Лабораторная работа 7 «Венгерский алгоритм»

В этой лабораторной работе требуется реализовать метод решения задачи о назначениях.

В теоретико-графовой постановке задача о назначениях заключается в том, чтобы в сбалансированном полном двудольном графе $K_{n,n}$ с целочисленными весами на ребрах найти паросочетание из n ребер, сумма весов которых минимальна.

Матричный вариант задачи о назначениях состоит в том, чтобы в целочисленной квадратной матрице порядка n выбрать n элементов таким образом, чтобы, во-первых, в каждой строке и в каждом столбце матрицы был выбран ровно один элемент и, во-вторых, сумма выбранных элементов была минимальна.

Алгоритм решения задачи о назначениях

Вход. Целочисленная квадратная матрица C порядка n

Выход. Позиции в матрице C, которые определяют решение задачи о назначениях

Шаг 1. Находим допустимый план α_i, β_i ($i \in \{1, 2, \ldots, n\}$) задачи, двойственной задаче о назначениях, по правилу

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$$

и для любого $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\beta_j = \min_{i \in \{1,2,\ldots,n\}} c_{ij}.$$

Шаг 2. Находим множества индексов $J_=$ и $J_<$ по правилу

$$\begin{aligned} J_= &= \{(i,j) \in \{1,2,\ldots,n\} \times \{1,2,\ldots,n\} : \alpha_i + \beta_j = c_{ij}\}, \\ J_< &= \{(i,j) \in \{1,2,\ldots,n\} \times \{1,2,\ldots,n\} : \alpha_i + \beta_j < c_{ij}\}. \end{aligned}$$

Шаг 3. Построим двудольный граф G с долями $V_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ и $V_2 = \{v_1, v_2 \ldots, v_n\}$. При этом в графе G есть ребро, соединяющее вершины u_i и v_j, тогда и только тогда, когда пара (i, j) принадлежит множеству $J_=$.

Шаг 4. Находим в графе G наибольшее паросочетание M с помощью алгоритма из лабораторной работы 6.

Шаг 5. Если $|M| = n$, то искомый набор позиций в матрице определяется паросочетанием M: совокупность позиций $\{(i, j) : \{u_i, v_j\} \in M\}$ задает оптимальное решение задачи о назначениях. СТОП. Алгоритм завершает свою работу.

Шаг 6. Пусть $|M| < n$. Берем направленный граф G^*, который получился в конце работы алгоритма поиска наибольшего паросочетания на шаге 4, и в нем находим вершины, достижимые из вершины s (с помощью обхода графа), пометим такие вершины звездочкой.

Шаг 7. Формируем два множества индексов I^* и J^* следующим образом: включаем в множество I^* индексы тех вершин доли V_1, которые помечены звездочкой, к множеству J^* отнесем индексы тех вершин доли V_2, которые помечены звездочкой.

Шаг 8. Находим допустимый план $\overline{\alpha}_i, \overline{\beta}_j$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ и $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, задачи, двойственной ограниченной прямой задачи, по следующему правилу:

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}_i &= 1, \ \forall\, i \in I^* \qquad & \overline{\beta}_j &= -1, \ \forall\, j \in J^* \\ \overline{\alpha}_i &= -1, \ \forall\, i \notin I^* \qquad & \overline{\beta}_j &= 1, \ \forall\, j \notin J^* \end{aligned}$$

Шаг 9. Находим

$$\theta = \min \frac{c_{ij} - \alpha_i - \beta_j}{2},$$

где минимум берется по всем парам индексов (i, j) таким, что $i \in I^*$ и $j \notin J^*$.

Шаг 10. Находим новый допустимый план α_i^*, β_i^*, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, двойственной задачи по следующему правилу:

$$\begin{aligned} \alpha_i^* &= \alpha_i + \theta\, \overline{\alpha}_i, \quad \forall\, i \in \{1, 2, \dots, n\} \\ \beta_i^* &= \beta_i + \theta\, \overline{\beta}_i, \quad \forall\, i \in \{1, 2, \dots, n\} \end{aligned}$$

Шаг 11. Новый план объявляем текущим $\alpha_i = \alpha_i^*$, $\beta_i = \beta_i^*$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ и переходим на шаг 2.

Пример. Рассмотрим матрицу

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & 9 & 4 \\ 9 & 6 & 9 & 5 & 5 \\ 3 & 8 & 3 & 1 & 8 \\ 7 & 9 & 4 & 2 & 2 \\ 8 & 4 & 7 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Находим допустимый план задачи, двойственной задаче о назначениях. Полагаем значения переменных α_i, равными нулю

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0.$$

Полагаем значение переменной β_j, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, равной минимальному элементу в j-ом столбце матрицы C

$$\beta_1 = 3, \beta_2 = 2, \beta_3 = 1, \beta_4 = 1, \beta_5 = 2.$$

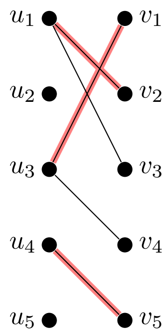
Эти значения удобно приписывать строкам и столбцам матрицы C

$$\begin{array}{cc|c} & & \begin{array}{ccccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{pmatrix} 7 & \boxed{2} & \boxed{1} & 9 & 4 \\ 9 & 6 & 9 & 5 & 5 \\ \boxed{3} & 8 & 3 & \boxed{1} & 8 \\ 7 & 9 & 4 & 2 & \boxed{2} \\ 8 & 4 & 7 & 4 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

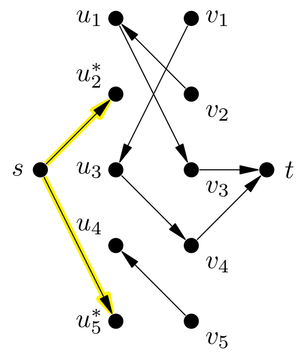
Итерация 1. Находим множество пар индексов $J_= = \{(i,j) : \alpha_i + \beta_j = c_{ij}\}$

$$J_= = \{(1,2),(1,3),(3,1),(3,4),(4,5)\}.$$

Строим двудольный граф G и находим в нем наибольшее паросочетание M. Ребра графа G, принадлежащие паросочетанию M, выделены красным цветом.



G



G^*

В графе G^* звездочками отметим вершины, достижимые из вершины s. Таких вершин всего две — это вершины u_2 и u_5. Формируем два множества индексов. Множество I^* состоит из индексов вершин u_i, отмеченных звездочками,

$$I^* = \{2,5\}.$$

Множество J^* состоит из индексов вершин v_j, отмеченных звездочками

$$J^* = \emptyset.$$

Найдем допустимый план задачи, двойственной ограниченной прямой задаче по правилу

а) если i-ая вершина левой доли помечена $*$, то $\overline{\alpha}_i = 1$;
б) если i-ая вершина левой доли не отмечена $*$, то $\overline{\alpha}_i = -1$;
в) если i-ая вершина правой доли помечена $*$, то $\overline{\beta}_i = -1$;
г) если i-ая вершина правой доли не помечена $*$, то $\overline{\beta}_i = 1$.

Получаем

$$\overline{\alpha}_1 = -1, \overline{\alpha}_2 = 1, \overline{\alpha}_3 = -1, \overline{\alpha}_4 = -1, \overline{\alpha}_5 = 1;$$
$$\overline{\beta}_1 = 1, \overline{\beta}_2 = 1, \overline{\beta}_3 = 1, \overline{\beta}_4 = 1, \overline{\beta}_5 = 1.$$

Находим значение величины θ

$$\theta = \min_{i\in I^*,\, j\notin J^*} \frac{c_{ij} - \alpha_i - \beta_j}{2} = \min\left(\frac{9-0-3}{2}, \frac{6-0-2}{2}, \frac{9-0-1}{2}, \frac{5-1-0}{2}, \right.$$
$$\left. \frac{5-2-0}{2}, \frac{8-3-0}{2}, \frac{4-2-0}{2}, \frac{7-1-0}{2}, \frac{4-1-0}{2}, \frac{8-2-0}{2}\right) = 1.$$

Найдем новый допустимый план задачи, двойственной задаче о назначениях по правилу

$$\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \alpha_i \leftarrow \alpha_i + \theta\, \overline{\alpha}_i, \quad \beta_i \leftarrow \beta_i + \theta\, \overline{\beta}_i.$$

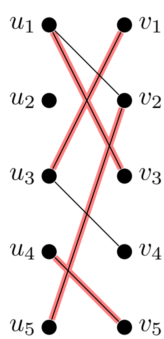
В результате получим

$$\begin{array}{cc c}
 & & \begin{array}{ccccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \\ 4 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{array} \\
\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{array} & \begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} 7 & \boxed{2} & \boxed{1} & 9 & 4 \\ 9 & 6 & 9 & 5 & 5 \\ \boxed{3} & 8 & 3 & \boxed{1} & 8 \\ 7 & 9 & 4 & 2 & \boxed{2} \\ 8 & \boxed{4} & 7 & 4 & 8 \end{pmatrix}
\end{array}$$

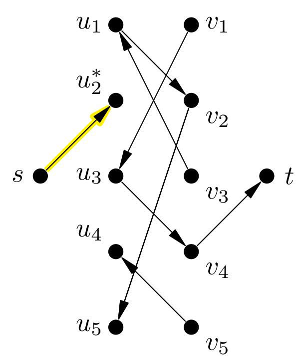
Итерация 2. Находим множество пар индексов $J_= = \{(i, j) : \alpha_i + \beta_j = c_{ij}\}$

$$J_= = \{(1, 2), (1, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 5), (5, 2)\}.$$

Строим двудольный граф G и находим в нем наибольшее паросочетание M. В соответствующем направленном графе G^* выделим вершины, достижимые из вершины s.



G



G^*

Формируем множества I^* и J^*

$$I^* = \{2\},\ J^* = \emptyset.$$

Найдем допустимый план задачи, двойственной ограниченной прямой

$$\overline{\alpha}_1 = -1, \overline{\alpha}_2 = 1, \overline{\alpha}_3 = -1, \overline{\alpha}_4 = -1, \overline{\alpha}_5 = -1;$$
$$\overline{\beta}_1 = 1, \overline{\beta}_2 = 1, \overline{\beta}_3 = 1, \overline{\beta}_4 = 1, \overline{\beta}_5 = 1.$$

Находим значение величины θ

$$\theta = \min_{i \in I^*,\, j \notin J^*} \frac{c_{ij} - \alpha_i - \beta_j}{2} = \min\left(\frac{9-1-4}{2}, \frac{6-3-1}{2}, \frac{9-2-1}{2}, \frac{5-1-2}{2}, \frac{5-3-1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Обновляем текущий допустимый план двойственной задачи

$$\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \alpha_i \leftarrow \alpha_i + \theta\, \overline{\alpha}_i, \quad \beta_i \leftarrow \beta_i + \theta\, \overline{\beta}_i.$$

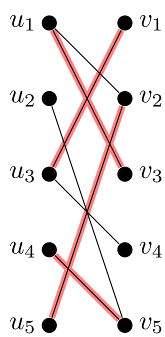
В результате получим

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \\ 9/2 & 7/2 & 5/2 & 5/2 & 7/2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \alpha_1 & \text{-}3/2 \\ \alpha_2 & 3/2 \\ \alpha_3 & \text{-}3/2 \\ \alpha_4 & \text{-}3/2 \\ \alpha_5 & 1/2 \end{array} & \begin{pmatrix} 7 & \boxed{2} & \boxed{1} & 9 & 4 \\ 9 & 6 & 9 & 5 & \boxed{5} \\ \boxed{3} & 8 & 3 & \boxed{1} & 8 \\ 7 & 9 & 4 & 2 & \boxed{2} \\ 8 & \boxed{4} & 7 & 4 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

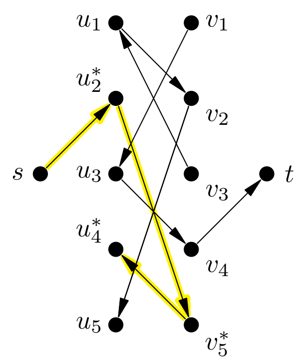
Итерация 3. Находим множество пар индексов $J_= = \{(i, j) : \alpha_i + \beta_j = c_{ij}\}$

$$J_= = \{(1, 2), (1, 3), (2, 5), (3, 1), (3, 4), (4, 5), (5, 2)\}.$$

Строим двудольный граф G и находим в нем наибольшее паросочетание M. В соответствующем направленном графе G^* выделим вершины, достижимые из вершины s.



G



G^*

Формируем множества I^* и J^*

$$I^* = \{2, 4\}, \; J^* = \{5\}.$$

Найдем допустимый план задачи, двойственной ограниченной прямой

$$\overline{\alpha}_1 = -1, \overline{\alpha}_2 = 1, \overline{\alpha}_3 = -1, \overline{\alpha}_4 = 1, \overline{\alpha}_5 = -1;$$
$$\overline{\beta}_1 = 1, \overline{\beta}_2 = 1, \overline{\beta}_3 = 1, \overline{\beta}_4 = 1, \overline{\beta}_5 = -1.$$

Находим значение величины θ

$$\theta = \min_{i \in I^*,\, j \notin J^*} \frac{c_{ij} - \alpha_i - \beta_j}{2} = \min\left(\frac{9 - 3/2 - 9/2}{2}, \frac{6 - 3/2 - 7/2}{2}, \frac{9 - 5/2 - 3/2}{2}, \right.$$
$$\left. \frac{5 - 5/2 - 3/2}{2}, \frac{7 + 3/2 - 9/2}{2}, \frac{9 + 3/2 - 7/2}{2}, \frac{4 + 3/2 - 5/2}{2}, \frac{2 + 3/2 - 5/2}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Обновляем текущий допустимый план двойственной задачи

$$\forall\, i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \alpha_i \leftarrow \alpha_i + \theta\, \overline{\alpha}_i, \quad \beta_i \leftarrow \beta_i + \theta\, \overline{\beta}_i.$$

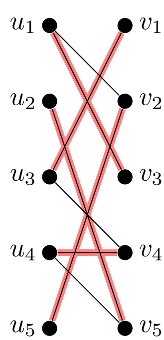
В результате получим

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & 3 \end{array} \\
\begin{array}{cc} \alpha_1 & \text{-2} \\ \alpha_2 & 2 \\ \alpha_3 & \text{-2} \\ \alpha_4 & \text{-1} \\ \alpha_5 & 0 \end{array} &
\begin{pmatrix}
7 & \boxed{2} & \boxed{1} & 9 & 4 \\
9 & \boxed{6} & 9 & \boxed{5} & \boxed{5} \\
\boxed{3} & 8 & 3 & \boxed{1} & 8 \\
7 & 9 & 4 & \boxed{2} & \boxed{2} \\
8 & \boxed{4} & 7 & 4 & 8
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Итерация 4. Находим множество пар индексов $J_= = \{(i, j) : \alpha_i + \beta_j = c_{ij}\}$

$$J_= = \{(1,2), (1,3), (2,5), (3,1), (3,4), (4,4), (4,5), (5,2)\}.$$

Строим двудольный граф G и находим в нем наибольшее паросочетание M



G

Паросочетание M состоит из максимально возможного числа ребер, т.е. $|M| = 5$. По этому паросочетанию восстанавливаем оптимальное решение задачи о назначениях

$$C = \begin{pmatrix}
7 & 2 & \boxed{1} & 9 & 4 \\
9 & 6 & 9 & 5 & \boxed{5} \\
\boxed{3} & 8 & 3 & 1 & 8 \\
7 & 9 & 4 & \boxed{2} & 2 \\
8 & \boxed{4} & 7 & 4 & 8
\end{pmatrix}.$$