МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ІМЕНІ МИХАЙЛА ОСТРОГРАДСЬКОГО

Кафедра комп’ютерної інженерії та електроніки

ЗВІТ

ПРО ВИКОНАННЯ ПРАКТИЧНИХ РОБІТ

з навчальної дисципліни

**«Ймовірнісно-статистичні методи інформаційних технологій»**

Студент гр. КН-23-1 Ярковий Т.С.

Викладач к. т. н., доц. В.М. Сидоренко

Кременчук 2024

**Практична робота № 5**

**Тема. Закони розподілу та числові характеристики випадкових величин**

**Мета:** набути практичних навичок у розв’язанні задач щодо знаходження законів розподілу та числових характеристик дискретних та неперервних випадкових величин, зокрема нормального закону, та розв’язання типових задач до цієї теми.

**Задачі для самостійного розв’язання**

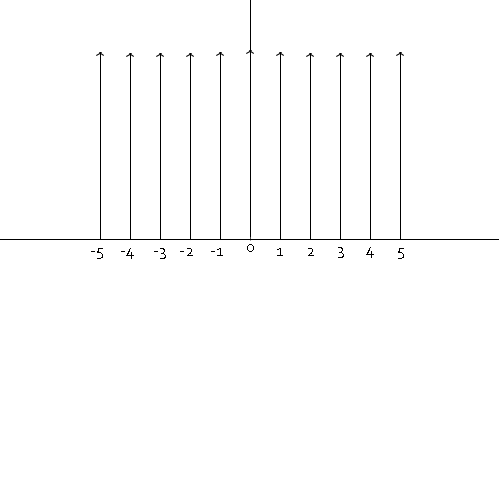
3. Двічі кинута гральна кістка. ДВВ – різниця між кількістю очок унаслідок першого кидання та кількістю очок унаслідок другого кидання. Необхідно: 1) знайти закон розподілу ДВВ; 2) побудувати графік функції щільності розподілу ДВВ;   
3) знайти ймовірність події.

1)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | -1 | -2 | -3 | -4 | -5 |
| P | 1/36 | 2/36 | 3/36 | 4/36 | 5/36 | 6/36 | 5/36 | 4/36 | 3/36 | 2/36 | 1/36 |

2) Для знаходження щільності використаємо -функцію Дірака.

f​(x)=1/36\*​δ(x+5)+2/36\*​δ(x+4)+3/36\*​δ(x+3)+4/36\*​δ(x+2)+5/36\*​δ(x+1) +6/36\*δ(x)+5/36\*𝛿(𝑥−1)+4/36\*𝛿(𝑥−2)+3/36\*𝛿(𝑥−3)+2/36\*𝛿(𝑥−4)+1/36\*𝛿(𝑥−5).



3) Ймовірності усіх можливих подій описані у законі розподілу ДВВ.

4. В урні 7 кульок, з яких 4 білі, а інші – чорні. З цієї урни навмання беруть 3 кульки. ДВВ – кількість білих кульок. Необхідно: 1) знайти закон розподілу ДВВ; 2) виразити функцію розподілу та функцію щільності розподілу ДВВ за допомогою функції Хевісайда та -функції Дірака; 3) побудувати графіки функцій розподілу та щільності розподілу; 4) знайти ймовірність події ;   
5) побудувати багатокутник розподілу; 6) знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, теоретичні початкові та центральні моменти 3-го та 4-го порядку; 7) знайти асиметрію та ексцес.

1)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| X | 0 | 1 | 2 | 3 |
| p | (C33)/(C37)=1/35 | (C14\*C23)/C37 =12/35 | (C24\*C13)/C37=18/35 | (C34)/C37=4/35 |

2) Функція розподілу

F(x) = = p1(x-x1) + p2(x-x2) + p3(x-x3) + p4(x-x4) =

(1/35)\*(x-0) + (12/35)\*(x-1) + (18/35)\*(x-2) + (4/35)\*(x-3)

F(0) = 1/35 \* 1 + 0 + 0 +0 = 1/35

F(1) = 1/35 + 12/35 + 0 + 0 = 13/35

F(2) = 1/35 + 12/35 + 18/35 + 0 = 31/35

F(3) = 1/35 + 12/35 + 18/35 + 4/35 = 1

Функція щільності:

f(x) = p1 (x-x1) + p2(x-x2) + p3(x-x3) + p4(x-x4) =

(1/35)\*(x-0) + (12/35)\*(x-1) + (18/35)\*(x-2) + (4/35)\*(x-3)

f(0) = + 0 + 0 +0

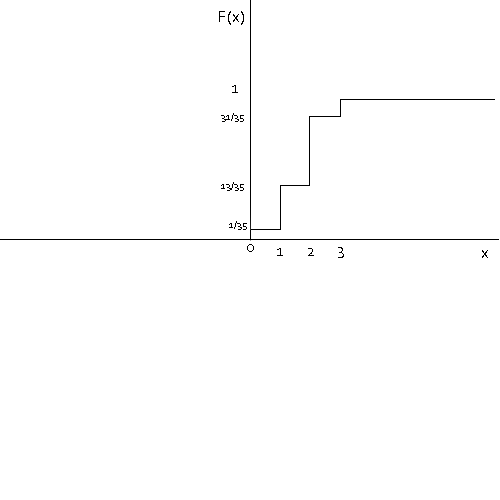
f(1) = 0 + + 0 +0

f(2) = 0 + 0 + +0

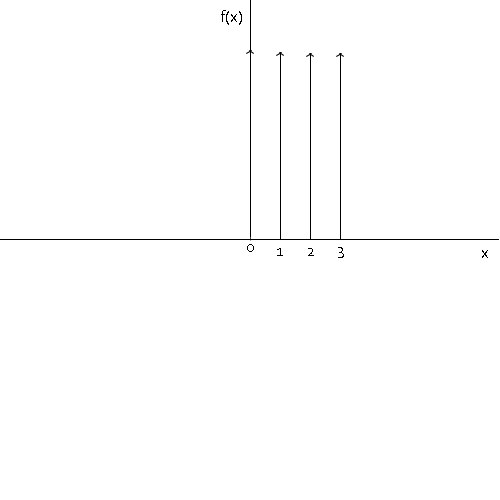
f(3) = 0 + 0 + 0 +

3) побудувати графіки функцій розподілу(a) та щільності розподілу(б)

а)



б)



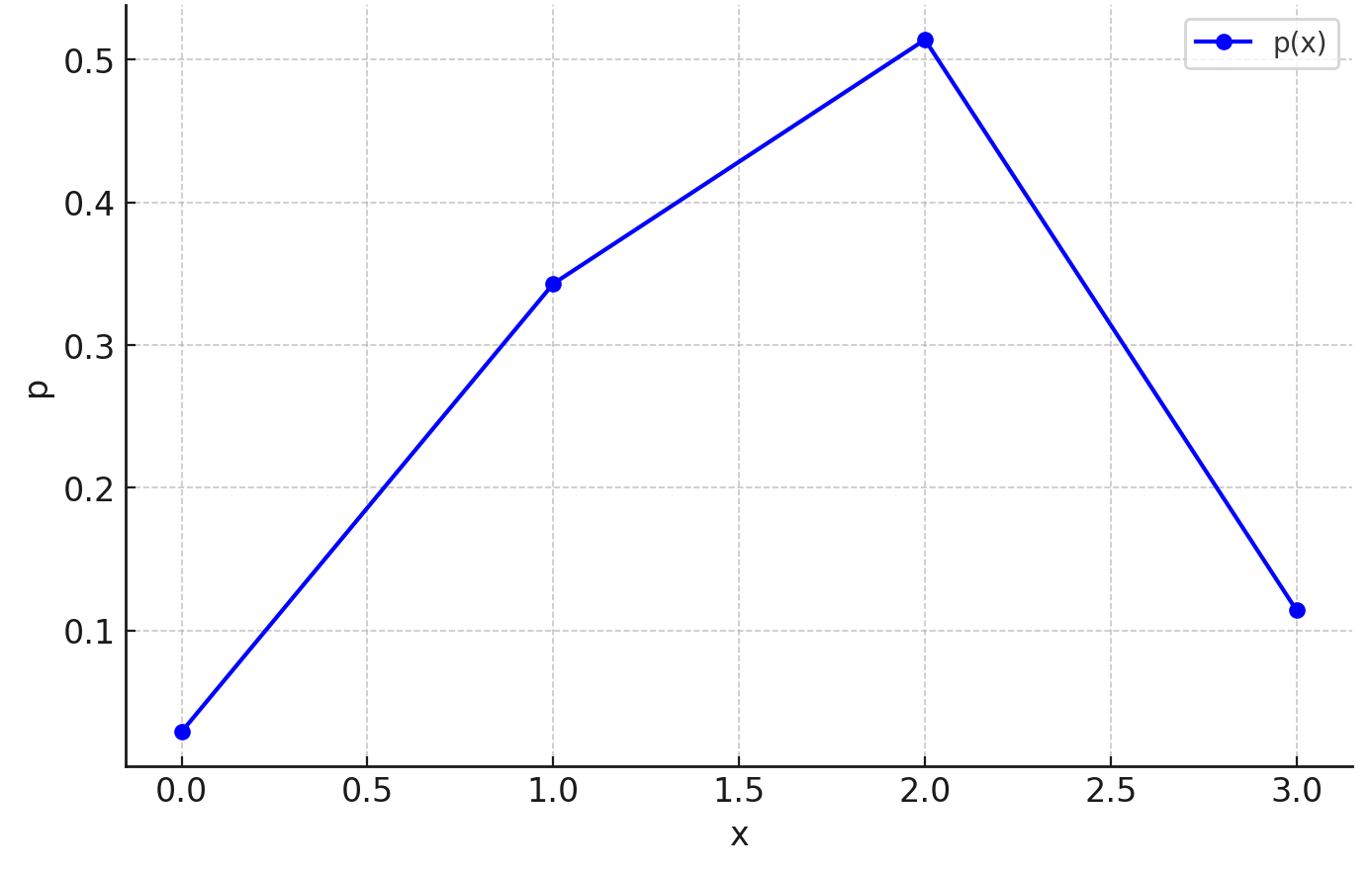
4)

x=1 або x=2 або x=3.

P = 12/35 + 18/35 + 4/35 = 34/35

5) Багатокутник розподілу

Точки: (0, 0.029), (1, 0.343), (2, 0.514), (3, 0.114)



6) Математичне сподівання

M(x) = x1\*p1 + x2\*p2+ x3\*p3 + x4\*p4 = 0\*1/35 + 1\*12/35 + 2\*18/35 + 3\*4/35= (12 + 36 + 12)/35 = 60/35

Дисперсія

M(x2) = x12\*p1 + x22\*p2+ x32\*p3 + x42\*p4 = 0\*1/35 + 1\*12/35 + 4\*18/35 + 9\*4/35= (12 + 72 + 36)/35 = 120/35

= 120/35 - (60/35)2 = ( 4200 - 3600)/1225 = 600/1225 = 0,489

Середнє квадратичне відхилення

= 0,699

Початкові та центральні моменти 3-го та 4-го порядку

Початкові моменти:

3 ступеня

Vk = M(xk)

V3= M(x3) = x13\*p1 + x23\*p2+ x33\*p3 + x43\*p4 = 0\*1/35 + 1\*12/35 + 8\*18/35 + 27\*4/35= (12 + 144 + 108)/35 = 264/35

4 ступеня

V4= M(x4) = x14\*p1 + x24\*p2+ x34\*p3 + x44\*p4 = 0\*1/35 + 1\*12/35 + 16\*18/35 + 81\*4/35= (12 + 288 + 324)/35 = 624/35

Центральні моменти:

k  =

3 ступеня

3 = (0 - 60/35)3 \* 1/35 + (1 - 60/35)3 \* 12/35 + (2 - 60/35)3 \* 18/35 + (3 - 60/35)3 \* 4/35 = 0.014

4 ступеня

4 = (0 - 60/35)4 \* 1/35 + (1 - 60/35)4 \* 12/35 + (2 - 60/35)4 \* 18/35 + (3 - 60/35)4 \* 4/35 = 0,652

7)

Асиметрія

An = 3 / 3 = 0.014 / 0,6993 = 0.014 / 0.341 = 0,041

Ексцес

Ek = 4 / 4 = 0,652/ 0,6994 = 0.652 / 0.239 = 2,728

5. Завод відправив на базу 500 цілих деталей. Імовірність зіпсування кожної деталі в дорозі . Знайти закон розподілу ДВВ , що дорівнює кількості зіпсованих деталей, і знайти ймовірності подій:

* пошкоджено менше, ніж 3 деталі;
* пошкоджено більше, ніж 2 деталі;
* пошкоджено хоча б одну деталь.

n = 500, p = 0.002.

P(X=k) = = np = 500 \* 0.002 = 1

Пошкоджено k = 0 деталей

P(X=0) = = 1/e = 0.368

Пошкоджена k = 1 деталь

P(X=1) = 1/e = 0.368

Пошкоджено k = 2 деталі

P(X=2) = = 1/(2e) = 0.184

Пошкоджено k = 3 деталі

P(X=3) = = 1/(6e) = 0.061

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| X | 0 | 1 | 2 | 3 |
| p | 0.368 | 0.368 | 0.184 | 0.061 |

Функція розподілу

F(x) = = p1(x-x1) + p2(x-x2) + p3(x-x3) + p4(x-x4) =

0.368\*(x-0) + 0.368\*(x-1) + 0.184\*(x-2) + 0.061\*(x-3)

F(0) = 0.368 + 0 + 0 +0 = 0.368

F(1) = 0.368 + 0.368 + 0 + 0 = 0,736

F(2) = 0.368 + 0.368 + 0.184+ 0 = 0,92

F(3) = 0.368 + 0.368 + 0.184 + 0.061= 0,981

* пошкоджено менше, ніж 3 деталі

F(2) = 0,92

* пошкоджено більше, ніж 2 деталі

P = 1 - F(2) = 0.08

* пошкоджено хоча б одну деталь

P = 1 – F(0) = 1 – 0.368 = 0.632

6. Два стрілки роблять по одному пострілу в одну мішень. Імовірність влучення для першого стрілка внаслідок одного пострілу , для другого – . ДВВ – кількість влучень у мішень. Необхідно: 1) знайти закон розподілу ДВВ , що дорівнює кількості влучень у мішень; 2) виразити функцію розподілу та функцію щільності розподілу ДВВ за допомогою функції Хевісайда та –функції Дірака; 3) побудувати графіки функцій розподілу та щільності розподілу; 4) знайти ймовірності подій та ; 5) побудувати багатокутник розподілу; 6) знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, теоретичні початкові та центральні моменти 3-го та 4-го порядку; 7) знайти асиметрію та ексцес.

1)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| X | 0 | 1 | 2 |
| P | 0.5 \* 0.6 = 0.3 | 0.5\*0.6 + 0.5\*0.4 = 0.5 | 0.5 \* 0.4 = 0.2 |

2) Функція розподілу

F(x) = = p1(x-x1) + p2(x-x2) + p3(x-x3) =

0.3\*(x-0) + 0.9\*(x-1) + 0.2\*(x-2)

F(0) = 0.3 + 0 + 0 = 0.3

F(1) = 0.3 + 0.5 + 0 = 0.8

F(2) = 0.3 + 0.5 + 0.2= 1

Функція щільності:

f(x) = p1 (x-x1) + p2(x-x2) + p3(x-x3) =

0.3\*(x-0) + 0.5\*(x-1) + 0.2\*(x-2)

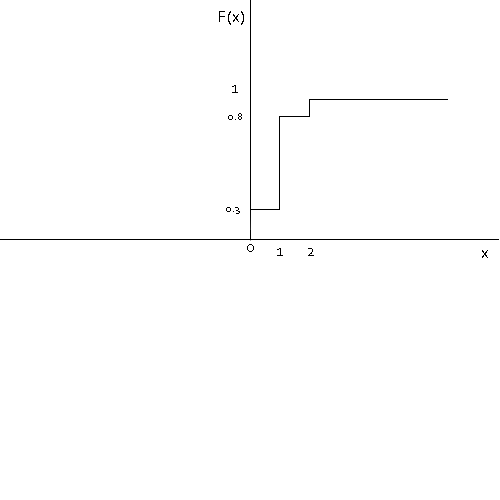
f(0) = + 0 + 0

f(1) = 0 + + 0

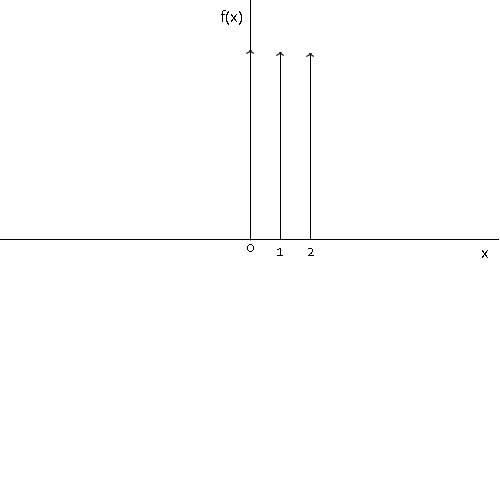
f(2) = 0 + 0 +

3) побудувати графіки функцій розподілу(a) та щільності розподілу(б)

а)



б)



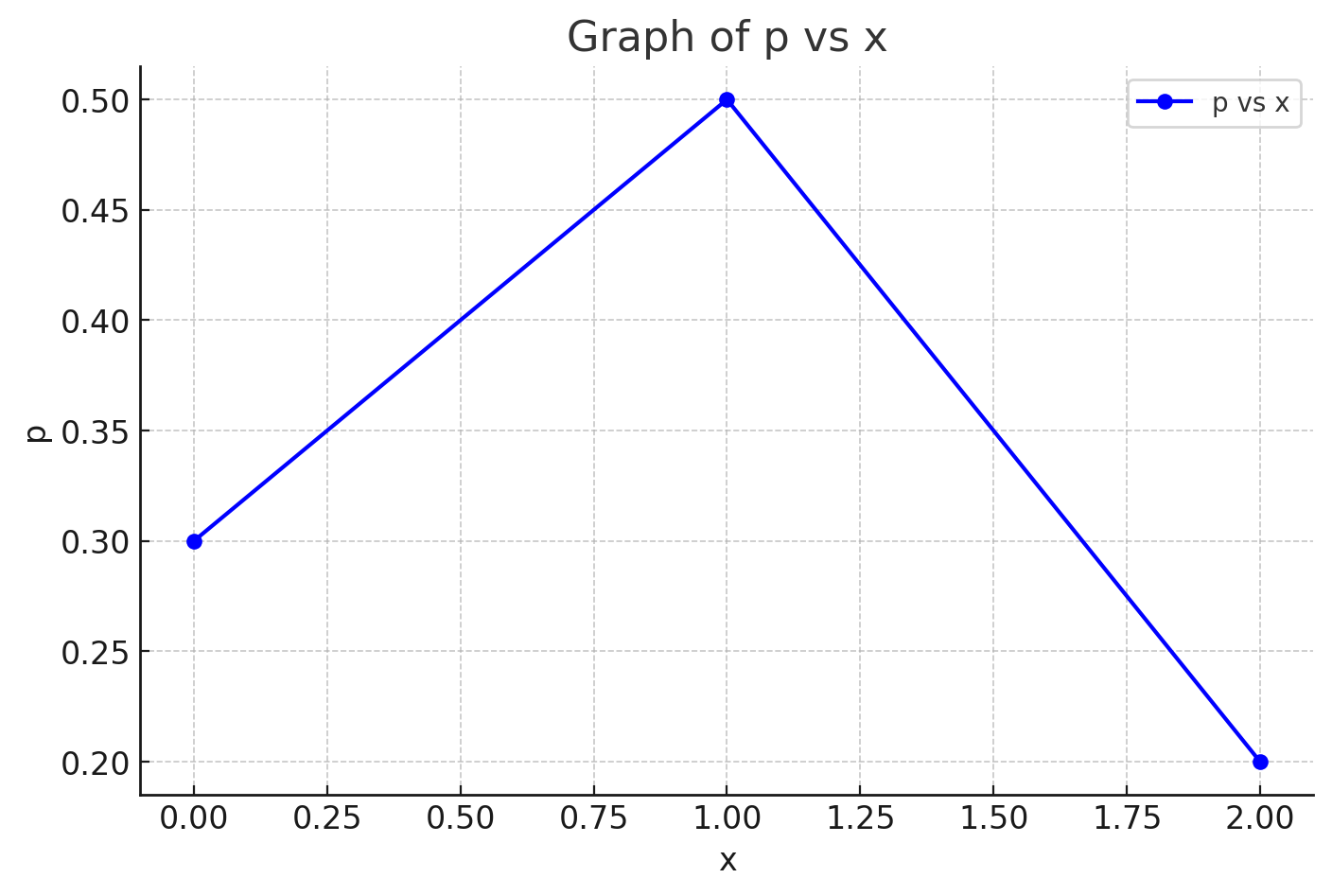
4) знайти ймовірності подій та

x – кількість влучень. сюди включаються події 1 влучення та 2 влучення 0.3 + 0.5 = 0.8.

x > 3 максимальна кількість влучень 2, тому ймовірність p(x>3) = 0.

5) Багатокутник розподілу

Точки: (0, 0.3), (1, 0.5), (2, 0.2)



6) Математичне сподівання

M(x) = x1\*p1 + x2\*p2+ x3\*p3 = 0\*0.3 + 1\*0.5+ 2\*0.2 = 0.5 + 0.4 = 0.9

Дисперсія

M(x2) = x12\*p1 + x22\*p2+ x32\*p3 = 0\*0.3 + 1\*0.5 + 4\*0.2 = 1.3

= 1.3 - (0.9)2 = 1.3 – 0.81= 0.49

Середнє квадратичне відхилення

= 0.7

Початкові та центральні моменти 3-го та 4-го порядку

Початкові моменти:

3 ступеня

Vk = M(xk)

V3= M(x3) = x13\*p1 + x23\*p2+ x33\*p3 = 0\*0.3 + 1\*0.5 + 8\*0.2 = 2.1

4 ступеня

V4= M(x4) = x14\*p1 + x24\*p2+ x34\*p3 = 0\*0.3 + 1\*0.5 + 16\*0.2 = 3.7

Центральні моменти:

k  =

3 ступеня

3 = (0 - 0.9)3 \*0.3 + (1 - 0.9)3 \*0.5 + (2 - 0.9)3 \* 0.2 = 0.048

4 ступеня

4 = (0 - 0.9)4 \*0.3 + (1 - 0.9)4 \*0.5 + (2 - 0.9)4 \* 0.2 = 0.49

7)

Асиметрія

An = 3 / 3 = 0.048 / 0.73 = 0.048 / 0.343 = 0.14

Ексцес

Ek = 4 / 4 = 0.49/ 0.74 = 0.49/0.2401 = 2.041

7. НВВ має рівномірний розподіл з параметрами . Функція щільності рівномірного розподілу . Вивести формулу функції рівномірного розподілу , формулу для математичного сподівання , дисперсії , асиметрії , ексцесу , імовірності події .

Функція щільності має рівномірний розподіл, тому

Згідно з визначенням . Якщо , то , отже, . Якщо , то , отже,

.

Якщо , то

.

Отже, шукана функція розподілу (рис. 5.3)

.

Математичне сподівання

Дисперсія

Асиметрія

As = 3 / 3

Ексцес

Ek = 4 / 4

Імовірності події .

**Контрольні питання**

1. Навести кілька прикладів дискретної випадкової величини.

Підкидання монети, кубика.

1. Навести кілька прикладів неперервної випадкової величини.

Швидкість автомобіля, температура повітря, місце падіння піщинок у пісочному годиннику.

1. Чи для всіх розподілів існують математичне сподівання і дисперсія?

Математичне сподівання може не існувати для розподілів із «великими хвостами» (висока імовірність екстримальних значень). Наприклад розподіл Коші. Дисперсія не існує коли не існує математичне сподівання. Дисперсія не існує, якщо інтеграл для обчислення має розхідний процес (немає скінченого значення).

1. Як виправдати використання математичного сподівання як числової характеристики для розподілу, який не має скінченного математичного сподівання?

В таких випадках можна обчислювати математичне сподівання для певного проміжку, а не для всього інтервалу.

1. Яка форма закону розподілу є універсальною і може бути застосовна як для ДВВ, так і для НВВ?

Універсальним є рівномірний закон розподілу.

1. Які альтернативні числові характеристики можна використовувати для опису розподілу, якщо математичне сподівання не відображає його повністю?

Для опису розподілу також можна використовувати моду та медіану.

1. У чому полягає ймовірнісний та статистичний сенс математичного сподівання?

Ймовірнісний смисл: математичне сподівання наближено дорівнює (тим точніше, чим більша кількість випробувань) середньому арифметичному спостережуваних значень випадкової величини. Центр тяжіння.

Статистичний сенс: очікуване значення, оцінка тенденції та прогнозування.

1. Чому важливо враховувати асиметрію та ексцес під час аналізу розподілу величин?

Ці велечини допомагають краще зрозуміти поведінку розподілу. Асиметрія описує нахил. Ексцес описує характеристики гостровершинності розподілу.

1. Чому, якщо для певної ВВ не існує математичного сподівання, то не існує дисперсія, асиметрія і ексцес? Відповідь обґрунтуйте.

Для обчислення дисперсії використовується математичне сподівання, тому без нього значення дисперсії не отримати. Для обчислення асиметрії та ексцесу необхідно знати значення середньоквадратичного відхилення, яке дорівнює кореню з дисперсії. Отже без математичного сподівання неможливо обчислити всі ці значення.

1. Чому на практиці часто можна апріорі вважати розподіл ВВ нормальним?

При великій кількості значень більшість ВВ будуть мати розподіл подібний до нормального.