4}}};$$

(*3 балла*)

4. $\left(\sin y - \dfrac{x}{y}\right)y' = 1, \quad y(1) = \pi$

$$x'_y + \frac{x}{y} = \sin y \text{ — линейное уравнение},$$
$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{dy}{y},$$
$$x(y) = \frac{C}{y},$$
$$\int dC = \int y\sin y\,dy,$$
$$C(y) = \sin y - y\cos y + C_1,$$
$$x(y) = \frac{\sin y - y\cos y + C_1}{y},$$

решение задачи Коши: $C_1 = 0$,

$$x(y) = \frac{\sin y - y\cos y}{y}.$$

(*3 балла*)

min = 7, max = 12

Вариант 30

Классифицировать каждое из уравнений и найти его общий интеграл:

1. $e^y(1+x^2)\,dy - 2x(1+e^y)\,dx = 0$

$$\frac{e^y\,dy}{1+e^y} = \frac{2x\,dx}{1+x^2},$$
$$\int \frac{e^y\,dy}{1+e^y} = \int \frac{2x\,dx}{1+x^2},$$
$$\ln(1+e^y) = \ln(1+x^2) + C,$$
$$1+e^y = C(1+x^2),$$
$$y = \ln(C(1+x^2)-1);$$

(*3 балла*)

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{\arcsin \frac{y}{x}}$

$$y' = \frac{y}{x} + \left(\arcsin\left(\frac{y}{x}\right)\right)^{-1} \text{ — однородное уравнение}$$
$$z = y/x, \quad y = z\cdot x, \quad y' = z'\cdot x + z,$$
$$z'\cdot x + z = z + \frac{1}{\arcsin z},$$
$$\int \frac{dx}{x} = \int \arcsin z\,dz,$$
$$\ln|x| = z\arcsin z + \sqrt{1-z^2} + C,$$
$$\ln|x| = \frac{y}{x}\arcsin\left(\frac{y}{x}\right) + \sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}} + C\ .$$

(*3 балла*)

Классифицировать уравнение и решить задачу Коши:

3. $dx = (2y + x\,\mathrm{tg}\,y - y^2\,\mathrm{tg}\,y)\,dy, \quad y(0) = \pi$

$$x'_y - \mathrm{tg}(y)x = 2y - y^2\,\mathrm{tg}\,y \text{ — линейное уравнение,}$$
$$\int \frac{dx}{x} = \int \mathrm{tg}\,y\,dy,$$
$$x(y) = \frac{C}{\cos y},$$
$$\int dC = \int \left(2y - y^2\,\mathrm{tg}\,y\right)\cos y\,dy,$$
$$C(y) = \int y\,(2\cos y - y\sin y)\,dy,$$
$$C(y) = y^2\cos y + C_1,$$
$$x(y) = \frac{y^2\cos y + C_1}{\cos y} = y^2 + \frac{C_1}{\cos y},$$
решение задачи Коши: $C_1 = \pi^2$,
$$x(y) = y^2 + \frac{\pi^2}{\cos y};$$

(*3 балла*)

4. $y' + y = e^{x/2}\sqrt{y}, \quad y(0) = \frac{9}{4}$

$$y' + y = e^{\frac{x}{2}}\sqrt{y} \text{ — уравнение Бернулли,}$$
$$y(x) = u(x)v(x), \quad y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$
$$v' + v = 0, \quad u' = e^{\frac{x}{2}}\sqrt{\tfrac{u}{v}},$$
$$\int \frac{dv}{v} = -\int dx, \quad v(x) = e^{-x},$$
$$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int e^x\,dx, \quad 2\sqrt{u} = e^x + C, \quad u(x) = \left(\frac{e^x + C}{2}\right)^2,$$
$$y(x) = e^{-x}\left(\frac{e^x + C}{2}\right)^2,$$
исключительное решение: $y(x) \equiv 0$,

решение задачи Коши: $C = 2, \quad y(x) = e^{-x}\left(\dfrac{e^x + 2}{2}\right)^2.$

(*3 балла*)

$\min = 7, \max = 12$