Домашнее задание №10

Томинин Ярослав, 778 группа

19 ноября 2018 г.

1.

Рассмотрим наш язык. Разделим его на два множества:

1) Слова, в которых есть нарушение(слово содержит одно из подслов ba,cb,ca)

2) Слова, которые имеют вид $a^k b^z c^d$, причем одновременно k,z,d не равны друг другу

Утверждение: Каждое слово из языка принадлежит хотя бы одному множеству(факт того, что слово не принадлежит одновременно двум множествам оставим без доказательста, считая, что он сразу следует из построения)

Доказательство: От противного. Предположим, что нашлось такое слово из языка, которое не принадлежит ни одному множеству, тогда в нем нет нарушений и мы его можем представить в виде $a^k b^z c^d$, но это означает, что оно принадлежит второму множеству. Противоречие.

Рассмотрим следующие подмножества: подмножество состоит из слов вида$a^k b^z c^d$, где k>z(k>d,z>k,z>d,d>k,d>z). Эти шесть множест могут пересекаться друг с другом, но главное, что из объединение дает наше 2 множество.

Построим грамматики для каждого из шести подмножеств.

Грамматика$G_1, k > z$

$$
\begin{aligned}
S_1 &\to A_1 B_1 C_1 \\
A_1 &\to aA_1 | a \\
B_1 &\to aB_1 b | \epsilon \\
C_1 &\to cC_1 | \epsilon
\end{aligned}
$$

Утвержение: данная грамматика выводит множество, состоящее из слов вида$a^k b^z c^d$, где k>z.

Доказательство: эта грамматика является конкатенацией трех грамматик, которые выводят языки $a^k, k > 0; a^q b^q, q \geq 0; c^t, t \geq 0$. Поэтому их конкатенация выводит нужное множество.

Данное утверждение можно расширить на z>d,k<z,z<d грамматики, поэтому дли них мы не будем это доказывать.

Грамматика$G_2, k > d$

$$
\begin{aligned}
S_2 &\to A_2 C_2 \\
A_2 &\to aA_2 | a \\
B_2 &\to B_2 b | \epsilon \\
C_2 &\to aC_2 c | \epsilon | B_2
\end{aligned}
$$

Идея этой грамматики заключается в том,что мы порождаем слово $a^k a^m C c^m, k > 0$ и потом можем заменить нетерминал С на В и вывести произвольное количество букв В. Эта грамматика выводит все слова из нашего 2 подмножества и при этом только их, так как нет нарушения и букв а точно больше, чем букв с. Это рассуждение распространяется на оставшееся множество. **Грамматика**$G_3, z > k$

$$\begin{aligned} S_3 &\to A_3B_3C_3 \\ A_3 &\to aA_3b|\epsilon \\ B_3 &\to B_3b|b \\ C_3 &\to cC_3|\epsilon \end{aligned}$$

Грамматика$G_4, z > d$

$$\begin{aligned} S_4 &\to A_4B_4C_4 \\ A_4 &\to aA_4|\epsilon \\ B_4 &\to B_4b|b \\ C_4 &\to bC_4c|\epsilon \end{aligned}$$

Грамматика$G_5, d > k$

$$\begin{aligned} S_5 &\to A_5C_5 \\ A_5 &\to aA_5c|\epsilon|B_5 \\ B_5 &\to B_5b|\epsilon \\ C_5 &\to C_5c|c \end{aligned}$$

Грамматика$G_6, d > z$

$$\begin{aligned} S_6 &\to A_6B_6C_6 \\ A_6 &\to aA_6|\epsilon \\ B_6 &\to bB_6c|\epsilon \\ C_6 &\to C_6c|c \end{aligned}$$

Построим грамматику для первого множества:

ГрамматикаG_7, существует нарушение

$$
\begin{aligned}
&S_7 \to A_7baA_7|A_7caA_7|A_7cbA_7 \\
&A_7 \to aA_7|bA_7|cA_7|\epsilon
\end{aligned}
$$

Эта грамматика является конкатенацией произвольного слова нарушения и произвольного слова, поэтому это и есть наше множество 1.
В результате получим грамматику:

ГрамматикаG

$$
\begin{aligned}
S &\to S_1|S_2|S_3|S_4|S_5|S_6|S_7 \\
S_1 &\to A_1B_1C_1 \\
A_1 &\to aA_1|a \\
B_1 &\to aB_1b|\epsilon \\
C_1 &\to cC_1|\epsilon \\
S_2 &\to A_2C_2 \\
A_2 &\to aA_2|a \\
B_2 &\to B_2b|\epsilon \\
C_2 &\to aC_2c|\epsilon|B_2 \\
S_3 &\to A_3B_3C_3 \\
A_3 &\to aA_3b|\epsilon \\
B_3 &\to B_3b|b \\
C_3 &\to cC_3|\epsilon \\
S_4 &\to A_4B_4C_4 \\
A_4 &\to aA_4|\epsilon \\
B_4 &\to B_4b|b \\
C_4 &\to bC_4c|\epsilon \\
S_5 &\to A_5C_5 \\
A_5 &\to aA_5c|\epsilon|B_5 \\
B_5 &\to B_5b|\epsilon \\
C_5 &\to C_5c|c \\
S_6 &\to A_6B_6C_6 \\
A_6 &\to aA_6|\epsilon \\
B_6 &\to bB_6c|\epsilon \\
C_6 &\to C_6c|c \\
S_7 &\to A_7baA_7|A_7caA_7|A_7cbA_7 \\
A_7 &\to aA_7|bA_7|cA_7|\epsilon
\end{aligned}
$$

2.
Да, это КС-язык. Для того, чтобы это понять, достаточно его переписать в виде:
$\{^n b^n b^m c^m | n, m \geq 0\}$
Мы знаем, что для языка $a^n b^n$ грамматика выглядит так:

ГрамматикаG_1

$$S_1 \to aS_1b|\epsilon$$

Для языка b^mc^m грамматика выглядит так:
ГрамматикаG_2

$$S_2 \to bS_2c|\epsilon$$

Тогда их конкатенация и есть наш язык:
ГрамматикаG

$$S \to S_1S_2$$
$$S_1 \to aS_1b|\epsilon$$
$$S_2 \to bS_2c|\epsilon$$

3.
1)Поймем, что $A \setminus R = A \cap \overline{R}$. Так как регулярные языки замкнуты относительно дополнения и при этом мы можем строить кострукцию произведения для регулярного языка и КС-языка. Исходя из этого, полученный язык будет КС-языком.
2)Нет, это не верно.
Контрпример: $R = \sum^*$, $A = \overline{B}, B = uu|u \in \sum^*$. Так как мы доказывали, что А-КС-язык и мы так же доказывали, что В не является КС-языком. Результат будет равен В, который не является КС-языком.
3)Да, верно. Так как это КС-язык, то рассмотрим грамматику, если все слова α, находящиеся в грамматике справа заменить на α^R, то мы получим грамматику, которая будет выводить A^R.
4.
Напишем отрицание леммы о накачке:

$$\forall p \exists w \in L : |w| \geq p, \forall x, u, y, v, z : |uyv| \leq p; |uv| > 0, \exists i \geq 0 : w_i = xu^iyv^iz \notin L$$

Возьмем для произвольного p слово $w = a^{2p}a^pb^pa^{2p}$
Разбиением будем называть uyv.
Разбиение этого слова может лежать в a^{2p}, тогда мы накачаем несколько а и так как количество букв изменится, то слово x будет содержать только а, а x^R(на самом деле это не x^R, мы просто называем так третью

часть слова) справа точно будет содержать b, поэтому слово не принадлежит языку.
Если разбиение лежит между a^{2p} и a^p, то проделаем то же самое и получим слово не из языка.
Если разбиение между a^p и b^p, то возьмем i=2, тогда длина увеличится меньше , чем на p, поэтому x будет содержать только a, а x^R(на самом деле это не x^R, мы просто называем так третью часть слова) справа точно будет содержать b, поэтому слово не принадлежит языку.
Если разбиение между b^p и a^p, то тогда разбиение имеет вид:$a^{2p}a^pb^quyva^w$.
Возможны следующие случаи:
u содержит и b, и a(при этом v пустое)
v содержит и b, и a(при этом u пустое)
в u и v содержатся либо только a, либо только b
Обоснуем: если не выполняется третье и в u,v не могут быть одновременно a и b(так как есть только один переход от b к a), то получается, что либо u, либо v -пустое слово, а другое содержит и a, и b.(так как оба пустых быть не может по лемме о накачке) А это и есть 1,2 утверждения. То есть все возможные варианты лежат в этих трех случаях.
В первом случае возьмем i=3p(длина каждой трети станет не меньше, чем 4p), тогда заметим, что количество букв a справа до первой буквы b равно p(причем эта буква b точно входит в третью треть слова). А количество букв a слева до первой b равно 3p. Следовательно, мы нашли слово, которое не принадлежит языку.
Во втором случае проделаем все то же самое и прийдем к тому же противоречию.
В третьем случае, если u,v содержат одинаковые буквы, то в случае, если они оба содержат a, выберем i=6p(длина каждой трети станет не меньше, чем 4p), тогда в правой трети будут только a, а в левой после 3p символов a будет стоять b. Поэтому слово будет не принадлежать языку.
Если u,v содержат буквы b, то выберем i=6p(длина каждой трети станет не меньше, чем 4p), тогда в правой части будет идти p букв a, а потом бужет стоять b, а левой части первыми 3p буквыми будут a. Поэтому слово не принадлежит языку.
Рассмотрим случай, когда в u,v по отдельности содержат только один тип символов, но при этом они содержат разные символы. Тогда мы точно знаем, что u содержит b, а v содержит a. Наше слово имеет вид $a^{2p}a^pb^{p-q}b^qa^{2p-r}a^r, |u| = q; |v| = r$
Тогда , выбирая i=kp+1, получим слово $a^{2p}a^pb^{p(1+kq)}a^{p(2+kr)}$ Если r=0, то q точно больше 0, и если мы возьмем k=6, то длина слова будет не меньше, чем 12p, заметим, что в правой трети справа стоит 2p букв a, а потом b, а в левой трети слева стоит 3p букв a, а потом b. Поэтому слово

не принадлежит языку.
Если $r \neq 0$, то выберем k=6p,то длина слова будет не меньше, чем 12p, и правая треть состоит только из a, а левая содержит b. Следовательно слово не принадлежит языку.
Следовательно язык не является регулярным.

5.

Вычислим FIRST

F_i	E	T	F	E'	T'
F_0	$\oslash$	$\oslash$	$\oslash$	ϵ	ϵ
F_1	$\oslash$	$\oslash$	(,id	$\epsilon, +$	$\times, \epsilon$
F_2	$\oslash$	(,id	(,id	$\epsilon, +$	$\times, \epsilon$
F_3	$(, id$	(,id	(,id	$\epsilon, +$	$\times, \epsilon$

Теперь вычислим FOLLOW

F_i	E	T	F	E'	T'
F_0	$\oslash$	$\oslash$	$\oslash$	$\oslash$	$\oslash$
F_1	)	+	$\times$	$\oslash$	$\oslash$
F_2	)	+,)	$\times, +$	)	+
F_3	)	+,)	$\times, +,)$	)	$+,)$
F_4	)	+,)	$\times, +,)$	)	$+,)$