Домашнее задание №7

Томинин Ярослав, 778 группа

21 октября 2018 г.

1.

Создадим грамматику по следующему алгоритму:

Нетерминальный символ будет соответствовать состоянию в нашем языке S-0,A-1,B-2,C-3,D-4.

Аксиомой будет S(соответствует 0 состоянию).

Правила вывода: Слева у нас будут Нетерминальные символы, правило вывода будет соответствовать переходу по терминальному символу, слева будет стоять символ, соответствующий состоянию, из которого мы переходим, а справа буква, по которой мы перешли и символ, соответствующий состоянию, в которое мы перешли. Так же еще будет правило, связанное с допускающими состояниями: Если состояние допустимо, то $A \to \epsilon$(A-терминал, соответствующий допустимому состоянию).

Для нашего автомата грамматика будет следующей:

$S \to A|aC$

$A \to bC|aB$

$B \to aC|\epsilon$

$C \to bD$

$D \to aS|S|\epsilon$

Корректность: Докажем, что $L(G) \subset L$. Заметим, что в нашем слове может быть не более одного нетерминала(так как мы один нетерминал переводим в α либо содержащу 1 нетерминал(правило вывода 1 типа), либо не содержащую нетерминалов(правило вывода 2 типа)). Поэтому если мы пользуемся правилом вывода 2 типа, то это слово принадлежит L(G)(потому что в нем был 1 нетерминальный символ и мы его убрали). Докажем, что нетерминальный символ вα соответствует состоянию автомата.(в которое он попал при прочтении слова, стоящего слева от терминального символа) По индукции:

База: в начале S соответствует начальному состоянию.

Переход: α содержит нетерминал, соответствующий состоянию автомата, посмотрим на правила вывода для этого терминала, по построению наша грамматика содержит правила вывода, соответствующие переходу из этого состояния и правило вывода 2 типа(если это состояние допускающее). Заметим, что правила вывода 1 типа поддерживают инвариант, так как $\alpha = wX$, а после применения вывода 1 $\beta = wzY$, где Y соответствует состоянию, в которое перейдет автомат после прочтения символа z.(по построению).

Заметим, что мы доказали, что если слово w принадлежит L, то мы сможем вывести $\alpha = wX$, где X-нетерминал, соответствующий принимающему состоянию, поэтому$w \in L(G)$. Так же для любого слова $w \in L(G)$ предыдущее правило вывода будет содержать нетерминал, соответствующий принимающему состоянию автомата. Поэтому $w \in L$. Поэтому эти яхыки совпадают.

2.

В предыдущей задаче мы ставили нетерминальные символы в соотвествие состояниям. В этой задаче попробуем сделать наоборот. S-0,A-1,B-2. **Алгоритм:** подправим нашу грамматику так, чтобы она имела вид $A \to wN$, для этого заметим, что правило вывода $A \to aa(1)$ эквивалентно $A \to aaN$ и $N \to \epsilon(2)$

Доказательство: заметим, что в нашей грамматике соблюдается инвариант:в нашем слове может быть не более одного нетерминала(доказывается так же, как и в предыдущей задаче). Наши слова имеют вид $\alpha = wA$,поэтому, когда мы используем правило (1), то мы получаем слово $x = waa$, если же мы заменим (1) на (2), то мы получим то же самое. Докажем, почему не возникнет других слов. Заметим, что нетерминал N мы можем получить только из A, причем нетерминал N мы можем заменить только на ϵ. Поэтому допустимым словом можем быть только слово вида xaa, где $\alpha = wA$, но такие слова мы могли получить и с помощью (1) правила вывода.

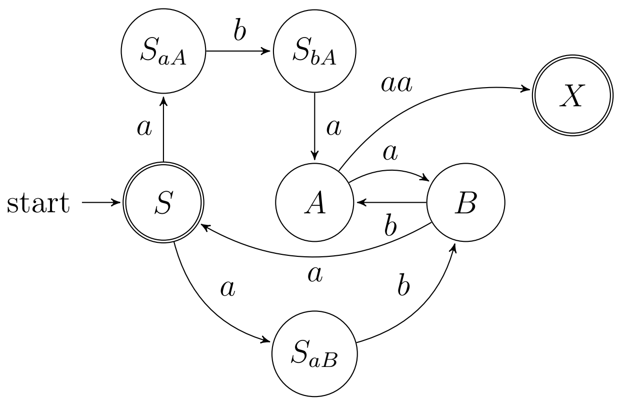
Теперь обобщим доказательство 1 задачи на правила вида

$A \to wB(1)$, где w уже является подсловом.

Лемма: в нашей грамматике правило вида $A \to wB$, где $w = w_1...w_n$ можно заменить на эквивалентные правила $A \to w_1A_1$,...,$A_{n-1} \to w_nB(2)$

Доказательство: Заметим, что все слова, получающиеся из (1) могут получитбся из второго тривиальным образом. Так же заметим, что если мы используем нетерминалы $A_1, ..., A_{n-1}$(то есть одно из правил вывода (2)), то это означает, что у нас будет слово вида $\beta = ywB$, где $\alpha = yA$: заметим, что A_i нетерминал мы могли получить только из A_{i-1} (при i>1)(так как для них существует всего лишь одно правило вывода). Следовательно, правила вывода мы сможем начать применять, если у нас бужет $\alpha = yA$, поэтому все слова, в которых используется правило из (2) имеют вид $\beta = ywB$, но эти слова мы можем получить с помощью (1). Поэтому эти правила вывода эквивалентны.

Тогда теперь мы свели нашу задачу к предыдущей. Построим ДКА, сограссно полученному алгоритму:



3.

Нет, не является. Рассмотрим слово abaaa. Для него существутет два вывода(заметим что любой вывод в нашей грамматике является одновременно и левым и правым).

1)

$\underline{S}$

$S \to aS_{aA}$

$a\underline{S_{aA}}$

$S_{aA} \to bS_{bA}$

$ab\underline{S_{bA}}$

$S_{bA} \to aA$

$aba\underline{A}$

$A \to aaX$

$abaaa\underline{X}$

$X \to \epsilon$

$abaaa$

2) $\underline{S}$

$S \to aS_{aA}$

$a\underline{S_{aA}}$

$S_{aA} \to bS_{bA}$

$ab\underline{S_{bA}}$

$S_{bA} \to aA$

$aba\underline{A}$

$A \to aX$

$abaa\underline{B}$

$B \to a$

$abaaa\underline{S}$

$S \to \epsilon$

$abaaa$

4.

Докажем по индукции, что L(G) - язык всех возможных слов нечетной длины, у которых в середине стоит b.
Сделаем это по индукции по длине слова:
База: для n=1 все хорошо, так как существует два слова a,b ж; но мы предполагаем, что b не выводимо.
Переход: допустим, что для 2n-1 предположение выполнено, тогда докажем, что и для 2n+1 выполнено. Рассмотрим произвольное слово длины 2n+1, подходящее под условие(не содержит b в середине). Тогда уберем у него буквы на n и n+2 местах(w_n, w_{n+2}). Это слово длины 2n-1 содержится в L(G). Рассмотрим вывод этого слова и поймем, что последним правилом может быть только $S \to a$. Заметим еще одну фичу: это правило может быть использованно только в конце(так как в каждом правиле количество нетерминальных символов не увеличивается, а изначально оно ьыло равно 1, если мы используем это правило, то количество нетерминалов будет равно 0), поэтому нетерминал S на последнем правиле вывода находился посередине(изначально он находился в центре, а все правила, которые не понижают количество нетерминалов оставляют его в центре). Тогда заменим нетерминал S на w_nSw_{n+2}(такое правило у нас точно есть, так как у нас всевозможные комбинации a,b). После этого заменим S на a и получим желаемое слово.
Этим мы локазали, что L-язык всех возможных слов нечетной длины, содержится в L(G). Обратное включение доказывается легче. Мы уже знаем, что терминал S всегда стоит в середине, поймем(пользуясь тем фактом, что мы можем воспользоваться правилом вывода, понижающим нетерминальные символы только в конце), что количество терминальных символов в слове четно, так как мы всегда добывляем по 2(не включая последний шаг выывода). В конце мы прибавляем 1 букву, причем S меняем на a, поэтому слово нечетной длины и в середине стоит a.
Осталось ответить на вопрос регулярный ли язык L.
Допустим, что он регулярный, тогда существует ДКА с p состояниями. Рассмотрим слово $b^{p+1}ab^{p+1}$ Тогда при прочтении b^i, b^j наш автомат окажется в одном и том де состоянии, поэтому выкинем j-i букв b. Полученное слово допускается нашим автоматом, но слово не принадлежит языку. Противоречие, поэтому язык не регулярный.
2)
Предположим, что его дополнение регулярно, тогда дополнение дополнения тоже регулярно, но это и есть наш нерегулярный язык. Противоречие.
Поэтому дополнение тоже нерегулярно.
5.
a)

$S \to aSa|bSb|a|b|\epsilon$ Докажем, что $L(G) \subset PAL$
Аналогично предыдущим задачам можем доказать(так как в нашей грамматике нет правил, которые увеличивают количество нетерминалов), что правила 3,4,5 могут использоваться только в конце вывода. Рассмотрим вывод произвольного слова кроме последнего вывода, заметим, что S находится в середине(доказывается аналогично предыдущей задаче), причем, если выкинуть S, то слово будет палиндромом(в начале вывода оно пустое-палиндром, в процессе вывода мы можем использовать только 1,2 правило, которые сохраняют палиндромность). Отлично, заметим, что в конце вывода мы можем поменять слово S,которое стоит в середине только a,b,ϵ, которые тоже не изменят его палиндромности.
Докажем, что $PAL \subset L(G)$
Рассмотрим произвольное слово и напишем его вывод, если крайние буквы b, то первый вывод $S \to bSb$, иначе $S \to aSa$. Теперь откидываем эти буквы и смотрим на следующие. Делаем так, пока не останется либо ни одной буквы(тогда $S \to \epsilon$), либо одна буква w_n(тогда $S \to w_n$).
Доказали, что наша грамматика является ответом.
b)
$S \to aSb|\epsilon|aSbb$
Докажем, что $L(G) \subset L$
Мини-лемма: для любого слова из L(G) вывод будет заканчиваться 2 правилом(это уже много раз использовали и доказывали в предыдущих задачах). Причем, S будет разделять буквы a от b(база: S, пререход: можем использовать либо 1,либо 3 вывод,которые не нарушат предположение). Так же букв b будет не меньше, чем a, и их будет больше не более, чем в два раза(так как до последнего вывода мы можем пользоваться лишь 1,3 правилами, которые увеличивают a на 1, a b либо на 2, либо на 1). Именно поэтому к концу вывода у нас будет такое слово, у которого S будет разделять a от b и, если мы выкинем S, то это слово будет принадлежать L. Но последний вывод как раз и убирает нетерминал. Поэтому мы доказали первое включение.
Докажем, что $L \subset L(G)$
Рассмотрим произвольное слово из L, в нем к букв a и 2k-i букв b, причем i не больше к. Применим 3 правило к-i раз, а потом применим 1 правило i раз. Тогда получим к букв a и 2k-i букв b.
Доказали, что наша грамматика сооответствует языку L.
в)

$$
\begin{aligned}
S &\to aN|Kb|QbaQ \\
N &\to aNb|aN|\epsilon \\
K &\to aKb|Kb|\epsilon \\
Q &\to aQ|bQ|\epsilon
\end{aligned}
$$

Докажем, что $L(G) \subset L$
Для этого достаточно показать, что в L(G) нет слова вида $a^n b^n$. Допустим обратное, тогда рассмотрим его вывод. Поймем, что baQ|Qba|bQa мы не могли использовать, так как тогда бы был переход от b к a, а у нас слово другого вида. Следовательно, мы воспользуемся либо 1, либо 2 правилом. Если используем 1, то потом мы можем применять правила из 2 строки, так как из нетерминала N не получается других нетерминалов. Заметим, что изначально количество букв a будет больше, чем b и эта разность будет точно не убывать. Аналогично со 2 правилом, тогда мы сможем использовать правила из 3 строки и разность букв b и a всегда будет больше 0.
Заметим, что мы хотели получить слова, разность букв в котором равна 0. Но полным перебором мы не смогли его получить. Следовательно, наш факт доказан.
Докажем, что $L \subset L(G)$
Рассмотрим произвольное слово из L, если в нем есть переход от b к a, то используем 3 правило. Тогда мы сможем прибавлять в начало произвольные символы(на i шаге смотрим на w_i и меняем первую Q на $w_i Q$). В конце меняем первую Q на пустое слово. То же самое со второй Q: будем добавлять поочереди буквы из суффикса. В конце получим желаемый результат.
Если в слове нет перехода от b к a. Если в нем больше a, то сделаем 1 вывод, далее воспользуемся k раз(где к- количество букв b) правилом aNb , потом добъем буквы a, которых не хватает.
Аналогично, если букв b больше. Используем 2 правило, далее используем правило aKb q раз(где q-количество букв a). Потом добавим недостающие b.
Мы доказали, что можем составить вывод для любого слова из L
Следовательно, грамматика соответствует заявленному языку.