Домашнее задание №2

Томинин Ярослав, 778 группа

18 февраля 2018 г.

1.
Поймем, что

$$\frac{n^{\frac{5}{2}}}{4\sqrt{2}} \leqslant \frac{n^{\frac{5}{2}}}{4\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{8}{n^2}+\frac{40}{n^3}} \leqslant \frac{n}{2}\sqrt{\frac{n^3}{8}+n+5} \leqslant \sum_{1\ldots n}\sqrt{i^3+2i+5} \leqslant n^{\frac{5}{2}}\sqrt{1+\frac{2}{n^2}+\frac{5}{n^3}} \leqslant 8n^{\frac{5}{2}}$$

Отсюда видно, что $h(n) = \Theta(n^{\frac{5}{2}})$
2.
Поймем, что

$$\exists N : 2^n \leqslant (3+o(1))^n \leqslant 4^n$$

Отсюда следует, что

$$n \leqslant log_2 2^n + \Theta(n^{100}) \leqslant log_2 f(n) \leqslant log_2 4^n + \Theta(n^{100}) \leqslant 2n + log_2\frac{\Theta(n^{100})}{2^n} \leqslant 2n+1$$

В одном неравенстве был использован тот факт, что показательная функция при достаточно больших n растет быстрее, чем степенная.
Видим, что в общем случае верно $log f(x) = \Theta(n)$
3.
Поймем, что общее количество слов можно задать такой формулой

$$\sum_{b=1}^{\sqrt{n}}\sum_{i=0}^{b}(log_2 n+\sum_{j=0}^{\frac{i}{2}}1) \leqslant \sum_{b=1}^{\sqrt{n}}\sum_{i=0}^{b}(log_2 n+\frac{(i+1)}{2}) \leqslant \sum_{b=1}^{\sqrt{n}}(b\log_2 n+b\frac{(b+1)}{2}) \leqslant n\log_2 n+n^{\frac{3}{2}} = O(n^{\frac{3}{2}})$$

С друой стороны

$$\sum_{b=1}^{\sqrt{n}}\sum_{i=0}^{b}(log_2 n+\sum_{j=0}^{\frac{i}{2}}1) \geq \sum_{b=1}^{\sqrt{n}}\sum_{i=0}^{b}(log_2 n+\frac{i}{2}) \geq \sum_{b=1}^{\sqrt{n}}(\frac{b}{2}\log_2 n+\frac{b}{2}\frac{(\frac{b}{2}+1)}{2}) \geq \frac{n}{4}\log_2 n+\frac{n^{\frac{3}{2}}}{8} = \Omega(n^{\frac{3}{2}})$$

Следовательно $f(x) = \Theta(n^{\frac{3}{2}})$
4.
а)
238x+385y=133;
$238 = 2*7*17$
$385 = 5*7*11$
$133 = 19*7$
$x_1 = \frac{x}{19}$
$y_1 = \frac{y}{19}$
Тогда получим $238x_1 + 385y_1 = 7$;
Если сократим $34x_1 + 55y_1 = 1$; a=34, b=55

$a_a = 1, a_b = 0, b_a = 0, b_b = 1$
a=34, b=21
$a_a = 1, a_b = 0, b_a = -1, b_b = 1$
a=13, b=21
$a_a = 2, a_b = -1, b_a = -1, b_b = 1$
a=13,b=8
$a_a = 2, a_b = -1, b_a = -3, b_b = 2$
a=5,b=8
$a_a = 5, a_b = -3, b_a = -3, b_b = 2$
a=5,b=3
$a_a = 5, a_b = -3, b_a = -8, b_b = 5$
a=2,b=3
$a_a = 13, a_b = -8, b_a = -8, b_b = 5$
a=2,b=1
$a_a = 13, a_b = -8, b_a = -21, b_b = 13$
a=0,b=1
$a_a = 55, a_b = -34, b_a = -21, b_b = 13$
При $x_1 = 34$, а $y_1 = -21$ результат правильный.
Следовательно $x = 646$, а $y_1 = -399$
б)
143x+121y=52
143=11*13
121=11*11
52=4*13
Так как нод двух делящихся на 11 чисел делится на 11, то 52 должно делиться на 11, а оно не делиться на 11.
5.

Проведем аналогию нашего алгоритма с делением двоичных чисел по столбику. Наш алгорим отбрасывает последнюю цифру от x до тех пор, пока он не станет равен 0. После этого мы принимаем r и q равными за 0 и начинаем "развертывать"наш алгорим. Мы перехолим на n-1 шаг рекурсии с нулевыми q и r, а x у нас равен первой цифре числа. Теперь поймем, что каждый раз после проведения наших операций q и r будут равны значениям деления первых n-i цифр числа x на y. Докажем это по индукции.
База у нас уже есть, действительно, ведь при i=n q и r равны 0.
Переход. Если в q и r содержаться остатки при делении первых n-i цифр. То по алгоритму мы умножаем q и r на 2 и прибавляем 1, если x нечетно. Нетрудно заметить, что у нас сохраняется равенство $x_{n-i+1} = q_{n-i} * 2 * y + r_{n-i} * 2 + (x_{n-i+1} mod 2)$ Так как $x_{n-i+1} = x_{n-i} * 2 + (x_{n-i+1} mod 2)$

и $x_{n-i} = q_{n-i} * y + r_{n-i}$. Последнее следует из предположения индукции. После замены $q = q_{n-i} * 2$, $r_{n-i} * 2 + (x_{n-i+1} mod 2)$ могло оказаться так, что r>=y.(Поймем, что изначально r был строго меньше y. Следовательно 2r-1<2y). Поэтому, если r>y, то мы r=r-y, q=q+1. После этого r<y(только что доказали).Тогда индукция доказана. Следовательно алгоритм работает корректно.
Получим оценку на время работы. Наш алгорим выполняет nрекурсивных вызовов(так как в двоичной записи число x занимает n бит). В каждом выозове у нас могут выполняться операции сложения, сравнения и сдвига влево. Это занимает O(n). Поэтому всего времени $O(n^2)$
6.
Приведем нашу дробь к правильному виду. Далее за a обозначим ее числитель, а за b знаменатель. После этого проделаем следующие действия

$$h_i = \lfloor \frac{a_i}{b} \rfloor$$

$$a_{i+1} = a_i * 2 - \lfloor \frac{a_i}{b} \rfloor$$

Грубо говоря мы просто будем выполнять деление в столбик, а в нашем массиве h на i месте будет находиться число, стоящее на i-ом разряде. Так же в другом массиве мы будем хранить все a_iТеперь поймем,что наш алгоритм корректен и мы всегда сможем найти период. Сначала докажем, что всегда найдется такой момент, что $a_{i+k} = a_i$. Докажем это от противного. Допустим это не так, тогда поймем что число a может изменяться от 0 до b-1. Следовательно через b шагов у нас точно найдутся одинаковые a. (Обозначим их заa_i, a_j)Следовательно мы нйдем период, который будет совпадать с $h_i ... h_{j-1}$
Асимтотика.
Поймем, что в каждый раз наши операции деления и вычитания стоили $O(n^2)$, а сами наши операции повторялись максимум b раз. Мы знаем, что $b <= 2^{n+1}$. Следовательно асимтотика нашего алгоритма $O(n^2 * 2^n)$ 7.